arXiv:2304.01121v1 [math.FA] 3 Apr 2023

有界倍增度量测度空间上的分数阶极大函数与平均振荡

Ryan Gibara、Josh Kline

Abstract. 设 (X, d, μ) 为一个倍增度量测度空间。我们研究分数阶极大函数 M^α 对 $0 \le \alpha < Q$ 的作用，其中 Q 为倍增维数，并考察其在有界平均振荡（BMO）和消失平均振荡（VMO）函数空间上的作用。对于 $\alpha > 0$，我们还假设该空间有界。我们证明，当 μ 具有环带衰减性质时，M^α 将 BMO 有界地映射到 BLO （ BMO 的一个子类），并将 VMO 映射到自身。我们还通过实例证明，M^α 在这些函数空间上的作用并不连续。

1. Introduction

对于度量测度空间 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f，其（非中心）分数阶 Hardy-Littlewood 极大函数对 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 \le \alpha < n$ 定义为

$$M^\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} r^\alpha \fint_B |f| = \sup_{B \ni x} \frac{r^\alpha}{|B|} \int_B |f|,$$

其中，上确界取遍所有包含 x、半径为 $r > 0$ 的球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 。当$\alpha = 0$时，我们记作 $M^0 = M$，它就是通常的（非中心）Hardy-Littlewood 极大函数。作为分析学中的经典对象，极大函数与积分的微分、奇异积分和位势理论都有联系。M^α 的一种常见变体是将球替换为立方体（本文中的立方体始终指边平行于坐标轴的立方体）。

一项活跃的研究方向是考察极大函数作用于各种函数时的性质。设 $p^* = np/(n - \alpha p)$，它严格大于 p when$\alpha > 0$。由与 Riesz 势的比较可知，若 $0 \le \alpha < n/p$，则当 $1 < p < \infty$ 时，M^α 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子；当 $p = 1$ 时，它是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p^*,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子，参见 [45,第五章定理 1]。当 $\alpha = 0$ 时，我们得到著名的 Hardy-Littlewood-Wiener 定理。由 M^α 与平移可交换可知，对于 $0 \le \alpha < n/p$

日期：2023年4月4日。关键词和短语：分数阶极大函数、有界平均振荡、消失平均振荡、倍增度量测度空间。J. K. 的研究部分由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-2054960。

2020年数学主题分类：主要分类：42B35、42B25、46E36。

它是从 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 到 $W^{1,p^*}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子，参见 [31, 32]（尽管这些结果是针对中心化的极大函数对应版本证明的，但对 M^α 也成立）。

本文关注的函数既不属于 L^p，也不属于 $W^{1,\,p}$，而是那些在某一指定集合族（通常为立方体或球）上的平均振荡具有某些已知性质的函数。此类空间中最典型的是有界平均振荡函数空间 BMO($\mathbb{R}^n$)，该空间最初由 [30], 定义，由所有在 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积的函数 f 组成，满足

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \fint_Q |f - f_Q| < \infty,$$

其中，f_Q 表示 f 在 Q 上的平均值，上确界取遍所有立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$。由于 BMO 函数未必可积，其经极大函数作用后的像未必在任何一点都有限；因此，我们排除极大函数恒等于无穷大的那些函数。在 [7], 中，证明了相对于立方体定义的 M在 BMO($\mathbb{R}^n$)上有界。随后，[6], 中的结果进一步改进了这一结论，证明 BMO($\mathbb{R}^n$)的像包含于一个子类 BLO($\mathbb{R}^n$) 中，参见定义 2.15。相对于球定义的M 也可用相同的证明，参见 [21]。

在 [42], 中引入的消失平均振荡函数空间 VMO($\mathbb{R}^n$)，是 $f \in$BMO($\mathbb{R}^n$) 的子空间，满足

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{|Q|\le r} \fint_Q |f - f_Q| = 0,$$

其中，上确界取遍测度至多为 r 的立方体 Q（注意，在此定义中，我们同样可以只考虑边长至多为 r 的立方体）。等价地，Sarason 定理指出，f 属于 VMO($\mathbb{R}^n$)，当且仅当它可以在 BMO($\mathbb{R}^n$) 范数下由一致连续的 BMO($\mathbb{R}^n$) 函数逼近。消失平均振荡条件是偏微分方程系数的一种常见的最低正则性条件。直到最近，文献 [43] 才证明，以立方体为基础定义的 M 将 VMO($\mathbb{R}^n$) 映射到自身。

对于仅定义在固定立方体 $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数，空间 BMO(Q_0) 及其子类 BLO(Q_0) 和子空间 VMO(Q_0)，均通过限制到子立方体 $Q \subset Q_0$ 上的平均振荡来定义。与整体情形类似，已知以立方体为基础定义的 M 是从 BMO(Q_0) 到 BLO(Q_0) 的有界映射，见 [6]。

本文旨在将已有的 BMO(Q_0) 和 VMO(Q_0) 结果推广到分数阶极大函数。我们在更一般的有界倍增度量测度空间框架下开展研究。近几十年来，度量测度空间上的分析学已成为一个活跃的研究领域，研究表明，分析学和一阶微积分的许多基本方面都能够有效且富有成效地推广到不具备线性或可微结构的空间中。当测度具有倍增性时，见定义 2.1，许多经典的

调和分析结果都可以推广到这一框架中。特别是，Hardy-Littlewood-Weiner 定理的一个类似结果成立，因而 Lebesgue 微分定理也成立，见 [27,定理 1.8 和 2.2]。

在度量测度空间 (X, d, μ) 这一一般情形下，只需将立方体替换为球 $B \subset X$，便可自然推广 BMO(X) 和 BLO(X) 的定义。然而，对于小振荡平均(X)这一子空间，则需要作出选择。可以通过考察测度趋于零的球来推广小振荡平均(X)；但是，与欧几里得情形不同，这并不等同于考察半径趋于零的球。我们选择以半径趋于零来定义，这是因为它与分数阶极大函数以及函数连续性性质之间的联系更为直观。第 3 节专门讨论当 μ 是倍增测度时，如此定义的小振荡平均的一些基本性质；事实上，我们能够在定理 3.9 中证明，按照此定义的小振荡平均(X)满足 Sarason 定理的一个类似结果。

本文主要篇幅用于第 4 节，研究 M^α 在函数空间上的作用。对于 BMO 结果（见定理 4.2 ），我们要求测度具有倍增性，并且如果 $\alpha > 0$，则空间有界；另一方面，VMO 结果（见定理 4.4）还要求测度满足环带衰减性质，见定义2.7。已知这一性质是极大函数将利普希茨函数映射为利普希茨函数的必要且充分条件，见 [11]。本文的主要结果总结如下。

定理 1.1. 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，且 $\alpha \geq 0$。当 $\alpha > 0$ 时，我们假设 (X, d, μ) 有界，且下质量界指数为 Q。若 $0 \leq \alpha < Q$，则M^α 是从 BMO(X) 到 BLO(X) 的有界映射。此外，若 μ 满足环带衰减条件，则 M^α 将 VMO(X) 映射到其自身。

作为该定理的一个欧几里得推论，我们得到如下结果，见推论 4.7。

推论 1.2. 设 $0 \leq \alpha < n$ 和 $f \in$ 属于 BMO(Q_0)，其中 $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ 是某个固定的立方体。那么，$M^\alpha f \in$属于 BLO(Q_0)，且 $\|M^\alpha f\|_{\mathrm{BLO}} \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}}$，其中 C取决于 n和 α。此外，若$f \in$ 属于 VMO(Q_0)，则 $M^\alpha f \in$ 属于 VMO(Q_0)。

该定理通过将 BMO –BLO 结果推广到分数阶极大函数，补充了文献中已知的 $\alpha = 0$结果。然而，对于 VMO –VMO 结果，即使在 $\alpha = 0$的情形下，这也是新的，补充了 [43] 关于 VMO($\mathbb{R}^n$) 的结果。

一般而言，对于非线性算子，有界性并不意味着连续性。一个有界但不连续的非线性算子的最著名例子是对称递减重排；它在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 上有界，其中 $1 \leq p < \infty$ 为任意维数，但除非 $n = 1$，否则不连续，见 [4, 17]。同一算子在有界平均振荡空间 BMO($\mathbb{R}^n$) 上有界，见 [12], ，但并不连续，即使 $n = 1$ 也如此，见 [13]。由于 Hardy-Littlewood 极大函数是逐点次线性的， M^α 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性可由其有界性立即推出。在 Sobolev 空间中，文献 [36] 证明了 M 是从

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 到 $W^{1,p^*}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射。关于 M 在有界平均振荡空间 BMO($\mathbb{R}^n$) 上的连续性问题，近期文献 [43], 对此进行了探讨，并构造了一个反例。在第 5 节中，我们在 $n = 1$ 时给出一个更简单的例子，并且还证明，当 X 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间时， M^α 在 BMO(X) 和小振荡平均空间 VMO(X) 上不连续。

顺便提一下，关于当 $p = 1$ 时极大函数在 Sobolev 空间及相关空间上的行为，目前已有大量研究。显然， M 不能将 $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 映射到其自身，因为非零 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数在 M 作用下的像必定不可积。所谓的 $W^{1,1}$ 猜想最早由 [25], 提出，探讨映射 $f \mapsto |\nabla M f|$ 是否从 $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界。 [46] 在维数为 1 时肯定地证明了这一猜想；最近， [49] 在任意维数下证明了关于相对于立方体定义的 M 的这一猜想。关于这一端点情形下极大函数正则性的文献浩如烟海；例如，参见 [3, 5, 14, 23, 38, 48]。

2. 预备知识

本文中，(X, d, μ) 始终表示一个度量测度空间。也就是说，(X, d) 是一个配备了博雷尔测度 μ 的度量空间，并且该测度满足：对于所有半径为正且有限的球 $B \subset X$ ，都有 $0 < \mu(B) < \infty$ 。显然，这样的测度是 σ-有限的；此外还可推出，(X, d) 是可分的，例如参见 [28, 引理 3.3]30 。在全文中，我们将假设球带有指定的中心和半径，以避免由于同一个球通常并非唯一对应于某个中心和半径而产生的歧义。有时将使用记号 $\mathrm{rad}(B)$ 表示这一指定的半径。对于一个常数 $C > 0$，将使用记号 CB 表示这样一个球：其中心与 B 相同，但半径等于 $C\mathrm{rad}(B)$。我们还将假设 X 包含多于一个点。

在本文中，我们用 C 表示一个常数，除非另有说明，该常数取决于倍增常数（见下文）。这里不关心 C 的确切取值；即使在同一行中，它在每次出现时也可能不同。对于量 A 和 B，我们用记号 $A \lesssim B$ 表示存在这样一个常数 $C > 0$ ，使得 $A \leq CB$。

2.1. 倍增测度。

本小节将定义若干在后续结果中会用到的重要测度类别。其中首要的一类是满足倍增条件的测度。

定义 2.1. 若存在一个常数 $C_\mu \geq 1$，称为 μ 的倍增常数，使得 μ 是倍增测度。

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_\mu \, \mu(B(x, r))$$

对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < \infty$ 均成立。若 (X, d, μ) 是度量测度空间，且 μ 是倍增测度，则称 (X, d, μ) 为倍增度量测度空间。

倍增测度在度量测度空间的分析学中发挥着重要作用。特别地，若一个度量空间配备了倍增测度，则由此可得，

Lebesgue 微分定理成立，见 [27, 第 1] 章。在这类度量空间中，还可得到 Hardy-Littlewood 极大函数的标准 L^p 有界性以及 John-Nirenberg 不等式，例如参见 [8, 第 3] 章。

注 2.2. 由于我们假设 X 包含多个点，因此有$C_\mu \geq 2$，见 [44]。

引理 2.3. [8,引理 3.3] 测度 μ 是倍增的，当且仅当存在一个指数$Q \geq 0$ 和一个常数 $0 < c \leq 1$ 使得

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(y,R))} \geq c\left(\frac{r}{R}\right)^Q \tag{2.1}$$

对所有 $y \in X$、 $x \in B$（y、 R）以及 $0 < r \leq R < \infty$均成立。

满足 (2.1) 的测度称为满足相对下质量界，且 Q 称为该测度的相对下质量界指数。指数 Q 在倍增度量测度空间中起到维数的作用。

注 2.4. 如 (2.1) 中的 $r \leq R$ 所示，增大 Q 的值会使不等式右侧变小。因此，我们可以不失一般性地假设 $Q > 0$。

另一种重要的测度是满足前一定义的某种全局类似形式的测度。

定义 2.5. 若存在某个常数 $0 < c_L \leq 1$，使得测度 μ满足下质量界，且下质量界指数为 $Q > 0$，则称该测度满足下质量界

$$\mu(B(x,r)) \geq c_L\, r^Q \tag{2.2}$$

对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < 2\mathrm{diam}(X)$,

注意，若 (X, d, μ) 是有界倍增度量测度空间，则取充分大的 R，例如 $R = 2\mathrm{diam}(X)$，由 μ 上的倍增条件可知 $\mu(X) < \infty$。此外，相对下质量界可进一步提升为具有相同指数的下质量界，但此时 c_L 取决于 $\mathrm{diam}(X)$、 $\mu(X)$ 和 Q。然而，有界空间上的倍增测度并非唯一满足 (2.2) 的测度。若存在某个 $C \geq 1$，使得对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < 2\mathrm{diam}(X)$， $C^{-1}r^Q \leq \mu(B(x,r)) \leq Cr^Q$ 成立，则称测度是 Ahflors Q-正则的，其中 $Q > 0$ 为某个给定值。这类测度未必有限，但满足下质量界与倍增性的某种组合。

注 2.6. 上一段指出，若一个倍增度量测度空间有界，则其总测度有限。事实上，反过来结论也成立，见 [10, 引理 1.9]。

定义2.7. 若存在一个指数 $0 < \beta \leq 1$ 和一个常数 $C_\beta \geq 1$ ，使得测度 μ 满足环带衰减性质，则称该测度满足环带衰减性质。

$$\mu(B(x,R) \setminus B(x,r)) \leq C_\beta \left(\frac{R-r}{R}\right)^\beta \mu(B(x,R)) \tag{2.3}$$

对所有 $x \in X$ 和 $0 < r \leq R < \infty$。

该概念最初于 [16, 第 125]页在流形的情形下引入，并于 [11] 在度量空间的情形下引入。该概念或其变体已在分数阶极大函数 [29], 、Hardy不等式和 Tb 定理 [22, 40], 、Muckenhoupt权和反向 H¨older 类 [33, 34], ，以及位势理论和容量估计 [2, 9]等方面得到研究。本文探讨其与由平均振荡定义的某些空间上的极大函数行为之间的联系。

注 2.8. 尽管一般的倍增测度未必满足环带衰减性质，但如果 μ 是倍增的，且(X, d)是长度空间，那么 μ 确实满足环带衰减性质 [11,推论 2.2]。

2.2. 离散卷积。在倍增度量测度空间的背景下，我们可以定义函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$的所谓离散卷积。作为欧几里得调和分析中通常光滑卷积的度量测度类比，离散卷积通过在固定尺度的球上的平均值来逼近 f 的局部行为。

构造 f 的离散卷积的第一步是以下覆盖引理。例如，参见 [24, 附录 B。7] 和 [28, 第 3 章。3]。

引理 2.9. 设 μ 具有倍增性。对于任意 $\delta > 0$，存在一个由球构成的可数覆盖 $\{B_i\}$ ，覆盖 X ，且满足 $\mathrm{rad}(B_i) = \delta$，使得集合族 $\{\frac{1}{5}B_i\}$ 两两不交。此外，对于所有 $K > 0$，集合族 $\{KB_i\}$ 具有有界重叠，具体而言，存在一个常数 $C \geq 1$，依赖于 K 和 C_μ，使得

$$\sum_i \chi_{KB_i} \leq C\,.$$

有了这个覆盖，我们便可以如下构造一个从属于它的 Lipschitz 单位分解。例如，也可参见 [24, 附录 B。7],。

引理 2.10. 设 μ 具有倍增性， $\delta > 0$，且 $\{B_i\}$ 是由引理 2.9 给出的 X 的一个可数覆盖。存在一个常数 $C \geq 1$ ，使得对每个 i，都存在一个 C/δ-利普希茨函数φ_i ，满足 $0 \leq \varphi_i \leq 1$、$\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset 2B_i$ 和 $\sum_i \varphi_i \equiv 1$。这里，常数 C 仅依赖于 C_μ.

现在，我们具备了定义当 μ 具有倍增性时，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 在尺度 $\delta > 0$ 下的离散卷积所需的工具。令 $\{B_i\}$ 为引理 2.9 给出的可数覆盖，并令

$\{\varphi_i\}$ 为引理 2.10 给出的从属于该覆盖的单位分解。我们将 f 的离散卷积定义为函数

$$f_\delta := \sum_i f_{B_i}\varphi_i\,, \tag{2.4}$$

其中，对任意具有正且有限测度的 μ-可测集 $A \subset X$，我们采用记号 $f_A := \fint_A f\,d\mu$。由覆盖的有界重叠可知，定义 f_δ 的和是局部有限和，因此 $f_\delta \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$，即 X 上局部利普希茨函数的空间。

2.3. 平均振荡。本小节定义所有由平均振荡定义的函数空间中最基本的一个：BMO。BMO 最早于 [30] 中针对 $\mathbb{R}^n$ 里的立方体上的函数提出，是有界平均振荡函数构成的空间。该空间在调和分析和偏微分方程领域发挥着关键作用，因为 L^∞ 往往过于病态，因此需要用它替代，作为 L^p 尺度的端点，如 $p \to \infty$ 所示。

尽管 [30] 中的原始定义涉及度量 $\mathbb{R}^n$ 中固定立方体的子立方体上局部可积函数的平均振荡，也可以在整个 $\mathbb{R}^n$ 上考虑该空间。此外，也可以选择在球上而非立方体上度量平均振荡，由此得到的空间与基于立方体定义的空间同构。这便引出了 BMO 的一种定义，在度量空间的语境下更为自然，而且至少可以追溯到 [15]。

定义 2.11. 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 且 $1 \le p < \infty$。p的 f 在球 $B \subset X$ 上的平均振荡定义为

$$\mathcal{O}_p(f,B) := \left(\fint_B |f - f_B|^p\,d\mu \right)^{1/p},$$

其中 $f_B := \fint_B f\,d\mu$。记作 $\mathcal{O} := \mathcal{O}_1$。

对于固定的球 B，给 f 加上一个常数不会改变其 p平均振荡。此外，$\mathcal{O}_p(f,B) = 0$ 当且仅当 f 在 B 上几乎处处等于某个常数。

定义 2.12. 我们称 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 关于 $1 \le p < \infty$ 具有有界 p平均振荡，记作 $f \in \mathrm{BMO}^p(X)$，如果

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^p(X)} := \sup_{B \subset X} \mathcal{O}_p(f,B) < \infty\,.$$

记 $\mathrm{BMO}(X) := \mathrm{BMO}^1(X)$。

与 p-平均振荡本身一样，给函数 f 加上一个常数$\|f\|_{\mathrm{BMO}^p(X)}$ 不会改变它。此外，$\|f\|_{\mathrm{BMO}^p(X)} = 0$当且仅当 f几乎处处等于某个常数时成立。因此，严格来说，这只是一个半范数，不过我们仍常称其为有界平均振荡范数。

我们先介绍一些关于有界平均振荡及其范数的基本事实，这些事实将在后续章节中用到。根据三角不等式和 Jensen 不等式，

$$\fint_B |f - f_B|^p \, d\mu \leq 2^p \fint_B |f - K|^p \, d\mu \tag{2.5}$$

对于任意常数 K。取 $K = 0$，容易看出，若 $f \in L^\infty(X)$，则 $f \in$ 有界平均振荡$^p(X)$，其中 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^p(X)} \leq 2\|f\|_{L^\infty(X)}$。此外，由詹森不等式，对于任意球 $B \subset X$，

$$\frac{1}{2^p} \fint_B \fint_B |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(x) d\mu(y) \leq \fint_B |f - f_B|^p \, d\mu \leq \fint_B \fint_B |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(x) d\mu(y).$$

下面的引理使我们能够比较 BMO 函数在嵌套球上的平均值之差。在倍增度量测度空间的情形下，可参见 [47,引理 15]，另见 [26, 引理 7.1]。

引理 2.13。设 μ 具有倍增性，且 $f \in$有界平均振荡(X)。存在一个常数 $C \geq 1$，使得对任意两个球 $B_0 := B(x_0, r_0) \subset B(x_1, r_1) =: B_1$，

$$|f_{B_1} - f_{B_0}| \leq C \log\left(\frac{C\, r_1}{r_0}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}.$$

注 2.14。当 μ 具有倍增性时，有界平均振荡(X)满足 John-Nirenberg 不等式，这意味着对于所有 $1 < p < \infty$ [8, ，有界平均振荡$^p(X) \cong$ 有界平均振荡(X)，参见第 3.3 章、3.4]。

我们还需要定义以下概念。通过在 (2.5) 中取 $K = \operatorname{essinf}_B f$ in，可以看出它是 BMO(X) 的一个子类。

定义 2.15. 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$具有有界下振荡，记作 $f \in$BLO(X)，则称之为

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}(X)} := \sup_{B \subset X} \fint_B [f - \operatorname*{ess\,inf}_B f] \, d\mu < \infty \, .$$

3. Vanishing Mean Oscillation

BMO$(\mathbb{R}^n)$的一个重要子空间是消失平均振荡函数空间，记作 VMO$(\mathbb{R}^n)$。Sarason 首先在 [42], 中定义了这个空间，并证明了它的许多性质；特别是，VMO 与一致连续函数在 BMO 范数下的闭包重合。据作者所知，VMO 在度量测度空间中的情形极少受到研究。在本节余下部分，我们假设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，并证明 VMO(X) 的一些基本性质，其中包括 Sarason 上述结果的一个类似结论。

定义 3.1. 我们将 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 的振荡模定义为

$$\omega_p(f, r) := \sup_{\mathrm{rad}(B) \leq r} \mathcal{O}_p(f, B) \, ,$$

其中，上确界取遍半径不超过 r 的所有球 $B \subset X$ 。

定义 3.2。若 $f \in$BMO$^p(X)$ 属于 VMO$^p(X)$，则称其为

$$\omega_p(f,0) := \lim_{r\to 0^+} \omega_p(f,r) = 0\,.$$

我们将 VMO(X) 定义为：$=$VMO$^1(X)$。

请注意，我们选择用半径趋于零的球来定义 VMO$^p(X)$。同样也可以定义一个类似的空间，其中平均振荡消失发生在测度趋于零的球上，我们将其记为 VMO$^p_\mu$ (X)。VMO$^p(X)$ 和 VMO$^p_\mu(X)$ 先验上是不同的，$p=1$ 以下例说明了这一点。

例 3.3。考虑 $X=[0,\infty)$，赋予欧几里得度量，并定义权函数$\omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\chi_{I_n}$，其中 $I_n=[n,n+1)$ 对任意非负整数 n 均成立。这是一个倍增权函数，我们赋予 X 测度 $d\mu(x)=\omega(x)\,dx$，其中 dx 表示 X 上的勒贝格测度。记 $\mathcal{O}_\omega$ 为相对于测度 μ 取的平均振荡，记 $\mathcal{O}$ 为相对于勒贝格测度取的平均振荡。

For

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1/2\\ -2x+2, & 1/2\le x<1,\end{cases}$$

对每个非负整数 n，令 $f_n(x)=g(x-n)$，然后定义 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$。注意，每个函数 f_n 仅在区间 I_n上非零，在该区间上 ω 为常数，并且各区间 $\{I_n\}$ 两两不相交。因此，根据平均振荡的性质，对于每个 n，我们有

$$\mathcal{O}_\omega(f,I_n)=\mathcal{O}_\omega(f_n,I_n)=\mathcal{O}(f_n,I_n)=\mathcal{O}(g,I_0)=\frac{1}{4}.$$

由此可知，$f\notin$VMO$_\mu(X)$。事实上，由于 $\mu(I_n)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 关于 n递减，对于每个 $0<r<1$，我们有

$$\sup_{\mu(I)\le r}\mathcal{O}_\omega(f,I)\ge\sup_{n\ge r^{-2}}\mathcal{O}_\omega(f,I_n)=\frac{1}{4}>0.$$

根据构造，f 是一个有界的 2-利普希茨函数，因此可得 $f\in$VMO(X)。事实上，有界性意味着 $f\in$BMO(X)，而利普希茨条件意味着，对于任意半径至多为 $r>0$ 的区间 I，我们有

$$\mathcal{O}_\omega(f,I)\le \fint_I\fint_I|f(x)-f(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\le 2\ell(I)\le 4r.$$

因此，$f\in$ VMO$(X)\setminus$ VMO$_\mu(X)$。

例 3.4. 考虑与上一个例子相同的设定，但这次取倍增权函数 $\omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\chi_{I_n}$ 和 $f_n(x)=g((n+1)(x-n^2))$。定义 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$。每个函数 f_n 仅在区间 $I'_{n^2}=[n^2,n^2+\frac{1}{n+1}),n\ge 1$ 上非零，并且这些区间 $\{I'_{n^2}\}$ 彼此不相交。每个 I'_{n^2} 都是 I_{n^2} 的子区间，在

其上 ω 再次为常数。和之前一样，根据平均振荡的性质，对于每个 n，我们有

$$\mathcal{O}_\omega(f, I'_{n^2}) = \mathcal{O}_\omega(f_n, I'_{n^2}) = \mathcal{O}(f_n, I'_{n^2}) = \mathcal{O}(g, (0,1)) = \frac{1}{4}.$$

由此可知 $f \notin$小振荡平均(X)。事实上，由于 $\text{rad}(I'_{n^2}) = 2^{-1}(n+1)^{-1}$ ~~关于~~ n递减，对于每个 $0 < r < 1/2$，我们有

$$\sup_{\text{rad}(I)\le r} \mathcal{O}_\omega(f, I) \ge \sup_{n \ge (2r)^{-1}} \mathcal{O}_\omega(f, I'_{n^2}) = \frac{1}{4} > 0.$$

对于 $0 < r < 1/2$，考虑一个区间 I，使得 $0 < \mu(I) < r$。我们声称 I 至多与 $\{I'_{n^2}\}_{n\ge1}$中的一个相交。为证明这一点，首先注意到 I 至多能与$\{I_n\}_{n\ge1}$中的两个相交；否则，I包含某个 I_m，其中 $m \ge 1$，从而 $r \ge \mu(I) \ge \mu(I \cap I_m) = (m+1) > 1/2$。因此，若 I与 I_m 相交，其中 $m \ge 1$，则要么 $I \subset I_m$，要么它恰好与 I_{m-1}或 I_{m+1}中的一个相交。在这些情况下，我们都有 $r \ge \mu(I) \ge m\ell(I)$，因此 $\ell(I) \le r/m < 1/2$。特别地，若 I 与 I'_{k^2}相交，则它与 I_{k^2} 相交，从而 $\ell(I) \le r/k^2 < 1/2$。由 $\{I'_{n^2}\}$的分离性，可得该结论。

固定 $0 < r < 1/2$ 和一个区间 I，使得 $0 < \mu(I) < r$。现在，假设对于某个 $k \ge 1$，I 与 I'_{k^2} 相交。由上可知，$\ell(I) \le r/k^2$，且 I 不可能与其他任何一个 $\{I'_{n^2}\}$ 相交。因此，由于 f 在 I'_{k^2} 上是 $2(k+1)$- 利普希茨的，它在 I 上也同样是 $2(k+1)$- 利普希茨的，于是我们有

$$\mathcal{O}_\omega(f, I) \le \fint_I \fint_I |f(x) - f(y)| d\mu(y) d\mu(x) \le 2(k+1)\ell(I) < \frac{2(k+1)r}{k^2} \le 4r.$$

如果 I 不与任何一个 $\{I'_{n^2}\}$ 相交，那么 $\mathcal{O}_\omega(f, I) = 0$，因为 f 仅在区间 $\{I'_{n^2}\}$ 上非零。无论哪种情况，对于所有满足 $\mu(I) < r$ 的区间 I，都有 $\mathcal{O}_\omega(f, I) \le 4r$，因此 $f \in$ 小振荡平均 $\mu(X)$。所以，$f \in$ 小振荡平均 $\mu(X) \setminus$ 小振荡平均(X)。

另一方面，当 μ 对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < 2\,\text{diam}(X)$ 满足 $r^{Q_2} \lesssim \mu(B(x, r))$，且某个 $Q_2 > 0$ 时，$\text{VMO}^p(X) \subset \text{VMO}^p_\mu(X)$；类似地，当 μ 对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < 2\,\text{diam}(X)$ 满足 $\mu(B(x, r)) \lesssim r^{Q_1}$，且某个 $Q_1 > 0$ 时，$\text{VMO}^p_\mu(X) \subset \text{VMO}^p(X)$。特别地，当 μ 是 Ahlfors Q-正则，或当 μ 是有界连通度量空间上的倍增测度时，这两个空间重合（这是将 $X\text{diam}(X)$ 代入 [8, 引理 3.3 和推论 3.8] 得出的）。本节旨在说明消失平均振荡与连续函数之间的关系，因此选择 $\text{VMO}(X)$ 更为自然。

命题 3.5. 对于 $1 \le p < \infty$，小振荡平均$^p(X)$ 在有界平均振荡$^p(X)$ 中是闭的。

证明. 取一个序列 $\{f_n\} \subset$ 小振荡平均$^p(X)$，使得 $f_n \to f$ 属于有界平均振荡$^p(X)$。固定 n，由三角不等式可知，对于任意球 $B \subset X$，

$$\mathcal{O}_p(f, B) \le \mathcal{O}_p(f_n, B) + \mathcal{O}_p(f - f_n, B) \le \mathcal{O}_p(f_n, B) + \|f - f_n\|_{\text{BMO}^p(X)}.$$

固定 $r>0$ 并对所有满足 $\mathrm{rad}(B)\le r$ 的球取上确界，可得 t

$$\omega_p(f,r)\le \omega_p(f_n,r)+\|f-f_n\|_{\mathrm{BMO}^p(X)}.$$

首先，令 $r\to 0^+$ 趋于极限，可得

$$\omega_p(f,0)\le \omega_p(f_n,0)+\|f-f_n\|_{\mathrm{BMO}^p}=\|f-f_n\|_{\mathrm{BMO}^p(X)}$$

因为 $f_n\in$ 小振荡平均$^p(X)$。接下来，令 $n\to\infty$ 趋于极限，可得 $\omega_p(f,0)=0$，从而$f\in$小振荡平均$^p(X)$。

这表明小振荡平均$^p(X)$ 在有界平均振荡$^p(X)$ 中是闭的。由于当 $1<p<\infty$ 时，有界平均振荡$^p(X)\cong$ 有界平均振荡(X)，参见注 2.14，因此小振荡平均$^p(X)$ 在有界平均振荡(X) 中也是闭的。□

下文中，我们用 $C_u(X)$ 表示 X 上一致连续函数构成的空间。所有闭包均指相对于有界平均振荡(X) 范数而言。

引理 3.6. 若 $1\le p<\infty$, $C_u(X)\cap$ 属于有界平均振荡(X)，则 $\subset$ 属于小振荡平均$^p(X)$。

证明. 设 $f\in C_u(X)$ 属于有界平均振荡(X)。由 f 的一致连续性可知，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$，使得当 $d(x,y)<r$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。对于半径不超过 $r/2$ 的任意球 B，

$$\mathcal{O}_p(f,B)\le\left(\fint_B\fint_B|f(x)-f(y)|^p\,d\mu(x)\,d\mu(y)\right)^{1/p}<\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 趋于……，可得

$$\omega_p(f,0)=\lim_{r\to0^+}\sup_{\mathrm{rad}(B)\le r/2}\mathcal{O}_p(f,B)=0.$$

由命题 3.5 即得结论。 □

引理 3.7. 对于 $f\in$属于有界平均振荡(X) 且 $\delta>0$，存在常数 $C>0$，仅依赖于 μ 的倍增常数，使得在 (2.4) 中定义的离散卷积 f_δ 在局部一致地为 $\frac{C\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}}{\delta}$-利普希茨，即若 $d(x,y)<\delta$，则有

$$|f_\delta(x)-f_\delta(y)|\le\frac{C}{\delta}\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}\,d(x,y). \tag{3.1}$$

特别地，f_δ 是一致连续的。

证明。我们可以假设 f 并非几乎处处为常数；否则，f_δ 处处等于该常数，结论即得。特别地，此时有 $\|f\|_{\mathrm{BMO}}>0$。

对于 $x,y\in X$ 使得 $d(x,y)<\delta$，令 $I_{x,y}:=\{i\in\mathbb{N}:\ x\in 2B_i$ 或 $y\in 2B_i\}$。由引理 2.9 中关于 $K=2$ 的球的有界重叠性质可知，$I_{x,y}$ 是一个有限集，其基数与 δ 无关。根据引理 2.10 中单位分解的构造，

$$|f_\delta(x)-f_\delta(y)|=\left|\sum_{i\in I_{x,y}}(f_{B_i}-f_{B_{i_0}})(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))\right|\le\sum_{i\in I_{x,y}}|f_{B_i}-f_{B_{i_0}}||\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|$$

对于任意 $i_0 \in I_{x,y}$。

~对于 $i, i_0 \in I_{x,\,y}$，我们可以取一个半径为 4δ 的球 B，使其包含 B_i 和 B_{i_0}。由倍增性可得

$$|f_{B_i} - f_{\widetilde{B}}| \leq \fint_{B_i} |f - f_{\widetilde{B}}|\, d\mu \lesssim \fint_{\widetilde{B}} |f - f_{\widetilde{B}}|\, d\mu \leq \|f\|_{\mathrm{BMO}}$$

并且对 $|f_{B_{i_0}} - f_{\widetilde{B}}|$ 也有类似的不等式。因此，$|f_{B_i} - f_{B_{i_0}}| \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$。由此、$\varphi_i$ 的 Lipschitz 性质，以及指标属于 $I_{x,\,y}$ 的球的有界重叠性，可得 (3.1)。□

引理 3.8. 对于 $1 \leq p < \infty$，小振荡平均 $\mathrm{VMO}^p(X) \subset C_u(X) \cap$有界平均振荡 $\mathrm{BMO}(X)$。

证明。证明该引理只需说明存在一个常数 $C \geq 1$，其仅依赖于 C_μ，使得对所有 $f \in \mathrm{BMO}(X)$，$\mathrm{dist}(f, C_u(X) \cap \mathrm{BMO}(X)) \leq C\,\omega_p(f, 0)$，其中距离是相对于 $\mathrm{BMO}(X)$-范数而言的。为此，固定 $f \in \mathrm{BMO}(X)$ 并$\varepsilon > 0$. 选取 $r > 0$ 使得

$$\sup_{\mathrm{rad}(B) \leq 7r} \mathcal{O}_p(f, B) < \omega_p(f, 0) + \varepsilon. \tag{3.2}$$

接下来，我们考虑 f 在尺度 $\delta = r$ 下的离散卷积，其对应的覆盖为 $\{B_i\}$，单位分解为 $\{\varphi_i\}$，并旨在证明 $\|f - f_\delta\|_{\mathrm{BMO}(X)}$ 受 $\omega_p(f, 0)$ 控制。

考虑一个球 $B \subset X$，满足 $\mathrm{rad}(B) \leq \delta$。对于 x、$y \in B$，令 $I_{x,\,y} := \{i \in \mathbb{N} : x \in 2B_i$ 或 $y \in 2B_i\}$. 对任意 $i_0 \in I_{x,\,y}$，由单位分解、倍增性和 H¨older 不等式的性质可知

$$\begin{aligned}
|f_\delta(x) - f_\delta(y)| &\leq |f_\delta(x) - \sum_i f_{B_{i_0}} \varphi_i(x)| + |\sum_i f_{B_{i_0}} \varphi_i(y) - f_\delta(y)| \\
&\leq \sum_i \varphi_i(x) |f_{B_i} - f_{B_{i_0}}| + \sum_i \varphi_i(y) |f_{B_i} - f_{B_{i_0}}| \\
&\lesssim \sum_{i \in I_{x,y}} |f_{B_i} - f_{B_{i_0}}| \\
&\lesssim \sum_{i \in I_{x,y}} \fint_{7B_{i_0}} |f - f_{7B_{i_0}}|\, d\mu \\
&\leq \sum_{i \in I_{x,y}} \left(\fint_{7B_{i_0}} |f - f_{7B_{i_0}}|^p\, d\mu \right)^{1/p} \\
&\lesssim \omega_p(f, 0) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

最后一个不等式由满足 (3.2) 的 δ 的选取以及有界重叠得出。事实上，$d(x, y) < 2\delta$ 意味着 $I_{x,\,y}$ 至多包含 C 个元素，其中某个常数 $C \geq 1$ 依赖于 C_μ，但与 δ 无关。由 H¨older 不等式和 (3.2),

$$\mathcal{O}(f - f_\delta, B) < \omega_p(f, 0) + \varepsilon + \fint_B \fint_B |f_\delta(x) - f_\delta(y)|\, d\mu(y)\, d\mu(x) \lesssim \omega_p(f, 0) + \varepsilon \tag{3.3}$$

对于满足 rad(B) $\leq \delta$. 的球 B

现在考虑 $B \subset X$ 是一个球且 rad(B) $> \delta$. 的情形。令 $I_B := \{i \in \mathbb{N}:$ $B \cap B_i \neq \varnothing\}$，并且对于 $i \in I_B$，令 $I_i := \{j \in \mathbb{N}:\ 2B_j \cap B_i \neq \varnothing\}$. 。由单位分解、倍增性和 H¨older 不等式的性质可知，对于 $i \in I_B$,

$$\begin{aligned}
\fint_{B_i} |f - f_\delta|\,d\mu = \fint_{B_i} |f - \sum_j f_{B_j}\varphi_j|\,d\mu &\leq \sum_j \fint_{B_i} \varphi_j(x)|f(x) - f_{B_j}|\,d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j\in I_i} \fint_{B_i} |f - f_{B_j}|\,d\mu \\
&\lesssim \sum_{j\in I_i} \fint_{4B_i} |f - f_{4B_i}|\,d\mu \\
&\lesssim \sum_{j\in I_i} \left(\fint_{4B_i} |f - f_{4B_i}|^p\,d\mu\right)^{1/p} \\
&\lesssim \omega_p(f,0) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

同样，最后一个不等式由 δ 的选取以及以下事实得出：存在一个依赖于 C_μ 的常数 $C \geq 1$, 使得根据有界重叠性质， I_i 至多包含 C 个元素。

注意到 $B \subset \bigcup_{i\in I_B} B_i \subset 2B$，因此，由倍增性以及集合 $\{\frac{1}{5}B_i\}$ 两两不相交这一事实,

$$\begin{aligned}
\fint_B |f - f_\delta|\,d\mu \leq \sum_{i\in I_B} \frac{\mu(B_i)}{\mu(B)} \fint_{B_i} |f - f_\delta|\,d\mu &\lesssim \frac{\omega_p(f,0)+\varepsilon}{\mu(B)} \sum_{i\in I_B} \mu(B_i) \\
&\lesssim \frac{\omega_p(f,0)+\varepsilon}{\mu(B)} \sum_{i\in I_B} \mu\left(\frac{1}{5}B_i\right) \\
&\leq \frac{\omega_p(f,0)+\varepsilon}{\mu(B)} \mu(2B) \\
&\lesssim \omega_p(f,0) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，由 (2.5) 可得

$$\mathcal{O}(f - f_\delta, B) \leq 2 \fint_B |f - f_\delta|\,d\mu \lesssim \omega_p(f,0) + \varepsilon \tag{3.4}$$

对于满足 rad(B) $> \delta$. 的球 B

结合 (3.3) 和 (3.4)，可得

$$\|f - f_\delta\|_{\mathrm{BMO}(X)} \lesssim \omega_p(f,0) + \varepsilon.$$

由于 $f \in$ BMO(X)，根据注 2.14，右端有限，因此 $f_\delta - f \in$ BMO(X)。由此 $f_\delta = f + ($ $f_\delta - f) \in$ BMO(X)。此外，由于根据引理 3.7 有 $f_\delta \in C_u(X)$，可得

that

$$\operatorname{dist}(f, C_u(X) \cap \mathrm{BMO}(X)) \lesssim \omega_p(f, 0) + \varepsilon,$$

因此，取 $\varepsilon \to 0$ 即得所需结果。 □

组合 引理 3.6 和 3.8 相结合，得到以下对小振荡平均$^p(X$).

定理 3.9。对于 $1 \le p < \infty$，小振荡平均$^p(X) = C_u(X) \cap$ 有界平均振荡(X)。

这一结果的直接推论如下。

推论 3.10。对于 $1 \le p < \infty$，小振荡平均$^p(X)$ = 小振荡平均(X)。

4. The Fractional Maximal Function Acting on Function Spaces

与上一节一样，(X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，其倍增常数为 C_μ。对于函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 和 $\alpha \ge 0$，定义如下极大函数：

$$M^\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} \operatorname{rad}(B)^\alpha \fint_B |f| \, d\mu \,,$$

其中，上确界取遍所有包含点 $x \in X$ 且满足$0 <$ rad$(B) < 2$diam(X) 的球 $B \subset X$。当 $\alpha = 0$ 时，$Mf := M^0 f$ 是标准的（非中心）Hardy-Littlewood 极大函数。当 $\alpha > 0$ 时，$M^\alpha f$ 称为分数阶极大函数。容易看出，$M^\alpha f$ 是下半连续的，因此是可测的。不过，对于一般的局部可积函数，即使 $\alpha = 0$，也不能排除 $M^\alpha f$ 恒等于无穷大的可能。

对于 $\alpha > 0$，我们还需要附加假设，即 (X, d, μ) 满足指数为 Q 的下质量界，见 (2.2)，并将 M^α 的定义限制为 $0 < \alpha < Q$。对于 $\alpha = 0$，测度具有倍增性即可。

M^α 的一个重要特性是它逐点次线性。也就是说，对于 $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 和 $x \in X$, $M^\alpha(f + g)(x) \le M^\alpha f(x) + M^\alpha g(x)$。由此可得

$$M^\alpha f(x) \le M^\alpha (f - g)(x) + M^\alpha g(x)$$

and

$$M^\alpha g(x) \le M^\alpha (g - f)(x) + M^\alpha f(x) = M^\alpha (f - g)(x) + M^\alpha f(x),$$

因此，若 $M^\alpha f(x) < \infty$ 且 $M^\alpha g(x) < \infty$，则

$$|M^\alpha f(x) - M^\alpha g(x)| \le M^\alpha (f - g)(x). \tag{4.1}$$

由命题 4.1 可知，对于某个 $1 \le p < \infty$，该不等式对 $f, g \in L^p(X)$ 几乎处处成立。

4.1. 勒贝格空间。为了研究 M^α 在 BMO(X) 和 VMO(X) 上的行为，我们必须先了解它在 $L^p(X)$ 空间上的行为。这是下述定理的内容，该定理将在后续章节中用到，其证明见 [26, 第 3] 节。他们证明的是一个略有不同的分数阶极大函数，在倍增度量测度空间中，它与此处讨论的函数等价；为方便读者，我们在此精确的设定下重现其论证。

为简化记号，我们定义一个依赖于 p、α 和 Q 的参数 p^*。对于 $0 \le \alpha \le Q/p$ 和 $1 < p < \infty$，定义 $p \le p^* \le \infty$ 为

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{\alpha}{Q}. \tag{4.2}$$

命题 4.1. 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，$\alpha \ge 0$，且 $1 \le p < \infty$。当 $\alpha > 0$ 时，我们假设 (X, d, μ) 满足指数为 Q 的下质量界。

若 $p = 1$ 且 $0 \le \alpha < Q$，则

$$\mu(\{x \in X : M^\alpha f(x) > t\})^{\frac{Q-\alpha}{Q}} \le \frac{C \|f\|_{L^1(X)}}{t}$$

对所有 $f \in L^1(X)$ 均成立，其中 $C \ge 1$ 依赖于 C_μ，并且当 $0 < \alpha < Q$ 时还依赖于 c_L 和 α。也就是说，M^α 是弱型 $(1, \frac{Q}{Q-\alpha})$。

若 $1 < p < \infty$ 且 $0 \le \alpha \le Q/p$，则

$$\|M^\alpha f\|_{L^{p^*}(X)} \le C \|f\|_{L^p(X)}$$

对所有 $f \in L^p(X)$，其中 $C \ge 1$ 取决于 C_μ 和 p；若 $0 < \alpha < Q$，则还取决于 c_L 和 α。也就是说，M^α 是 (p, p^*) 强型。

证明。$\alpha = 0$ 的情形即为 Hardy-Littlewood-Weiner 定理。

对于情形 $\alpha > 0$，取 $f \in L^p(X)$，其中 $\|f\|_{L^p(X)} > 0$；目前 p 可以是区间 $[1, \infty)$ 中的任意值。我们先推导一个逐点不等式，将 $M^\alpha f$ 与 Mf 联系起来，其中 Mf 是 X 上的标准 Hardy-Littlewood 极大函数。为此，固定满足 $Mf(x) < \infty$ 的 $x \in X$，并选取一个球 $B \ni x$。若 r 是 B 的半径，则应用 H¨older 不等式以及 μ 上的下质量界（见 (2.2)），可得

$$\begin{aligned}
r^\alpha \fint_B |f| \, d\mu &= r^\alpha \left(\fint_B |f| \, d\mu \right)^{\alpha p/Q} \left(\fint_B |f| \, d\mu \right)^{1 - \alpha p/Q} \\
&\le \frac{r^\alpha}{\mu(B)^{\alpha p/Q}} \left(\int_B |f| \, d\mu \right)^{\alpha p/Q} Mf(x)^{1 - \alpha p/Q} \\
&\le \frac{r^\alpha}{\mu(B)^{\alpha p/Q}} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\alpha/Q} \mu(B)^{(1-1/p)\alpha p/Q} Mf(x)^{1 - \alpha p/Q} \\
&= \left(\frac{r}{\mu(B)^{1/Q}} \right)^\alpha \|f\|_{L^p(X)}^{\alpha p/Q} Mf(x)^{1 - \alpha p/Q} \\
&\lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{\alpha p/Q} Mf(x)^{1 - \alpha p/Q}.
\end{aligned}$$

第一个不等式正是在这里用到了：当 $p \in (1,\infty)$ 时，$0 < \alpha \le Q/p$；当 $p = 1$ 时，$0 < \alpha < Q$。对所有 $B \ni x$ 取上确界，便得到估计式

$$M^\alpha f(x) \lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{\alpha p/Q} M f(x)^{1-\alpha p/Q}. \tag{4.3}$$

当 $p = 1$ 时，这意味着

$$\mu(\{M^\alpha f(x) > t\}) \le \mu\left(\left\{ Mf(x) > \frac{t^{\frac{Q}{Q-\alpha}}}{C\,\|f\|_{L^1(X)}^{\frac{\alpha}{Q-\alpha}}} \right\}\right) \lesssim \frac{C\|f\|_{L^1(X)}^{\frac{\alpha}{Q-\alpha}}\|f\|_{L^1(X)}}{t^{\frac{Q}{Q-\alpha}}} = \left(\frac{C\,\|f\|_{L^1(X)}}{t}\right)^{\frac{Q}{Q-\alpha}}$$

对任意 $0 < \alpha < Q$ 均成立。第二步用到了 M 从 $L^1(X)$ 到弱-$L^1(X)$ 的有界性。将两边提升到 $\frac{Q-\alpha}{Q}$ 次幂，即得第一个结果。

对于 $p > 1$，(4.3) 意味着

$$\|M^\alpha f\|_{L^{p^*}(X)}^{p^*} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{\alpha p p^*/Q} \int_X (Mf)^{p^* - \alpha p p^*/Q}\, d\mu = \|f\|_{L^p(X)}^{p^*-p} \|Mf\|_{L^p(X)}^{p} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}^{p^*},$$

对任意 $0 < \alpha \le Q/p$ 均成立，其中 p^* 与 (4.2) 中相同。最后一步利用了 M 在 $L^p(X)$ 上的有界性。将两边提升到 $1/p^*$ 次幂，即得该命题的第二个结果。□

4.2. 有界平均振荡。在欧几里得情形中，最初证明了 M（相对于立方体定义）从 BMO 到 BLO [6] 有界；此前已在 [7] 中证明，它从 BMO 到自身有界。关于相关极大函数的其他证明和结果，见 [1, 18, 19, 35, 39, 41]。如下文所示，下面定理的证明是对 [6], 中欧几里得情形证明的改编。

定理 4.2. 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，且 $\alpha \ge 0$。当 $\alpha > 0$ 时，我们假设 (X, d, μ) 是有界的，其下质量界指数为 Q。若 $f \in \mathrm{BMO}(X)$ 且$0 \le \alpha < Q$，则

$$\fint_B M^\alpha f\, d\mu \le C\left(\mu(X)^{\alpha/Q} + \operatorname{diam}(X)^\alpha\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} + \operatorname*{ess\,inf}_B M^\alpha f, \tag{4.4}$$

对所有球 $B \subset X$，其中 $C > 0$ 取决于 C_μ 和 α。

特别地，若 $\alpha = 0$ 和 $M^\alpha f$ 不恒为零，或若 $0 < \alpha < Q$，则可得$M^\alpha f \in \mathrm{BLO}(X)$，且

$$\|M^\alpha f\|_{\mathrm{BLO}(X)} \le C\left(\mu(X)^{\alpha/Q} + \operatorname{diam}(X)^\alpha\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}.$$

注 4.3. 当 μ 具有倍增性并满足环带衰减性质时，$\alpha = 0$ 情形的证明可见于 [34], ，其中作者使用了与 Muckenhoupt权相关的论证。本文中的证明改进了这一结果，说明环带衰减性质并非必要条件。注意，要证明 M^α 将 $\mathrm{VMO}(X)$ 映射到自身，环带衰减是必要的，详见下一小节。

定理 4.2 的证明。固定 $0 \le \alpha < Q$、 $f \in \mathrm{BMO}(X)$ 和一个球 $B \subset X$。我们将 $f = g + h$ 分解为 $g = (f - f_{2B})\chi_{2B}$ 和 $h = f_{2B}\chi_{2B} + f\chi_{(2B)^c}$。

我们先估计 $M^\alpha g$ 在 B上的平均值。令 $p = 2Q/(Q+\alpha) \in (1, 2]$ 使得$p^* = 2Q/(Q-\alpha) \in [2, \infty)$。于是 $0 \le \alpha \le Q/p$，因此我们可以应用命题 4.1，并结合 H¨older 不等式，得到

(4.5)
$$\fint_B M^\alpha g \, d\mu \le \frac{1}{\mu(B)^{1/p^*}} \|M^\alpha g\|_{L^{p^*}(X)} \lesssim \frac{1}{\mu(B)^{1/p^*}} \|g\|_{L^p(X)} = \mu(B)^{\alpha/Q} \left(\fint_{2B} |f - f_{2B}|^p \, d\mu \right)^{1/p} \lesssim \mu(B)^{\alpha/Q} \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} ,$$

最后一步中我们用到了注 2.14。

接下来，我们得到 $M^\alpha h$ 在 B上的逐点估计。为此，固定 $x_0 \in B$ 以及另一个球 $\widetilde{B}$，使得 $B \Subset x_0$。记 r 为 B 的半径，记 $\tilde{r}$ 为 $\widetilde{B}$的半径。若 $B \subset 2B$，则$\tilde{r} \le 2r$ 并且

$$\tilde{r}^\alpha \fint_{\widetilde{B}} |h| \, d\mu = \tilde{r}^\alpha |f_{2B}| \le (2r)^\alpha \fint_{2B} |f| \, d\mu \le M^\alpha f(x) \tag{4.6}$$

对任意 $x \in B$均成立。若 $B \cap (2B)^c \ne \emptyset$，则考虑 $8B$，它包含 B 和 $2B$，并且根据倍增性质，满足 $\mu(8B) \le C_\mu^3 \mu(B)$。于是，由三角不等式可得，

$$\tilde{r}^\alpha \fint_{\widetilde{B}} |h| \, d\mu \le \tilde{r}^\alpha \fint_{\widetilde{B}} |h - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu + \tilde{r}^\alpha \fint_{\widetilde{B}} |f| \, d\mu \le C_\mu^3 \tilde{r}^\alpha \fint_{8\widetilde{B}} |h - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu + M^\alpha f(x) ,$$

再次，其中 x 是 B中的任意一点。将 $8B$ 写成 $2B$ 与 $8B \cap (2B)^c$的并集，我们有

$$\begin{aligned} \int_{8\widetilde{B}} |h - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu &= \int_{2B} |h - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu + \int_{8\widetilde{B} \cap (2B)^c} |h - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu \\ &= \int_{2B} |f_{2B} - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu + \int_{8\widetilde{B} \cap (2B)^c} |f - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu \\ &\le \int_{2B} |f - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu + \int_{8\widetilde{B} \cap (2B)^c} |f - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu = \int_{8\widetilde{B}} |f - f_{8\widetilde{B}}| \, d\mu \le \mu(8\widetilde{B}) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} , \end{aligned}$$

因此可得

$$\tilde{r}^\alpha \fint_{\widetilde{B}} |h| \, d\mu \le C_\mu^3 \operatorname{diam}(X)^\alpha \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} + M^\alpha f(x) \tag{4.7}$$

结合公式 (4.6) 和 (4.7)，可得 $M^\alpha h(x_0)$的逐点估计

$$M^\alpha h(x_0) \le C_\mu^3 \operatorname{diam}(X)^\alpha \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} + M^\alpha f(x) .$$

对所有 $x \in B$ 取本质下确界，然后对所有 $x_0 \in B$ 取平均，得到

$$\fint_B M^\alpha h \, d\mu \le C_\mu^3 \operatorname{diam}(X)^\alpha \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} + \operatorname*{ess\,inf}_B M^\alpha f . \tag{4.8}$$

结合 (4.5)，分数阶极大函数的逐点次线性性质推出所需的不等式 (4.4)。□

4.3. 消失平均振荡。本小节中，我们考察 M^α 在子空间 VMO(X) 上的作用。由于 VMO(X) 上的范数与 BMO(X) 上的范数相同，因此我们已经知道，VMO(X) 函数在 M^α 作用下的像的 BMO 范数是受控的。这里的目标是证明 M^α 保持消失平均振荡条件本身。

关于这一方向的首个结果见 [43], ，其中作者研究了欧几里得度量和勒贝格测度下 $X = \mathbb{R}^n$ 上的 $\alpha = 0$。我们将其推广到 α 的其他取值以及一类倍增度量测度空间。

为在下述定理中实现这一点，相较于定理 4.2，我们增加了一项假设：环带衰减条件，见定义2.7。这是定理成立所必需的假设，这一点可由 [29, 例5.2] 得出。将这个例子稍作修改，把 X 限制为有界，可得到一个下质量界指数为 1 的有界倍增度量测度空间，但它不满足环带衰减性质。在该空间上，作者考虑一个有界利普希茨函数（因而属于 VMO） f，使得 $M^\alpha f$ 具有跳跃不连续性，因此不属于 VMO。

定理 4.4. 设 (X, d, μ) 是一个满足 $0 < \beta \le 1$ 上的 β-环带衰减性质的倍增度量测度空间，且 $\alpha \ge 0$。当 $\alpha > 0$ 时，我们假设 (X, d, μ) 有界，且下质量界指数为 Q。设 $f \in$ VMO(X)。若 $\alpha = 0$ 且 $M^\alpha f$ 不恒等于无穷，或若 $0 < \alpha < Q$，则 $M^\alpha f \in$ VMO(X)。

我们注意到，在 α 为较小正值（特别是 $0 < \alpha < \beta$）且 X 紧的情形下，这一结果可作为 [29, 定理 3.1] 的推论得到。事实上，已证明对于任意 $f \in$ BMO(X)， $M^\alpha f$ 是连续的。在紧的情形下，连续函数自动一致连续且有界，因此属于 BMO；于是根据引理 3.6 和推论 3.10， $M^\alpha f$ 属于 VMO(X)。这比定理 4.4 更强，因为它表明所有 BMO(X) 函数都映射到 VMO(X)；但定理 4.4 的优点是不要求 X 紧，并且适用于更大的 α 区间。特别地，它可以应用于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开有界域。定理 4.4 的证明见本小节末尾。

固定一个球 $B \subset X$，其半径 rad(B) $= r$，以及一个尺度 $\lambda \ge 1$。记作

$$M^\alpha f = \max\{M^\alpha_{\mathrm{loc},\lambda r} f, M^\alpha_{\mathrm{glob},\lambda r} f\},$$

其中， M^α局部 $\lambda r f$部分是指由 $M^\alpha f$ 给出的“局部”部分

$$M^\alpha_{\mathrm{loc},\lambda r} f(x) = \sup_{\widetilde{r} < \lambda r} \widetilde{r}^\alpha \fint_{B(\widetilde{r})} |f| \, d\mu,$$

其中，上确界取遍所有半径为 $\widetilde{r} < \lambda r$ 的球 $B(\widetilde{r})$，而 $M^{\alpha}_{\mathrm{glob},\ \lambda r} f$ 是由下式给出的“全局”对应部分

$$M^{\alpha}_{\mathrm{glob},\lambda r} f(x) = \sup_{\widetilde{r} \geq \lambda r} \widetilde{r}^{\alpha} \fint_{B(\widetilde{r})} |f|\, d\mu,$$

其中，上确界取遍所有半径为 $\widetilde{r} \geq \lambda r$ 的球 $B(\widetilde{r})$。目标是估计局部部分和全局部分的平均振荡对 λ 的依赖关系。我们从局部部分开始。

引理 4.5. 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，且 $\alpha \geq 0$。若 $\alpha > 0$，我们进一步假设 (X, d, μ) 是有界的，且下质量界指数为 Q。给定一个满足 $\mathrm{rad}(B) = r$ 的球 $B \subset X$、$\lambda \geq 1$、$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 以及 $0 \leq \alpha < Q$，则存在一个常数 C，其取决于 C_μ 和 α，使得

$$\mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{loc},\lambda r} f, B) \leq C \lambda^{Q/p} \mu(B)^{\alpha/Q} \mathcal{O}_p(f, 3\lambda B),$$

其中 $p = 2Q/(Q+\alpha)$。

证明. 为简化记号，我们省略 $M^{\alpha}_{\mathrm{loc},\ \lambda r} f$ 对 λ 和 r 的依赖。由 (2.5) 以及 $M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}$ 的定义可得

$$\mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f, B) \leq 2 \fint_B |M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f - (\lambda r)^{\alpha} |f_{\lambda B}||\, d\mu = 2 \fint_B |M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f - M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(f_{\lambda B})|\, d\mu.$$

注意，$M^{\alpha}{}_{\mathrm{loc}} f = M^{\alpha}{}_{\mathrm{loc}}(f \chi_{3\lambda B})$ 和 $M^{\alpha}{}_{\mathrm{loc}} f_{\lambda B} = M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(f_{\lambda B} \chi_{3\lambda B})$ 在 Bas points outside of $3\lambda B$ 上无法通过半径至多为 λr 的球到达。因此，由 (4.1) 可得

$$\mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f, B) \leq 2 \fint_B |M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(f \chi_{3\lambda B}) - M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(f_{\lambda B} \chi_{3\lambda B})|\, d\mu \leq 2 \fint_B M^{\alpha}_{\mathrm{loc}}[(f - f_{\lambda B}) \chi_{3\lambda B}]\, d\mu.$$

记 $g = (f - f_{\lambda B}) \chi_{3\lambda B}$。现在，对于引理陈述中的 p，有 $0 \leq \alpha \leq Q/p$，因此我们可以应用命题 4.1 和 H¨older 不等式，得到

$$\mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f, B) \leq \frac{1}{\mu(B)^{1/p^*}} \|M^{\alpha} g\|_{L^{p^*}(X)} \lesssim \frac{1}{\mu(B)^{1/p^*}} \|g\|_{L^p(X)} = \frac{\mu(3\lambda B)^{1/p}}{\mu(B)^{1/p^*}} \left(\fint_{3\lambda B} |f - f_{\lambda B}|^p\, d\mu \right)^{1/p}.$$

回忆一下，$p^* = \frac{pQ}{Q - \alpha p}$。由 μ 的倍增性可知，$\frac{\mu(\ 3\lambda B\ ^{1/p}\ )()^{1/p^*}}{\mu\ B} \lesssim \lambda^{Q/p} \mu(B)^{1/p - 1/p^*} = \lambda^{Q/p} \mu(B)^{\alpha/Q}$。此外，由倍增性还可知

$$\begin{aligned} \fint_{3\lambda B} |f - f_{\lambda B}|^p\, d\mu &\lesssim \fint_{3\lambda B} \fint_{\lambda B} |f(x) - f(y)|^p\, d\mu(y) d\mu(x) \\ &\lesssim \fint_{3\lambda B} \fint_{3\lambda B} |f(x) - f(y)|^p\, d\mu(y) d\mu(x) \lesssim \fint_{3\lambda B} |f - f_{3\lambda B}|^p\, d\mu. \end{aligned}$$

因此，所求即得，

$$\mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{loc}} f, B) \lesssim \lambda^{Q/p} \mu(B)^{\alpha/Q}\, \mathcal{O}_p(f, 3\lambda B)\,.$$

□

现在我们继续估计分数阶极大函数全局部分的平均振荡。以下证明受到 [29, 定理 3.1] 的启发，而这些技巧最早可追溯至 [37, 第 3] 节。

引理 4.6. 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，且 $\alpha \geq 0$。若 $\alpha > 0$，我们还假设 (X, d, μ) 有界，且其下质量界指数为 Q。给定一个球 $B \subset X$，满足 $\operatorname{rad}(B) = r$，$\lambda \geq 4$, $f \in \operatorname{BMO}(X)$，且 $0 \leq \alpha < Q$，则存在一个常数C，它依赖于 C_μ, C_β, α 和 β，使得

$$\mathcal{O}(M^\alpha_{\operatorname{glob},\lambda r} f, B) \leq C \operatorname{diam}(X)^\alpha (\lambda^{-\beta} \log(C\lambda) + \lambda^{-\beta}) \|f\|_{\operatorname{BMO}(X)}.$$

证明. 如前所述，我们省略全局分数阶极大函数对尺度 λ 和 r 的依赖。

固定 $\varepsilon > 0$ 并考虑 $x, y \in B$。不失一般性，假设 $M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(x) \geq M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(y)$。令 $B_x = B(\widetilde{x}, \widetilde{r}) \subset X$ 满足 $x \in B_x$, $\widetilde{r} \geq \lambda r$，且

$$M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(x) \leq \widetilde{r}^\alpha \fint_{B_x} |f| \, d\mu + \varepsilon.$$

现在令 $B_y = B(\widetilde{x}, \widetilde{r} + 2r)$。那么 $y \in B_y$，因此我们有

$$M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(x) - M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(y) \leq \widetilde{r}^\alpha \fint_{B_x} |f| \, d\mu + \varepsilon - (\widetilde{r} + 2r)^\alpha \fint_{B_y} |f| \, d\mu \leq \widetilde{r}^\alpha (|f|_{B_x} - |f|_{B_y}) + \varepsilon.$$

由倍增性和 β-环带衰减性质，

$$\frac{\mu(B_y \setminus B_x)}{\mu(B_x)} \lesssim \Big(\frac{2r}{\widetilde{r}}\Big)^\beta \frac{\mu(B_y)}{\mu(B_x)} \lesssim \Big(\frac{2r}{\widetilde{r}}\Big)^\beta$$

因此

$$\begin{aligned}
|f|_{B_x} - |f|_{B_y} &= \frac{1}{\mu(B_x)} \left(\int_{B_x} |f| \, d\mu - \int_{B_y} |f| \, d\mu + (\mu(B_y) - \mu(B_x)) |f|_{B_y} \right) \\
&= \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_y \setminus B_x} (|f|_{B_y} - |f|) \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_y \setminus B_x} \fint_{B_y} |f(z) - f_{B_y}| + |f(w) - f_{B_y}| d\mu(z) d\mu(w) \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \left(\int_{B_y \setminus B_x} |f - f_{B_y}| \, d\mu + \mu(B_y \setminus B_x) \fint_{B_y} |f - f_{B_y}| d\mu \right) \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_y \setminus B_x} |f - f_{B_y}| \, d\mu + C \Big(\frac{2r}{\widetilde{r}}\Big)^\beta \|f\|_{\operatorname{BMO}(X)}
\end{aligned}$$

对于某个常数 C。因此，可以得出

$$M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(x) - M^\alpha_{\operatorname{glob}} f(y) \leq \widetilde{r}^\alpha \left(\frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_y \setminus B_x} |f - f_{B_y}| \, d\mu + C \Big(\frac{r}{\widetilde{r}}\Big)^\beta \|f\|_{\operatorname{BMO}(X)} \right) + \varepsilon. \tag{4.9}$$

现在，设 $B_1, \ldots, B_k$ 是一族极大的两两不相交的球，半径为 r，球心位于 $B_y \setminus B_x$. 。那么，

$$B_y \setminus B_x \subset \bigcup_i 2B_i \subset \Delta := B(\widetilde{x}, \widetilde{r}+4r) \setminus B(\widetilde{x}, \widetilde{r}-2r).$$

注意，我们要求 $\lambda \geq 4$，这确保了 $\widetilde{r} > 4r.$，进而确保上述环带 Δ 足够薄。

对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，由引理 2.13 可得

$$\begin{aligned} \fint_{2B_i} |f - f_{B_y}| \, d\mu &\leq \fint_{2B_i} |f - f_{2B_i}| \, d\mu + |f_{2B_i} - f_{2B_y}| + |f_{2B_y} - f_{B_y}| \\ &\leq \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} + C \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} \leq C \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

由 β-环带衰减性质和倍增性，我们还可得

$$\mu(\Delta) \leq C\mu(B(\widetilde{x}, \widetilde{r}+4r)) \left(\frac{6r}{\widetilde{r}+4r}\right)^{\beta} \lesssim \mu(B_x) \left(\frac{r}{\widetilde{r}}\right)^{\beta}. \tag{4.11}$$

利用 (4.10)、倍增性、$\{B_i\}$ 的互不相交性以及 (4.11)，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_y \setminus B_x} |f - f_{B_y}| d\mu &\leq \frac{1}{\mu(B_x)} \sum_i \mu(2B_i) \fint_{2B_i} |f - f_{B_y}| \, d\mu \\ &\leq \frac{C}{\mu(B_x)} \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} \sum_i \mu(2B_i) \\ &\lesssim \frac{C}{\mu(B_x)} \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} \sum_i \mu(B_i) \\ &\leq \frac{C}{\mu(B_x)} \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} \, \mu(\Delta) \\ &\lesssim C \left(\frac{r}{\widetilde{r}}\right)^{\beta} \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}. \end{aligned}$$

注意，函数 $t \mapsto t^{-\beta}\log(Ct)$ 关于 t 是递减的，因此 $\widetilde{r} > \lambda r$ 蕴含

$$\left(\frac{r}{\widetilde{r}}\right)^{\beta} \log\left(\frac{C\widetilde{r}}{r}\right) \leq \lambda^{-\beta} \log(C\lambda).$$

同理，$(r/\widetilde{r})^{\beta} < \lambda^{-\beta}$. 因此，结合上述估计与 (4.9)，可得

$$|M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f(x) - M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f(y)| \leq C\widetilde{r}^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} (\lambda^{-\beta} \log(C\lambda) + \lambda^{-\beta}) + \varepsilon.$$

回顾一下，不失一般性，我们已假设 $M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f(x) \geq M^{\alpha}$全局部分$f(y)$。因此，取$\varepsilon \to 0$，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f, B) &\leq \fint_B \fint_B |M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f(x) - M^{\alpha}_{\mathrm{glob}} f(y)| \, d\mu(y) d\mu(x) \\ &\leq C \operatorname{diam}(X)^{\alpha} (\lambda^{-\beta} \log(C\lambda) + \lambda^{-\beta}) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}. \end{aligned}$$

□

有了分数极大函数局部部分和全局部分的分别估计，我们现在可以用尺度 λ 对$M^\alpha f$ 的平均振荡给出定量估计。这正是以下证明的核心。

定理 4.4 的证明。设 $f \in$ 小振荡平均(X)，并固定一个球 $B \subset X$，使得 $\operatorname{rad}(B) = r$。若 $\alpha = 0$，则假设 $M^\alpha f$ 并非恒等于无穷大。对于任意 $\lambda \geq 1$，有

$$M^\alpha f = \max\left\{M^\alpha_{\mathrm{loc},\lambda r} f, M^\alpha_{\mathrm{glob},\lambda r} f\right\},$$

因此可得

$$\mathcal{O}(M^\alpha f, B) \leq \mathcal{O}(M^\alpha_{\mathrm{loc},\lambda r} f, B) + \mathcal{O}(M^\alpha_{\mathrm{glob},\lambda r} f, B), \tag{4.12}$$

例如，参见 [20, 命题 6.2]。

设 $\varepsilon > 0$。我们先处理全局部分。利用引理 4.6 以及当 $t \to \infty$ 时 $t^{-\beta}\log(Ct) \to 0$ 和 $t^{-\beta} \to 0$ 这一事实，可以选取充分大的 $\lambda \geq 4$，使得

$$\mathcal{O}(M^\alpha_{\mathrm{glob},\lambda r} f, B) \leq C \operatorname{diam}(X)^\alpha (\lambda^{-\beta}\log(C\lambda) + \lambda^{-\beta}) \|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意，这样选取的 $\lambda \geq 4$ 与 B 无关。

对于局部部分，我们利用这样一个事实：$f \in \mathrm{VMO}(X)$，因此由推论 3.10 可知，^{p}也属于 VMOX；结合 $p = 2Q/(Q+\alpha) \in (1, 2],$，我们可以断定存在一个半径 $\rho > 0$，使得

$$\mathcal{O}_p(f, \widetilde{B}) < \frac{\varepsilon}{2C\lambda^{Q/p}\mu(X)^{\alpha/Q}}$$

$\sim$ $\sim$对于任意半径为 $\operatorname{rad}(B) < \rho$ 的球 B。这里，C 是引理 4.5 中的常数。因此，根据同一引理，若 $\operatorname{rad}(B) < \rho/(3\lambda)$，则

$$\mathcal{O}(M^\alpha_{\mathrm{loc},\lambda r} f, B) \leq C\lambda^{Q/p}\mu(X)^{\alpha/Q}\, \mathcal{O}_p(f, 3\lambda B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在利用 (4.12)，可知对所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个半径 $\widetilde{r} = \rho/(3\lambda) > 0$，使得对任意满足 $\operatorname{rad}(B) < \widetilde{r}$ 的球 B，均有 $\mathcal{O}(M^\alpha f, B) < \varepsilon$。这就是说，$M^\alpha f \in \mathrm{VMO}(X)$。

□

4.4. 欧几里得空间。在本小节中，我们考虑 X 为一个有限立方体 $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$、其边平行于坐标轴的情形。我们赋予 $\mathbb{R}^n$ 欧几里得度量和勒贝格测度。

空间 $\mathrm{BMO}(Q_0)$ 有两种可能的定义。本文采用的定义是：对所有形如 $B(x,r) \cap Q_0$ 的集合满足有界平均振荡条件，其中 $x \in Q_0$而 $B(x,r)$ 是以 x 为中心、半径为 r的欧几里得球。容易看出，这个空间与另一种定义所得的空间同构，至多相差一个依赖于 n的常数；后一种定义要求所有形如 $Q(x,\ell) \cap Q_0$ 的集合满足有界平均振荡条件，其中 $x \in Q_0$ 而 $Q(x,\ell)$ 是以 x 为中心、边长为 ℓ且平行于坐标轴的立方体。

BMO(Q_0) 的第二种定义更自然：要求在 Q of Q_0 的所有子立方体上满足有界平均振荡条件。这类集合是前一种集合的特殊情形，因此按第二种方式定义的 BMO(Q_0) 空间不会比第一种定义所得的空间小。事实上，反向包含也成立。对于任意 $Q(x,\ell) \cap Q_0$，其中 $x \in Q_0$，它包含一个边长为 $\min\{\ell/2, \ell_0\}$ 、属于 Q_0 的子立方体 Q_1，并且包含在一个边长为 $\min\{\ell, \ell_0\}$、属于 Q_0 的子立方体 Q_2 内。这里， Q_0的边长为 ℓ_0 。由此可得，参见例如 [13, 性质 O7]，对于定义在 Q_0上的任意局部可积函数，

$$\mathcal{O}(f, Q(x,\ell) \cap Q_0) \le \frac{|Q_2|}{|Q_1|}\,\mathcal{O}(f, Q_2) \le 2^n\,\mathcal{O}(f, Q_2),$$

因此，BMO(Q_0) 的这两种定义一致，其范数在一个依赖于维数的常数因子下等价。

同样的论证表明，此处定义的 VMO(Q_0) 与 BMO(Q_0) 的子空间一致；该子空间由沿着 Q_0 的边长趋于零的子立方体具有消失平均振荡的函数组成。由于勒贝格测度是 Ahlfors n-正则的，且具有 1-环带衰减性质，因此得到以下欧几里得推论：

推论 4.7. 设 $0 \le \alpha < n$ 和 $f \in$ BMO(Q_0)。则， $M^\alpha f \in$ BLO(Q_0)，且 $\|M^\alpha f\|_{\mathrm{BLO}(Q_0)} \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}(Q_0)}$，其中 C依赖于 n和 α。此外，若 $f \in$VMO(Q_0)，则 $M^\alpha f \in$ VMO(Q_0)。

5. 连续性

由 (4.1) 易见，若 M^α在函数空间 Y上有界，且在该空间中 $|f| \le |g|$几乎处处成立可推出 $\|f\|_Y \le \|g\|_Y$，那么它在 Y上也连续。例如， L^p-范数和 $L^{p,\infty}$-拟范数都满足这一性质。因此，由命题 4.1 可知，对于 $0 \le \alpha < Q$， M^α是从 $L^1(X)$ 到 $L^{\frac{Q}{Q-\alpha},\infty}(X)$ 的连续映射；对于 $1 < p < \infty$ 和 $0 \le \alpha \le Q/p$，它是从$L^p(X)$ 到 $L^{p^*}(X)$ 的连续映射。

然而，同样的论证无法用于 BMO 半范数。本节将通过一些例子说明，极大函数在有界平均振荡和小振荡平均上的作用并不连续。

例 5.1（ M 在无界情形下的不连续性）。设 $X = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$，配备勒贝格测度和欧几里得度量。在本例中，我们证明 M 在小振荡平均(X)上不连续，因此在有界平均振荡(X)上也不连续。

定义 $f : X \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n = f - n$. 于是 $f, f_n \in$ 属于 VMO(X)，并且由于 f_n 和 f 相差一个常数，我们立即得到 $f_n \to f$ 属于 BMO(X)。然而，由此可得

$$|f_n(x)| = \begin{cases} n - 1 + x, & 0 < x \leq 1 \\ n, & 1 < x. \end{cases}$$

通过对任意大的球取上确界，可得 $Mf_n \equiv n$ 在 X. 上。然而，Mf 在 X上并非几乎处处等于一个常数，因此我们有

$$\|Mf_n - Mf\|_{\mathrm{BMO}(X)} = \|Mf\|_{\mathrm{BMO}(X)} > 0.$$

因此，Mf_n不收敛于 BMO(X)中的 Mf，所以 M在 VMO(X)上不连续。

例 5.2（有界情形下 M 的不连续性）。令 $X = (0, 2) \subset \mathbb{R}$，仍取勒贝格测度和欧几里得度量。对上述例子稍作修改，我们现在证明 M 在 VMO(X)上不连续，因而在 BMO(X)上也不连续。

令 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ x - 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n = f - n$. 与上文一样，$f_n \to f$ 属于 BMO(X)，且 $f, f_n \in$ 属于 VMO(X)。对于 $x \in (0, 1)$，$1 < \delta < 2$，以及 $0 < \tau < x$，我们有

$$0 < \fint_{(\tau,\delta)} |f| \leq \fint_{(x,\delta)} |f| = \frac{(\delta - 1)^2}{2(\delta - x)}.$$

因此，由积分的连续性以及 $f = 0$ 在 $(0, 1)$ 上这一事实，我们得到:

$$Mf(x) = \sup_{1<\delta<2} \sup_{0<\tau<x} \fint_{(\tau,\delta)} |f| = \sup_{1<\delta<2} \fint_{(x,\delta)} |f| = \sup_{1<\delta<2} \frac{(\delta - 1)^2}{2(\delta - x)} = \frac{1}{2(2 - x)},$$

因此，Mf在 $(0, 1)$ 上并非几乎处处为常数。

现在，我们有:

$$|f_n(x)| = \begin{cases} n, & 0 < x \leq 1 \\ n + 1 - x & 1 < x < 2, \end{cases}$$

因此，对于 $x \in (0, 1)$，可得 $Mf_n(x) = n$. 因此，

$$\begin{aligned} \|Mf_n - Mf\|_{\mathrm{BMO}(X)} &\geq \mathcal{O}(Mf_n - Mf, (0, 1)) \\ &= \mathcal{O}(n - Mf, (0, 1)) = \mathcal{O}(Mf, (0, 1)) > 0. \end{aligned}$$

因此，Mf_n在 BMO(X) 中不收敛到 Mf，所以 M在 VMO(X) 上不连续。

例5.3（有界情形下 M^α 的不连续性）。令 $X = (0, 2) \subset \mathbb{R}$，仍取勒贝格测度和欧几里得度量。继续上面的例子，我们现在证明 M^α 在 VMO(X) 上不连续，因此在 BMO(X) 上也不连续。

设 f 和 f_n 与前一个例子中的相同，并设 $0 < \alpha < 1.$ 。那么如上所述， f， $f_n \in$ 属于 VMO(X)，且 $f_n \to f$ 属于 BMO(X)。我们首先注意到， $M^\alpha f$ 在区间 (0, 1) 上不是常数。事实上，对于 $x \in (0, 1)$， $1 < \delta < 2$，且 $0 < \tau < x$，我们有

$$0 < \left(\frac{\delta - \tau}{2}\right)^\alpha \fint_{(\tau,\delta)} |f| = \frac{1}{2^\alpha(\delta - \tau)^{1-\alpha}} \int_{(\tau,\delta)} |f|.$$

该表达式的右端关于 $\tau.$ 单调递增。因此，由积分的连续性以及 f 在区间 (0,1) 上为零可知，

$$\begin{aligned} M^\alpha f(x) &= \sup_{1<\delta<2} \sup_{0<\tau<x} \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^\alpha \fint_{(\tau,\delta)} |f| \\ &= \sup_{1<\delta<2} \left(\frac{\delta - x}{2}\right)^\alpha \fint_{(x,\delta)} |f| = \sup_{1<\delta<2} \frac{(\delta-1)^2}{2^{\alpha+1}(\delta - x)^{1-\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha+1}(2-x)^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

因此， $M^\alpha f$ 在 (0, 1) 上并非几乎处处为常数。

现在，对于 $x \in (0, 1)$ $0 < \tau < x$ 和 $x < \delta \leq 1$，我们有

$$\left(\frac{\delta - \tau}{2}\right)^\alpha \fint_{(\tau,\delta)} |f_n| = \left(\frac{\delta - \tau}{2}\right)^\alpha n \leq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^\alpha n = \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^\alpha \fint_{(\tau,1)} |f_n|.$$

这是因为 $|f_n| = n$ 在 (0, 1]. 。同样，对于 $1 \leq \delta < 2$，我们有

$$\left(\frac{\delta - \tau}{2}\right)^\alpha \fint_{(\tau,\delta)} |f_n| \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \fint_{(0,\delta)} |f_n| = \frac{1}{2^\alpha \delta^{1-\alpha}} \left(n\delta - (\delta - 1)^2/2\right).$$

上述不等式成立，因为 ffl $_{(\tau,\delta)} |f_n| \leq$ ffl $_{(0,\delta)} |f_n|$· 结合这两种情况，要计算 $M^\alpha f_n(x)$，只需对上述表达式右端在 $1 \leq \delta < 2.$ 上取上确界。对于 $n > 1/\alpha$，右端关于 δ 单调递增，因此对于这样的 n，有

$$M^\alpha f_n(x) = \sup_{1\leq\delta<2} \frac{1}{2^\alpha \delta^{1-\alpha}} \left(n\delta - (\delta - 1)^2/2\right) = n - 1/4.$$

因此，当 n 足够大时， $M^\alpha f_n$ 在 (0, 1) 上为常数，由此可得

$$\|M^\alpha f_n - M^\alpha f\|_{\mathrm{BMO}(X)} \geq \mathcal{O}(M^\alpha f_n - M^\alpha f, (0, 1)) = \mathcal{O}(M^\alpha f, (0, 1)) > 0,$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 $M^\alpha f$ 在 (0, 1) 上并非几乎处处为常数。因此， $M^\alpha f_n$ 不收敛到 $M^\alpha f$ 于 BMO(X) 中，所以 M^α 在 VMO(X) 上不连续。

致谢。作者谨向 Galia Dafni 和 Nageswari Shanmu- galingam 致谢，感谢她们就本项目进行的宝贵交流，并细致审阅了稿件。

References

[1] Aalto, D.; Kinnunen, J. 度量空间上的离散极大算子。《分析与数学杂志》111 (2010年), 369–390. [2] Adamowicz, T.; Gaczkowski, M.; G´orka, P. 度量测度空间上的调和函数。《康普顿斯数学评论》32 (2019年), no. 1, 141–186.[3] Aldaz, J. M.; P´erez L´azaro, J. 有界变差函数、一维极大函数的导数及其在不等式中的应用。《美国数学会会刊》359 (2007年), no. 5, 2443– 2461.[4] Almgren, F. J., Jr.; Lieb, E. H. 对称递减重排有时是连续的。《美国数学会杂志》2 (1989年), no. 4, 683-773.[5] Beltran, D.; Gonz´alez-Riquelme, C.; Madrid, J.; Weigt, J. W^1,1($\mathbb{R}^d$) 上分数阶极大算子的梯度连续性。预印本, https://arxiv.org/abs/2102.10206[6] Bennett, C. 有界下振荡的另一种刻画。《美国数学会会刊》85 (1982年), no. 4, 552–556.[7] Bennett, C.; DeVore, R. A.; Sharpley, R. 弱-L^∞ 与有界平均振荡。《数学年刊》(2) 113 (1981年), no. 3, 601–611.[8] Bj¨orn, A.; Bj¨orn, J. 度量空间上的非线性势理论。《欧洲数学会数学论丛》17。欧洲数学会，Z¨urich，2011年。xii+403 页。[9] Bj¨orn, A.; Bj¨orn, J. 薄环带的环带衰减性质与容量估计。《数学汇刊》68 (2017年), no. 2, 229–241.[10] Bramanti, M.; Cerutti, M. C. 齐性空间上奇异积分的交换子。《意大利数学联合会通报》B (7) 10 (1996年), no. 4, 843–883.[11] Buckley, S. M. 利普希茨函数的极大函数是否连续? 《芬兰科学院数学年刊》24 (1999年), no. 2, 519–528.[12] Burchard, A.; Dafni, G.; Gibara, R. 重排的平均振荡界。《美国数学会会刊》375 (2022年), no. 6, 4429–4444.[13] Burchard, A.; Dafni, G.; Gibara, R. 消失平均振荡与重排的连续性。预印本, https://arxiv.org/pdf/2201.05130.pdf.[14] Carneiro, E.; Madrid, J.; Pierce, L. B. 极大算子的端点 Sobolev 和 BV 连续性。《泛函分析杂志》273 (2017年), no. 10, 3262–3294.[15] Coifman, R. R.; Weiss, G. 某些齐性空间上的非交换调和分析。´某些奇异积分的研究。（法语）《数学讲义》第242卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1971年。v+160页。[16] Colding, T. H.; Minicozzi, W. P., II. 调和截面的刘维尔定理及其应用。《纯粹与应用数学通讯》51 (1998年), no. 2, 113–138.[17] Coron, J.-M. W^1,^{p}($\mathbb{R}$) 中重排的连续性。《比萨高等师范学校科学分类年刊》(4) 11 (1984年), no. 1, 57–85.[18] Cruz-Uribe, D.; Neugebauer, C. J. 反向 H¨older 类的结构。《美国数学会会刊》347 (1995年), no. 8, 2941–2960.[19] Chiarenza, F.; Frasca, M. Morrey 空间与 Hardy-Littlewood 极大函数。《数学与应用报告》(7) 7 (1987年), no. 3–4, 273–279 (1988).[20] Dafni, G.; Gibara, R. 形状上的有界平均振荡与最佳常数。《调和分析与偏微分方程进展》，1–33，《当代数学》748，美国数学会，普罗维登斯，RI，2020年。[21] Dafni, G.; Gibara, R.; Yue, H. 几何极大算子与乘积基上的有界平均振荡。《几何分析杂志》31 (2021年), no. 6, 5740–5765。

[22] David, G.; Journé, J.-L.; Semmes, S. Calderón-Zygmund 算子、拟增函数与插值。（法文）《伊比利亚美洲数学评论》1 (1985), no. 4, 1–56.[23] González-Riquelme, C.; Kosz, D. 非中心 Hardy-Littlewood 极大算子的 BV 连续性。《泛函分析杂志》281 (2021), no. 2, Paper No. 109037, 20 pp.[24] Gromov, M. 黎曼空间与非黎曼空间的度量结构。依据1981年的法文原版。附录由 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 撰写。Sean Michael Bates 从法文译出。重印2001年英文版。Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿，2007年。xx+585页。[25] Hajlasz, P.; Onninen, J. Sobolev 空间中极大函数的有界性。《芬兰科学院数学年刊》29 (2004), no. 1, 167–176.[26] Heikkinen, T.; Kinnunen, J.; Nuutinen, J.; Tuominen, H. 度量测度空间中离散分数阶极大算子的映射性质。《京都数学杂志》53 (2013), no. 3, 693–712.[27] Heinonen, J. 度量空间分析讲义。Universitext 丛书。Springer-Verlag，纽约，2001年。x+140 页。[28] Heinonen, J.; Koskela, P.; Shanmugalingam, N.; Tyson, J. T. 度量测度空间上的 Sobolev 空间：一种基于上梯度的方法。新数学专著丛书，27。剑桥大学出版社，英国剑桥，2015 年。xii+434 页。[29] Heikkinen, T.; Lehrbäck, J.; Nuutinen, J.; Tuominen, H. 度量测度空间中的分数阶极大函数。《分析、几何与度量空间》1 (2013), 147–162.[30] John, F.; Nirenberg, L. 有界平均振荡函数。《纯粹与应用数学通讯》14 (1961), 415–426.[31] Kinnunen, J. Sobolev 函数的 Hardy-Littlewood 极大函数。《以色列数学杂志》100 (1997), 117–124.[32] Kinnunen, J.; Saksman, E. 分数阶极大函数的正则性。《伦敦数学学会通报》35 (2003), no. 4, 529–535.[33] Kinnunen, J; Shukla, P. 度量测度空间上的 Gehring 引理与反向 Hölder 类。《计算方法与函数理论》14 (2014), no. 2–3, 295–314.[34] Kurki, E.-K. 度量测度空间上 Muckenhoupt 类与反向 Hölder 类的极限条件。预印本，https://arxiv.org/pdf/2204.01441.pdf.[35] Lerner, A. K. 任意测度下极大算子的 BMO 有界性。《以色列数学杂志》159 (2007), 243–252.[36] Luiro, H. 极大算子在 Sobolev 空间中的连续性。《美国数学会会刊》135 (2007), no. 1, 243–251.[37] MacManus, P. Poincaré 不等式与 Sobolev 空间。第六届调和分析与偏微分方程国际会议论文集（西班牙埃斯科里亚尔，2000）。《数学出版物》2002, 特刊，181–197.[38] Madrid, J. 极大算子的端点 Sobolev 与 BV 连续性，II。《伊比利亚美洲数学评论》35 (2019), no. 7, 2151–2168.[39] Ou, W. BMO 上的自然极大算子。《美国数学会会刊》129 (2001), no. 10, 2919–2921.[40] Routin, E. 齐性型空间中的点分布与 Hardy 型不等式。《傅里叶分析与应用杂志》19 (2013), no. 5, 877–909.[41] Saari, O. 极大函数的 Poincaré 不等式。《比萨高等师范学院科学年刊》（5）19 (2019), no. 3, 1065–1083.[42] Sarason, D. 消失平均振荡函数。《美国数学会会刊》207 (1975), 391–405.[43] Shahaboddin, S. BMO 上的极大算子与切片。预印本，https://arxiv.org/pdf/2302.13723.pdf

[44] Soria, J.; Tradacete, P. 度量测度空间的最小加倍常数。《芬兰科学院数学年刊》44 (2019), no. 2, 1015–1030.[45] Stein, E. M. 奇异积分与函数的可微性。普林斯顿数学丛书，第30卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，N.J.，1970年，xiv+290页。[46] Tanaka, H. 关于一维 Hardy-Littlewood 极大函数导数的一点注记。《澳大利亚数学会公报》65 (2002), no. 2, 253–258.[47] Vodop'yanov, S. K.; Greshnov, A. V. 关于内在度量齐性型空间上有界平均振荡函数的延拓。（俄文）西伯利亚数学杂志36 (1995), no. 5, 1015–1048, i；译文见《西伯利亚数学杂志》36 (1995), no. 5, 873–901.[48] Weigt, J. 分数阶 Hardy-Littlewood 极大算子的端点 Sobolev 界。数学杂志301 (2022), no. 3, 2317–2337.[49]Weigt, J. 立方体上的非中心极大算子的变差。预印本，https://arxiv.org/pdf/2109.10747.pdf

地址：

R.G.：数学科学系，P.O. Box 210025，辛辛那提大学，辛辛那提，OH 45221–0025，美国。电子邮箱： ryan.gibara@gmail.com

J.K.：数学科学系，P.O. Box 210025，辛辛那提大学，辛辛那提，OH 45221–0025，美国。电子邮箱： klinejp@mail.uc.edu