洛伦兹凯莱形式

Kirill Krasnov

数学科学学院，诺丁汉大学，NG7 2RD，英国

2023年4月

arXiv:2304.01118v1 [math.DG] 3 Apr 2023

摘要

8维流形 M 上的凯莱四形式 Φ 是一种具有特殊代数类型的实微分形式，它确定 M 上的黎曼度量以及一个单位实韦尔自旋量。它在 M上定义了一个Spin(7)结构，当且仅当 Φ 闭合时，这个Spin(7)结构才是可积的。我们引入复凯莱形式的概念。这是一族由一个参数决定的、定义在 M 上的特殊代数类型的复4-形式 Φ_τ 。每个 Φ_τ都确定 M上的一个实黎曼度量，以及一个复单位韦尔旋量 ψ_τ。稳定 Φ_τ和 $\tau \neq 0$ 的GL(8, $\mathbb{R}$)子群是SU(4)，而 Φ_τ在 M上定义了一个SU(4)结构。我们证明，当且仅当 Φ_τ 闭合时，这个SU(4)结构才是可积的。

我们对分裂号差情形进行类似的构造。现在有两族复凯莱形式，每族都由一个参数刻画。一类复凯莱形式定义了一个 SU(2, 2) 结构，另一类形式则在 M 上定义了一个 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构。与黎曼情形一样，当且仅当相应的复凯莱形式是闭的，这些结构才是可积的。我们的核心发现是，第二个单参数复凯莱形式族中存在一个特殊成员，我们称之为洛伦兹凯莱形式。这个 4-形式具有这样的性质：它由洛伦兹四维子空间 $H, H^\perp$ 校准。特别地，在适配于这种校准的基下，洛伦兹凯莱形式由 $H, H^\perp$ 上的复自对偶二形式构成。我们将说明，这些发现如何解开四维洛伦兹几何领域中一个长期存在的谜题。

1 引言

8维流形 M 上的一个实数 4-形式 $\Phi \in \Lambda^4 M$ 若存在与之相容的黎曼度量 $g_\Phi \in S^2 T^* M$，则称其为凯莱形式；精确定义见第 2 节。度量 g_Φ 由 Φ 唯一确定。给定度量 g_Φ，可得相应的克利福德代数 $\Gamma: TM \to \mathrm{End}(S)$，其中 $S = S^+ \oplus S^-$ 是旋量空间，克利福德矩阵满足通常的定义关系 $\Gamma(\xi)\Gamma(\xi) = g_\Phi(\xi, \xi)\mathbb{I}, \xi \in TM$。此外，给定 Φ 和 g_Φ，存在一个特殊的实单位韦伊旋量 $\psi_\Phi \in S^+$，使得

$$\langle \psi_\Phi, \Gamma(\xi_1)\Gamma(\xi_2)\Gamma(\xi_3)\Gamma(\xi_4)\psi_\Phi \rangle = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4). \tag{1}$$

这里 $\xi_{1,\ 2,\ 3,\ 4} \in TM$ 以及 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 是 S^+ 上的 Spin(8) 不变内积，S^-。换句话说，凯莱形式 Φ 同时确定度量 g_Φ 以及一个单位实韦尔旋量 ψ_Φ，使得凯莱形式本身可以表示为该旋量的适当平方（1）。

这一陈述可以通过维数计算得到验证。凯莱形式是 $\Lambda^4 M$上的一种特殊代数类型的 4-形式，其在 GL(8, $\mathbb{R}$) 中的稳定子群是 Spin(7)。注意，Spin(7) 也是 Spin(8) 中一个实单位韦尔旋量的稳定子群。因此，凯莱形式的空间为

$$\Lambda^4(\mathbb{R}^8) \supset \{\text{Cayley forms}\} = \mathrm{GL}(8,\mathbb{R})/\mathrm{Spin}(7). \tag{2}$$

这是维数为 $64 - 21 = 43$ 的空间。这也等于 $\mathbb{R}^8$ 上度量空间的维数 36 加上实单位旋量空间的维数 7，因此我们可以写成

$$\{\text{Cayley forms}\} = \{\text{metrics on } \mathbb{R}^8\} \oplus \{\text{unit Weyl spinors}\}. \tag{3}$$

显式写出 g_Φ 的公式很有用。当 Φ 是 Cayley代数型的 4-形式时，我们有

$$\frac{1}{6}\xi_1 \lrcorner \xi_2 \lrcorner \Phi \wedge \eta_1 \lrcorner \eta_2 \lrcorner \Phi \wedge \Phi = (g_\Phi(\xi_1,\eta_1)g_\Phi(\xi_2,\eta_2) - g_\Phi(\xi_1,\eta_2)g_\Phi(\xi_2,\eta_1))v_\Phi. \tag{4}$$

其中 $\xi_{1,\ 2}$，$\eta_{1,\ 2} \in TM$ 和 v_Φ 是由 Φ 确定的度量 g_Φ 的体积形式。这是度量 g_Φ 由 Φ 表征的一种方式。

凯莱形式 Φ 可以用一种体现校准的方式来表示。我们提醒一下，若一个 4 维子空间 $H \subset TM$ 满足：对于任意标准正交基 $\xi_{1,\ 2,\ 3,\ 4} \in H$（相对于 g_Φ），都有 $\Phi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \pm 1$，则称其为凯莱子空间，或称其由 Φ 校准。凯莱子空间的正交补$H^\perp$ 也是凯莱子空间，并且 Φ 可以用一种体现其稳定子群 Spin(7) 中 SU(2) $\times$ SU(2) $\times$ SU(2) 子群的方式来表示。为此，在 H，$H^\perp$ 中的自对偶二形式空间里引入一个标准正交基 $\Sigma^i, \Sigma'^i, i = 1, 2, 3$。于是凯莱形式具有形式 (66)。

对这一几何构造的另一种理解是：在 M 上的凯莱形式 Φ（连同一个单位向量的选取）将每一点处的切空间 T_pM 与八元数空间 $\mathbb{O}$ 等同起来（因此，所选向量对应于八元数单位元）。事实上，正如我们将在第 2 节回顾的那样，凯莱形式赋予 T_pM 一种称为三重叉积的结构。一旦将切空间 T_pM 与 $\mathbb{O}$ 等同起来，这种三重叉积便由八元数乘积导出，见下文。从八元数的角度来看，校准就是选取一个四元数副本 $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$。

上述讨论假设由 Φ 确定的度量 g_Φ 是黎曼度量。然而，具有可容许相容度量的代数类型的实 4-形式，通过（4）既可以导出黎曼度量，也可以导出分裂符号度量。在后一种情形下，Φ 是一种特殊代数类型的实 4-形式，其 GL(8, $\mathbb{R}$) 稳定子群为 Spin(4, 3)；而 Φ 则确定一个分裂号差度量 g_Φ，以及 Spin(4, 4) 的实单位韦伊旋量 ψ_Φ，使得（1）仍然成立。分裂型凯莱形式是一种将 T_pM 与分裂八元数空间等同起来的实 4-形式。

本文的第一个新发现是，我们可以将凯莱型4-形式的概念扩展到 $\Lambda^4 T^*M$上的复值4-形式。如果存在与之相容的实度量（相容的意义见公式（4）），我们就称复4-形式 $\Phi_\tau \in \Lambda^4_{\mathbb{C}} T^*M$ 为复凯莱形式，或称为凯莱型复形式。通过取符号全为正或为分裂型的实度量，构造相应的克利福德代数，再用复单位旋量 ψ应用公式（1），便可轻松构造此类复4-形式的例子。由此得到的复值4-形式仍可通过公式（4）导出实度量。

有趣的是，放弃 ψ_Φ 在 (1) 中的实性要求后，便可以在任意符号的八维空间中构造复凯莱形式。然而，最值得研究的情形仍然是黎曼和分裂型，此时实旋量存在，并且复凯莱形式

可以与其对应的实形式进行比较。在黎曼签名的情形下， S^+中复单位旋量 ψ_τ的轨道只有一个 ˆ: $\langle\psi_\tau,\ \psi_\tau\rangle = 1$对于 $\langle\psi_\tau、\ \psi_\tau\rangle$的每个取值: $=\cosh(2\tau)$, ˆ其中 $\psi_\tau \in S^+$ 中的帽子表示 Spin(8) 不变的复共轭。复单位旋量 $\psi_\tau、\ \tau \neq 0$的 Spin(8) 稳定子群是 SU(4)。这同样是由 ψ_τ产生的复凯莱形式 Φ_τ 的 $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$ 稳定子群。因此，产生黎曼签名度规 g_{Φ_τ} 的复凯莱形式赋予 M 一个 SU(4)结构，而不是实凯莱形式在 M 上产生的 Spin(7)结构。写出该复凯莱形式的显式公式很有启发性。它为

$$\Phi_\tau = \langle\psi_\tau, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_\tau\rangle = \cosh(2\tau)\mathrm{Re}(\Omega) - \frac{1}{2}\omega\wedge\omega + \mathrm{i}\,\sinh(2\tau)\mathrm{Im}(\Omega). \tag{5}$$

这里，Ω 是复结构 J 对应的 (4, 0)形式，而该复结构由 SU(4)结构 Φ_τ 定义； ω 则是 (1, 1) 凯勒形式。选择 SU(4)结构后，应将此式与通常的实凯莱形式的表达式 (58) 进行比较。(5) 和 (58) 显然都是 SU(4)不变的。当 $\tau = 0$ 时，复凯莱形式变为实数，并转化为通常的实凯莱形式 $\Phi_0 = \Phi$。因此， Φ_τ 在 $\tau = 0$ 处的不变性从 SU(4)提升到了 Spin(7)。

对于复凯莱形式，也可以进行类似于 (2) 的维数计数。

$$\Lambda^4_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^8) \supset \{\text{complex Cayley forms}\} = \mathrm{GL}(8,\mathbb{R})/\mathrm{SU}(4). \tag{6}$$

这是一个维数为 $64 - 15 = 49$ 的空间。它也等于 $\mathbb{R}^8$ 上度量空间的维数 36 加上范数平方固定的复单位魏尔旋量空间的维数 13，因此我们可以写成

$$\{\text{复凯莱形式}\} = \{\text{复 } \mathbb{R}^8\} \oplus \{\text{上的度量: } \langle\psi,\psi\rangle = 1, \langle\psi, \hat{}\psi\rangle = \cosh(2\tau)\}.$$

（5）型的复凯莱形式很有趣，因为它们可以用单个对象 Φ_τ来编码八维上的 SU(4)结构。提醒读者， M 上的 SU(4)结构是将主 $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$标架丛约化为一个 SU(4)子丛。复凯莱形式闭合时 $d\Phi_\tau = 0$，便可得到这样的约化；而 M 上的每个卡拉比－丘结构都通过（5）定义一个闭复凯莱形式。下面的命题 5 正是对此的陈述。

与实凯莱形式类似，也可以采用适合校准的方式来写复凯莱形式。为说明这一点，我们需要稍微推广校准的概念，并称 $H \subset TM$ 由 Φ_τ 校准，若对于任意关于 Φ_τ定义的实度量而言标准正交的基$\xi_{1,2,3,4} \in H$， 量 $\Phi_\tau(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \pm\cosh(2\tau)$。于是可以采用适合其某个校准的方式来写复凯莱形式 Φ_τ。由于 Φ_τ 的稳定子群较小，因此不再可能写出仅涉及 $H, H^\perp$的自对偶二形式的表达式。所得表达式见（74），其中涉及 $H, H^\perp$各自的一组标准正交 1-形式。 Φ_τ 的这种写法展现了其稳定子群中的 SO(4) 子群。这是一个同时作用于$H, H^\perp$上的对角旋转群。

本文第二个也是最主要的新发现是，在 M 上也存在与分裂符号度量相容的复凯莱形式；而且在分裂情形中，情况更加丰富，并呈现出黎曼情形中没有对应现象的特征。分裂号差情形的讨论起初与黎曼情形类似。我们将与 M 上的实分裂号差度量相容的复凯莱形式 $\Phi_\tau \in \Lambda^4_{\mathbb{C}}TM$ 定义为这类形式。它们同样由以下空间上的复单位旋量 $\psi \in S^+$ 构造而成

Spin(4, 4)，通过公式 (1) 构造。新情况在于，现在存在几种不同类型的复单位旋量，其稳定子群各不相同。特别是，有两个由 ˆ 轨道构成的一参数族，由 $\langle\psi、\ \psi\rangle$ 的取值区分。与黎曼情形类似，存在一个 ˆ 族 Φ_τ，其中 $\langle\psi、\ \psi\rangle = \cosh(2\tau)$。一般 4-形式 Φ_τ 的稳定子群为 SU(2, 2)，因此 Φ_τ 定义了 M 上的实分裂号差度量，以及一个正交复结构和最高次全纯形式 Ω。该 4-形式族 Φ_0 中的特殊成员与实分裂凯莱形式重合，其稳定子群为 Spin(4, 3)。

另一族由一参数产生的复凯莱形式 $\Phi_\theta, \theta \in [0, \pi/2]$ 没有黎曼对应物。它定义了一个实分裂号差度量，以及一个复单位ˆ韦尔旋量 ψ_θ，其中有 $\langle\psi_\theta, \psi_\theta\rangle = \cos(2\theta)$。这一族 4-形式中的一般成员，其稳定子群为 $\mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$。这意味着 Φ_θ 赋予 M 一个拟复结构（定义见下文），其实零四维子空间正是稳定子群 $\mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ 作用的子空间。4-形式 Φ_θ 可以用拟复结构所定义的数据来表示。令 $\Omega_\pm$ 为由拟复结构的¯特征方向的乘法给出的实可分解4-形式（这是复结构情形下 Ω、Ω 的实数对应物），并令 ω_r 为凯勒形式的对应物。于是有

$$\Phi_\theta = \cos(2\theta)\frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-) + \mathrm{i}\,\sin(2\theta)\frac{1}{2}(\Omega_+ - \Omega_-) + \frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r. \tag{7}$$

对于 $\theta = 0, \pi/2$，4-形式 Φ_θ 仍然是实数，并且与稳定子群为 Spin(4, 3) 的实分裂凯莱形式一致。

我们的主要观察是，在这第二族复凯莱形式中还存在另一个特殊成员。它对应于 $\theta = \pi/4$。相应的复单位旋量 ˆ 与其复共轭 $\langle\psi_{\pi/4}, \psi_{\pi/4}\rangle = 0$ 正交。我们将把复凯莱形式$\Phi_L := \Phi_{\pi/4}$ 称为洛伦兹凯莱形式。洛伦兹凯莱形式的显式表达式为

$$\Phi_L = \frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_+ - \frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_- + \frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r. \tag{8}$$

洛伦兹凯莱形式 (8) 有一种适用于其所定义校准的表达式，而正是这一表达式引发了我们对这个对象的兴趣。

在讨论 Φ_L 的校准之前，我们想先提醒读者实分裂凯莱形式的相关情况。这是一个通过 (1) 由 Spin(4, 4) 的实单位旋量构造而成的实 4-形式。实分裂凯莱形式的稳定子群是 Spin(4, 3)，它也是实单位旋量的稳定子群。这种形式定义了两种不同类型的校准。因此，它具有校准 H，在度量 g_Φ 限制到 H 上时，该校准是黎曼的。在适应该校准的基下，分裂凯莱形式具有形式 (100)。但它也具有校准 H，其度量具有分裂号差。在适应该校准的基下，凯莱形式写作 (102)。分裂情形下这两种不同类型的校准，可以理解为对应于分裂八元数空间 $\mathbb{O}'$ 中的一个 $\mathbb{H}$ 副本，或对应于分裂四元数 $\mathbb{H}' \subset \mathbb{O}'$ 的一个副本。

洛伦兹凯莱形式的情形与此颇为类似。对于实分裂凯莱形式而言， Φ_L 所具有的校准有两种不同类型。现在可以根据 Φ_L 在 H 上的限制是纯实的还是纯虚的来区分它们。因此，如果对于 $H \subset TM$ 的任意标准正交基$\xi_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$，都有 H我们称 $H \subset TM$ 被 Φ_L 洛伦兹校准，即 $\Phi_L(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \pm\mathrm{i}$。同样地，如果对于 $H \subset TM$ 的任意标准正交基$\xi_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$，都有 H 我们称 $H \subset TM$ 被 Φ_L 分裂校准，即

$\Phi_L(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \pm 1$。随后，可以将洛伦兹凯莱形式写成适用于其某一种校准的形式。对我们而言，最有趣的表达式是适用于其某一种洛伦兹校准的表达式。我们有

$$\Phi_L = -\frac{1}{6}\Sigma_L^i\Sigma_L^i - \frac{1}{6}\Sigma_L'^{\,i}\Sigma_L'^{\,i} - \Sigma_L^i\Sigma_L'^{\,i}, \tag{9}$$

其中 $\Sigma^1,\ {}_{2\,3}$，以及 $\Sigma_L'^{\,1},\ {}_{2,}\ {}^{3}$ 是 H、$H^\perp$对应的洛伦兹（因此也是复）自对偶二形式。特别是，这个公式清楚地表明，洛伦兹凯莱形式由带有洛伦兹号差度量的空间副本校准；并且，在适配于这种校准的基中，它由 H、$H^\perp$对应的复自对偶二形式构成。这一观察为本文标题提供了依据。虽然 Φ_L 的稳定子群是 Spin(3, 3) $=$ SL(4, $\mathbb{R}$)，但在复4-形式 Φ_L的表示方式 (9) 中，显而易见的只有其中的洛伦兹 Spin(3, 1) 子群。这是一个对角洛伦兹群，它同时通过伪正交变换作用于 H、$H^\perp$。

通过 GL(8, $\mathbb{R}$) 作用于4-形式 Φ_L，会在代数类型为 Φ_L 的复四形式空间中产生一个轨道。任意具有此代数类型的4-形式都定义一个符号为 ˆ (4, 4) 的实度量，以及一个 Spin(4, 4) 的复单位半旋量 ψ_L，它具有性质 $\langle\psi_L,\psi_L\rangle = 0$。这可以通过维数计数来确认。事实上，我们有

$$\{\text{Lorentzian Cayley forms}\} = \mathrm{GL}(8,\mathbb{R})/\mathrm{Spin}(3,3). \tag{10}$$

该空间的维数为 $64-15=49$。这等于度量空间的维数 36，加上与其复共轭正交的单位复旋量空间的维数 $16-2-1=13$。因此，我们可以写成

$$\left\{\begin{matrix}\text{Lorentzian}\\ \text{Cayley forms}\end{matrix}\right\} = \{\text{metrics on } \mathbb{R}^{4,4}\} \oplus \{\text{complex unit spinors } \psi_L : \langle\psi_L,\hat{\psi}_L\rangle = 0\}. \tag{11}$$

Φ_L 的定义以及洛伦兹凯莱形式的表达式 (9)，解答了四维几何领域中一个长期存在的疑问。众所周知，四维流形上的共形度量可以通过霍奇算子在二形式上的作用来编码，也就是说，可以通过确定哪些二形式是自对偶的来编码。这适用于该维数下三种不同的可能度规签名，并且可以通过所谓的乌尔班特克公式 [1]，以非常具体的方式描述。设 $B^i, i = 1, 2, 3 \in \Lambda^2(M)$ 是一组三个二形式，它们在以下意义下非退化：其楔积构成的对称 3×3 矩阵 $B^i \wedge B^j, i, j = 1, 2, 3$ 非奇异。这组三元组由此定义了度量

$$g_B(\xi,\eta)v_B = \frac{1}{6}\epsilon^{ijk}\xi\lrcorner B^i \wedge \eta\lrcorner B^j \wedge B^k. \tag{12}$$

这里 ϵ^{ijk} 是完全反对称三阶张量。该表达式的右边是一个最高次形式，是两个向量场 ξ、$\eta \in TM$ 的对称配对。它必须等于对称配对 $g_B(\xi,\eta)$ 乘以 g_B 的体积形式 v_B。因此，公式（12）定义了一个度量 g_B，尤其是在 M 上定义了一个共形度量。于是，二形式 B^i 在共形度量 g_B 下是自对偶的（或反自对偶的，具体取决于所选的定向）。

公式（12）是数学文献中一个众所周知命题的变体。例如，当我们另外要求 $B^i \wedge B^j \sim \delta^{ij}$ 以及 $dB^i = 0$ 时，就得到 Donaldson 的超凯勒三元组，见 [2]。

对于不同的度规签名，公式（12）的作用略有不同。当二形式 B^i是 M上的实二形式时，通过（12）只能得到欧氏度规签名和分裂符号。对此并不令人意外，因为二形式 B^i 会被认定为度规 g_B的自对偶二形式，而自对偶二形式只有在欧氏度规签名和分裂符号下才是实的。这两种度规签名由二形式楔积所构成的矩阵 $B^i \wedge B^j$ 的性质区分开来。这是一个对称 3×3 矩阵，可以通过 GL(3) 变换将其对角化。特征值的相对符号只有两种可能：要么它们的符号全部相同，从而得到的矩阵是正定的；要么该矩阵是不定的。在前一种情况下，通过（12）得到的度规是欧氏度规。不定情形则通过（12）给出分裂号差度量。

洛伦兹情形更为微妙。必须从复值二形式 B^i $\in\Lambda^2(M,\mathbb{C})$入手。在洛伦兹签名下，反自对偶二形式是自对偶二形式的复共轭。由于反自对偶二形式与自对偶二形式楔积正交，而我们通过规定二形式 B^i 是 g_B的自对偶二形式来得到度量 g_B ，因此必须施加以下条件

$$B^i \wedge \overline{B^j} = 0. \tag{13}$$

这就是九个“实条件”。可以证明，这些条件保证由复二形式 B^i 通过（12）得到的共形度量是实的洛伦兹度量。洛伦兹版本的（12）还要求在右侧额外乘上一个虚数单位。关于不同度规签名下这一问题的更多细节，请读者参阅例如 [3], ，见第 5.4 节。

虽然公式（12）看似是四维几何中的一个奇特现象，但它通过一种降维变体，与八维中凯莱形式的几何密切相关，至少在黎曼型和分裂符号版本中如此。事实上，从一个黎曼型的实凯莱形式 Φ 出发，也就是说，它与一个黎曼签名度量相容，并选取一个校准子空间 $H\subset TM$，我们可以选取一组自对偶双向量基 $\sigma^{1,\ 2,\ 3}\in\Lambda^+H$。将这些代入 Φ ，并将所得二形式限制到 $H^\perp$上，便得到一组三个二形式 $B^i:=\sigma^i\lrcorner\Phi|_{H^\perp}$ ，定义在 $H^\perp$上。由这些二形式 B^i 通过（12）定义在 $H^\perp$ 上的共形度量，与 g_Φ在 $H^\perp$ 上诱导的共形度量相同。由此，（12）可理解为公式（4）的降维形式。

这也可以用八元数来表述。黎曼型凯莱形式 Φ 将每一点处的切空间识别为一份八元数 $\mathbb{O}$。选取一份四元数 $\mathbb{H}\subset\mathbb{O}$ ，便得到降至四维的降维过程，这正是公式（12）的欧几里得版本的基础。类似地，实分裂凯莱4-形式 Φ 将 $\mathbb{R}^8$识别为分裂八元数空间 $\mathbb{O}'$。选取一份 $\mathbb{H}'\subset\mathbb{O}'$ ，便为降维建立了框架，从而得到公式（12）的分裂号差版本。显然，只要使用实凯莱形式，就无法将洛伦兹版本的乌尔班特克公式解释为类似的降维过程。

然而，洛伦兹版本的乌尔班特克公式确实存在，因此自然会问，是否存在一种凯莱形式，能够通过降维导出洛伦兹乌尔班特克公式。洛伦兹凯莱形式（9）恰恰就是这样的对象，而本文的主要目标是阐明与这种形式相关的几何。

本文的组织结构如下。我们首先在第 2 节回顾凯莱形式这一概念背后的线性代数。我们讨论三重叉积，以及与一个 4-形式相容的度量这一概念。选取一个单位向量可导出叉积和赋范代数。我们还回顾每个凯莱形式如何由某个单位韦尔旋量的平方给出。第 3 节将更详细地讨论黎曼凯莱形式。我们

介绍克利福德代数 Cl(8) 的八元数模型，由此可以对对应于同一度量的凯莱形式进行显式计算。我们还在此回顾纯旋量的概念，并说明如何通过将一个单位旋量表示为两个复共轭纯旋量之和，从实凯莱形式的角度得到复的观点。随后，我们引入复凯莱形式的概念，并给出在适配于某个校准的基下此类形式的显式表达式。我们证明，由复凯莱形式定义的 SU(4)结构可积，当且仅当该形式闭合。接着，我们在第 4 节构造分裂符号情形下的类似结构。我们在此讨论实分裂凯莱形式，并说明其相关几何。特别地，对于实分裂凯莱形式，现在有两种不同的可能观点：复观点和拟复观点。第 5 节是本文的核心部分。我们在此讨论两类可能的复分裂凯莱形式，并定义洛伦兹凯莱形式这一概念，它是复分裂凯莱形式其中一个族的特殊成员。我们说明，从 $4+4$ 分裂的角度看，洛伦兹凯莱形式由复洛伦兹自对偶二形式构成。我们还证明，由洛伦兹凯莱形式定义的 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构可积，当且仅当该形式闭合。本文最后一节为附录，将显式计算对应于同一度量的洛伦兹凯莱形式空间的切空间。

2 Cayley 形式、叉积与赋范代数

我们首先给出一系列定义，以提醒读者凯莱形式的概念及其与八元数的联系。在本节中，我们只考虑正定度量的情形。所有定义均来自 [4]。

设 W 是一个带有内积 $W\times W\to\mathbb{R}$的有限维实向量空间，我们用圆括号（u,v）表示该内积。因此，（u,u）：$=|u|^2$ 是范数平方。

定义 1. 若交错多重线性映射 $W^3\to W$（u,v,w）$\to u\times v\times w$满足（$u\times v\times w,u$）$=$（$u\times v\times w,v$）$=$（$u\times v\times w,w$）$=0$ 以及

$$|u\times v\times w|^2=|u\wedge v\wedge w|^2:=\det\begin{pmatrix}|u|^2 & (u,v) & (u,w)\\ (v,u) & |v|^2 & (v,w)\\ (w,u) & (w,v) & |w|^2\end{pmatrix}. \tag{14}$$

三重叉积仅存在于维数为 1、2、4、8 的情形。在维数 1 和 2 中它为零，而在维数 4 中，对于给定的定向它是唯一的。现在假设维数为 8。在这一维数下，便出现了凯莱形式的概念。

定义 2. 若对于 W 中任意三个线性无关的向量 u、v、w，都存在一个向量 $x\in W$，使得 $\Phi(u,v,w,x)\neq 0$，则称 4-形式 $\Phi\in\Lambda^4W^*$ 是非退化的。若映射 $W^3\to W(u,v,w)$ $\to u\times v\times w$ 定义如下，则称 W 中的内积与 4-形式 Φ 兼容：

$$(x,u\times v\times w):=\Phi(x,u,v,w) \tag{15}$$

是一个三重叉积。若 4-形式 $\Phi\in\Lambda^4W^*$ 存在相容内积，则称其为凯莱形式。

文献 [4] 中的定理 7.8 给出了凯莱形式的内在刻画。若 Φ 是一个凯莱形式，则其相容内积由 Φ唯一确定。特别地， W 存在唯一的定向及其相应的体积形式，使得我们有

$$|u \wedge v|^2 \,\mathrm{vol} := (|u|^2|v|^2 - (u,v)^2)\mathrm{vol} = \frac{1}{6} u \lrcorner v \lrcorner \Phi \wedge u \lrcorner v \lrcorner \Phi \wedge \Phi. \tag{16}$$

由凯莱形式定义的内积 Φ可以按照 [4],中的引理 7.13 所述步骤明确提取，参见该参考文献中的公式 (7.20)。

选择一个单位向量 $e \in W$，可确定一个反对称映射 $V_e \times V_e \to V_e$，其中$V_e := e^{\perp}$。此映射是一个叉积 $u \times_e v := u \times e \times v$。下面讨论叉积的概念。

设 V 是一个带有内积 $V \times V \to \mathbb{R}$ 的有限维实向量空间，我们用圆括号 (u, v) 表示该内积。则 $(u, u) := |u|^2$ 是范数平方。

定义 3. 若反对称双线性映射 $V \times V \to V$： $u, v \to u \times v$ 满足 (i) $(u \times v, u) = (u \times v, v) = 0$ 以及 (ii) $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u, v)^2$，则称其为叉积。

叉积只存在于维数 0、1、3、7 中，参见 [4]的定理 2.5。在维数 0 和 1 中，叉积为零；在维数 3 中，对于 V的给定定向，叉积是唯一的。维数 7 中的情形则有趣得多。 V 上的叉积赋予其一个交替三形式 $\phi \in \Lambda^3 V^*$（称为结合校准），其定义为

$$\phi(u, v, w) := (u \times v, w). \tag{17}$$

也可以从一个 3-形式 $\phi \in \Lambda^3 V^*$ 出发，并探究 ϕ 是否确定一个内积。

定义 4. 设 V 为一个实向量空间。若对于每一对线性无关的向量 u、$v \in V$，都存在一个向量 $w \in V$，使得 $\phi(u, v, w) \neq 0$，则称 3-形式 $\phi \in \Lambda V^*$ 为非退化的。若由 (17) 定义的映射 $\times : V \times V \to V$是一个叉积，则称 V上的内积与 ϕ 相容。

因此，七维情形尤其有趣，因为在这一维数下，泛型非退化的 ϕ具有相容内积，而且还能唯一确定其相容内积。这正是 [4] 中的定理 3.2 的内容：该定理指出， ϕ 非退化，当且仅当它存在相容内积；此外，若该内积存在，则由 ϕ唯一确定。具体而言，给定一个非退化的 $\phi \in \Lambda^3 V^*$，存在 V的一个定向及其相应的体积形式 $\mathrm{vol} \in \Lambda^7 V^*$，使得

$$(u, v)\mathrm{vol} = \frac{1}{6} u \lrcorner \phi \wedge v \lrcorner \phi \wedge \phi. \tag{18}$$

一个非退化的 ϕ同时确定了 V 中的内积和定向 vol。不过请注意，对于非退化的实三形式 $\phi \in \Lambda^3 V^*$，由 (18) 得出的内积既可能是正定的，也可能具有 (4, 3) 的符号。可以由 ϕ 构造一个七次不变量，当且仅当 ϕ 非退化时，该不变量非零；其符号决定了通过 (18) 得到的内积的符号。 [5]中讨论了这一不变量。

给定一个叉积，可以考虑表达式 $(u \times v) \times w$。可以看出，对于任意三个两两正交向量 u、v、$w \in V$，该表达式是交错的。它唯一延拓为一个交错映射 $V^3 \to V$，称为结合子括号，其定义为

$$[u, v, w] := \frac{1}{3}((u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v). \tag{19}$$

这产生了一个 4-形式 $\psi \in \Lambda^4 V^*$，称为余结合校准，其定义为

$$\psi(u,v,w,x) := ([u,v,w],x). \tag{20}$$

可以证明，$\psi = {}^*\phi$，其中 * 是霍奇算子 $^*\colon\ \Lambda^k V^* \to \Lambda^{7-k}V^*$，它由内积确定，而定向如 [4] 中的引理 4.8 所述。

现在来讨论叉积、三重叉积与赋范代数之间的关系。首先，叉积决定一个赋范代数，而每个赋范代数都决定一个叉积。

定义 5. 赋范代数 W 是一个有限维实向量空间，配备内积和双线性映射 $W \times W \to W$（称为乘法），以及单位元 $1 \in W$。这些数据满足 $1u = u1 = u$ 和 $|uv| = |u||v|$。

我们在 W 上定义了共轭的概念：$\bar{1} = 1$ 和 $\bar{u} = -u$，$u \in 1^\perp$。W 中任何与单位元正交的元素都称为纯虚的，而共轭会改变纯虚元素的符号。赋范代数与配备叉积的向量空间之间的关系如下，参见 [4] 中的定理 5.4。反过来，如果 W 是赋范代数，那么 $V = 1^\perp \subset W$ 就配备了如下定义的叉积：

$$u \times v = uv + (u,v), \qquad u,v \in 1^\perp. \tag{21}$$

反过来，若 V 是一个配备了内积和叉积的有限维向量空间，则 $W = \mathbb{R} \oplus V$ 是一个赋范代数，其乘法为

$$uv = u_0v_0 - (u_1,v_1) + u_0v_1 + v_0u_1 + u_1 \times v_1, \tag{22}$$

其中我们记 $u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1, u_0, v_0 \in \mathbb{R}, u_1, v_1 \in V$。由维数 0、1、3、7 上的叉积分别得到的赋范代数，与 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 同构。

现在我们来说明，凯莱形式与一个单位向量 $e \in W$ 的选取如何将 W 识别为 $\mathbb{O}$ 的一个副本。这就是 [4] 的定理 6.15 的内容。

定理 6。假设 $\dim(W) = 8$，令 Φ 为一个凯莱形式及其关联的三重叉积，并令 $e \in W$ 为一个单位向量。

- 定义映射 $\psi_e\colon\ W^4 \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}\psi_e(u,v,w,x) := (e \times u \times v, e \times w \times x) - ((u,w) - (u,e)(e,w))((v,x) - (v,e)(e,x)) \\ +((u,x) - (u,e)(e,x))((v,w) - (v,e)(e,w)).\end{aligned} \tag{23}$$

  那么这个映射是交错的 $\psi_e \in \Lambda^4 W^*$ 且

$$\Phi = e^* \wedge \phi_e + \epsilon\psi_e, \qquad \phi_e = e \lrcorner \Phi \in \Lambda^3 W^*, \tag{24}$$

  并且 $\epsilon = \pm 1$ 是一个符号，其含义在 [4] 的引理 6.10 中作了解释。

- 子空间 $V_e := e^\perp$ 具有一个叉积

$$V_e \times V_e \to V_e : u \times_e v := u \times e \times v. \tag{25}$$

  ϕ_e 在 V_e 上的限制是结合校准，而 ψ_e 在 V_e 上的限制是余结合校准。

- 空间 W 是一个以 e 为单位元的赋范代数，其乘法和共轭定义如下：

$$uv := u \times e \times v + (u,e)v + (v,e)u - (u,v)e, \qquad \bar{u} = 2(u,e)e - u. \tag{26}$$

我们需要的最后一个陈述是 [4]中的定理 10.3。该定理表明，给定一个凯莱形式 $\Phi \in \Lambda^4 W^*$，可以将 Spin(8) 的旋量与微分形式空间中的某些子空间对应起来。凯莱形式本身由某个特定典范旋量通过构造 (1) 得到。更确切地说，我们有

$$S^+ = \Lambda^0 \oplus \Lambda^2_7, \qquad S^- = \Lambda^1, \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda^2_7 := \{\omega \in \Lambda^2 W^* : *(\Phi \wedge \omega) = 3\omega\} = \\ \{u^* \wedge v^* - u \lrcorner v \lrcorner \Phi : u, v \in W\}. \end{aligned} \tag{28}$$

克利福德代数由此给出：

$$\Gamma(u) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(u)^* \\ \gamma(u) & 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 $\gamma(u)$：$S^+ \to S^-$，其显式表达式为

$$\begin{aligned} \gamma(u)(\lambda, w) = \lambda u^* + 2u \lrcorner \omega, \qquad \lambda \in \Lambda^0, \omega \in \Lambda^2_7, \\ \gamma(u)^*(\theta) = (u \lrcorner \theta, u^* \wedge \theta\Big|_{\Lambda^2_7}). \end{aligned} \tag{30}$$

于是 $\gamma(u)^*\gamma(u) = |u|^2\mathbb{I}$，并且我们有克利福德代数 $\Gamma(u)\Gamma(u) = |u|^2\mathbb{I}$。请注意，我们的克利福德代数约定与 [4]中的不同。 [4] 中的定理 10.3 随即给出与特殊旋量$\psi = (1,0) \in S^+$相对应的三重叉积的显式表达式。与之对应的凯莱形式由旋量 $\psi = (1, 0)$ 代入 (1) 得到。这表明，每个凯莱形式都定义了一个度量，进而定义了相应的克利福德代数以及一个旋量；对于该旋量，这个凯莱形式具有形式 (1)。

3 Spin(8) 的旋量与黎曼凯莱形式

为了对凯莱形式进行显式计算，拥有一个明确的 Clifford代数 Cl(8) 模型会非常方便。在上一节中，我们解释了如何在选定 Φ 后得到这样一个模型。随后，可由 Φ 所定义的某个特定典范旋量，通过公式 (1) 构造出凯莱形式。然而，在实际计算中，更方便的做法是固定度量及其对应的克利福德代数，并为其选定一个模型，只让旋量 ψ 变化。本文余下部分的所有计算均采用这种方式。

鉴于凯莱形式 Φ 将 TM 与 $\mathbb{O}$ 的一个副本对应起来，便得到 Cl(8) 的八元数模型。该模型最适合用于显式计算。本节旨在介绍 Cl(8) 的八元数模型，并据此推导黎曼凯莱形式 Φ 的一些性质（以及显式表达式）。

3.1 八元数

八元数空间 $\mathbb{O}$ 是一个赋范代数，具有性质 $|xy| = |x||y|$（即合成代数）。通常的八元数（不同于分裂八元数）还具有这样的性质：每个非零元素的范数都不为零，因此它们构成一个除代数。它既非交换也非结合，但具有交错性；这可以表述为：任意两个元素生成的子代数都是结合的。

一般的八元数是一个对象

$$q = q_0\mathbb{I} + \sum_{a=1}^{7} q_a \mathbf{e}^a, \tag{31}$$

其中 $\mathbf{e}^a$ 是单位虚八元数。单位八元数彼此反交换，且平方等于负单位元。八元数共轭会改变所有虚八元数的符号。八元数配对为

$$(q, q) = |q|^2 = q\overline{q} = (q_0)^2 + \sum_{a=1}^{7} (q_a)^2. \tag{32}$$

我们用虚八元数空间中的叉积来表示八元数乘法。因此，我们写作

$$\mathbb{O} = \mathbb{R} + \mathrm{Im}\,\mathbb{O}. \tag{33}$$

设 $\mathbf{e}^{1,\ldots,7}$ 是虚八元数空间的一组基。$\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ 中的叉积由 $\mathbb{R}^7$ 上的结合子三形式表示，我们选取该形式为

$$\phi = e^{567} + e^5(e^{41} - e^{23}) + e^6(e^{42} - e^{31}) + e^7(e^{43} - e^{12}). \tag{34}$$

这里 $e^a, a = 1, \ldots, 7$ 是 $\mathbb{R}^7$ 上 1-形式的一组基，记号为 $e^{abc\cdots} = e^a \wedge e^b \wedge e^c \ldots$。这表示叉积的方式是

$$(\mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^b, \mathbf{e}^c) = (e^c)^* \lrcorner (e^b)^* \lrcorner (e^a)^* \lrcorner \phi, \tag{35}$$

其中 $(e^a)^*$ 是向量的对偶基。例如，$\mathbf{e}^5 \times \mathbf{e}^6 = \mathbf{e}^7$。为了后续讨论，我们还将指出，对偶4-形式为

$${}^*\phi = e^{1234} + e^{67}(e^{41} - e^{23}) + e^{75}(e^{42} - e^{31}) + e^{56}(e^{43} - e^{12}). \tag{36}$$

3.2 Cl(8) 的八元数模型

克利福德代数 Cl(8) 可以由算子生成，例如由单位八元数的左乘算子生成。具体而言，我们可以将克利福德生成元的一般线性组合表示如下

$$q_0\Gamma_0 + \sum_{a=1}^{7} q_a\Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & L_{\bar{q}} \\ L_q & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

因此，Cl(8) 由 2×2 八元数项矩阵生成，这些矩阵作用于项取自 $\mathbb{O}$的二分量列向量

$$\psi=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{O}. \tag{38}$$

马约拉纳-外尔旋量随后被视为八元数的副本 $S^{\pm}=\mathbb{O}$。我们将 S^{+} 中的马约拉纳-外尔旋量取为上方元素非零的旋量，即$\alpha\neq 0,\beta=0$。 S^{+} 上的 Spin(8) 不变内积就是两个八元数的配对（32）。

为了进行具体计算，显式写出 Γ-矩阵会很方便。为此，我们将八元数排成 8 分量列，并以 q_0 作为首项。在这种表示下， Γ-矩阵（37）成为以下 16×16 矩阵

$$\Gamma_0=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{I}\\ \mathbb{I} & 0\end{pmatrix},\quad \Gamma_a=\begin{pmatrix}0 & -E_a\\ E_a & 0\end{pmatrix}\ \text{for } a\in\{1,\dots,7\}, \tag{39}$$

其中

$$\begin{aligned}
E_1&=-E_{01}+E_{27}-E_{36}+E_{45},\\
E_2&=-E_{02}-E_{17}+E_{35}+E_{46},\\
E_3&=-E_{03}+E_{16}-E_{25}+E_{47},\\
E_4&=-E_{04}-E_{15}-E_{26}-E_{37},\\
E_5&=-E_{05}+E_{14}+E_{23}-E_{67},\\
E_6&=-E_{06}-E_{13}+E_{24}+E_{57},\\
E_7&=-E_{07}+E_{12}+E_{34}-E_{56},
\end{aligned} \tag{40}$$

而 E_{ij} 是 $\mathfrak{so}(8)$ 的通常生成元，即反对称矩阵，其中 $+1$ 位于第 i行和第 j列。

3.3 凯莱形式

现在取一个马约拉纳-外尔旋量 ψ，其形式为 $\alpha=\mathbb{I},\beta=0$。这是一个单位旋量 $\langle\mathbb{I},\mathbb{I}\rangle=1$。在该旋量之间插入两个不同的 Γ-矩阵时结果为零 $\langle\mathbb{I},\Gamma\Gamma\mathbb{I}\rangle=0$。插入四个不同的 Γ-矩阵则给出 $\mathbb{R}^8$上的以下 4-形式

$$\Phi:=\langle\mathbb{I},\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\mathbb{I}\rangle=e^0\wedge\phi-{}^*\phi, \tag{41}$$

其中， ϕ 由（34）给出，而 ${}^*\phi$ 是其对偶4-形式，由（36）给出。上述方程的含义是，它列出了在旋量 $\alpha=\mathbb{I}$的两个副本之间插入四个不同的 Γ-矩阵时的非零取值。因此，例如，$(\mathbb{I},E_1E_2E_3E_4\mathbb{I})=-1$。

3.4 任意单位旋量的凯莱形式

为便于后续使用，我们给出如下方式得到的凯莱形式公式：

$$\Phi_\psi:=\langle\psi,\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi\rangle, \tag{42}$$

其中 ψ 是单位旋量 $\langle\psi,\ \psi\rangle = 1$ 参数化为

$$\psi = (\sqrt{1-|\alpha|^2}, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^7. \tag{43}$$

我们有

$$\Phi_\psi = e^0 \wedge C_\psi - {}^*C_\psi, \tag{44}$$

其中

$$C_\psi := (1-2|\alpha|^2)C + 2\alpha \wedge \alpha^* \lrcorner C - 2\sqrt{1-|\alpha|^2}\alpha^* \lrcorner {}^*C, \tag{45}$$

$${}^*C_\psi = {}^*C - 2\alpha \wedge \alpha^* \lrcorner {}^*C + 2\sqrt{1-|\alpha|^2}\alpha \wedge C, \tag{46}$$

其中，α 在这些公式中被视为 $\mathbb{R}^7$ 中的1-形式，而 α^* 是相对于 $\mathbb{R}^7$上的标准度量计算得到的对偶向量场。

公式（44）明确描述了诱导出相同度量的Cayley代数型4-形式。还可以注意到，在 Φ处，此类4-形式空间的切空间由以下类型的4-形式给出：

$$\delta\Phi = e^0 \wedge Y^* \lrcorner \Phi - Y \wedge (e^0)^* \lrcorner \Phi, \tag{47}$$

其中 $Y \in \mathbb{R}^7$。

3.5 纯旋量

现在我们回顾纯旋量的基本事实。设 V 是一个维数为 $\dim(V) = 2n$的实向量空间，配备一个不一定正定的度量。给定一个旋量 ψ，我们定义$M(\psi) := V^0_\psi$，它是 V的复化 $V_{\mathbb{C}}$ 中通过 Clifford 乘积消去 ψ的子空间。若空间 $M(\psi)$的维数达到最大可能值，即 n，则称旋量 ψ 为纯旋量。我们将 $M(\psi)$称为与纯旋量 ψ相对应的极大全零（MTN）子空间。自 Cartan [6] 以来，人们已知纯旋量是 Weyl 旋量。Cartan 还给出了纯旋量一个非常有用的代数刻画，下面我们将对此加以说明。

给定一个（Weyl）旋量 ψ （或一对 Weyl 旋量 ψ、ϕ），可以在两个 ψ 之间插入若干个 Γ-矩阵（或者更一般地，在 ψ 和 ϕ之间插入）。我们引入以下简便记法

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2n}) \ni B_k(\psi,\phi) := \langle\psi, \underbrace{\Gamma \ldots \Gamma}_{k \text{ times}} \phi\rangle. \tag{48}$$

假设插入的是互不相同的 Γ矩阵，因此得到 $\mathbb{R}^{2n}$中次数为 k的微分形式（通常为复数）的各分量。

下述命题出自 Cartan [6]和 Chevalley [7]

命题 1. 韦尔旋量 ϕ 是纯旋量（或用 Cartan的术语来说，是简单旋量），当且仅当$B_k(\phi,\phi) = 0$对 $k \neq n$成立。此时，n-向量 $B_n(\phi,\phi)$与构成 $M(\phi)$之基的向量的楔积成正比，其中 $M(\phi)$是与 ϕ对应的极大全零子空间。

我们注意到，该定理提供了一种实用的方法来恢复 $M(\phi)$：它是插入 $B_n(\phi,\phi)$ 后结果为零的所有向量的集合。因此，该定理建立了纯旋量 ϕ （忽略缩放）与 MTN 子空间 $M(\phi)$ 之间的一一对应关系。该定理还给出了每个纯旋量都必须满足的一组二次约束。

对于一般的符号，Spin(k,l) 有几种不同类型的纯旋量，参见 [8]。本节中我们只需讨论 Spin(8) 的情形。在这种情形下，纯旋量只有一种类型，并且可以证明，对于固定长度 $\langle \hat{}\psi, \psi\rangle$，Spin($2n$) 在 $S^{\pm}$ 中的纯旋量轨道上具有传递性，其中 $\hat{}\ \psi$ 是 ψ 的适当复共轭。群作用在纯旋量轨道上传递性的证明，参见例如 [10] 。

我们还需要关于纯旋量的 MTN 子空间可能相交方式的论述。设 ϕ, ψ 是 Cl($2n$) 中奇偶性相同的两个纯旋量，其对应的 MTN 子空间为 $M(\phi)$ $M(\psi)$。以下列出一组论述，其中大多数归功于 Cartan [6]

命题 2. 奇偶性相同的两个纯旋量的 MTN 子空间 $\phi, \psi \in S_+$ 可以沿着 $n-2m, m \in \mathbb{N}$ 个零方向相交。沿着 $n-2m$ 个方向相交，当且仅当 $B_k(\phi,\psi) = 0$ 对于 $k < n-2m$ 且 $B_{n-2m}(\phi,\psi)$ 非零时才会发生。此时交集是可分解的，其因子是 $M(\phi)$ $M(\psi)$ 中的公共零方向。两个 MTN $M(\phi)$ $M(\psi)$ 不相交，当且仅当 $B_0(\phi,\psi) \neq 0$。

证明见例如 [11],命题 9。我们还有以下由 Chevalley 得出的事实

命题 3. 两个纯旋量 ϕ, ψ 的 MTN 子空间若沿着 $n-2$个方向相交，则它们的和 $\phi+\psi$ 是一个纯旋量。

这一结论源于四维中的所有韦尔旋量都是纯旋量。其证明也可见于 [11]。

3.6 Spin($2n$) 的纯旋量与复结构

Spin($2n$) 的纯旋量（射影意义下，即相差复数缩放）与 $\mathbb{R}^{2n}$ 上符合给定定向的正交复结构之间存在双射关系。我们仅简要回顾这一关系；更多信息可参见例如 [12] 或 [13] 第四章第 9 节。

沿一个方向，如我们所见，纯旋量 $\psi \in S_+$ 伴有其 MTN 子空间$\hat{}M(\psi)$。存在一个 Spin($2n$) 不变的复共轭运算 $\psi \to \psi$，它是反线性的，且其平方为正或负恒等算子，具体取决于 n。根据 n，复共轭算子要么保持 S_+不变，要么将其映射到 $S_+ \to S_-$；显式描述例如见 [14] 。湮灭子子空间 $M(\psi)$ 是 $M(\psi)$ 的复共轭，而 $M(\psi)$ $M(\hat{}\psi)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}_{\mathbb{C}}$中互为互补，且二者张成整个空间。通过规定 $M(\psi)$ 是 J对应特征值 +i 的特征子空间，可以在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义一个正交复结构（OCS）；然后 $M(\psi)$ 是对应特征值 –i 的特征子空间。这就定义了一个正交复结构 J，进而赋予 $\mathbb{R}^{2n}$ 一个定向。

为建立反方向的关系，我们从 $\mathbb{R}^{2n}$上的正交复结构 J 开始。它定义了特征子空间 $E^{\pm}$

$$JE^{\pm} = \pm \mathrm{i}\, E^{\pm} \tag{49}$$

J 中彼此正交、互为复共轭且维数为 n 的全零子空间。随后，可用作用于 $\Lambda(E^+)$上的产生湮灭算子来表示 Cl($2n$)，例如 [14] 中回顾了这一做法。接着， $\Lambda(E^+)$ 的最高次和零次元素是纯旋量，分别对应于 J。根据维数的不同，它们可能都属于 S_+，也可能一个属于 S_+ 、另一个属于 S_-。要获得对应于其他正交复结构（OSC）的纯旋量，可利用 Spin($2n$) 的作用。该作用在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上与给定定向相容的正交复结构（OCS）空间以及

给定奇偶性的纯旋量空间上都是传递的。这表明，给定的 OSC 可以与其对应的纯旋量联系起来。

我们注意到，对于给定的 OCS J，总有两个不同的纯旋量（相差一个复数倍）与之对应。其中一个纯旋量的 MTN 为 E^+，另一个的 MTN 为 E^-。

3.7 Spin(8) 的纯旋量与非纯旋量

Cl(8) 的八元数模型将 Spin(8) 的韦尔旋量与复化八元数对应起来。唯一存在的旋量双线性式 $B_k(\psi,\psi)$ 是 B_0, B_4。嘉当纯性判据指出，对于纯旋量 $B_0(\phi,\phi) = 0$，且这是纯旋量必须满足的唯一条件。因此，Spin(8) 的纯旋量就是复化零八元数。根据上述关于与给定定向相容的 OCS 与给定奇偶性的射影纯旋量之间的关系，我们看到，在 $\mathbb{R}^8$ 上与给定定向相容的正交复结构构成的空间 Z_8^+ =SO(8)/U(4) 可以实现为零二次曲面 $Q^6 \subset \mathbb{P}^7$；关于这一解释的更多内容，见 [12] 。

由此便容易理解在这个维数下可能存在的其他类型的旋量。事实上，任意非零复化八元数都可以写成两个零复化八元数之和。为此，先将该复化八元数乘以一个复数进行缩放，使其范数为 1，会比较方便。完成这一步后，我们有 $\alpha_1 + \mathrm{i}\,\alpha_2$ with$|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 = 1$ and $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$。接着可以定义

$$|\alpha_1| = \cosh\tau, \qquad |\alpha_2| = \sinh\tau, \tag{50}$$

因此

$$\alpha_1 + \mathrm{i}\,\alpha_2 = \cosh\tau\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} + \mathrm{i}\,\sinh\tau\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{1}{2}e^{\tau}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} + \mathrm{i}\,\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\right) + \frac{1}{2}e^{-\tau}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} - \mathrm{i}\,\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\right). \tag{51}$$

这意味着，Cl(8) 的任意单位非纯旋量都可以表示为两个复共轭纯旋量的线性组合。实八元数 α_1 的情形也同样如此。在这种情况下，只需选取一个与 α_1 正交且范数相同的（任意）八元数 α_2 。于是

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \mathrm{i}\,\alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \mathrm{i}\,\alpha_2) \tag{52}$$

是两个零复化八元数之和。

鉴于在八维中表示任意旋量至多需要两个纯旋量，我们可以理解非纯旋量的几何。八维中一个纯旋量的极大全零子空间是四维的。若取两个奇偶性相同的纯旋量 ϕ, ψ ，它们的极大全零子空间可分别相交于四维、二维或零维。当它们相交于四维时，ϕ 与 ψ成比例。当它们相交于二维时，它们的和仍是纯旋量。当它们相交于零维时，它们的和是非纯旋量。因此，八维中的任意非纯旋量都是两个极大全零子空间互不相交的纯旋量之和。用复化八元数表示时，非纯旋量可表示为两个互为复共轭的零八元数的线性组合。

复非纯旋量的情形与实情形所产生的几何有所不同。在复情形中， $\phi = \alpha_1 + \mathrm{i}\,\alpha_2$ 的稳定子群必须同时稳定α_1, α_2。因此，稳定构成 ϕ的两个复共轭纯旋量的稳定子群同构于 Spin(6) = SU(4)。当旋量为实数 $\phi = \alpha_1$时，稳定子群同构于 Spin(7)，它稳定八元数 α_1。

3.8 凯莱形式的复基

$\mathbb{R}^8$ 上的凯莱形式是一种具有特殊代数类型的 4-形式，它赋予 $\mathbb{R}^8$ 一个度量和一个单位实韦尔自旋量。正如前一小节所述，我们总能将一个实单位旋量写成一个纯旋量与其复共轭之和。当然，这样的写法并不唯一，其中涉及的选择等同于在 $\mathbb{R}^8$上选择一个复结构。

因此，令我们在 $\mathbb{R}^8$ 上选取一个正交复结构。相应地，有一对复共轭纯旋量 ψ_p、 ψ_p，它们的和

$$\psi = \psi_p + \hat{\psi}_p \tag{53}$$

是一个实旋量。我们对 ψ 进行缩放使其成为单位元，这等价于对 $\langle\psi_p$、 $\psi\rangle = 1/2$ 进行缩放。随后可计算 ψ 的凯莱形式:

$$\langle\psi, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi\rangle = \langle\psi_p, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_p\rangle + \langle\hat{\psi}_p, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\hat{\psi}_p\rangle + 2\langle\hat{\psi}_p, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_p\rangle. \tag{54}$$

这里的第一项是可分解的，等于 ψ_p 的零方向的乘积。换言之，它是复结构 J 对应的 (4, 0) 全纯顶形式 Ω 的一个倍数

$$\langle\psi_p, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_p\rangle = \frac{1}{2}\Omega. \tag{55}$$

因此，(54) 中的前两项可以写成 Re(Ω)。为理解最后一项，我们注意到

$$\langle\hat{\psi}_p, \Gamma\Gamma\psi_p\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2}\omega, \tag{56}$$

其中 ω 是 J 对应的 (1, 1)凯勒形式。因此，(54) 中的最后一项是 $\omega \wedge \omega$ 的一个倍数

$$\langle\hat{\psi}_p, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_p\rangle = -\frac{1}{4}\omega \wedge \omega. \tag{57}$$

总体而言，我们得到

$$\langle\psi, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi\rangle = \mathrm{Re}(\Omega) - \frac{1}{2}\omega \wedge \omega. \tag{58}$$

为使其具体化，我们取旋量 ψ 为八元数单位元 $\psi = \mathbb{I}$，并令纯旋量为

$$\psi_p = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathrm{i}\,\mathbf{e}^4). \tag{59}$$

若将 ψ_p 解释为正宇称自旋量 $\psi_p \in S_+$，并将 $\mathbb{R}^8$ 视为八元数，则相应的复结构 J 是 $J = R_{\mathbf{e}^4}$，即右乘 $\mathbf{e}^4$ 的算子。相应的 $+\mathrm{i}$ 特征子空间为

$$E^+ = \mathrm{Span}(e^4 + \mathrm{i}\,e^0, e^1 + \mathrm{i}\,e^5, e^2 + \mathrm{i}\,e^6, e^3 + \mathrm{i}\,e^7). \tag{60}$$

Then

$$\begin{aligned} \Omega &= (e^4 + \mathrm{i}\,e^0)(e^1 + \mathrm{i}\,e^5)(e^2 + \mathrm{i}\,e^6)(e^3 + \mathrm{i}\,e^7), \\ \omega &= e^{15} + e^{26} + e^{37} + e^{40}, \end{aligned} \tag{61}$$

and

$$\Phi = \mathrm{Re}(\Omega) - \frac{1}{2}\omega \wedge \omega = e^0 \wedge C - {}^*C, \tag{62}$$

其中 C、${}^*C$ 分别由 (34) 和 (36) 给出。

因此，每个凯莱形式都具有 $\langle \psi, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi \rangle$ 的形式，并且可以通过（非唯一地）选取一个复结构，将其写成复基下的式 (58)；该复结构所对应的纯旋量以 ψ 为其实部。Φ 的稳定子群就是旋量 ψ 的稳定子群，即 Spin(7)。实部为 ψ 的纯旋量 ψ_p 的稳定子群是 SU(4) 的一个副本 $=$ Spin(6)。因此，复形式 (58) 只显明了其稳定子群 Spin(7) 中的 SU(4) 子群。

3.9 校准

凯莱形式 Φ 的表达式 (62) 展示了其稳定子群 Spin(7) 中的 SU(4) 子群。同一个 4-形式还可以用另一种方式写出，从而展示一个 SU(2) $\times$ SU(2) $\times$ SU(2) 子群。这也引出了这样一个概念：由 Φ 校准的 $\mathbb{R}^8$ 的 4 维子流形。

我们首先在 $e^{1、2、3、4}$ 方向的自对偶二形式空间中引入一个基。因此，我们定义

$$\Sigma^1 = e^{41} - e^{23}, \quad \Sigma^2 = e^{42} - e^{31}, \quad \Sigma^3 = e^{43} - e^{12}. \tag{63}$$

然后，我们为 $e^{0、5、6、7}$ 方向定义一个类似的基

$$\Sigma'^1 = e^{05} - e^{67}, \quad \Sigma'^1 = e^{06} - e^{75}, \quad \Sigma'^1 = e^{07} - e^{56}. \tag{64}$$

我们注意到 这些四维子空间各自的体积形式可以写成 as

$$e^{4123} = -\frac{1}{6}\Sigma^i\Sigma^i, \qquad e^{0567} = -\frac{1}{6}\Sigma'^i\Sigma'^i. \tag{65}$$

于是，不难验证，凯莱形式（41）（也等于（62））可以写成

$$\Phi = -\frac{1}{6}\Sigma^i\Sigma^i - \frac{1}{6}\Sigma'^i\Sigma'^i + \Sigma^i\Sigma'^i. \tag{66}$$

该形式的 SU(2) $\times$ SU(2) $\times$ SU(2) 不变性是显然的。事实上，可以分别在子空间 $e^{1、2、3、4}$ 和 $e^{0、5、6、7}$中进行 SO(4) 旋转。四维正交群分裂为 SO(4) $=$ SU(2) $\times$ SU(2)/$\mathbb{Z}_2$。其中一个因子作用于自对偶二形式上，表现为 SO(3) 变换；另一个因子则使其保持不变。因此，在（66）中，使自对偶二形式 Σ^i, Σ'^i 保持不变的子群 SU(2)、SU′(2) 是显然的。另一个 SU(2) 是 SU(2) $\times$ SU(2) 子群中的对角 SU(2)，其中每个因子都作用于自对偶二形式。只有对角 SU(2) 作为（66）最后一项的不变性得以保留。

$\mathbb{R}^8$ 中的凯莱四形式提供了一个校准的例子，见 [9] 和 [10]。$\mathbb{R}^8$ 中的一个四维子空间 X 称为校准子空间，若 Φ 在每一点限制到 X 上时，都与 X 的体积形式重合。因此，校准子空间 X 的局部模型是 $\mathbb{R}^8$中的$_{,5,6,7}$子空间 e^0。

最后，我们陈述命题，说明 $\mathbb{R}^8$ 中的凯莱四维平面的格拉斯曼流形是一个齐性群空间。

命题4。群Spin(7)在凯莱四维平面的格拉斯曼流形 $G(\Phi)$上具有传递作用，该流形由 $\mathbb{R}^8$中的凯莱四维平面构成。各向同性群为 K $=$SU(2) $\times$SU(2) $\times$SU(2)/$\mathbb{Z}_2$。因此， $G(\Phi)$ $=$Spin(7)/K。

这是 [9]中的定理1.38。

3.10 复凯莱形式

在理解了实黎曼凯莱形式（由实单位旋量 ψ产生为 $\langle\psi、\ \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi\rangle$ ）之后，我们可以描述其复推广。其构造方式相同，但现在使用的是复单位旋量。显然，由这种复凯莱形式定义的度量仍将是实数。事实上，从实凯莱形式 $\Phi=\langle\psi、\ \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi\rangle$ 获得度量 g_Φ 的代数过程中，唯一用到的事实就是旋量 ψ的单位性。因此，即使 ψ 是复单位旋量，由 Φ 定义的度量仍然是实数。对于由（5）给出的复凯莱形式，可以通过显式计算验证这一点。

我们已经在（51）中看到，任意复单位旋量都可以写成两个复共轭纯旋量的线性组合

$$\psi_\tau := e^{\tau}\psi_p + e^{-\tau}\hat{\psi}_p, \tag{67}$$

其中

$$\psi_p := \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} + \mathrm{i}\,\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\right), \tag{68}$$

ˆ且 ψ_p 是复化八元数的复共轭，它同样为零。当 $\tau=0$ 时，我们得到在（53）中讨论过的实单位旋量。

现在计算复凯莱形式并不困难

$$\Phi_\tau := \langle\psi_\tau, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_\tau\rangle. \tag{69}$$

它由引言中引用的表达式（5）给出。与 $\Phi=\Phi_0$ 不同，复凯莱形式仅在 SU(4) 下保持不变，而 SU(4) 是 ψ_τ 的稳定子群。表达式（5）清楚地展示了完整的稳定子群。

3.11 适配于校准的基中的复凯莱形式

复凯莱形式的适当校准概念如下。我们称$H\subset\mathbb{R}^8$由 Φ_τ校准，若对于任意标准正交基$\xi_{1,\ 2,\ 3,\ 4}\in H$，都有 $\Phi_\tau(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\ =\pm\cosh(2\tau)$。

选定一个校准后，我们可以将 Φ_τ 改写为适配于该校准的基中的形式。我们对由(61)给出的标准形式(5)中的Ω ω 进行此操作。为此，最方便的做法是先将Ω ω 改写为适配于校准的基中的形式。因此，我们将 $\mathbb{R}^8$中的标准正交向量基排列为使其张成空间为 e^I、 e'^I、 $I=1$、2、3、4，其中

$$e'^1=e^5,\quad e'^2=e^6,\quad e'^3=e^7,\quad e'^4=e^0. \tag{70}$$

我们选择定向为 $\epsilon^{4123}=+1$。于是可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\Omega) &= \frac{1}{24}\epsilon_{IJKL}e^Ie^Je^Ke^L + \frac{1}{24}\epsilon_{IJKL}e'^Ie'^Je'^Ke'^L - \frac{1}{4}\epsilon_{IJKL}e^Ie^Je'^Ke'^L,\\ \mathrm{Im}(\Omega) &= \frac{1}{6}\epsilon_{IJKL}e'^Ie^Je^Ke^L - \frac{1}{6}\epsilon_{IJKL}e^Ie'^Je'^Ke'^L,\\ \frac{1}{2}\omega\wedge\omega &= -\frac{1}{4}e^Ie^Je'^Ke'^L\delta_{IK}\delta_{JL}.\end{aligned} \tag{71}$$

这种书写 4-形式的方式清楚地展现了稳定子群 SU(4) ⊂ Spin(8) 中的对角 SO(4) ⊂ Spin(8) 子群。

用这个基表示，实凯莱形式为

$$\Phi = \mathrm{Re}(\Omega) - \frac{1}{2}\omega\wedge\omega = \frac{1}{24}\epsilon_{IJKL}e^Ie^Je^Ke^L + \frac{1}{24}\epsilon_{IJKL}e'^Ie'^Je'^Ke'^L \\ +\frac{1}{4}(\delta_{I[K}\delta_{L]J} - \epsilon_{IJKL})e^Ie^Je'^Ke'^L. \tag{72}$$

这可以用自对偶二形式表示

$$\Sigma^{IJ} := \frac{1}{2}(\delta_{I[K}\delta_{L]J} - \epsilon_{IJKL})e^Ke^L, \\ \Sigma'^{IJ} := \frac{1}{2}(\delta_{I[K}\delta_{L]J} - \epsilon_{IJKL})e'^Ke'^L, \tag{73}$$

其形式为（66）。

另一方面，利用公式（71），我们得到 Φ_τ 的表达式

$$\mathrm{Re}(\Phi_\tau) = \frac{\cosh(2\tau)}{24}\epsilon_{IJKL}e^Ie^Je^Ke^L + \frac{\cosh(2\tau)}{24}\epsilon_{IJKL}e'^Ie'^Je'^Ke'^L \\ +\frac{1}{4}(\delta_{I[K}\delta_{L]J} - \cosh(2\tau)\epsilon_{IJKL})e^Ie^Je'^Ke'^L, \\ \mathrm{Im}(\Phi_\tau) = \mathrm{i}\,\frac{\sinh(2\tau)}{6}\epsilon_{IJKL}e'^Ie^Je^Ke^L - \mathrm{i}\,\frac{\sinh(2\tau)}{6}\epsilon_{IJKL}e^Ie'^Je'^Ke'^L. \tag{74}$$

对于 H、$H^\perp$，它不再能用自对偶二形式（73）表示。这种写法只体现了 Φ_τ 的实部和虚部所具有的稳定子群 SU(4) 中的 SO(4) 子群。

3.12 复凯莱形式与可积 SU(4)结构 s

引入的复凯莱形式是一个有趣的几何对象，因为它将黎曼度量、与之相容的复结构 J 以及最高次全纯形式 Ω 的数据（g、J、Ω）编码在单个几何对象 Φ_τ 中。因此，对于任意 $\tau \neq 0$，复凯莱形式 Φ_τ 可称为 SU(4)结构。当且仅当 $d\Phi_\tau = 0$ 时，这个 SU(4)结构是可积的，这一点很容易看出。

事实上，在一个方向上，当 SU(4)结构可积时，我们有 $\nabla\omega = 0, \nabla\Omega = 0$，其中 ∇ 是协变导数。这意味着 $d\omega = 0, d\Omega = 0$，因此也有 $d\Phi_\tau = 0$。反过来，当 $d\Phi_\tau = 0$ 时，该方程的纯虚部分给出 $d\mathrm{Im}(\Omega) = 0$。然而，由于 $\Omega \in \Lambda^{4,\,0}$，我们有 $d\Omega \in \Lambda^{4,\,1} \oplus \Lambda^{3,\,2}$，这里使用的是 [15]第3章中的记号。这意味着将 $\mathrm{Im}(\Omega) = 0$ 投影到其不可约分量上，可得 $d\Omega = 0$。容易看出，这意味着由 Ω 定义的复结构可积。事实上，这意味着对于任意 $\theta \in \Lambda^{1,\,0}$，我们都有 $d\theta|_{(0,2)} = 0$，这等价于 Nijenhuis 张量消失。

SU(4)结构的内禀挠率（关于 SU(3)结构的类似讨论，参见 [16] ）取值于空间

$$\Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(4)^\perp = [[\Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{2,0}]] \oplus [[\Lambda^{2,1}]] \oplus \Lambda^1, \tag{75}$$

其中，$[[\Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{2,0}]]$ 实数维数为 $2\times4\times6 = 48$，进一步分解为实数维数为 $2\times4 = 8$ 的 $\mathcal{W}_1 = [[\Lambda^{3,0}]]$以及其余部分 $\mathcal{W}_2$。空间 $[[\Lambda^{2,1}]]$ 分解出另一个 $[[\Lambda^{2,1}]]$ 的副本

$\mathcal{W}_4 = \Lambda^1$以及 $\mathcal{W}_3 = [[\Lambda^{2,1}_0]]$。内禀挠率的最后一个 Λ^1 因子记为 $\mathcal{W}_5$。内禀挠率的前两个不可约因子 $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ 控制 Nijenhuis 张量，因此当 $d\Omega = 0$时它们消失。此外， $d\Omega = 0$ 意味着内禀挠率的分量 $\mathcal{W}_5$消失，该分量由 $\Lambda^{4,\ 1}$ 部分 $d\Omega$所刻画。

当 $d\Omega = 0$ 时， $d\Phi_\tau = 0$ 的实部蕴含 $\omega \wedge d\omega = 0$。考察$\Lambda^5$ 分解为不可约分量的形式，即 [15], 中的公式（3.7），可见该方程蕴含$d\omega = 0$。众所周知，见 [15] 以及 [16], 中的讨论， $d\omega$ 刻画了内禀挠率的分量$\mathcal{W}_{1,\ 3,\ 4}$。因此， $d\Omega = 0$ 与 $d\omega = 0$ 共同蕴含内禀挠率全部消失，从而保证可积性。

我们证明了以下结论

命题 5. 由复凯莱形式 Φ_τ 定义的 SU(4)结构可积，当且仅当 $d\Phi_\tau = 0$。

4 Spin(4,4)的旋量及其相关的实凯莱形式

现在，我们来描述上述所有陈述在分裂符号 Spin 群 Spin(4, 4) 情形下的对应版本。此时存在一个分裂八元数模型。下一节将讨论相应的复凯莱形式。

4.1 分裂八元数

分裂八元数 $\mathbb{O}'$ 构成一种非结合赋范合成代数。它不是除代数，因为其中存在零元素。分裂八元数是一个对象

$$\tilde{q} = \tilde{q}_0 \mathbb{I} + \sum_{a=1}^{7} \tilde{q}_a \tilde{\mathbf{e}}^a. \tag{76}$$

单位虚八元数 $\tilde{\mathbf{e}}^a$ 反交换，并满足

$$(\tilde{\mathbf{e}}^5)^2 = (\tilde{\mathbf{e}}^6)^2 = (\tilde{\mathbf{e}}^7)^2 = -\mathbb{I}, \quad (\tilde{\mathbf{e}}^1)^2 = (\tilde{\mathbf{e}}^2)^2 = (\tilde{\mathbf{e}}^3)^2 = (\tilde{\mathbf{e}}^4)^2 = \mathbb{I}. \tag{77}$$

因此，分裂八元数 $\mathbb{I}, \tilde{\mathbf{e}}^5, \tilde{\mathbf{e}}^6, \tilde{\mathbf{e}}^7$ 生成了 $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}'$ 的一个副本。八元数配对定义为

$$(\tilde{q}, \tilde{q}) = \tilde{q}\overline{\tilde{q}} = (\tilde{q}_0)^2 - (\tilde{q}_1)^2 - (\tilde{q}_2)^2 - (\tilde{q}_3)^2 - (\tilde{q}_4)^2 + (\tilde{q}_5)^2 + (\tilde{q}_6)^2 + (\tilde{q}_7)^2, \tag{78}$$

共轭 记作上横线，它会改变所有虚生成元的符号。

虚八元数的乘法可以用 Im($\mathbb{O}'$) $= \mathbb{R}^7$ 上的以下 3-形式最高效地编码

$$\tilde{\phi} = e^{567} - e^5(e^{41} - e^{23}) - e^6(e^{42} - e^{31}) - e^7(e^{43} - e^{12}), \tag{79}$$

它与 (34) 类似，但含有 $e^{1,2,3,4}$ 的项前面的符号相反。向量积由此编码为

$$(u \times v, w) = w \lrcorner v \lrcorner u \lrcorner \tilde{\phi}. \tag{80}$$

这里， $u\lrcorner$是将向量场 u 插入微分形式的插入算子。例如，$\tilde{\mathbf{e}}^5 \times \tilde{\mathbf{e}}^6 = \tilde{\mathbf{e}}^7,$，但 $\tilde{\mathbf{e}}^5 \times \tilde{\mathbf{e}}^2 = -\tilde{\mathbf{e}}^3$，因为在方向 1、2、3、4 上，八元数配对是负定的。

我们注意到，稍后将用到的与 ϕ 对偶的4-形式为

$$^*\tilde{\phi} = e^{1234} - e^{67}(e^{41} - e^{23}) - e^{75}(e^{42} - e^{31}) - e^{56}(e^{43} - e^{12}). \tag{81}$$

4.2 Cl(4,4) 的分裂八元数模型

与Cl(8)的情形类似，克利福德代数Cl(4, 4)可以用元素属于分裂八元数的 2×2矩阵来实现。Clifford生成元的一般线性组合可表示为

$$\Gamma_{\tilde{q}} = \sum_{I=0}^{7} \tilde{q}_I \tilde{\Gamma}_I = \begin{pmatrix} 0 & L_{\bar{\tilde{q}}} \\ L_{\tilde{q}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{82}$$

其中， L_q 是由 $q \in \mathbb{O}'$ 左乘得到的算子。

具体而言，将分裂八元数视为以 $\tilde{q}_0$ 为首项的 8 分量列向量，即可用 16×16 矩阵显式描述克利福德代数 Cl(4, 4)。由此得到以下 Γ 矩阵

$$\tilde{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_a = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{E}_a \\ \tilde{E}_a & 0 \end{pmatrix} \text{ for } a \in \{1, \ldots, 7\}, \tag{83}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 &= S_{01} + S_{27} - S_{36} + S_{45}, \\
\tilde{E}_2 &= S_{02} - S_{17} + S_{35} + S_{46}, \\
\tilde{E}_3 &= S_{03} + S_{16} - S_{25} + S_{47}, \\
\tilde{E}_4 &= S_{04} - S_{15} - S_{26} - S_{37}, \\
\tilde{E}_5 &= -E_{05} + E_{14} + E_{23} - E_{67}, \\
\tilde{E}_6 &= -E_{06} - E_{13} + E_{24} + E_{57}, \\
\tilde{E}_7 &= -E_{07} + E_{12} + E_{34} - E_{56}.
\end{aligned} \tag{84}$$

我们的记号约定是： E_{ij} 表示一个反对称矩阵，其第 i 行第 j 列的元素为 $+1$ ，第 j 行第 i 列的元素为 -1 。矩阵 S_{ij} 是一个对称矩阵，其第 i 行第 j 列和第 j 行第 i 列的元素均为 $+1$ 。矩阵~ ~ ~ $E_{5,\ 6,\ 7}$ 平方等于负单位矩阵，而 $E_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 平方等于正单位矩阵。矩阵 E_a 反交换。

4.3 实分裂凯莱形式

标准分裂凯莱形式通过在两个八元数单位元副本之间插入四个不同的 Γ-矩阵得到。我们得到

$$\tilde{\Phi} := \langle \mathbb{I}, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\mathbb{I} \rangle = e^0 \wedge \tilde{\phi} - {}^*\tilde{\phi}, \tag{85}$$

~ ~其中， ϕ 是编码分裂八元数乘法的 3-形式 (79)，而 ${}^*\phi$ 是由 (81) 给出的 ϕ 的 Hodge ~ ~对偶。Spin(3,4) 中 Φ 的稳定子群，就是对应于作为单位分裂八元数的 Weyl 旋量的稳定子群，它等于 Spin(3,4)。

4.4 Spin(4,4) 的纯旋量

~关于实分裂凯莱形式 Φ，有几种不同的观点。这些观点源于将实单位旋量（分裂八元数的单位元）表示为两个纯旋量之和。在

与紧致情形 Spin(8) 相比，在那里这种分解虽然不唯一，却只有一种类型；Spin(4, 4) 的情形则更有趣，因为这里存在不同类型的纯旋量。对于具有不定度量号差的 Spin 群，纯旋量轨道的结构见 [8]。

对于 Spin(4, 4)，纯旋量有三种不同类型，其区别在于湮灭子子空间的性质。第一种类型的纯旋量，其张成空间中的四个向量$M(\psi_p)$都是复的。按照文献 [8] 中的术语，这类纯旋量的实指标为零。另一种类型的纯旋量，其四个向量都是实数，其实指标为四。最后，也是与我们最相关的一种类型，是由两个实零向量和两个复零向量张成 $M(\psi_p)$ 的纯旋量，其实指标为二。Spin(4, 4) 在所有相应轨道上的作用都是传递的，见 [8]。

在上一节中，我们看到，可以从复的视角理解黎曼实凯莱形式，这一视角来自在 $\mathbb{R}^8$ 上选取一个复结构。在构造实凯莱形式时所用的实单位旋量层面上，这对应于将该单位旋量写成一个纯旋量与其复共轭之和。对于实分裂凯莱形式，也有类似的视角，只不过现在有两种不同的方式，可以将一个实单位分裂八元数表示为两个零八元数之和。

4.5 Spitreal 凯莱形式与复结构

关于分裂实凯莱形式的两种可能观点中，第一种完全类似于我们在 $\mathbb{R}^8$的情形下所做的。我们在 $\mathbb{R}^{4,\,4}$上选择一个复结构，并以一个纯旋量来编码。相应的纯旋量 ψ_p 有四个复零方向，它们张成$\hat{}M(\psi_p)$，因此其实指标为零。它的复共轭 ψ_p 也是一个纯旋量，其$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$零方向 $M(\psi_p)$ 互补，即 $M(\psi_p) \cap M(\psi_p) = 0$，且 $\langle \psi_p, \psi_p \rangle \neq 0$。旋量

$$\psi = \psi_p + \hat{\psi}_p \tag{86}$$

$\hat{}$不是纯旋量；若将 $\langle \psi_p, \psi_p \rangle = 1/2$归一化，它就是一个实单位旋量。计算4-形式$\Phi = \langle \psi, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi \rangle$，便可得到分裂实凯莱形式的一种复观点。

让我们具体说明这一点，并考虑

$$\psi_p = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathrm{i}\,\tilde{e}^7), \tag{87}$$

这是一个复零分裂八元数。相应的复结构可以通过计算 2-形式 $\langle \overline{\psi}_p$、$\Gamma\Gamma\psi_p \rangle$ 和 4-形式 $\langle \psi_p$、$\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\psi_p \rangle$ 来求得$\tilde{}\,\tilde{}$ $\tilde{}\,\tilde{}\,\tilde{}\,\tilde{}$。由此得到

$$\begin{aligned} \langle \overline{\psi}_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p \rangle &= \frac{\mathrm{i}}{2}\omega, \\ \langle \psi_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p \rangle &= \frac{1}{2}\Omega, \end{aligned} \tag{88}$$

with

$$\begin{aligned} \omega &= e^{12} + e^{34} + e^{56} + e^{70}, \\ \Omega &= (e^7 + \mathrm{i}\,e^0)(e^1 - \mathrm{i}\,e^2)(e^3 - \mathrm{i}\,e^4)(e^5 + \mathrm{i}\,e^6). \end{aligned} \tag{89}$$

相应复结构的特征向量为

$$E^+ = \mathrm{Span}(e^7 + \mathrm{i}\, e^0, e^1 - \mathrm{i}\, e^2, e^3 - \mathrm{i}\, e^4, e^5 + \mathrm{i}\, e^6). \tag{90}$$

这是算子 $R_{\tilde{\mathbf{e}}^7}$ 右乘虚八元数$\tilde{\mathbf{e}}^7$对应的 +i特征子空间。

ˆ利用 $\mathbb{I} = \psi_p + \psi_p$ ，我们看到分裂凯莱形式允许一种复表示

$$\tilde{\Phi} = \langle \mathbb{I}, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\mathbb{I}\rangle = \langle \psi_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p\rangle + \langle \hat{\psi}_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\hat{\psi}_p\rangle + 2\langle \hat{\psi}_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p\rangle = \mathrm{Re}(\Omega) - \frac{1}{2}\omega \wedge \omega, \tag{91}$$

其中 Ω ω 由式 (89) 给出。原凯莱形式在稳定 $\mathbb{I}$ 旋量的群 Spin(3, 4) 作用下保持不变。复表示清楚地展现了该稳定子群中的 SU(2, 2) 子群。

4.6 分裂实凯莱形式与超复结构

与 Spin(8) 的情形不同，实分裂凯莱形式还有另一种观点。它可以通过考虑一对互补的实纯旋量 $\psi_\pm$来得到。现在它们是实数，因此不再由复共轭联系起来。我们将它们归一化，使得 $\langle \psi_+, \psi_- \rangle$ =1/2。这样一对旋量的稳定子群是 $\mathrm{SL}(4,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$，因此它定义了 $\mathbb{R}^{4,4}$上的正交超复结构，这是一个映射 $K : \mathbb{R}^{4,4} \to \mathbb{R}^{4,4}$ ，满足$K^2 = +\mathbb{I}, g(K\cdot, K\cdot) = -g(\cdot,\cdot)$。 K 的特征子空间是实的且完全为零。它们分别与湮灭子子空间 $M(\psi_+)$和 $M(\psi_-)$相对应。除拟复结构 K外，这对 $\psi_\pm$ 还在 K的零特征子空间上定义了顶形式。记

$$\psi = \psi_+ + \psi_- \tag{92}$$

给出一个实单位旋量，因此我们可以通过拟复结构的视角来观察实分裂型 Cayley˜形式 Φ，从而获得不同的理解。

为使这一讨论具体化，我们选取以下两个实纯旋量

$$\psi_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \tilde{\mathbf{e}}^4). \tag{93}$$

这些纯旋量各自的湮灭子子空间由$\mathbb{R}^{4,4}$中的四个实数方向组成。通过计算 $\langle \psi_\pm, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_\pm\rangle$ 可以确定它们。我们得到

$$\langle \psi_\pm, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_\pm\rangle = \frac{1}{2}\Omega_\pm, \tag{94}$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= (e^4 + e^0)(e^1 + e^5)(e^2 + e^6)(e^3 + e^7), \\ \Omega_- &= (e^4 - e^0)(e^1 - e^5)(e^2 - e^6)(e^3 - e^7). \end{aligned} \tag{95}$$

这展示了零方向。此外，我们还有

$$\langle \psi_+, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_- \rangle = \frac{1}{2}\omega_r, \tag{96}$$

其中

$$\omega_r = e^{15} + e^{26} + e^{37} + e^{40}. \tag{97}$$

ψ_+ 与 ψ_- 之和是原始旋量 $\mathbb{I}$，我们得到实分裂凯莱形式的如下实表示

$$\tilde{\Phi} = \langle \psi_+, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_+ \rangle + \langle \psi_-, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_- \rangle + 2\langle \psi_+, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_- \rangle = \frac{1}{2}\Omega_+ + \frac{1}{2}\Omega_- + \frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r. \tag{98}$$

这种写法的分裂凯莱形式只显明了两个纯旋量 $\psi_\pm$ 的共同稳定子群，即 SL(4, $\mathbb{R}$) = Spin(3,3)。

4.7 Spin(4,4) 情形下的校准

从它所定义的校准角度看，实分裂凯莱形式 (85) 有两种不同的理解方式。因此，Φ 校准的子空间具有黎曼或分裂型˜签名度规。将 Φ 写在适配于此类校准的基中，分别显现出 Spin(4, 3) 的 SU(2) ×SU(2) × SU(2) 和 SO(2, 1) × SO(2, 1) × SO(2, 1) 子群。

我们先将 (85) 改写成与 (66) 类似的形式。因此，我们再次引入四维子空间中的自对偶二形式 $e^{1,2,3,4}$ 以及 $e^{0,5,6,7}$

$$\begin{aligned} \Sigma^1 = e^{41} - e^{23}, \quad \Sigma^2 = e^{42} - e^{31}, \quad \Sigma^3 = e^{43} - e^{12}, \\ \Sigma'^1 = e^{05} - e^{67}, \quad \Sigma'^1 = e^{06} - e^{75}, \quad \Sigma'^1 = e^{07} - e^{56}. \end{aligned} \tag{99}$$

于是，分裂凯莱形式可写为

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{6}\Sigma^i\Sigma^i - \frac{1}{6}\Sigma'^i\Sigma'^i - \Sigma^i\Sigma'^i, \tag{100}$$

与式 (66) 唯一的不同之处在于最后一项前的符号。这样写凯莱形式，展现了 Spin(4, 3) 的 SU(2) × SU(2) × SU(2) 子群。在这种情况下，局部模型为 $e^{0,\,5,\,6,\,7}$ 的 $\mathbb{R}^{4,\,4}$ 子空间都是校准。从八元数视角来看，选择这样的校准，就是选择一份四元数 $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}'$。

同一个 4-形式还可以用另一种方式表示，即将 $\mathbb{R}^8$ 分成两份 $\mathbb{R}^{2,\,2}$。在这种情况下，相关子空间为 $e^{3,\,4,\,5,\,6}$ 和 $e^{1,\,2,\,7,\,0}$。我们为这些子空间引入分裂签名自对偶二形式的基

$$\begin{aligned} \Sigma_s^1 = e^{54} + e^{36}, \quad \Sigma_s^2 = e^{53} + e^{64}, \quad \Sigma_s^3 = e^{56} - e^{43}, \\ \Sigma_s'^1 = e^{01} + e^{27}, \quad \Sigma_s'^2 = e^{02} + e^{71}, \quad \Sigma_s'^3 = e^{07} - e^{12}. \end{aligned} \tag{101}$$

于是，分裂凯莱形式可写为

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{6}\Sigma^i\Sigma^j\eta_{ij} - \frac{1}{6}\Sigma'^i\Sigma'^j\eta_{ij} + \Sigma^i\Sigma'^j\eta_{ij}, \tag{102}$$

其中 $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$ 是 $\mathbb{R}^{2,\,1}$上的度量。这样写展现了 Spin(4, 3) 的 SO(2, 1) × SO(2, 1) × SO(2, 1) 子群。因此，$\mathbb{R}^{4,\,4}$ 也可以由局部同构于 $\mathbb{R}^{2,\,2}$的子空间副本来校准。这样的校准就是选择一份分裂四元数 $\mathbb{H}' \subset \mathbb{O}'$。

5 洛伦兹凯莱形式

现在我们来考察 Spin(4,4) 的复凯莱形式。复凯莱形式现在有两个一参数族。

5.1 Spin(4,4) 的复单位旋量

复凯莱形式由复单位旋量 $\psi \in S^+$ 按照 (1) 得到。Spin(4,4) 的复单位（Weyl）旋量可以仿照 Spin(8) 的情形进行分类，参见 [17]。

复韦尔旋量是复化分裂八元数 $\psi = \alpha_1 + \mathrm{i}\,\alpha_2$。该旋量为单位旋量的条件变为 $|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 = 1$，$(\alpha_1, \alpha_2) = 0$。$\psi$ 与其复共轭 $\hat{}\,\psi \in S^+$ 之间的配对为 $\langle \hat{}\,\psi, \psi\rangle = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1 + 2|\alpha_2|^2$。由于这里处理的是分裂八元数，这个量可以取任意实数值。复旋量轨道的类型由这个值来表征。

当 $|\alpha_2|^2 > 0$ 时，我们有两个范数平方为正的分裂八元数。于是可以将 $|\alpha_1| =$ 参数化为 $\cosh(\tau)$ $|\alpha_2| = \sinh(\tau)$。这些旋量

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \pm \mathrm{i}\,\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\right), \tag{103}$$

二者都是零旋量，因而是纯旋量。它们互为复共轭。任一旋量的稳定子群都是 SU(2, 2)，并且它们在 $\mathbb{R}^{4,\,4}$ 上定义了一个复结构。它们的和是实旋量 α_1，而更一般的线性组合 (67) 给出一个具有相同稳定子群的复单位旋量。相应的复凯莱形式正是黎曼情形下复凯莱形式 Φ_τ 的精确类比。

我们注意到，当 $|\alpha_2|^2 < -1$ 时，会出现具有相同稳定子群的轨道。在这种情况下，两个八元数的范数平方均为负数 $|\alpha_1|^2 < 0, |\alpha_2|^2 < 0$。同样可以引入两个互为复共轭的纯旋量，使复单位旋量为线性组合 (67)。这种情况下的稳定子群也为 SU(2, 2)。

另一种可能的轨道是满足 $|\alpha_2|^2 = 0$ 的轨道，此时 $|\alpha_1|^2 = 1$。或者，也可以取 $|\alpha_1|^2 = 0$，从而得到 $|\alpha_2|^2 = -1$。因此，这种情况下的复单位旋量具有单位实部和零虚部，或者具有零实部，且虚部的范数平方为负一。关于这一旋量轨道的一些讨论见 [17], 第 5.8 节。我们将不再进一步讨论这一轨道。

这里我们最感兴趣的情形是：两个八元数中，一个的范数平方为正，另一个的范数平方为负。这是满足 $|\alpha_2|^2 < 0$ 的轨道，其中 $|\alpha_1|^2 > 0$，因此 $-1 < |\alpha_2|^2 < 0$。于是 α_1 的范数平方满足 $0 < |\alpha_1|^2 < 1$。我们可以将其参数化

$$|\alpha_1| = \cos(\theta), \qquad |\alpha_2| := \sqrt{-|\alpha_2|^2} = \sin(\theta), \quad \theta \in (0, \pi/2). \tag{104}$$

于是我们可以改写为

$$\psi_\theta := e^{\mathrm{i}\,\theta}\psi_+ + e^{-\mathrm{i}\,\theta}\psi_-, \tag{105}$$

其中

$$\psi_\pm := \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \pm \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\right) \tag{106}$$

$\hat{}$ 是满足 $\langle \psi_+, \psi_-\rangle = 1/2$ 的两个实零八元数。我们还有 $\langle \psi_\theta, \psi_\theta\rangle = \cos(2\theta)$。满足 $\langle \psi_+, \psi_-\rangle = 1/2$ 的实零旋量对 $\psi_\pm$ 定义了 K 上的拟复结构 ${}_{\mathbb{R}^{4,\,4}}$，并在 K 的特征子空间上给出顶形式。这一对旋量的稳定子群是 $\mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$，它也是复单位旋量 ψ_θ 的稳定子群。

5.2 复凯莱形式 Φ_θ

现在我们利用旋量 ψ_θ (105) 构造复凯莱形式。所有要素都已由公式 (94) 和 (96) 给出。于是得到

$$\Phi_\theta := \langle \psi_\theta, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_\theta\rangle = \cos(2\theta)\frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-) + \mathrm{i}\,\sin(2\theta)\frac{1}{2}(\Omega_+ - \Omega_-) + \frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r. \tag{107}$$

这种复凯莱形式的稳定子群包含一对纯旋量$\psi_\pm$的稳定子群，即 SL(4, $\mathbb{R}$)。当 $\theta = 0$ 旋量 ψ 变为两个实纯旋量之和时，˜相应的复凯莱形式变为实分裂凯莱形式 $\Phi_0 = \Phi$，其稳定子群为 Spin(4, 3)。当 $\theta = \pi/2$ 旋量 ψ_θ 为纯虚时，其虚部由两个实纯旋量之差给出。相应的复凯莱形式仍为实形式，其稳定子群为 Spin(4, 3)。

5.3 洛伦兹凯莱形式

ˆ 当 $\theta = \pi/4$ 我们得到特殊情形 $\langle \psi_\theta, \psi_\theta\rangle = 0$。我们将相应的复凯莱形式称为洛伦兹凯莱形式

$$\Phi_L := \Phi_{\pi/4} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\Omega_+ - \Omega_-) + \frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r. \tag{108}$$

显然，与 Φ_θ 相比， Φ_L 具有额外的离散对称性：将 $\Omega_\pm$ 的符号同时变为相反数，然后取复共轭。这不应与交换 Ω_+ 和 Ω_- 后再取复共轭的对称性混淆；后者对任意 θ 都成立，并对应于交换 $\psi_\pm$ 后再取复共轭。

取 $\psi_\pm$，如（93）所示，可得

$$\psi_L := \psi_{\pi/4} = \frac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{e}}^4) + \frac{1-\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{e}}^4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{I} + \mathrm{i}\,\tilde{\mathbf{e}}^4). \tag{109}$$

于是，我们可以写出所得洛伦兹凯莱形式的显式表达式：

$$\Phi_L = \mathrm{i}\,e^0 \wedge \phi_L + {}^*\phi_L, \tag{110}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_L &:= e^{123} - e^1(\mathrm{i}\,e^{45} - e^{67}) - e^2(\mathrm{i}\,e^{46} - e^{75}) - e^3(\mathrm{i}\,e^{47} - e^{56}), \\ {}^*\phi_L &:= \mathrm{i}\,e^{4567} + e^{23}(\mathrm{i}\,e^{45} - e^{67}) + e^{31}(\mathrm{i}\,e^{46} - e^{75}) + e^{12}(\mathrm{i}\,e^{47} - e^{56}). \end{aligned} \tag{111}$$

ϕ_L和 ${}^*\phi_L$ 均由方向为 $e^{4,5,6,7}$的洛伦兹自对偶二形式构成，它们张成一个 $\mathbb{R}^{1,3}$的副本。复凯莱形式的稳定子群就是同时稳定 $\mathbb{I}$、˜$\mathbf{e}^4$, 的稳定子群，即 Spin(3, 3) $=$SL(4, $\mathbb{R}$)。

5.4 洛伦兹凯莱形式的另一种表示

我们已经看到，实黎曼凯莱形式由一个单位旋量构造而成，该旋量可理解为两个纯旋量之和，即一个纯旋量及其复共轭。类似地，实分裂凯莱形式由一个旋量构造而成，该旋量是一个纯旋量 ψ_p 与其互补纯旋量 ψ'_p 之和，使得 $\langle \psi_p, \psi'_p\rangle \neq 0$。对于实分裂

凯莱形式，这可以通过两种不同方式实现：要么将实指标零的纯旋量与其互补旋量相加，如式 (86) 所示；要么将实指标四的纯旋量与其互补旋量相加，如式 (92) 所示。

因此，分裂情形中存在的三种不同类型的纯旋量里，有两种会导出分裂实凯莱形式。一个自然的问题是：将第三种类型的一对纯旋量相加时，会得到什么类型的旋量及其对应的凯莱形式？这类纯旋量的实指标为二，具有两个实数零方向和两个复零方向。有趣的是，这种类型的纯旋量可以理解为另外两种类型的纯旋量的复线性组合。为了具体说明这一点，我们来考虑这一对

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathrm{i}\,\tilde{\mathbf{e}}^7) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{\mathbf{e}}^4 + \mathrm{i}\,\tilde{\mathbf{e}}^3)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{e}}^3) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{\mathbf{e}}^4 + \tilde{\mathbf{e}}^7)), \tag{112}$$
$$\psi'_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathrm{i}\,\tilde{\mathbf{e}}^7) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{\mathbf{e}}^4 - \mathrm{i}\,\tilde{\mathbf{e}}^3)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{e}}^3) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\tilde{\mathbf{e}}^4 - \tilde{\mathbf{e}}^7)),$$

我们写出这两个新的纯旋量的方式，清楚地表明它们可以表示为两个具有四个复零方向的纯旋量的复线性组合，也可以表示为两个具有四个实数方向的纯旋量的复线性组合。我们有 $\langle\psi'_p、\ \psi_p\rangle = 1/2$，因此这两个纯旋量互补，也就是说，它们的零子空间没有交集。我们有

$$\psi_L = \psi_p + \psi'_p, \tag{113}$$

因此，用于构造洛伦兹凯莱形式的复旋量 ψ_L 可以看作由两个互补的实指标二纯旋量之和得到。 ψ_L 的这种表示导出了 Φ_L的另一种公式。

ψ_p,ψ'_p 的零子空间可通过计算相应的可分解 4-形式得到。由此可得

$$\langle\psi_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p\rangle = \frac{1}{2}\Omega_c, \qquad \langle\psi'_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi'_p\rangle = \frac{1}{2}\Omega'_c, \tag{114}$$

其中

$$\Omega_c = (e^0 - \mathrm{i}\,e^7)(\mathrm{i}\,e^3 + e^4)(e^1 + e^6)(e^2 - e^5), \tag{115}$$
$$\Omega'_c = (e^0 + \mathrm{i}\,e^7)(\mathrm{i}\,e^3 - e^4)(e^1 - e^6)(e^2 + e^5).$$

这表明 显然， ψ_p,ψ'_p 确实具有实指标二。我们还可以计算 2-形式

$$\langle\psi'_p, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi_p\rangle = \frac{1}{2}\omega_c, \tag{116}$$

其中

$$\omega_c = e^{61} + e^{25} + \mathrm{i}\,e^{34} - \mathrm{i}\,e^{07}. \tag{117}$$

由此，我们得到洛伦兹凯莱形式的另一种表达式

$$\Phi_L = \langle\psi, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\psi\rangle = \frac{1}{2}(\Omega_c + \Omega'_c) + \frac{1}{2}\omega_c \wedge \omega_c. \tag{118}$$

复凯莱形式的（118）式写法清楚地展现了保持 ψ_p、 ψ'_p 不变的 Spin(4, 4) 子群。该子群保持论文 [14] 所称的混合型结构，也就是抛物复结构与虚数单位乘以一个复结构的复线性组合。在此情形下，这个群是混合纯旋量 ψ_p 复零方向的 SU(1, 1)，再乘以混合其 $\mathbb{R}$ 实零方向的 SL(2,)。

5.5 洛伦兹标定

我们已经看到，实分裂凯莱形式如何通过四维子空间标定 $\mathbb{R}^{4,\,4}$，这些子空间要么是 $\mathbb{R}^4$，要么是 $\mathbb{R}^{2,\,2}$。现在我们将展示复凯莱形式如何通过闵可夫斯基空间的副本标定 $\mathbb{R}^{4,\,4}$。

我们引入由闵可夫斯基空间的副本中张成的自对偶二形式的（复）基 $e^{4,5,6,7}$ 和 $e^{0,1,2,3}$

$$\begin{aligned} \Sigma_L^1 = \mathrm{i}\, e^{45} - e^{67}, \quad \Sigma_L^2 = \mathrm{i}\, e^{46} - e^{75}, \quad \Sigma_L^3 = \mathrm{i}\, e^{47} - e^{56}, \\ {\Sigma'_L}^1 = \mathrm{i}\, e^{01} - e^{23}, \quad {\Sigma'_L}^1 = \mathrm{i}\, e^{02} - e^{31}, \quad {\Sigma'_L}^1 = \mathrm{i}\, e^{03} - e^{12}. \end{aligned} \tag{119}$$

于是我们有

$$\Phi_c = -\frac{1}{6}\Sigma_L^i \Sigma_L^i - \frac{1}{6}{\Sigma'_L}^i {\Sigma'_L}^i - \Sigma_L^i {\Sigma'_L}^i. \tag{120}$$

这种复凯莱形式的写法展现了其稳定子群 Spin(3, 3) 中的洛伦兹子群 Spin(3, 1)。事实上，这是一个对角洛伦兹子群，它同时作用于由 $e^{4,\,5,\,6,\,7}$ 和 $e^{0,\,1,\,2,\,3}$ 张成的两个闵可夫斯基空间副本上。

5.6 可积 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构

有了洛伦兹凯莱形式的表达式 (108)，不难证明，可积 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构与闭洛伦兹凯莱形式一一对应。

命题 6. 由洛伦兹凯莱形式 Φ_L 定义的 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构可积，当且仅当 $d\Phi_L = 0$。

事实上，在一个方向上，SL(4, $\mathbb{R}$) 结构由三元组 $(g, \omega_r, \Omega^{\pm})$ 描述，其中 g 是八维分裂号差度量，实凯勒形式为 $\omega_r(\xi_1, \xi_2) = g(K\xi_1, \xi_2)$，其中 K 是正交拟复结构 $K^2 = \mathbb{I}, g(K\xi_1, K\xi_2) = -g(\xi_1, \xi_2)$，而 $\Omega^{\pm}$ 是顶形式 $\Omega^+ \in \Lambda^{4,\,0}$、$\Omega^- \in \Lambda^{0,\,4}$。当且仅当 $d\omega_r = 0, d\Omega^{\pm} = 0$ 时，该结构可积，由此可推出 Φ_L 是闭的。

$d\Phi_L = 0$ 的虚部意味着 $d\Omega^{\pm} = 0$，由此可推出由 $\Omega^{\pm}$ 定义的拟复结构可积。$d\Phi_L = 0$ 的实部给出 $\omega_r d\omega_r = 0$。将 $\Lambda^5 T, T = \mathbb{R}^{4,\,4}$ 分解为 SL(4, $\mathbb{R}$) 不可约分量后，[15]，中的公式 (3.7) 表明 $\omega_r d\omega_r = 0$ 意味着 $d\omega_r = 0$，这就证明了该断言。我们注意到，同样的论证还表明，更一般的复分裂凯莱形式 Φ_τ 和 Φ_θ 分别定义可积的 SU(2, 2) 和 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构，当且仅当它们是闭的。

致谢

作者感谢 N. Hitchin 的通信往来，并感谢 Y. Herfary 对本文早期版本提出的意见。

附录：对应于同一度量的洛伦兹凯莱形式

本附录旨在汇集一些显式公式，用于描述对应于同一度量的所有凯莱形式所构成空间的切空间。

某些 4-形式的计算

为了计算洛伦兹凯莱形式空间的切空间，我们先汇集一些预备公式。

基旋量 (109) 给出了拟复结构算子 $K = R_{\tilde{\mathbf{e}}^4}$。所有量最好通过将其分解为相对于该拟复结构的不可约分量来描述。具体而言，它可表示为

$$\begin{aligned} K = e^4 \otimes (e^0)^* + e^0 \otimes (e^4)^* + e^1 \otimes (e^5)^* + e^5 \otimes (e^1)^* \\ + e^2 \otimes (e^6)^* + e^6 \otimes (e^2)^* + e^3 \otimes (e^7)^* + e^7 \otimes (e^3)^*. \end{aligned} \tag{121}$$

我们注意到， Φ_c 在 K 对其四个指标的作用下保持不变。

现在考虑实分裂八元数的向量空间 $\mathbb{R}^{4,\ 4} \sim \mathbb{O}'$，并将其分解为关于 K 的特征向量分量。因此，我们写作

$$\Xi = \Xi_{1,0} + \Xi_{0,1}, \qquad K(\Xi_{1,0}) = \Xi_{1,0}, \quad K(\Xi_{0,1}) = -\Xi_{0,1} \tag{122}$$

K 的特征子空间是全零且实数的。我们可以将其参数化

$$\Xi_{1,0} = \xi_{1,0}(\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{e}}^4) + \vec{\xi}_{1,0}, \quad \Xi_{0,1} = \xi_{0,1}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{e}}^4) + \vec{\xi}_{0,1}, \tag{123}$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{1,0} &= \xi^1_{1,0}(\tilde{\mathbf{e}}^1 + \tilde{\mathbf{e}}^5) + \xi^2_{1,0}(\tilde{\mathbf{e}}^2 + \tilde{\mathbf{e}}^6) + \xi^3_{1,0}(\tilde{\mathbf{e}}^3 + \tilde{\mathbf{e}}^6), \\ \vec{\xi}_{0,1} &= \xi^1_{0,1}(\tilde{\mathbf{e}}^1 - \tilde{\mathbf{e}}^5) + \xi^2_{0,1}(\tilde{\mathbf{e}}^2 - \tilde{\mathbf{e}}^6) + \xi^3_{0,1}(\tilde{\mathbf{e}}^3 - \tilde{\mathbf{e}}^6). \end{aligned} \tag{124}$$

为下一小节的需要，我们列出以下通过显式计算得到的结果：

$$\begin{aligned} \langle \psi_+, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\Xi_{1,0} \rangle &= \Omega_+ \xi_{1,0} + \omega_r \wedge \vec{\xi}_{1,0} \lrcorner \omega_+, \\ \langle \psi_+, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\Xi_{0,1} \rangle &= \frac{1}{2}\omega_r\omega_r\xi_{0,1} + \omega_r \wedge (e^4 + e^0) \wedge \vec{\xi}_{0,1} \lrcorner \omega, \\ \langle \psi_-, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\Xi_{1,0} \rangle &= \frac{1}{2}\omega_r\omega_r\xi_{1,0} + \omega_r \wedge (e^4 - e^0) \wedge \vec{\xi}_{1,0} \lrcorner \omega, \\ \langle \psi_-, \tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Gamma}\Xi_{0,1} \rangle &= \Omega_- \xi_{0,1} + \omega_r \wedge \vec{\xi}_{0,1} \lrcorner \omega_-, \end{aligned} \tag{125}$$

其中我们引入了一形式和二形式

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{0,1} \lrcorner \omega &:= (e^1 + e^5)\xi^1_{0,1} + (e^2 + e^6)\xi^2_{0,1} + (e^3 + e^7)\xi^3_{0,1}, \\ \vec{\xi}_{1,0} \lrcorner \omega_+ &:= (e^2 + e^6)(e^3 + e^7)\xi^1_{1,0} + (e^3 + e^7)(e^1 + e^5)\xi^2_{1,0} + (e^1 + e^5)(e^2 + e^6)\xi^3_{1,0}, \\ \vec{\xi}_{1,0} \lrcorner \omega &:= (e^1 - e^5)\xi^1_{1,0} + (e^2 - e^6)\xi^2_{1,0} + (e^3 - e^7)\xi^3_{1,0}, \\ \vec{\xi}_{0,1} \lrcorner \omega_- &:= (e^2 - e^6)(e^3 - e^7)\xi^1_{0,1} + (e^3 - e^7)(e^1 - e^5)\xi^2_{0,1} + (e^1 - e^5)(e^2 - e^6)\xi^3_{0,1}. \end{aligned} \tag{126}$$

这里所指的是以下 2-形式和 3-形式：

$$\begin{aligned} \omega &:= e^{15} + e^{26} + e^{37}, \\ \omega_+ &= (e^1 + e^5)(e^2 + e^6)(e^3 + e^7), \qquad \omega_- = (e^1 - e^5)(e^2 - e^6)(e^3 - e^7). \end{aligned} \tag{127}$$

对应于同一度量的洛伦兹凯莱形式

在正定情形下，导出相同度量的凯莱形式构成一个 7 维的单位旋量空间。我们已经看到，这类凯莱形式可以显式地参数化为式 (44)。现在我们希望在复凯莱形式的情形下得到类似的参数化。

第一步是参数化与其复共轭正交的复单位旋量空间。(105) 给出了这样的参数化，其中 $\theta = \pi/4$。由此得到的旋量 $\psi = \psi_{\pi/4}$ 自动与其复共轭正交，前提是 $\psi_\pm$ 均为实数且纯（因此为零）。于是 ψ 的范数为 $\langle\psi,\psi\rangle = 2\langle\psi_+,\psi_-\rangle$，这自动为实数。若施加条件 $\langle\psi_+,\psi_-\rangle = 1/2$，则得到单位旋量 ψ。

现在我们计算由 (93) 给出的此类旋量集合在 $\psi_\pm$ 处的切空间。每个 $\psi_\pm$ 保持为零的条件变为

$$\langle\psi_+,\delta\psi_+\rangle = 0, \qquad \langle\psi_-,\delta\psi_-\rangle = 0, \tag{128}$$

这意味着

$$\delta\psi_+ = a(\mathbb{I}+\tilde{\mathbf{e}}^4) + \vec{\xi}, \qquad \delta\psi_- = b(\mathbb{I}-\tilde{\mathbf{e}}^4) + \vec{\eta}, \tag{129}$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 和 $\vec{\xi},\vec{\eta}\in$ 张成空间($\tilde{\mathbf{e}}^{1,2,3,5,6,7}$)。条件 $\langle\psi_+,\psi_-\rangle = 1/2$ 仍然成立意味着

$$\langle\psi_+,\delta\psi_-\rangle + \langle\delta\psi_+,\psi_-\rangle = 0, \tag{130}$$

这意味着 $a+b=0$ 属于 (129)。由此得到切空间的预期维数 $6+6+1$。

现在我们取

$$\delta\psi = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\delta\psi_+ + \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\delta\psi_-, \tag{131}$$

并计算

$$\begin{aligned} 2\delta\Phi_c = \langle\psi,\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\delta\psi\rangle &= \mathrm{i}\,\langle\psi_+,\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\delta\psi_+\rangle - \mathrm{i}\,\langle\psi_-,\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\delta\psi_-\rangle \\ &\quad +\langle\psi_+,\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\delta\psi_-\rangle + \langle\psi_-,\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\tilde\Gamma\delta\psi_+\rangle. \end{aligned} \tag{132}$$

我们首先计算切向量在唯一一个涉及改变旋量的 $\mathbb{I},\tilde{\mathbf{e}}^4$ 分量的方向上的部分。因此，我们考虑

$$\delta\psi_+ = a(\mathbb{I}+\tilde{\mathbf{e}}^4), \qquad \delta\psi_- = -a(\mathbb{I}-\tilde{\mathbf{e}}^4). \tag{133}$$

我们使用结果 (125)。对于这个切向量，(132) 中的实部相互抵消，因此有

$$2\delta\Phi_c = \mathrm{i}\,a(\Omega_+ + \Omega_-). \tag{134}$$

接着，我们计算凯莱形式沿剩余切方向的变化，这些切方向由 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 张成。得到

$$\begin{aligned} 2\delta\Phi_c = \mathrm{i}\,\omega_r \wedge \Big((\vec{\xi}_{1,0}\lrcorner\omega_+ + (e^4+e^0)\wedge\vec{\xi}_{0,1}\lrcorner\omega) - (\vec{\eta}_{0,1}\lrcorner\omega_- + (e^4-e^0)\wedge\vec{\eta}_{1,0}\lrcorner\omega)\Big) \\ +\omega_r \wedge \Big((\vec{\eta}_{1,0}\lrcorner\omega_+ + (e^4+e^0)\wedge\vec{\eta}_{0,1}\lrcorner\omega) + (\vec{\xi}_{0,1}\lrcorner\omega_- + (e^4-e^0)\wedge\vec{\xi}_{1,0}\lrcorner\omega)\Big). \end{aligned} \tag{135}$$

这里，第一行方括号中的前两项张成整个 $\Lambda^{2,\,0}$，后两项张成整个 $\Lambda^{0,\,2}$。第二行方括号中的项也张成相同的空间，但参数化方式不同。

我们可以将这些结果归纳为以下命题。设 $\Omega^4_c(M) \subset \Lambda^4_{\mathbb{C}}(M)$ 为 8维流形 M 上所有洛伦兹凯莱形式构成的空间。每个这样的形式 Φ_c 都定义一个分裂号差度量。固定 Φ_c，并令 $g = g_{\Phi_c}$ 为由 Φ_c 定义的（实）度量。令 Σ_g 为所有诱导出相同度量的洛伦兹凯莱形式所构成的丛。这是一个实秩 13 丛；如我们所知，它可以视为由与其复共轭正交的复单位旋量构成的丛。或者， $\Sigma_g \to M$ 的每个纤维都是 Spin(4, 4)/Spin(3, 3) 的一个副本。于是，原来的洛伦兹凯莱形式 Φ_c 是 $\Sigma_g \to M$ 的一个截面。

命题 7。设 S_{Φ_c} 为对应于相同度量的凯莱形式空间的切空间，即 $\Lambda^4_{\mathbb{C}}(M)$ 的一个向量丛子丛，其在每一点 $x \in M$ 处的纤维都是纤维 Σ_g 在 Φ_c 处的切空间。那么 S_{Φ_c} 分解为以下不可约分量

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(S_{\Phi_c}) &= \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}, \\ \mathrm{Im}(S_{\Phi_c}) &= \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{136}$$

实部和虚部中出现的空间 $\Lambda^{2,\,0}, \Lambda^{0,\,2}$ 之间存在一个双射。具体而言，相关因子由公式 (134) 和 (135) 描述。

我们指出， S_{Φ_c} 的分解中出现的空间符合内禀挠率的一般理论预期。事实上，给定一个 SL(4, $\mathbb{R}$) 结构，切空间 $T = \mathbb{R}^{4,\,4}$ 分解为 $\Lambda^{1,\,0} \oplus \Lambda^{0,\,1}$。李代数 $\mathfrak{spin}(8) = \Lambda^2 T$ 则分解为

$$\mathfrak{spin}(8) = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \Lambda^{1,1}_0 \oplus \mathbb{R}. \tag{137}$$

这里的 $\Lambda^{1,\,0}_0$ 因子为

$$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) = \Lambda^{1,1}_0, \tag{138}$$

因此

$$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})^{\perp} = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \mathbb{R}. \tag{139}$$

这些正是公式 (136) 中出现的空间。上述命题描述了这些空间如何嵌入复化 4-形式空间 $\Lambda^4_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{4,\,4})$。

参考文献

[1]H. Urbantke, 《SU(2) 杨–米尔斯场可积性性质论。I. 无穷小部分》, 《数学物理杂志》 25 (1984年) 第7期，2321-2324，doi:10.1063/1.526402

[2] S.K. Donaldson, 《四维流形上的二形式与椭圆方程》，载于《受 S. S. Chern 启发》，153–172，南开数学丛书第11卷，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克。

[3] K. Krasnov, 《广义相对论的表述》，剑桥大学出版社，2020，ISBN 978-1-108-67465-2, 978-1-108-48164-9doi:10.1017/9781108674652

[4] D. A. Salamon 和 T. Walpuski, 《八元数札记》, [arXiv:1005.2820 [math.RA]]. [5] I. Agricola, 《例外群的新旧研究》, 《美国数学学会通报》, 55, 第8期, 922-929页。[6] ´Elie Cartan, 《旋量理论》, 麻省理工学院出版社, 剑桥, 马萨诸塞州, 1967, 译自1938年的法文原著。[7] C. Chevalley, 《旋量代数理论》, 哥伦比亚大学出版社, 纽约, 1954。[8] W. Kopczynski 和 A. Trautman, 《简单旋量与实结构》, 《数学物理杂志》33 (2) (1992) 550-559。[9] R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr., 《校准几何》, Acta Math. 148 (1982), 47 doi:10.1007/BF02392726[10] F. Reese Harvey, 《旋量与校准》, 学术出版社, 1990。[11] P. Budinich 和 A. Trautman, 《简单旋量的福克空间描述》, 《数学物理杂志》30 (1989), 2125 doi:10.1063/1.528214[12] L. Borisov、S. Salamon、J. Viaclovsky, 《扭量几何与扭曲积正交复结构》, Duke Math. J. 156, no. 1 (2011), 125-166。[13] H. B. Lawson 和 M. L. Michelsohn, 《旋量几何》, 普林斯顿大学出版社, 1989。[14]N. Bhoja 和 K. Krasnov, 《旋量与多形式札记 I：一般情形》, [arXiv:2205.04866 [math-ph]].[15] S. Salamon, 《黎曼几何与整体群》, Longman, 1989。[16]S. Chiossi 和 S. Salamon, 《SU(3)与G_2结构的内禀挠率》, arXiv:math/0202282。[17] N. Bhoja 和 K. Krasnov, 《旋量与多形式札记 II：四元数与八元数》, [arXiv:2205.05447 [math-ph]]。