arXiv:2304.01123v1 [math.AP] 3 Apr 2023

临界尺度下穿孔区域中的均匀化

Giuseppe Cosma Brusca SISSA，Via Bonomea 265，的里雅斯特，意大利
gbrusca@sissa.it

摘要

我们描述了固定有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 中一个小集合的最小非均质 d-容量的渐近行为。为简便起见，我们假设该集合为一个球，且满足 $d \geq 2$。其中涉及两个参数：ε，即球的半径；以及δ，即介质非均质性的长度尺度。我们证明，该容量的行为为 $C|\log \varepsilon|^{d-1}$，其中 $C = C(\lambda)$ 是依赖于参数 λ 的显式常数：$= \lim_{\varepsilon\to 0} |\log \delta|/|\log \varepsilon|$。

应用这一结果，我们确定了在周期性穿孔区域上满足狄利克雷边界条件的振荡积分泛函的 Γ-极限。在这一情形下，我们利用第一个结果研究泛函在穿孔附近的行为，其中穿孔恰好是半径为 ε 的球。我们证明，与齐次情形一样，这些穿孔会产生一个涉及 $C(\lambda)$ 的附加项。

关键词：容量、均匀化、 Γ-收敛、穿孔定义域。AMS 分类号：49J45、35B27、31A15。

1 引言

索伯列夫空间中涉及尺度不变泛函的典型变分问题，关注包含在固定有界开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 中的集合 E 的 d- 容量，其中 $d \geq 2$。若假设 E 的直径量级为 $\varepsilon \ll 1$，则通过显式计算可证明，此类容量的渐近行为等于 $|\log \varepsilon|^{1-d}$，相差一个维数因子。

本文引入对 x 的依赖性，在模型中它描述介质的非均质性；我们分析最小值的渐近行为

$$m_{\varepsilon,\delta} := \min\Big\{\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta}, \nabla u(x)\right) dx : u \in W_0^{1,d}(\Omega), u = 1 \text{ on } B(z,\varepsilon), z \in \Omega\Big\}, \quad (1)$$

其中 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 为正，并在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零； $f(x,\xi)$ 是一个满足适当周期性和齐次性假设的函数。

我们假设 f: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ 是一个具有以下性质的博雷尔函数：

SISSA 预印本 02/2023/MATE

(P1)（周期性）对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$， $f(\cdot,\xi)$ 都是 1-周期的；也就是说，记 e_k 为标准基中的一个元素，对于每个 x 以及 ξ，在 $\mathbb{R}^d$ 和 $k=1,...,d$ 中， $f(x+e_k,\xi) = f(x,\xi)$；

(P2)（正齐次性） $f(x,t\xi) = t^d f(x,\xi)$，对每个 $t>0$，以及每个 x 和 ξ ，均在 $\mathbb{R}^d$ 中；

(P3)（ d 阶标准增长条件）存在 α,β ，使得 $0<\alpha<\beta$ 且 $\alpha|\xi|^d \le f(x,\xi) \le \beta|\xi|^d$，对每个 x 和 ξ，均在 $\mathbb{R}^d$ 中。

根据 (P1) 和 (P2)，式 (1) 中定义的最小值表示小集合（不失一般性，可假设它是一个球）的最小非均质容量，其大小为 ε；而 δ 是由振荡项建模的非均质性周期。假设 (P3) 是一项技术性假设，因为应用均匀化定理需要它。

我们指出，通过松弛论证，可以假设 $f(x,\xi)$ 关于第二个变量是凸的，从而相应的能量泛函是 $W^{1,d}(\Omega)$-弱下半连续的，并且由 (1) 定义的项确实是最小值。

我们得到的第一个结果是式 (1) 中最小值的渐近估计。为此，我们沿着其存在的子序列（不重新标记）进行研究

$$\lambda := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\log\delta|}{|\log\varepsilon|} \wedge 1 \in [0,1].$$

我们引入一个函数，用以描述非均质容量在点 $z\in\mathbb{R}^d$ 处的渐近集中；该函数定义如下

$$\Phi(z) := \lim_{R\to+\infty} (\log R)^{d-1} \min\Big\{ \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} f(z,\nabla u(x))\,dx : u\in W_0^{1,d}(B(0,R)), \\ u=1 \text{ on } B(0,1)\Big\}, \tag{2}$$

然后，我们定义一个刻画均匀化影响的常数，其定义为

$$C_{\hom} := \lim_{R\to+\infty} (\log R)^{d-1} \min\Big\{ \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} f_{\hom}(\nabla u(x))\,dx : u\in W_0^{1,d}(B(0,R)), \\ u=1 \text{ on } B(0,1)\Big\}, \tag{3}$$

其中 $f_{\hom}$ 是正 d-齐次函数

$$f_{\hom}(\xi) = \min\Big\{ \int_{(0,1)^d} f(y,\xi+\nabla\varphi(y))\,dy : \varphi\in W^{1,d}_{loc}(\mathbb{R}^d), \varphi \text{ 1-periodic}\Big\} \tag{4}$$

由均匀化定理确定。

我们证明，如果存在一个点 $x_0 \in \mathbb{R}^d$，使得 Φ 以最优方式持续集中，那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\log \varepsilon|^{d-1} m_{\varepsilon,\delta} = \Phi(x_0) C_{\hom} \left[\lambda \Phi(x_0)^{\frac{1}{d-1}} + (1-\lambda) C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}. \tag{5}$$

例如，我们可以参见 [5] 中已经处理过的二次情形。如果 $d = 2$ 和 $f(x,\xi) = a(x)|\xi|^2$，其中 $a(x)$ 是一个下界为常数 α 的 1-周期连续函数，那么我们可以选取 x_0 使得 $\Phi(x_0) = 2\pi\alpha$，并将均匀化矩阵记为 $A_{\hom}$，即可得到 $C_{\hom} = 2\pi\sqrt{\det A_{\hom}}$。最终我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\log \varepsilon| m_{\varepsilon,\delta} = 2\pi \frac{\alpha\sqrt{\det A_{\hom}^{\circ}}}{\lambda\alpha + (1-\lambda)\sqrt{\det A_{\hom}^{\circ}}}.$$

该结果证明中的一个基本工具是 De Giorgi 提出的一种方法，它允许对收敛序列施加边界条件。在本文中，我们以一个适用于本文目的的版本（引理 2.2）对其进行陈述和证明，该版本与 [2] 中的版本类似。

第二个结果涉及穿孔区域上的均匀化。论证遵循 Laura Sigalotti 在 [15] 中的工作；也就是说，这是临界指数下穿孔区域上均匀化的一个非线性版本，其狄利克雷边界条件最初由 Marchenko 和 Khruslov 在 [14] 中以及 Cioranescu 和 Murat 在 [8] 中进行研究。关于变化区域中狄利克雷问题渐近行为的工作，例如有 [3, 7, 10], , 以及从数值视角出发的 [13]。

记 B 为开单位球，并以 $d(\varepsilon)$ 表示穿孔周期，我们将周期性穿孔区域定义为

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}^d} id(\varepsilon) + \varepsilon B$$

并考虑由下式给出的泛函 $F_\varepsilon : L^d(\Omega) \to [0,+\infty]$

$$F_\varepsilon(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta}, \nabla u(x)\right) dx & \text{if } u \in W^{1,d}(\Omega) \text{ and } u = 0 \text{ on } \Omega\setminus\Omega_\varepsilon \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在上述研究中，[8] 和 [14]，分析了齐次情形 $f(x,\xi) = |\xi|^p$，其中 $p > 1$；并给出了周期的临界选取，恰为 $d(\varepsilon) = |\log \varepsilon|^{\frac{1-d}{d}}$，若 $p = d$。此外，证明了关于 $L^d(\Omega)$ 中强收敛的 Γ-极限为

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^d \, dx + \kappa_d \int_\Omega |u(x)|^d \, dx$$

对于每个 $u \in W^{1,d}(\Omega)$，其中 κ_d a 是一个维数常数，这表明随着所谓奇异项的出现，内部边界条件会消失。

我们证明了一个类似的结论：为简单起见，我们假设 $d(\varepsilon)$ 是 $\delta(\varepsilon)$ 的整数倍，从而穿孔的周期性与能量的周期性“相容”。由于我们的研究中引入了一个振荡项，我们预计结果会受到 ε、δ 的不同消失速率的影响；由于这一信息由参数 λ 编码，我们证明对于每个 $u \in W^{1,\,d}(\Omega)$，均有

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon} F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u(x))\,dx + C(\lambda)\int_\Omega |u(x)|^d\,dx,$$

其中 $C(\lambda)$ 是常数

$$C(\lambda) := \Phi(0) C_{\hom}\Big[\lambda\Phi(0)^{\frac{1}{d-1}} + (1-\lambda) C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}}\Big]^{1-d},$$

而项 $\Phi(0)$ 源于对这些问题的渐近分析

$$\min\Big\{\int_B f\left(\frac{x}{\delta}, \nabla u(x)\right)\,dx : u \in W_0^{1,d}(B), u = 1 \text{ on } B(0,\varepsilon)\Big\},$$

其中，所有穿孔的中心对每个 ε 都固定在 0。

1.1 预备知识

在本节及后续各节中，设 $d \geq 2$，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个有界开集，且$\lambda := \lim_{\varepsilon\to 0} |\log\ \delta|/|\log\ \varepsilon|$。

我们首先通过以下引理，为（2）和（3）中给出的定义提供依据；该引理运用了尺度不变性论证。

引理 1.1。设 $g:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个关于 d 次正齐次的博雷尔函数，并假设存在正定常数 $C_1 < C_2$，使得对每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$，均有 $C_1|\xi|^d \leq g(\xi) \leq C_2|\xi|^d$。定义

$$m_R := \min\Big\{\int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g(\nabla u(x))\,dx : u \in W_0^{1,d}(B(0,R)), u = 1\ on\ B(0,1)\Big\},$$

则极限 $\lim_{R\to+\infty}(\log R)^{d-1}\, m_R$ 存在，且该极限有限。

证明。固定 $S > R$，并令 $T := \lfloor \log\ S/\log\ R \rfloor$，从而对每个 $k = 1, ..., T$，环域 $B(0, R^k) \setminus B(0, R^{k-1})$ 均包含在 $B(0, S) \setminus B(0, 1)$ 中。

设 u 是该问题的一个解

$$\min\Big\{\int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g(\nabla u(x))\,dx : u \in W_0^{1,d}(B(0,R)), u = 1 \text{ on } B(0,1)\Big\},$$

并且对于 $k = 1, ..., T$，将函数 $u^k \in W^{1,\,d}(B(0, R^k) \setminus \overline{B}(0, R^{k-1}))$ 定义为

$$u^k(x) := \frac{1}{T} u\left(\frac{x}{R^{k-1}}\right) + \frac{T-k}{T};$$

然后将 $u_S \in W^{1,\,d}_{0}(B(0, S))$ 作为

$$u_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B(0,1) \\ u^k(x) & \text{if } x \in B(0, R^k) \setminus B(0, R^{k-1}),\ k = 1, ..., T \\ 0 & \text{if } x \in B(0,S) \setminus B(0, R^T). \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} (\log S)^{d-1} m_S &\leq (\log S)^{d-1} \int_{B(0,S)\setminus B(0,1)} g(\nabla u_S(x))\, dx \\ &= (\log S)^{d-1} \sum_{k=1}^{T} \int_{B(0,R^k)\setminus B(0,R^{k-1})} g(\nabla u^k(x))\, dx \\ &= (\log S)^{d-1} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{T^d} \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g(\nabla u(x))\, dx \\ &= (\log S)^{d-1} \frac{1}{T^{d-1}} m_R \\ &\leq (\log S)^{d-1} \Big(\frac{\log R}{\log S - \log R}\Big)^{d-1} m_R. \end{aligned}$$

若令 $S \to +\infty$ 趋于极限上确界，再令 $R \to +\infty$ 趋于极限下确界，则得到

$$\limsup_{S\to+\infty} (\log S)^{d-1} m_S \leq \liminf_{R\to+\infty} (\log R)^{d-1} m_R.$$

为了检验该极限是否有限，考虑函数

$$u(x) := 1 - \frac{\log|x|}{\log R}, \qquad x \in B(0,R) \setminus \overline{B}(0,1),$$

并注意到估计式

$$(\log R)^{d-1} m_R \leq \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g(\nabla u(x)) = (\log R)^{d-1} \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g\left(\frac{x}{-|x|^2 \log R}\right) dx$$
$$= (\log R)^{-1} \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} g\left(-\frac{x}{|x|^2}\right) dx \leq (\log R)^{-1} C_2 \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^d}\, dx = C_2 \sigma_{d-1}$$

成立，证明完毕。 □

我们给出一个略作修改的均匀化定理（见 [4, 6, 9, 12]），以便按照以下含义将平移也纳入考虑。

定理 1.2. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界开子集，具有 Lipschitz边界，且 $(\tau_\eta)_{\eta>0} \subseteq \mathbb{R}^d$。那么

$$\Gamma\text{-}\lim_{\eta\to 0} \int_A f\left(\frac{x}{\eta} + \tau_\eta, \nabla u(x)\right) dx = \int_A f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx\,,$$

对每个 $u \in W^{1,\,d}(A)$，其中 Γ-极限是指相对于 $L^d(A)$ 中的强收敛，而 $f_{\hom}$ 是由式 (4) 给出的函数。

特别地，对每个 $\phi \in W^{1,\,d}(A)$，我们有

$$\lim_{\eta\to 0} \inf\Big\{ \int_A f\left(\frac{x}{\eta} + \tau_\eta, \nabla u(x)\right) dx : u \in \phi + W_0^{1,d}(A) \Big\} \\ = \min\Big\{ \int_A f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx : u \in \phi + W_0^{1,d}(A) \Big\}\,.$$

At t此处，引理 1.1 以及假设 (P2)、(P3) 使函数有良好定义

$$\Phi(z) := \lim_{R\to+\infty} (\log R)^{d-1} \min\Big\{ \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} f(z, \nabla u(y))\, dy : u \in W_0^{1,d}(B(0,R)), \\ u = 1 \text{ on } B(0,1) \Big\},$$

而为了恰当地引入常数

$$C_{\hom} := \lim_{R\to+\infty} (\log R)^{d-1} \min\Big\{ \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx : u \in W_0^{1,d}(B(0,R)), \\ u = 1 \text{ on } B(0,1) \Big\},$$

我们还需借助定理 1.2：结合 (P3) 中对 $f(x,\xi)$ 提出的增长条件可由函数 $f_{\hom}(\xi)$ 继承这一事实，可知上述引理适用。

2 最小值的渐近分析

我们首先旨在估计模平移的固定中心下最小值的渐近行为。更确切地说，设 z 是 Ω 中的一个点；对于每个充分小的正数 ε，设 $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ 是 Ω 中由 $z_\varepsilon = \delta z + \delta i_\varepsilon$形式的一族点，其中 $(i_\varepsilon)_\varepsilon \subseteq \mathbb{Z}^d$。另外，假设这族点充分包含于 Ω 中，即 $\inf_\varepsilon \operatorname{dist}(z_\varepsilon, \partial\Omega) > 0$；我们令

$$\mu_{\varepsilon,\delta} = \min\Big\{ \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta}, \nabla u(x)\right) dx : u \in W_0^{1,d}(\Omega), u = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon, \varepsilon) \Big\}. \tag{6}$$

这些最小值的渐近行为是本节的主要研究内容；我们证明如下结论。

命题 2.1. 设 $z \in \Omega$ 为一个固定点，并设 $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ 为一个点族，它与上文一样，模 δ 等于 z。假设对每个 $\nu > 0$，都存在 $r_\nu > 0$，使得对每个 $x \in B(z, r_\nu)$，均有

$$|f(z,\xi) - f(x,\xi)| \le \nu |\xi|^d \ \text{for every } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{7}$$

Then

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\log \varepsilon|^{d-1} \mu_{\varepsilon,\delta} = \Phi(z) C_{\mathrm{hom}} \Big[\lambda \Phi(z)^{\frac{1}{d-1}} + (1-\lambda) C_{\mathrm{hom}}^{\frac{1}{d-1}} \Big]^{1-d}.$$

证明分为两部分：下界以及一个最优序列的构造。第一部分中，我们使用的主要工具是下面这个引理，它允许修改一个函数，使其在薄环域的边界上取常数值（就迹而言），同时仍能控制相应的能量值。

引理 2.2. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个满足标准增长条件性质 (P3) 的博雷尔函数。令 $z \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ 并定义

$$F(u, A) := \int_A f(x, \nabla u(x))\, dx$$

对每个 $u \in W^{1,\,d}(B(z,R))$，以及 $A \subseteq B(z,R)$ 博雷尔子集。

令 $\eta > 0$，设 $S := \max\{s \in \mathbb{N} : \eta 2^s \le R\}$，并假设 $S \ge 3$。取满足 $2 \le N < S$ 的 N 自然数，以及满足 $r \le \eta 2^{S-N}$ 的 r 正实数。则存在一个函数 v，具有以下性质：

(i) $v \in W^{1,\,d}(B(z,R) \setminus \overline{B}(z,r))$，(ii) 存在 $j \in \{1, \dots, N-1\}$ 使得

$$v = u \text{ on } B(z, \eta 2^{S-j-1}) \setminus \overline{B}(z,r)) \cup B(z,R) \setminus \overline{B}(z, \eta 2^{S-j+1}),$$

(iii) 对于相同的 j，函数 v 在 $\partial B(z, \eta 2^{S-j})$ 上为常数，

(iv) 存在一个正定常数 C，它依赖于 α、β 和维数 d，使得

$$F(v, B(z,R) \setminus B(z,r)) \le \Big(1 + \frac{C}{N-1}\Big) F(u, B(z,R) \setminus B(z,r)).$$

证明。假设 $z = 0$；否则，以 z 为中心进行构造，并重复该论证。

对于 $k = 1, \dots, N-1$，我们定义环域 $A_k := B(0, \eta 2^{S-N+k+1}) \setminus B(0, \eta 2^{S-N+k-1})$ 以及径向截断函数

$$\phi_k(\rho) := \begin{cases} 0 & \text{if } \rho \in [0, \eta 2^{S-N+k-1}] \\ \frac{\rho - \eta 2^{S-N+k-1}}{\eta 2^{S-N+k-1}} & \text{if } \rho \in (\eta 2^{S-N+k-1}, \eta 2^{S-N+k}] \\ \frac{\eta 2^{S-N+k+1} - \rho}{\eta 2^{S-N+k}} & \text{if } \rho \in (\eta 2^{S-N+k}, \eta 2^{S-N+k+1}] \\ 0 & \text{if } \rho \in (\eta 2^{S-N+k+1}, R], \end{cases}$$

接着令 $\psi_k := 1 - \phi_k$，并定义 $v_k := \psi_k u + (1-\psi_k)u_{A_k}$，其中我们用 u_{A_k} 表示 u 在 A_k 上的积分平均。

对每个固定的 k，注意到 $|\psi_k| \le 1$ 且

$$|\nabla \psi_k|^d = |\nabla \phi_k|^d \le \Big(\frac{1}{\eta 2^{S-N+k-1}}\Big)^d,$$

我们利用 (P2) 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_k} f(x, \nabla v_k(x))\,dx &\le \beta \int_{A_k} |\nabla v_k(x)|^d\,dx \\ &= \beta \int_{A_k} |\psi_k \nabla u(x) + (u - u_{A_k})\nabla \psi_k(x)|^d\,dx \\ &\le \beta 2^{d-1}\Big[\int_{A_k} |\nabla u|^d\,dx + \Big(\frac{1}{\eta 2^{S-N+k-1}}\Big)^d \int_{A_k} |u(x) - u_{A_k}|^d\,dx\Big].\end{aligned} \tag{8}$$

现在考虑 Poincar´e-Wirtinger 不等式如下众所周知的缩放性质：给定 A 为开、有界、连通且具有 Lipschitz边界，并且 $\lambda > 0$，有

$$\frac{1}{\lambda^d}\int_{\lambda A} |u - u_{\lambda A}|^d\,dx \le P(A)\int_{\lambda A} |\nabla u|^d\,dx,$$

其中，$u_{\lambda A}$ 是 u 在 λA 上的积分平均，$P(A)$ 是与 A相关的 Poincar´e-Wirtinger 常数。

我们将该结果应用于 $A = B(0,4) \setminus \overline{B}(0,1)$ 以及 $\lambda = \eta 2^{S-N+k-1}$，得到

$$\Big(\frac{1}{\eta 2^{S-N+k-1}}\Big)^d \int_{A_k} |u(x) - u_{A_k}|^d\,dx \le P^d \int_{A_k} |\nabla u|^d\,dx,$$

其中 $P := P(A)$ 是一个不依赖于 k的常数。
因此，（8）变为

$$\begin{aligned}\int_{A_k} f(x, \nabla v_k(x))\,dx &\le \beta 2^{d-1}\big(1 + P^d\big)\int_{A_k} |\nabla u|^d\,dx \\ &\le \frac{\beta}{\alpha} 2^{d-1}\big(1 + P^d\big)\int_{A_k} f(x, \nabla u(x))\,dx,\end{aligned}$$

并对 k 求和，我们推得

$$\sum_{k=1}^{N-1}\int_{A_k} f(x, \nabla v_k(x))\,dx \le C\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} f(x, \nabla u(x))\,dx,$$

其中 w 令 $C := \beta 2^{d-1}\left(1+P^d\right)/\alpha_\circ$ 由此可知，存在 $j \in \{1,...,N-1\}$ 使得

$$\int_{A_j} f(x,\nabla v_j(x))\,dx \le \frac{C}{N-1}\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} f(x,\nabla u(x))\,dx,$$

于是成立

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} f(x,\nabla v_j(x))\,dx &= \int_{(B(0,R)\setminus B(0,r))\setminus A_j} f(x,\nabla u(x))\,dx + \int_{A_j} f(x,\nabla v_j(x))\,dx \\ &\le \left(1+\frac{C}{N-1}\right)\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} f(x,\nabla u(x))\,dx,\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

(iv) 中的估计更精确地表示为 $N \to \infty$，即 $\eta \to 0$。我们的策略部分是将开集 Ω 划分为许多内外半径都很小的环域，假设其量级为 $\varepsilon^\lambda \sim \delta$，并在这些环域中修改函数 $u \in W^{1,\ {}_0}{}^{d}(\Omega)$，从而根据 (iii) 实现某些常值狄利克雷边界条件。鉴于 (iv)，修改所引入的误差可以忽略不计。

2.1 下界

下文中，我们始终将函数 $u \in W^{1,\ {}_0}{}^{d}(\Omega)$ 与通过在 $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ 上令 $u = 0$ 而得到的延拓等同起来，该延拓属于 $W^{1,\ d}(\mathbb{R}^d)$。为简化记号，给定 A 的一个博雷尔子集 $\mathbb{R}^d$ 和 $u \in W^{1,\ d}(\mathbb{R}^d)$，我们令

$$F_\varepsilon(u,A) := \int_A f\left(\frac{x}{\delta},\nabla u(x)\right)\,dx$$

并记 R_Ω 为 Ω 的直径与 1 中的较大者。

我们分别考虑 $\lambda = 0$、$\lambda \in (0,1)$ 和 $\lambda = 1$ 这几种情况；对每种情况，我们都得到同类估计，随后用同样的论证得出结论。

若 $\lambda = 0$，取参数 $\lambda_2 \in (\lambda, 1)$，使得

$$\frac{\varepsilon^{\lambda_2}}{\delta} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

对于任意满足 $u = 1$ 于 $B(z_\varepsilon,\varepsilon)$ 上的 $u \in W^{1,\ {}_0}{}^{d}(\Omega)$，包含集 $\Omega \subseteq B(z_\varepsilon,R_\Omega)$ 导出等式

$$F_\varepsilon(u,\Omega) = F_\varepsilon(u,B(z_\varepsilon,R_\Omega)),$$

然后，我们对函数 $u \in W^{1,\ {}_0}{}^{d}(B(z_\varepsilon,R_\Omega))$ 应用引理 2.2，其中

$$f(x,\xi) = f\left(\frac{x}{\delta},\xi\right),\ \eta = \varepsilon,\ R = \varepsilon^{\lambda_2},\ N \in \mathbb{N} \cap \left(1, \left\lfloor \frac{(1-\lambda_2)|\log\varepsilon|}{\log 2} \right\rfloor = S\right) \text{ and } r = \varepsilon.$$

我们得到一个函数 $v \in W^{1,d}_0(B(z_\varepsilon, R_\Omega))$，使得 $v = 1$ 在 $B(z_\varepsilon, \varepsilon)$ 上，$v = c$ 在 $\partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j})$ 上，其中某个常数为 c，某个指标为 $j \in \{1, ..., N-1\}$，且 $v = u$ 在 $B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})$ 上；因此，有

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, \Omega) = \left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, R_\Omega)) \geq F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega)) \\ = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j})) + F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j})).\end{aligned} \tag{9}$$

现在我们令

$$w^1 := \begin{cases} v & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j}) \\ c & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j}) \end{cases} \qquad w^2 := \begin{cases} c & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N}) \\ v & \text{on } B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j}), \end{cases}$$

并注意到

$$F_\varepsilon(w^1, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j}))$$

and

$$F_\varepsilon(w^2, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N})) = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-j})),$$

thus

$$F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega)) = F_\varepsilon(w^1, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) + F_\varepsilon(w^2, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N})).$$

此时，我们利用这样一个事实：函数 w^1 和 w^2 在其定义域边界的各个分支上取常数值。我们将不等式 (9) 改写为

$$\left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, \Omega) \geq$$

$$\begin{aligned}\geq \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) \ v = 1 \text{在 } B(z_\varepsilon, \varepsilon) \ v = c \text{上，在 } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}) \\ \} + \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S-N})), \\ v = c \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, R_\Omega)\},\end{aligned}$$

并考虑到这些变换

$$v(x) \mapsto \frac{v(x) - c}{1 - c}, \qquad v(x) \mapsto \frac{v(x)}{c},$$

以及齐次性性质 (P2)，我们得到最后一个表达式等于

$$\begin{aligned}\text{下界}\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) : \ v \in W^{1,d}_0(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) \ v = 1 \text{在 } B(z_\varepsilon, \varepsilon)\} |1 - c|^d \qquad (10) \\ + \text{最小值}\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S-N})), \\ v = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, R_\Omega)\} |c|^d. \qquad (11)\end{aligned}$$

为处理式 (10) 中的最小值，我们应用变换 $v(x) \mapsto v(z_\varepsilon + x\varepsilon)$，得到

$$\min\Big\{\int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \nabla v(x)\Big) : v \in W_0^{1,d}(B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})), v = 1 \text{ on } B(0,1)\Big\}|1-c|^d\,.$$

由于 $z_\varepsilon = \delta z + \delta i_\varepsilon$，我们利用周期性假设 (P1) 得到

$$f\left(\frac{x}{\delta}\varepsilon + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \xi\right) = f\left(\frac{x}{\delta}\varepsilon + z, \xi\right) \text{ for every } \xi \in \mathbb{R}^d;$$

还要注意，如果 $x \in B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})$，那么 $\frac{\varepsilon}{\delta}|x| < \frac{\varepsilon^{\lambda_2}}{\delta} \to 0$ 由于 $\varepsilon \to 0$。因此，对于每个 $\nu > 0$，给定如 (7) 中的 r_ν，有 $B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1}) \subseteq B(0,r_\nu)$，从而对于每个足够小的 ε，我们有

$$f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \xi\Big) \geq f(z,\xi) - \nu|\xi|^d \text{ for every } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

将这些观察结果与 (P3) 中的增长条件（下界）相结合，我们得到

$$\int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \nabla v(x)\Big)\,dx \geq \Big(1 - \frac{\nu}{\alpha}\Big)\int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f(z, \nabla v(x))\,dx$$

对于每个 $v \in W^{1,}{}_0{}^{d}(B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1}))$，使得 $v = 1$ 在 $B(0,1)$ 上成立。应用引理 1.1，由于 $\lambda_2 < 1$，这是可行的，我们得到

$$\begin{aligned}\min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon,\varepsilon)\}|1-c|^d \\ \geq \frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}|\log\varepsilon|^{d-1}}|1-c|^d, \qquad (12)\end{aligned}$$

其中我们去掉了 ν 中的项，因为当 $\varepsilon \to 0$ 时，$1 - \nu/\alpha$ 可以任意接近 1。

为了处理（11）中的最小值，我们再次应用性质（P3），尤其是不等式 $f(x,\xi) \geq \alpha|\xi|^d$。我们得到一个以包含集 $B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S-N}) \subseteq B(z_\varepsilon, R_\Omega)$ 的 d-容量表示的下界，该容量可显式计算；更确切地说，我们有

$$\begin{aligned}\min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon,R_\Omega)\setminus\overline{B}(z_\varepsilon,\varepsilon 2^{S-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon,R_\Omega)\setminus\overline{B}(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_2}2^{S-N})),& \\ v = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon,\varepsilon 2^{S-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon,R_\Omega)\}|c|^d& \\ \geq \quad \alpha\mathrm{Cap}_d(B(z_\varepsilon,\varepsilon 2^{S-N}), B(z_\varepsilon,R_\Omega))|c|^d& \\ = \quad \frac{\alpha\sigma_{d-1}}{[\log R_\Omega + |\log\varepsilon| - (S-N)\log 2]^{d-1}}|c|^d& \\ \geq \quad \frac{\alpha\sigma_{d-1}}{[\log R_\Omega + \lambda_2|\log\varepsilon| + (N+2)\log 2]^{d-1}}|c|^d, \qquad (13)&\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式可由回忆起 $S = \lfloor \frac{(1-\lambda_2)}{|\log\varepsilon|\log 2} \rfloor$ 得出。

综合 (12) 和 (13)，并乘以 $|\log\varepsilon|^{d-1}$，得到

$$\left(1+\frac{C}{N-1}\right)|\log\varepsilon|^{d-1}F_\varepsilon(u,\Omega)\geq\frac{\Phi(z)+o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d + \frac{\alpha\sigma_{d-1}|\log\varepsilon|^{d-1}}{[\log R_\Omega+\lambda_2|\log\varepsilon|+(N+2)\log 2]^{d-1}}|c|^d\,. \tag{14}$$

我们回顾一下，根据构造，常数边界值 c 实际上取决于ε，它是函数 u 在一个环域中的平均值，该环域的半径取决于 ε。为了在 $\varepsilon\to 0$时取下极限，我们明确说明可以假设$c(\varepsilon)\to c\in\mathbb{R}$。

一个简单的理解方式是注意到，我们可以假设 u 取值于 $[0,1]$，这可由以下估计直接得出

$$F_\varepsilon(u,\Omega)\geq F_\varepsilon((u\vee 0)\wedge 1,\Omega)\text{ for every }u\in W_0^{1,d}(\Omega),$$

因此 $c(\varepsilon)\in[0,1]$ 也成立。于是我们找到一个序列 $\varepsilon_k\to 0$，并相应地找到$c_k:=c(\varepsilon_k)$，使得

$$\liminf_{k\to+\infty}\frac{\Phi(z)+o_k(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}(1-c_k)^d+\frac{\alpha\sigma_{d-1}|\log\varepsilon_k|^{d-1}}{[\log R_\Omega+\lambda_2|\log\varepsilon_k|+(N+2)\log 2]^{d-1}}(c_k)^d$$

作为极限取得；由于 $(c_k)_k\subseteq[0,1]$，我们进一步抽取一个子序列 $c_{k_h}\to c\in[0,1]$，从而得到

$$\left(1+\frac{C}{N-1}\right)\liminf_{\varepsilon\to0}|\log\varepsilon|^{d-1}F_\varepsilon(u,\Omega)\geq\frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d+\frac{\alpha\sigma_{d-1}}{\lambda_2^{d-1}}|c|^d\,.$$

最后，我们令 $N\to+\infty$ 趋于极限，并回顾 u 在极小化的可容许函数中是任意的；由此得出

$$\liminf_{\varepsilon\to0}|\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta}\geq\frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d+\frac{\alpha\sigma_{d-1}}{\lambda_2^{d-1}}|c|^d\,, \tag{15}$$

对每个 $\lambda_2\in(0,1)$。

若 $\lambda\in(0,1)$，我们引入另一个参数 $\lambda_1\in(0,\lambda)$，使得

$$\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}}\to 0\text{ as }\varepsilon\to 0.$$

我们的构造依赖于若干同心环域的定义。为此，设

$$T:=\max\{t\in\mathbb{N}:\varepsilon^{\lambda_1}2^t\leq R_\Omega\}=\lfloor\frac{\lambda_1|\log\varepsilon|+\log R_\Omega}{\log 2}\rfloor$$

并特别假设，当 ε 足够小时， T 大于 4。然后选取一个自然数 $M \in (2, T)$，并定义以 z_ε 为中心、半径为 $\varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}$ 的环域，其中$k = 0$、1、.....、$\lfloor \frac{T}{M} \rfloor + 1$。

我们有 $\Omega \subseteq B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor + 1)M})$；因此，对每个 $u \in W^{1,}{}_0{}^d(\Omega)$，只要 $u = 1$ on $B(z_\varepsilon, \varepsilon)$，就有

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u, \Omega) &= F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor + 1)M})) \\ &= F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) + F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor T/M \rfloor + 1} F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M})). \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们仔细地分离出三个加项，以便根据参数λ_1, λ_2所描述的不同指数尺度分别处理它们。

对第一个加项应用引理 2.2，其中

$$f(x, \xi) = f\left(\frac{x}{\delta}, \xi\right), \eta = \varepsilon, R = \varepsilon^{\lambda_2}, N \in \mathbb{N} \cap \left(1, \left\lfloor \frac{(1-\lambda_2)|\log \varepsilon|}{\log 2} \right\rfloor\right) \text{ and } r = \varepsilon.$$

对第二个加项应用引理 2.2，其中

$$f(x, \xi) = f\left(\frac{x}{\delta}, \xi\right), \eta = \varepsilon^{\lambda_2}, R = \varepsilon^{\lambda_1}, N \in \mathbb{N} \cap \left(1, \left\lfloor \frac{(\lambda_2-\lambda_1)|\log \varepsilon|}{\log 2} \right\rfloor\right) \text{ and } r = \varepsilon^{\lambda_2}.$$

对第三个加项中 $k = 1, ..., \lfloor T/M \rfloor$ 的各项应用引理 2.2，其中

$$f(x, \xi) = f\left(\frac{x}{\delta}, \xi\right), \eta = \varepsilon^{\lambda_1}, R = \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}, N \in \mathbb{N} \cap (1, kM) \text{ and } r = \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M}.$$

为简化记号，令

$$S' := \left\lfloor \frac{(1-\lambda_2)|\log \varepsilon|}{\log 2} \right\rfloor \qquad \text{and} \qquad S'' := \left\lfloor \frac{(\lambda_2-\lambda_1)|\log \varepsilon|}{\log 2} \right\rfloor.$$

由于 S'、S'' 和 M 会任意增大，我们可以假设在上述每次应用引理时都固定相同的 N。

我们得到函数 $v^{-1} \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}))$，$v^0 \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}))$ 和$v^k \in W^{1,d}(B(z, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}) \setminus \overline{B}(z, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M}))$ $k = 1, ..., \lfloor T/M \rfloor$，它们具有引理 2.2 中所述的性质。令

$$v := \begin{cases} v^{-1} & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}) \\ v^0 & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}) \\ v^k & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M}),\ k = 1, ..., \lfloor T/M \rfloor \\ u & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并注意到 $v \in W^{1,d}_0(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M}))$，因为引理所提供的修改发生在远离每个环域边界的位置；此外，有

$$\left(1+\frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M})) \geq F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M})).$$

为了强调 v 在以 z_ε 为中心、半径为 $\varepsilon 2^{S'-j_{-1}}$、$\varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0}$ 和 $\varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM-j_k}$（其中 $j_k \in \{1, ..., N-1\}$，对于 $k=-1$，0，1，...，$\lfloor T/M \rfloor$）的球面上取常数值 c_k，我们记为

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M})) &= F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}})) \\ &+ F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}})) \\ &+ F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{M-j_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0})) \\ &+ \sum_{k=2}^{\lfloor T/M \rfloor} F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM-j_k}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-j_{k-1}})) \\ &+ F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{\lfloor T/M \rfloor M-j_{\lfloor T/M \rfloor}})). \end{aligned} \tag{16}$$

接着定义函数 w^k、$k=-1$（0，1，$...\lfloor T/M \rfloor+1$）如下：$w^{-1} \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}))$ 定义为

$$w^{-1} := \begin{cases} v & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}}) \\ c_{-1} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

从而

$$F_\varepsilon(w^{-1}, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}})).$$

类似地，设

$$w^0 := \begin{cases} c_{-1} & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}})) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})) \\ v & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}})) \\ c_0 & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0}), \end{cases}$$

因此

$$F_\varepsilon(w^0, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N}))) = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S''-j_0}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-j_{-1}}))$$

and

$$w^1 := \begin{cases} c_0 & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-j_0}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})) \\ v & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{M-j_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-j_0})) \\ c_1 & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{M})) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{M-j_1}), \end{cases}$$

因此

$$F_\varepsilon(w^1, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^M) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N}))) = F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{M-j_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-j_0})).$$

对于 $k = 2, ..., \lfloor T/M \rfloor + 1$，我们定义环域

$$A^N_{M,k} := B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{kM}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-N}).$$

对于 $k = 2, ..., \lfloor T/M \rfloor$，我们将函数 $w^k \in W^{1,d}(A^N_{M,k})$ 定义为

$$w^k := \begin{cases} c_{k-1} & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-j_{k-1}}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-N}) \\ v & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{kM-j_k}) \setminus B(z, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-j_{k-1}}) \\ c_k & \text{on } B(z, \varepsilon^{\lambda_1}2^{kM}) \setminus B(z, \varepsilon^{\lambda_1}2^{kM-j_k}), \end{cases}$$

并且对于 $k = \lfloor T/M \rfloor + 1$,

$$w^{\lfloor T/M \rfloor+1} := \begin{cases} c_{\lfloor T/M \rfloor} & \text{on } B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-j_{k-1}}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-N}) \\ v & \text{otherwise,} \end{cases}$$

使得

$$F_\varepsilon(w^k, A^N_{M,k}) = F_\varepsilon(v, B(z, \varepsilon^{\lambda_1}2^{kM-j_k}) \setminus B(z, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-j_{k-1}}))$$

对所有 $k = 2, ..., \lfloor T/M \rfloor + 1$。

若令 $A^N_{M,-1} := B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})$, $A^N_{M,0} := B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})$，以及 $A^N_{M,1} := B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^M) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})$，则可将式 (16) 简洁地改写为

$$F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}2^{(\lfloor T/M \rfloor+1)M})) = \sum_{k=-1}^{\lfloor T/M \rfloor+1} F_\varepsilon(w^k, A^N_{M,k}).$$

我们再次利用这样一个事实：函数 $w^{-1}, ..., w^{\lfloor T/M \rfloor+1}$ 在其定义环域的分支上取常数值。此外，利用 (P2) 以及适当的仿射变换（如 $\lambda = 0$ 的情形），可得

$$\left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, \Omega) \geq$$

$$\geq \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon, \varepsilon)\}|1 - c_{-1}|^d \tag{17}$$

$$+ \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})),$$
$$v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})\}|c_{-1} - c_0|^d \tag{18}$$

$$+ \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})),$$
$$v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M)\}|c_0 - c_1|^d \tag{19}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\lfloor T/M \rfloor + 1} \min\{F_\varepsilon(v, A_{M,k}^N) : v \in W^{1,d}(A_{M,k}^N),\ v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N}),$$
$$v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM})\}|c_{k-1} - c_k|^d, \tag{20}$$

其中我们令 $c_{\lfloor \frac{T}{M} \rfloor + 1} := 0$。

由于 $\lambda_2 < \lambda$，在 $\lambda = 0$ 的情形下，(17) 中的最小值可像 (12) 那样估计，因此它大于或等于

$$\frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1 - \lambda_2)^{d-1} |\log \varepsilon|^{d-1}} |1 - c_{-1}|^d. \tag{21}$$

(18) 和 (19) 中的界再次由 (P3) 中的下增长条件推出；特别是，回想一下我们对 S' 和 S'' 的定义，可得

$$\begin{aligned} \alpha \mathrm{Cap}_d(B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N}), B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})) &\geq \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{[(1 - \lambda_1)|\log \varepsilon| - (S' - N)\log 2]^{d-1}} \\ &\geq \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{[(\lambda_2 - \lambda_1)|\log \varepsilon| + (N+1)\log 2]^{d-1}} \end{aligned} \tag{22}$$

而

$$\begin{aligned} \alpha \mathrm{Cap}_d(B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N}), B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M)) &\geq \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{[M \log 2 + (1 - \lambda_1)|\log \varepsilon| - (S'' - N)\log 2]^{d-1}} \\ &\geq \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{[M \log 2 + (1 - \lambda_2)|\log \varepsilon| + (N+1)\log 2]^{d-1}}. \end{aligned} \tag{23}$$

关于 (20) 中的各项，我们固定 $k = 2$、...、$\lfloor T/M \rfloor + 1$，并应用 $v(x) \mapsto v(z_\varepsilon + x\varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N})$，于是每一项等于

$$\min\Big\{ \int_{B(0,2^{M+N}) \setminus B(0,1)} f\Big(\frac{x}{\delta} \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N} + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \nabla v(x)\Big)\, dx : $$
$$v \in W_0^{1,d}(B(0, 2^{M+N})), v = 1 \text{ on } B(0,1)\Big\} |c_{k-1} - c_k|^d.$$

由 $\lambda_1 < \lambda$ 可得

$$\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N}} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0;$$

因此，我们可以应用定理 1.2，其中

$$A = B(0, 2^{M+N}) \setminus \overline{B}(0,1)\,, \qquad \eta = \frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N}}\,, \qquad \tau_\eta = \frac{z_\varepsilon}{\delta}$$

以及 ϕ 在 $W^{1,d}(B(0,2^{M+N}) \setminus \overline{B}(0,1))$ 中的任意函数，满足 $\phi = 1$ 在 $\partial B(0,1)$ 上且 $\phi = 0$ 在 $\partial B(0,2^{M+N})$ 上。由此可知，上述每个最小值都等于

$$\Bigg[\min\Big\{\int_{B(0,2^{M+N})\setminus B(0,1)} f_{\rm hom}(\nabla v(x))\,dx :\, v \in W^{1,d}(B(0,2^{M+N})),\\ v = 1 \text{ on } B(0,1), v = 0 \text{ on } \partial B(0,2^{M+N})\Big\} + o_\varepsilon(1)\Bigg]|c_{k-1} - c_k|^d, \tag{24}$$

其中 $f_{\rm hom}$ 是由 (4) 给出的 d-齐次函数，它不依赖于 k。回顾 (3) 中常数 $C_{\rm hom}$ 的定义，(24) 可写为

$$\left[\frac{C_{\rm hom} + o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}} + o_\varepsilon(1)\right]|c_{k-1} - c_k|^d.$$

我们对 k 求和，并利用 $x \mapsto |x|^d$ 的凸性、$\sum_{k=2}^{\lfloor T/M\rfloor+1}(c_{k-1}-c_k) = c_1$这一事实，以及 $T \le {}^{\lambda_1}|\log\varepsilon| + \log R_\Omega \log 2$；于是得到

$$\sum_{k=2}^{\lfloor T/M\rfloor+1} |c_{k-1} - c_k|^d \ge \frac{(M\log 2)^{d-1}}{(\lambda_1|\log\varepsilon| + \log R_\Omega + M\log 2)^{d-1}}|c_1|^d,$$

进而

$$\sum_{k=2}^{\lfloor T/M\rfloor+1}\left[\frac{C_{\rm hom} + o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}} + o_\varepsilon(1)\right]|c_{k-1} - c_k|^d \\ \ge \left[\frac{C_{\rm hom} + o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}} + o_\varepsilon(1)\right]\frac{(M\log 2)^{d-1}}{(\lambda_1|\log\varepsilon| + \log R_\Omega + M\log 2)^{d-1}}|c_1|^d. \tag{25}$$

将 (21)、(22)、(23) 和 (25) 合并，并乘以 $|\log\varepsilon|^{d-1}$，得到

$$\left(1 + \frac{C}{N-1}\right)|\log\varepsilon|^{d-1} F_\varepsilon(u,\Omega) \ge \frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1 - c_{-1}|^d \\ + \frac{\alpha\sigma_{d-1}|\log\varepsilon|^{d-1}}{[(\lambda_2-\lambda_1)|\log\varepsilon| + (N+1)\log 2]^{d-1}}|c_{-1} - c_0|^d \\ + \frac{\alpha\sigma_{d-1}|\log\varepsilon|^{d-1}}{[M\log 2 + (1-\lambda_2)|\log\varepsilon| + (N+1)\log 2]^{d-1}}|c_0 - c_1|^d \\ + \left[\frac{C_{hom} + o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}} + o_\varepsilon(1)\right]\frac{|\log\varepsilon|^{d-1}(M\log 2)^{d-1}}{(\lambda_1|\log\varepsilon| + \log R_\Omega + M\log 2)^{d-1}}|c_1|^d.$$

与前面一样进行论证，我们强调， c_{-1}、 c_0 和 c_1 依赖于 ε，且可以在区间 $[0,1]$ 内选取。因此，我们可以假设它们都收敛到某个有限极限，分别记为 c_{-1}、 c_0、 c_1。此外，这些极限必须相同；否则，令 λ_1、 $\lambda_2 \to \lambda$ 或 $\lambda_2 \to 1$，就会得到矛盾。

最终，以下估计成立：

$$\left(1+\frac{C}{N-1}\right)\liminf_{\varepsilon\to 0}|\log\varepsilon|^{d-1}F_\varepsilon(u,\Omega) \geq \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d + \left[\frac{C_{\hom}+o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}}\right]\frac{(M\log 2)^{d-1}}{\lambda_1^{d-1}}|c|^d$$

令 $M\to+\infty, N\to+\infty$，由 u 的任意性，我们得到

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}|\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \geq \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d + \frac{C_{\hom}}{\lambda_1^{d-1}}|c|^d. \tag{26}$$

若 $\lambda=1$，沿用证明中引入的记号，定义以 z_ε 为中心、半径为 $\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM}$ 的环域，其中 $k=1,...,\lfloor\frac{T}{M}\rfloor+1$。对于 $B(z_\varepsilon,\varepsilon)$ 上的每个函数 $u\in W^{1,\ 0}{}^{d}(\Omega)$ $u=1$，我们有

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u,\Omega) &= F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(\lfloor T/M\rfloor+1)M})) \\ &= F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})) \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor T/M\rfloor+1} F_\varepsilon(u, B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M})). \end{aligned} \tag{27}$$

A对第二个加数中的各项应用引理 2.2，其中 $k=1,...,\lfloor T/M\rfloor$ 满足

$$f(x,\xi)=f\left(\frac{x}{\delta},\xi\right),\ \eta=\varepsilon^{\lambda_1},\ R=\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM},\ N\in\mathbb{N}\cap(1,kM) \text{ and } r=\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}.$$

按照前面几种情形的论证，结合 $\lambda\in[0,1)$，我们得到

$$\left(1+\frac{C}{N-1}\right)F_\varepsilon(u,\Omega)\geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \min\{F_\varepsilon(v,B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})) : v\in W^{1,d}(B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})), v=1 \text{ on } B(z_\varepsilon,\varepsilon), \\ &\qquad\qquad v=0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})\}|1-c_0|^d \qquad (28) \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor T/M\rfloor+1} \min\{F_\varepsilon(v,A^N_{M,k}) : v\in W^{1,d}(A^N_{M,k}), v=1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M-N}), \\ &\qquad\qquad v=0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\}|c_{k-1}-c_k|^d, \qquad (29) \end{aligned}$$

其中 $c_{\lfloor \frac{T}{M} \rfloor + 1} := 0$。

利用 (P3)，(28) 的下界为

$$\alpha \mathrm{Cap}_d(B(z_\varepsilon, \varepsilon), B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}))|1 - c_0|^d = \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{[(1-\lambda_1)|\log \varepsilon|]^{d-1}} |1 - c_0|^d \,,$$

而由于 $\delta/\varepsilon^{\lambda_1} \to 0$，(29) 可按 (25) 估计。

最后，我们得到不等式

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{C}{N-1}\right) |\log \varepsilon|^{d-1} F_\varepsilon(u, \Omega) \geq{}& \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{(1-\lambda_1)^{d-1}} |1 - c_0|^d \\ &+ \left[\frac{C_{\mathrm{hom}} + o_M(1)}{((M+N)\log 2)^{d-1}} + o_\varepsilon(1) \right] \frac{|\log \varepsilon|^{d-1} (M \log 2)^{d-1}}{(\lambda_1 |\log \varepsilon| + \log R_\Omega + M \log 2)^{d-1}} |c_0|^d \,. \end{aligned}$$

回想一下，我们可以假设 $c_0 = c_0(\varepsilon)$ 收敛到有限值 c，因此令 $\varepsilon \to 0$、$M \to +\infty$ 和 $N \to +\infty$，再利用 u 的任意性，得到

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} |\log \varepsilon|^{d-1} \mu_{\varepsilon, \delta} \geq \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{(1-\lambda_1)^{d-1}} |1 - c|^d + \frac{C_{\mathrm{hom}}}{\lambda_1^{d-1}} |c|^d \,. \tag{30}$$

结合 (15)、(26) 和 (30)，我们得到

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} |\log \varepsilon|^{d-1} \mu_{\varepsilon, \delta} \geq \begin{cases} \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}} |1-c|^d + \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{\lambda_2^{d-1}} |c|^d & \text{if } \lambda = 0, \\ \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}} |1-c|^d + \frac{C_{\mathrm{hom}}}{\lambda_1^{d-1}} |c|^d & \text{if } \lambda \in (0,1), \\ \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{(1-\lambda_1)^{d-1}} |1-c|^d + \frac{C_{\mathrm{hom}}}{\lambda_1^{d-1}} |c|^d & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

对任意 $\lambda_1 \in (0, \lambda)$ 和 $\lambda_2 \in (\lambda, 1)$，均成立。

这些表达式可以通过同样的论证进行估计，该论证涉及函数 $a|1-x|^d + b|x|^d$ 在 a、$b > 0$ 条件下的极小化。事实上，最小值在

$$x = \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{d-1}} + 1 \right]^{-1}$$

其最小值为

$$b \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{d-1}} + 1 \right]^{1-d} .$$

在（15）中，我们设定

$$a = \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}} \qquad \text{and} \qquad b = \frac{\alpha \sigma_{d-1}}{\lambda_2^{d-1}} \,,$$

以实现

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \geq \frac{\alpha\sigma_{d-1}}{\lambda_2^{d-1}}\left[\left(\frac{\alpha\sigma_{d-1}/\lambda_2^{d-1}}{\Phi(z)/(1-\lambda_2)^{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-1}}+1\right]^{1-d}$$
$$= \Phi(z)\alpha\sigma_{d-1}\left[(1-\lambda_2)(\alpha\sigma_{d-1})^{\frac{1}{d-1}}+\lambda_2\Phi(z)^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}.$$

令 $\lambda_2\to 0$ 趋于极限，即可得出结论。
在 (26) 中，令

$$a=\frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}} \qquad \text{and} \qquad b=\frac{C_{\hom}}{\lambda_1^{d-1}}\,, \tag{31}$$

并令 $\lambda_1,\lambda_2\to\lambda$，得到

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \geq \frac{C_{\hom}}{\lambda^{d-1}}\left[\left(\frac{C_{\hom}/\lambda^{d-1}}{\Phi(z)/(1-\lambda)^{d-1}}\right)^{\frac{1}{d-1}}+1\right]^{1-d}$$
$$= \Phi(z)C_{\hom}\left[(1-\lambda)C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}}+\lambda\Phi(z)^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}.$$

最后，在 (30) 中令

$$a=\frac{\alpha\sigma_{d-1}}{(1-\lambda_1)^{d-1}} \qquad \text{and} \qquad b=\frac{C_{\hom}}{\lambda_1^{d-1}}\,,$$

可得

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \geq \frac{C_{\hom}}{\lambda_1^{d-1}}\left[\left(\frac{C_{\hom}/\lambda_1}{\alpha\sigma_{d-1}/(1-\lambda_1)}\right)^{\frac{1}{d-1}}+1\right]^{1-d}$$
$$= \alpha\sigma_{d-1}C_{\hom}\left[(1-\lambda_1)C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}}+\lambda_1(\alpha\sigma_{d-1})^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}.$$

然后，令 $\lambda_1\to 1$，即可得出结论。

2.2 最优序列的构造

为完成证明，我们使用合适的容量剖面定义极小化序列，从而得到上界。

若 $\lambda=0$，取 $\lambda_2\in(\lambda,1)$，并令 v_ε^0 为极小化问题的一个解

$$\min\Big\{\int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f(z,\nabla u(x))\,dx : u\in W_0^{1,d}(B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})), u=1 \text{ on } B(0,1)\Big\}.$$

对于 $\varepsilon \ll 1$，函数 $u_\varepsilon^0(x) := v_\varepsilon^0\left(\frac{x-z_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ 属于 $W^{1,\,0}{}^{d}(\Omega)$，且是定义 (6) 的极小化问题的可行函数，因此 $\mu_{\varepsilon,\,\delta} \le F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \Omega)$。通过变量替换以及 $f(x,\cdot)$ 的齐次性，可得

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \Omega) = F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) &= \int_{B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})} f\Big(\frac{x}{\delta}, \nabla u_\varepsilon^0(x)\Big)\, dx \\ &= \int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + \frac{z_\varepsilon}{\delta}, \nabla v_\varepsilon^0(x)\Big)\, dx = \int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + z, \nabla v_\varepsilon^0(x)\Big)\, dx. \end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon^{\lambda_2}/\delta \to 0$，因此，对于每个 $x \in B(0, \varepsilon^{\lambda_2-1})$，有 $|x|\frac{\varepsilon}{\delta} \to 0$，因为 $\varepsilon \to 0$。鉴于此，任取 $\nu > 0$，由 (7) 可推得

$$f(x,\xi) \le f(z,\xi) + \nu|\xi|^d \text{ for every } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ and for every } x \in B(0, \varepsilon^{\lambda_2-1}),$$

当 ε 足够小时。由此可得

$$\int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f\Big(\frac{x}{\delta}\varepsilon + z, \nabla v_\varepsilon^0(x)\Big)\, dx \le \int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f(z, \nabla v_\varepsilon^0(x))\, dx + \nu \int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} |\nabla v_\varepsilon^0(x)|^d\, dx$$

根据增长条件，它的上界为

$$\Big(1 + \frac{\nu}{\alpha}\Big) \int_{B(0,\varepsilon^{\lambda_2-1})} f(z, \nabla v_\varepsilon^0(x))\, dx\,.$$

鉴于 $\varepsilon^{\lambda_2-1} \to \infty$ 满足 $\varepsilon \to 0$，我们应用引理 1.1 得出

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \Omega) = F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) \le \Big(1 + \frac{\nu}{\alpha}\Big) \frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}|\log\varepsilon|^{d-1}}\,. \tag{32}$$

因此，由于 $\nu > 0$ 和 $\lambda_2 \in (0,1)$ 的任意性，我们得出

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \le \inf_{\lambda_2\in(0,1)} \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}} = \Phi(z).$$

若 $\lambda \in (0,1)$，再引入一个参数 $\lambda_1 \in (0,\lambda)$，令

$$T := \max\{t \in \mathbb{N} : \varepsilon^{\lambda_1} 2^t \le \operatorname{dist}(z_\varepsilon, \partial\Omega)\} = \left\lfloor \frac{\lambda_1|\log\varepsilon| + \log\operatorname{dist}(z_\varepsilon, \partial\Omega)}{\log 2} \right\rfloor$$

并取 $M \in \mathbb{N} \cap (0,T)$。由于点族 $\{z_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ 包含在某个球中，例如 B，且该球的闭包包含于 Ω 内，因此我们有 $\operatorname{dist}(z_\varepsilon, \partial\Omega) \ge \operatorname{dist}(\partial B, \partial\Omega) > 0$，从而 T 有定义，并且可假设对于每个 ε，它都大于 2。

设 v_η 为极小化问题的一个解

$$m_\eta := \min\Big\{\int_{B(0,2^M)} f\Big(\frac{x}{\eta}+\tau_\eta,\nabla u(x)\Big)\,dx : u\in W_0^{1,d}(B(0,2^M)), u=1 \text{ on } B(0,1)\Big\}$$

并设

$$m_0 := \min\Big\{\int_{B(0,2^M)} f_{\hom}(\nabla u(x))\,dx : u\in W_0^{1,d}(B(0,2^M)), u=1 \text{ on } B(0,1)\Big\}.$$

根据定理 1.2，存在一个单调递增非负函数 ω，使得

$$|m_\eta - m_0| \le \omega(\eta) \quad \text{and} \quad \omega(\eta)\to 0 \text{ as } \eta\to 0;$$

th对我们而言，对于 $k=1,...,\lfloor T/M\rfloor$，定义 $u_\varepsilon^k \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}))$ 为

$$u_\varepsilon^k(x) := \frac{c}{\lfloor T/M\rfloor} v_\eta\left(\frac{x-z_\varepsilon}{\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}}\right) + \frac{\lfloor T/M\rfloor - k}{\lfloor T/M\rfloor}c$$

其中常数 c 需适当选取。

若设 $\eta = \frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}}$,$\tau_\eta = \frac{z_\varepsilon}{\delta}$，并对 $f(x,\cdot)$ 作变量替换并利用其齐次性，则有

$$\begin{aligned}
&F_\varepsilon(u_\varepsilon^k, B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}))\\
&\qquad = \int_{B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M})} f\left(\frac{x}{\delta},\nabla u_\varepsilon^k(x)\right)\,dx\\
&\qquad = \left|\frac{c}{\lfloor T/M\rfloor}\right|^d \int_{B(0,2^M)} f\left(\frac{x}{\delta}\varepsilon^{\lambda_1}2^{k-1}+\frac{z_\varepsilon}{\delta},\nabla v_\eta(x)\right)\,dx\\
&\qquad = \left|\frac{c}{\lfloor T/M\rfloor}\right|^d m_\eta\\
&\qquad \le \left|\frac{c}{\lfloor T/M\rfloor}\right|^d (m_0+\omega(\eta))\\
&\qquad \le \left|\frac{c}{\lfloor T/M\rfloor}\right|^d \left(m_0+\omega\left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{33}$$

然后，考虑与情形 $\lambda=0$ 中引入的相同的 u_ε^0，令

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases}
(1-c)u_\varepsilon^0(x)+c & \text{if } x\in B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_2})\\
c & \text{if } x\in B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_2})\\
u_\varepsilon^k(x) & \text{if } x\in B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}), k=1,...,\lfloor T/M\rfloor\\
0 & \text{if } x\in\Omega\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{\lfloor T/M\rfloor M}).
\end{cases}$$

由于边界条件相匹配， $u_\varepsilon \in W^{1,\,0}{}^{d}(\Omega)$ 且 $u_\varepsilon = 1$ 在 $B(z_\varepsilon, \varepsilon)$ 上成立；因此，它是该极小化问题的一个可容许函数。

我们分别估计 $F_\varepsilon(u_\varepsilon, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}))$ 和 $F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}))$，忽略 u_ε 为常数的区域。

通过导致（32）的相同计算，

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})) = F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2}))|1-c|^d \leq \frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}|\log \varepsilon|^{d-1}}|1-c|^d, \quad (34)$$

其中，由于当 $\varepsilon \to 0$ 时， ν 会任意小，因此将其忽略。

我们关注 $F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}))$。由（33）可得

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})) &= \sum_{k=1}^{\lfloor T/M \rfloor} F_\varepsilon(u_\varepsilon^k, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M})) \\ &\leq \left|\frac{c}{\lfloor T/M \rfloor}\right|^d \sum_{k=1}^{\lfloor T/M \rfloor} \left(m_0 + \omega\left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}}\right)\right) = \frac{|c|^d}{\lfloor T/M \rfloor^{d-1}} \left(m_0 + \omega\left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}}\right)\right), \quad (35) \end{aligned}$$

但 $f_{\mathrm{hom}}(0) = 0$，而根据常数 C_{hom} 的定义，有

$$m_0 = \frac{C_{\mathrm{hom}} + o_M(1)}{(M \log 2)^{d-1}}.$$

因此，将其代入（35）得到

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})) \leq \frac{|c|^d}{\lfloor T/M \rfloor^{d-1}} \left(\frac{C_{\mathrm{hom}} + o_M(1)}{(M \log 2)^{d-1}} + \omega\left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}}\right)\right),$$

并且，由于 $T \geq \underline{\lambda_1|}_{\text{对数 }\varepsilon|+\text{对数 }d-\text{对数 }2\text{ 对数 }2}$ 且 $d := \mathrm{dist}(\partial B, \partial\Omega)$，可得

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})) \leq \frac{C_{\mathrm{hom}} + o_M(1) + (M \log 2)^{d-1}\omega(\delta/\varepsilon^{\lambda_1})}{(\lambda_1|\log \varepsilon| + \log d - \log 2)^{d-1}}|c|^d. \quad (36)$$

综合估计式（34）和（36），可得

$$\begin{aligned} |\log \varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} &\leq \frac{\Phi(z) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d \\ &\quad + \frac{|\log \varepsilon|^{d-1}[C_{\mathrm{hom}} + o_M(1) + (M \log 2)^{d-1}\omega(\delta/\varepsilon^{\lambda_1})]}{(\lambda_1|\log \varepsilon| + \log d - \log 2)^{d-1}}|c|^d. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\delta}{\varepsilon^{\lambda_1}} \to 0$，令 $\varepsilon \to 0$，然后令 $M \to +\infty$，从而推得

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} |\log \varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \leq \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_2)^{d-1}}|1-c|^d + \frac{C_{\mathrm{hom}}}{\lambda_1^{d-1}}|c|^d;$$

然后，令 λ_1、$\lambda_2 \to \lambda$，使得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \le \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda)^{d-1}}|1-c|^d + \frac{C_{\hom}+o_M(1)}{\lambda^{d-1}}|c|^d.$$

最后，令 $c := \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{d-1}}+1\right]^{-1}$，其中 $a=\Phi(z)/(1-\lambda)^{d-1}$, $b=C_{\hom}/\lambda^{d-1}$。由于我们恰好处于（31）中讨论的情形，且 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，同样的计算仍然成立，从而得到

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \le \Phi(z)C_{\hom}\left[(1-\lambda)C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}} + \lambda\Phi(z)^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}.$$

若 $\lambda=1$，我们只需令 $c=1$，并且

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x\in B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}) \\ u_\varepsilon^k(x) & \text{if } x\in B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{kM})\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{(k-1)M}), k=1,...,\lfloor T/M\rfloor \\ 0 & \text{if } x\in\Omega\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1}2^{\lfloor T/M\rfloor M}). \end{cases}$$

现在，u_ε 是原问题的一个可容许函数，因此由（36）可得结论；特别地

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon,\Omega) = F_\varepsilon(u_\varepsilon,\Omega\setminus B(z_\varepsilon,\varepsilon^{\lambda_1})) \le \frac{C_{\hom}+o_M(1)+(M\log 2)^{d-1}\omega(\delta/\varepsilon^{\lambda_1})}{(\lambda_1|\log\varepsilon|+\log d-\log 2)^{d-1}};$$

因此

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}\mu_{\varepsilon,\delta} \le \inf_{\lambda_1\in(0,1)} C_{\hom}/\lambda_1^{d-1} = C_{\hom}.$$

2.3 关于极小值收敛的主要结果的证明

作为上一节的推论，我们证明由（1）定义的最小值的渐近行为的主要结果：

$$m_{\varepsilon,\delta} := \min\Big\{\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta},\nabla u(x)\right)\,dx : u\in W_0^{1,d}(\Omega), u=1 \text{ on } B(z,\varepsilon), z\in\Omega\Big\},$$

其中，小夹杂（一个球）的中心也是极小化的一个参数。

定理 2.3。假设存在一点 $x_0\in\Omega$，使得以下条件成立：

(i) $f(x,\xi) \ge f(x_0,\xi)$ 对每个 $x\in\mathbb{R}^d$ 和每个 $\xi\in\mathbb{R}^d$ 均成立；

(ii) 对每个 $\nu>0$，存在 $r_\nu>0$，使得对每个 $x\in B(x_0,r_\nu)$ 以及每个 $\xi\in\mathbb{R}^d$，都有 $f(x,\xi) \le f(x_0,\xi)+\nu|\xi|^d$。

Then

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\log\varepsilon|^{d-1}m_{\varepsilon,\delta} = \Phi(x_0)C_{\hom}\left[\lambda\Phi(x_0)^{\frac{1}{d-1}} + (1-\lambda)C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}}\right]^{1-d}.$$

证明。由于我们采用了命题 2.1 证明中的相同论证，下面将沿用相同的记号，重点说明主要差异。

下界。在 $\lambda = 0$ 的情况下，我们引入 $\lambda_2 > 0$，然后应用引理 2.2 得到不等式

$$\left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, \Omega) \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min\{F_\varepsilon(v, B(z, \varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z, \varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z, \varepsilon)\}|1-c|^d \\
&+ \min\{F_\varepsilon(v, B(z, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z, \varepsilon 2^{S-N})) : v \in W^{1,d}(B(z, R_\Omega) \setminus \overline{B}(z, \varepsilon^{\lambda_2} 2^{S-N})), \\
&\qquad\qquad v = 1 \text{ on } B(z, \varepsilon 2^{S-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z, R_\Omega)\}|c|^d.
\end{aligned}$$

注意，第二个加数的估计与式 (11) 完全相同；而对于第一个求和项，由于极小化还涉及包含集的中心，我们无法利用能量的周期性性质 (P1)。为处理这一项，我们考虑一个极小化元 u，并直接应用 (i) 得到

$$\begin{aligned}
&\min\{F_\varepsilon(v, B(z, \varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z, \varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z, \varepsilon)\}|1-c|^d \\
&\qquad \geq \int_{B(z, \varepsilon^{\lambda_2})} f(x_0, \nabla u(x))\, dx\, |1-c|^d = \frac{\Phi(x_0) + o_\varepsilon(1)}{(1-\lambda_2)^{d-1} |\log \varepsilon|^{d-1}} |1-c|^d.
\end{aligned} \tag{37}$$

这与我们在式 (12) 中得到的估计相同，只是用点 x_0 代替固定中心 z。仿照命题 2.1，我们得出 $|\log \varepsilon|^{d-1} m_{\varepsilon,\,\delta} \to \Phi(x_0)$。

如果 $\lambda \in (0, 1)$，我们进一步引入 $\lambda_1 \in (0, \lambda)$，并得到不等式

$$\left(1 + \frac{C}{N-1}\right) F_\varepsilon(u, \Omega) \geq$$

$$\geq \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z_\varepsilon, \varepsilon)\}|1-c_{-1}|^d \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
&+ \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1}) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N})), \\
&\qquad v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S'-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1})\}|c_{-1} - c_0|^d
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&+ \min\{F_\varepsilon(v, B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M) \setminus B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})) : v \in W^{1,d}(B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M) \setminus \overline{B}(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N})), \\
&\qquad v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon 2^{S''-N}), v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^M)\}|c_0 - c_1|^d
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{k=2}^{\lfloor T/M \rfloor + 1} \min\{F_\varepsilon(v, A_{M,k}^N) : v \in W^{1,d}(A_{M,k}^N),\ v = 1 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{(k-1)M-N}), \\
&\qquad v = 0 \text{ on } \partial B(z_\varepsilon, \varepsilon^{\lambda_1} 2^{kM})\}|c_{k-1} - c_k|^d\,,
\end{aligned} \tag{41}$$

其中我们令 $c_{\lfloor \frac{T}{M} \rfloor + 1} := 0$。

对项 (39)、(40)、(41) 的估计分别与 (18)、(19)、(20) 中完全相同，而利用假设 (i) 可像对 (37) 的估计那样估计 (38)。同样，所得结论是命题 2.1 的结论，只需将 z 替换为 x_0。

$\lambda = 1$ 的情形是类似的，可以从 (27) 中的估计开始证明；这也是意料之中的，因为在这一尺度下，极小化中唯一产生影响的是均匀化（而不是我们集中包含集的点）。

上界。将 $z_\varepsilon = \delta x_0$ 对 δ-立方体取模，使得该点族包含于球 $B \subset\subset \Omega$ 中。条件 (ii) 允许应用命题 2.1 给出的上界，然后注意到 $m_{\varepsilon,\delta} \le \mu_{\varepsilon,\delta}$ 即可得出结论。

□

我们指出，假设 (i) 可以弱化。事实上，请注意，为完成证明所需的关键估计，更具体地说，下界，是

$$\min\{F_\varepsilon(v, B(z,\varepsilon^{\lambda_2})) : v \in W_0^{1,d}(B(z,\varepsilon^{\lambda_2})), v = 1 \text{ on } B(z,\varepsilon)\} \\ \ge \int_{B(z,\varepsilon^{\lambda_2})} f(x_0, \nabla u(x))\, dx,$$

其中，u 是给定 $\lambda_2 \in (\lambda, 1)$ 的一个极小化元。

一个看似合理的充分条件可能是 Φ 在点 x_0 处取得最小值。然而请注意，如果 Φ 在某个最小值点不连续，这一条件就不充分。例如，考虑定义在 $(0,1)^d$ 上的函数：

$$f(x,\xi) := \begin{cases} \frac{1}{2}|\xi|^d & \text{if } x = x_0 := \left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) \\ |\xi|^d & \text{otherwise} \end{cases}$$

然后按周期性延拓；我们看到，(1) 化为齐次问题，并且 $|\log \varepsilon|^{d-1} m_{\varepsilon,\ \delta} \to \sigma_{d-1}$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时。但这确实构成矛盾，因为 $f_{\hom}(\xi) = |\xi|^d$，因此 $C_{\hom} = \sigma_{d-1}$，而 $\Phi(x_0)$ 等于 $\sigma_{d-1}/2$；将这些代入 (5)，并假设 $\lambda = 0$，得到 $|\log \varepsilon|^{d-1} m_{\varepsilon,\ \delta} = \Phi(x_0) = \sigma_{d-1}/2$。

3 穿孔区域的应用

在本节最后部分，我们沿用前几节中介绍的设置和记号。我们将利用命题 2.1，计算一族泛函的 Γ-极限；这些泛函所涉及的边界条件与变化区域有关。

我们固定一个收敛于 0 的正序列 $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$，考虑临界周期序列 $d_k := |\log \varepsilon_k|^{\frac{1-d}{d}}$，并且对每个 $i \in \mathbb{Z}^d$，令 $x_k^i := i d_k$。
然后，我们引入另一个尺度来控制能量的周期结构，记作$\delta = \delta(\varepsilon)$，并对每个 $k \in \mathbb{N}$ 定义 $\delta_k := \delta(\varepsilon_k)$，从而得到一个正序列

当 $k \to +\infty$ 时趋于零。与前几节一致，我们始终假设它存在

$$\lambda := \lim_{k\to+\infty} \frac{|\log \delta_k|}{|\log \varepsilon_k|} \wedge 1. \tag{42}$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中满足 $|\partial\Omega| = 0$ 的一个有界开子集，我们将周期穿孔定义域定义为

$$\Omega_k := \Omega \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}^d} B(x_k^i, \varepsilon_k),$$

并考虑由下式给出的泛函 $F_k : L^d(\Omega) \to [0, +\infty]$

$$F_k(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u(x)\right) dx & \text{if } u \in W^{1,d}(\Omega) \text{ and } u = 0 \text{ on } \Omega \setminus \Omega_k \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明我们的结论，我们假设穿孔与非均匀介质的周期结构有关，具体而言，我们假设

$$\text{对于每个 } k\text{，都存在一个正自然数 } m_k\text{，使得 } d_k = m_k\delta_k \tag{43}$$

并且

$$\frac{\delta_k}{d_k} \to 0 \text{ as } k \to +\infty. \tag{44}$$

条件（43）推出恒等式

$$f\left(\frac{x_k^i}{\delta_k} + y, \xi\right) = f\left(\frac{id_k}{\delta_k} + y, \xi\right) = f(y, \xi) \text{ for every } i \in \mathbb{Z}^d,\, y \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{45}$$

如果 (43) 不成立，那么对于某个 $y_k \in [0,1]^d$，$f\left(\frac{x_k^i}{\delta_k} + y, \xi\right) = f(y_k + y, \xi)$，且结果取决于 $(y_k)_k$ 模 δ 的性质；类似现象的出现可参见 [1] 。

为了应用命题 2.1，我们对 f 在点 0 处添加适当的正则性假设。我们的表述如下。

定理 3.1. 假设对于每个 $\nu > 0$，存在 $r_\nu > 0$，使得对于每个$x \in B(0, r_\nu)$，都有

$$|f(0,\xi) - f(x,\xi)| \le \nu|\xi|^d \text{ for every } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{46}$$

Then

$$\Gamma\text{-}\lim_k F_k(u) = F(u) := \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx + C(\lambda)\int_\Omega |u(x)|^d\, dx,$$

对于每个 $u \in W^{1,\,d}(\Omega)$，其中 Γ-极限是指相对于 $L^d(\Omega)$ 中的强收敛，而 $C(\lambda)$ 由下式给出

$$C(\lambda) := \Phi(0) C_{\hom} \left[\lambda \Phi(0)^{\frac{1}{d-1}} + (1-\lambda) C_{\hom}^{\frac{1}{d-1}} \right]^{1-d},$$

其中 Φ、$C_{\hom}$、$f_{\hom}$ 和 λ 分别如 (2)、(3)、(4) 和 (42) 中所定义。

我们基本上证明，在 Γ-极限下，施加于穿孔上的内部边界条件消失，取而代之的是附加项 $C(\lambda)\int_\Omega |u|^d dx$。

3.1 主要构造及一些辅助结果

在证明中，我们将广泛使用引理 2.2，但在此情形下，其应用更为微妙。为使论证适用，需要对其作一些细化：我们在环域之间进行修改，这些环域不仅彼此位似，而且其对应的内半径和外半径均与周期 d_k 成正比。

我们引入 $Z_k := \{i \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{dist}(x_k^i, \partial\Omega) > d_k\}$，即与边界保持一致远距离的那些穿孔的中心所构成的集合。

设 $M \in \mathbb{N}$、$\alpha > 0$ 满足 $\alpha 2^{M+1} < 1/2$。给定序列 $(u_k)_k$，其中 $W^{1,d}(\Omega)$，固定 k，并在每个满足 $i \in Z_k$ 的点 x_k^i 周围，对函数 u_k 应用引理 2.2，其中

$$f(x,\xi) = f\left(\frac{x}{\delta}, \xi\right), \eta = \alpha d_k, R = \alpha 2^{M+1} d_k, N = M \text{ and } r = \alpha d_k. \tag{47}$$

我们得到一个函数 v_k，它在每个以 x_k^i 为中心、半径为 $\alpha 2^{j_i} d_k$ 的球的边界上取常数值 u_k^i，其中 $j_i \in \{1, ..., M\}$ 和 $i \in Z_k$ 满足相应条件。还要注意，该函数满足如下估计

$$\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right) dx \le \left(1 + \frac{C}{M-1}\right) \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u_k(x)\right) dx.$$

我们利用以下结果，它是 Sigalotti 证明的离散化论证的简化版本（见 [15, 命题 3.3]）。

命题 3.2. 设 $(u_k)_k$ 是 $W^{1,d}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 中的一个序列，强收敛于u，且满足 $(\nabla u_k)_k \subseteq L^d(\Omega)$ 有界。对于每个 $i \in Z_k$，令 u_k^i 为上文所述的平均值，并令

$$Q_k^i := x_k^i + \left(-\frac{d_k}{2}, \frac{d_k}{2}\right)^d.$$

Then

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{i \in Z_k} |u_k^i|^d \chi_{Q_k^i}(x) - |u(x)|^d \right| dx = 0.$$

接下来要用到的一个有用工具是以下收敛结果，它是黎曼-勒贝格引理的一个应用。

引理 3.3。该序列

$$\chi_k(x) := \chi_{\Omega\setminus\bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i,d_k/2)}(x)\,, \qquad k\in\mathbb{N}$$

在 $L^\infty(\Omega)$中弱*收敛于一个正定常数。

3.2 下极限不等式

我们证明，对于任意 $u\in W^{1,\,d}(\Omega)$ 以及任意序列 $(u_k)_k$， $L^d(\Omega)$ 中满足$u_k\to u$ in $L^d(\Omega)$ 的序列，都有下极限$_k\, F_k(u_k)\ge F(u)$。

证明的第一步是应用修改引理，如（47）所示。为简化本节中的记号，我们仅将修改后的函数 v_k 取常数值 u_k^i 的半径记为 ρ_k^i，而不再记为 $\alpha 2^{j_i}d_k$。

不妨设 $(u_k)_k\subseteq W^{1,\,d}(\Omega)$，且 $\sup_k F_k(u_k)<+\infty$。注意，最后一个条件结合泛函 $(F_k)_k$的等度强制性，可推出 $\sup_k\|\nabla u_k\|_{L^d(\Omega)}<\infty$，因此 $u_k\rightharpoonup u$ in $W^{1,\,d}(\Omega)$。

首先，还假设 $(u_k)_k$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界。我们旨在估计

$$F_k(v_k)=\int_{\Omega\setminus\bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i,\rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k},\nabla v_k(x)\right)\,dx+\sum_{i\in Z_k}\int_{B(x_k^i,\rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k},\nabla v_k(x)\right)\,dx\,. \tag{48}$$

我们进行另一项修改，令

$$w_k:=\begin{cases} v_k & \text{on } \Omega\setminus\bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i,\rho_k^i),\\ u_k^i & \text{on } B(x_k^i,\rho_k^i),\ i\in Z_k.\end{cases}$$

显然有

$$\int_{\Omega\setminus\bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i,\rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k},\nabla v_k(x)\right)\,dx=\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k},\nabla w_k(x)\right)\,dx\,.$$

注意，根据引理 2.2 的证明，$\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)}$，因此$\|w_k\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)}$，从而 $(w_k)_k$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界，进而也在$L^d(\Omega)$ 中有界。此外，由于 $\left(1+\frac{C}{M-1}\right)F_k(u_k)\ge F_k(v_k)\ge F_k(w_k)$，我们推得 $(w_k)_k$在 $W^{1,d}(\Omega)$ 中有界；因此，我们可以提取一个子序列 $(w_{k_j})_j$，使其弱收敛于 $W^{1,d}(\Omega)$ 中的某个 w。

由于对每个 k， $w_k-u_k\in W^{1,\,d}_{,0}(\Omega)$，且 $u_k\rightharpoonup u$在 $W^{1,d}(\Omega)$ 中、 $u_k\to u$在 $L^d(\Omega)$ 中，根据 Rellich 定理，$(w_{k_j})_j$ 实际上强收敛到 w 在 $L^d(\Omega)$ 中。

我们声称，这样的 w 不依赖于子序列，并且与u一致。为证明这一点，注意对每个 k

$$w_k \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in Z_k} B(x_k^i, d_k/2)} = u_k \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in Z_k} B(x_k^i, d_k/2)}$$

并且根据引理 3.3 及前述观察，以下结论成立

$$\begin{cases} \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in Z_k} B(x_k^i, d_k/2)} \overset{*}{\rightharpoonup} c & \text{in } L^\infty(\Omega), \\ u_k \to u & \text{in } L^d(\Omega), \\ w_{k_j} \to w & \text{in } L^d(\Omega). \end{cases}$$

这些事实意味着

$$\begin{cases} \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in Z_k} B(x_k^i, d_k/2)} u_k \rightharpoonup cu & \text{in } L^d(\Omega), \\ \chi_{\Omega \setminus \bigcup_{i \in Z_{k_j}} B(x_{k_j}^i, d_{k_j}/2)} w_{k_j} \rightharpoonup cw & \text{in } L^d(\Omega), \end{cases}$$

因此，对任意子序列都有 $u = w$ 属于 $L^d(\Omega)$，从而证明 $w_k \to u$ 属于 $L^d(\Omega)$。由均匀化定理和下极限不等式，可得

$$\liminf_k \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w_k(x)\right) dx \geq \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx\,. \tag{49}$$

为估计式 (48) 中的第二个贡献，固定 $i \in Z_k$，并令 φ_k^i 为满足下式的函数

$$\min\Big\{ \int_{B(x_k^i, \rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u(x)\right) dx : u \in u_k^i + W_0^{1,d}(B(x_k^i, \rho_k^i)), u = 0 \text{ on } B(x_k^i, \varepsilon_k) \Big\}.$$

将函数 φ_k^i 延拓为 $B(x_k^i, d_k/2) \setminus B(x_k^i, \rho_k^i)$ 上的常数 u_k^i 后，我们有

$$\int_{B(x_k^i, \rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right) dx \geq \int_{B(x_k^i, \rho_k^i)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla \varphi_k^i(x)\right) dx$$

$$\geq \min\Big\{ \int_{\left(B\left(x_k^i, \frac{d_k}{2}\right)\right.} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u\right) dx : u \in u_k^i + W_0^{1,d}(B(x_k^i, d_k/2)), u = 0 \text{ on } B(x_k^i, \varepsilon_k) \Big\}$$

$$= \min\Big\{ \int_{B\left(0, \frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{d_k x}{\delta_k}, \nabla u\right) dx : u \in 1 + W_0^{1,d}(B(0, 1/2), u = 0 \text{ on } B(0, \varepsilon_k/d_k) \Big\} |u_k^i|^d,$$

其中，最后一个等号是由变量替换 $x \mapsto x_k^i + d_k x$、恒等式 (45) 和 (P2) 得出的。

现在令

$$\delta'_k := \frac{\delta_k}{d_k}\,, \qquad \varepsilon'_k := \frac{\varepsilon_k}{d_k}\,, \qquad \lambda' := \lim_k \frac{|\log \delta'_k|}{|\log \varepsilon'_k|},$$

并将前一个不等式改写为

$$\begin{aligned}&\int_{B(x^i_k,\rho^i_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right) dx \\ &\quad \geq \min\Big\{\int_{B\left(0,\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{x}{\delta'_k}, \nabla u\right) dx : u \in 1 + W^{1,d}_0(B(0,1/2), u = 0 \text{ on } B(0,\varepsilon'_k)\Big\}|u^i_k|^d.\end{aligned} \tag{50}$$

注意到 $\varepsilon'_k = \varepsilon_k|\log\ \varepsilon_k|^{1-1/d} \to 0$，而根据假设 (44)，当 $k \to \infty$ 时，$\delta'_k = \delta_k|\log\ \varepsilon_k|^{1-1/d} \to 0$；还需注意

$$\lambda' = \lim_k \frac{|\log \delta_k + \log|\log \varepsilon_k|^{1-1/d}|}{|\log \varepsilon_k + \log|\log \varepsilon_k|^{1-1/d}|} = \lim_k \frac{|\log \delta_k|}{|\log \varepsilon_k|} = \lambda.$$

鉴于假设 (46)，我们可以对 (50) 应用命题 2.1（经过变换 $u \mapsto 1-u$），其中 $\Omega = B(0, 1/2)$，且对每个 ε，$z_\varepsilon = 0$。由此得到

$$\min\Big\{\int_{B(0,1/2)} f\left(\frac{x}{\delta'_k}, \nabla u(x)\right) dx : u \in 1 + W^{1,d}_0(B(0,1/2)), u = 0 \text{ on } B(0,\varepsilon'_k)\Big\} =$$

$$= \frac{C(\lambda) + o_k(1)}{|\log \varepsilon'_k|^{d-1}} = \frac{C(\lambda) + o_k(1)}{|\log \varepsilon_k|^{d-1}}\,,$$

由命题 3.2 可得

$$\begin{aligned}\liminf_k \sum_{i\in Z_k} \int_{B(x^i_k, d_k/2)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right) dx &\geq \liminf_k \frac{C(\lambda)}{|\log \varepsilon_k|^{d-1}} \sum_{i\in Z_k} |u^i_k|^d + o_k(1) \\ &= C(\lambda) \int_\Omega |u(x)|^d\, dx\,.\end{aligned} \tag{51}$$

最后，由 (49) 和 (51) 可推出

$$\left(1 + \frac{C}{M-1}\right) \liminf_k F_k(u_k) \geq \liminf_k F_k(v_k) \geq \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx + C(\lambda) \int_\Omega |u(x)|^d\, dx.$$

回想一下，α 和 M 的选取满足 $\alpha 2^{M+1} < 1/2$，并且由于导出上述估计的推理对每个 $\alpha > 0$都成立，我们可以令 $M \to +\infty$，从而得到下极限不等式。

我们通过截断论证去除对（u_k）$_k \subseteq L^\infty$(Ω)的有界性假设：设 $u_k \to u$ 属于 L^d(Ω)，并对固定的$M \in \mathbb{N}$，令$\overline{u}_k^M$:= ((−M) ∨ u_k) ∧ M；由控制收敛定理，当 k时，$\overline{u}_k^M \to u$ 在 L^d(Ω)中收敛至 $M \to +\infty$；此外，由于f(·, 0) = 0，有

$$\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u_k\right) dx \geq \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla \overline{u}_k^M\right) dx$$

对每个 k、 $M \in \mathbb{N}$，因此我们立即由前一个情形得出结论。

记 F':= Γ-下极限$_k$ F_k，到目前为止我们已经证明，对于每个 $u \in W^{1,\,d}$(Ω)，都有 $F(u) \leq F'(u)$。

3.3 上极限不等式

本节的目标是定义一个恢复序列，使其在 L^d(Ω) 中收敛到一个固定函数 $u \in W^{1,\,d}$(Ω)。首先，我们假设 $u \in L^\infty$(Ω)。

从与以下泛函相关的恢复序列 $u_k \to u$ in L^d(Ω) 开始

$$F_k^0(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u(x)\right) dx & \text{if } u \in W^{1,d}(\Omega), \\ +\infty & \text{if } u \in L^d(\Omega) \setminus W^{1,d}(\Omega) \end{cases}$$

已知它们 Γ-收敛到

$$F^0(u) := \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u(x))\, dx$$

对定理中所述的每个 $u \in W^{1,\,d}$(Ω)。由泛函 (F_k^0)$_k$ 的等度强制性，我们推出 $u_k \rightharpoonup u$属于 $W^{1,\,d}$(Ω)。

众所周知，经过提取一个子序列后，我们还可以假设 (|∇u_k|^d)$_k$是一个等度可积族（参见 [11] 和 [6, 注 C.6]）。

我们声称，还可以使恢复序列在 L^∞(Ω) 中有界。令T:= $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 并定义 u_k':= (−(T + 1) ∨ u_k) ∧ (T + 1)。由此得到 L^∞(Ω) 中一个有界序列，它在 L^d(Ω) 中收敛到 u，并且还具有如下性质：通过截断得到的 (|∇u_k'|^d)$_k$ 仍然是等度可积的。

注意，

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f_{\hom}(\nabla u_k(x))\, dx - \int_\Omega f_{\hom}(\nabla u_k'(x))\, dx\right| &\leq \int_{\{|u_k|>T+1\}} |f_{\hom}(\nabla u_k(x))|\, dx \\ &\leq \beta \int_{\{|u_k|>T+1\}} |\nabla u_k(x))|^d\, dx \leq \beta \int_{\{|u_k-u|>1\}} |\nabla u_k(x))|^d\, dx\,; \end{aligned}$$

但由于 $u_k \to u$ 依测度收敛，且 (|∇u_k|^d)$_k$ 一致可积，最后一项趋于 0，因此结论得证。

对于每个 k，通过在每个点 x_k^i 附近进行变换来定义修改 v_k，其中$i \in Z_k$，如同我们在 (47) 中所做的那样。为清楚起见，我们回顾一下构造：固定 $M \in \mathbb{N}$，并令 $\alpha > 0$ 满足 $\alpha 2^{M+1} < 1/2$，然后应用引理 2.2，其中

$$f(x,\xi) = f\left(\frac{x}{\delta},\xi\right), \eta = \alpha d_k, R = \alpha 2^{M+1} d_k, N = M \text{ and } r = \alpha d_k.$$

我们有

$$\int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right) dx \le \left(1 + \frac{C}{M-1}\right) \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u_k(x)\right) dx,$$

且函数 v_k 在 $\partial B(x_k^i,\rho_k^i)$ 上取常数值 u_k^i，其中 ρ_k^i 具有如下形式：$\alpha 2^{j_i} d_k$，其中某个 $j_i \in \{1, ..., M\}$。
由于 $\varepsilon_k/d_k \to 0$ 当 $k \to +\infty$时，我们还可以假设对每个 k都有 $\varepsilon_k < \alpha d_k$；因此，我们定义

$$w_k := \begin{cases} v_k & \text{on } \Omega \setminus \bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i, \rho_k^i) \\ u_k^i & \text{on } B(x_k^i, \rho_k^i) \setminus B(x_k^i, \alpha d_k), i \in Z_k \\ \varphi_k^i & \text{on } B(x_k^i, \alpha d_k),\ i \in Z_k, \end{cases}$$

其中 φ_k^i 求解极小化问题

$$\begin{aligned} &\min\Big\{\int_{B(x_k^i,\alpha d_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u(x)\right) dx : u \in u_k^i + W_0^{1,d}(B(x_k^i, \alpha d_k)), u = 0 \text{ on } B(x_k^i, \varepsilon_k)\Big\} \\ &= \min\Big\{\int_{B(0,\alpha)} f\left(\frac{x}{\delta_k'}, \nabla u(x)\right) dx : u \in 1 + W_0^{1,d}(B(0,\alpha)), u = 0 \text{ on } B(0, \varepsilon_k')\Big\} |u_k^i|^d \\ &= \frac{C(\lambda) + o_k(1)}{|\log \varepsilon_k|^{d-1}} |u_k^i|^d. \end{aligned}$$

令 $A_k := \bigcup_{i\in Z_k} B(x_k^i, \rho_k^i)$。对于由 $\Omega \setminus A_k$ 和 A_k 引起的贡献，我们将分别采用不同的论证。

我们利用命题 3.2 估计 A_k 上的贡献，

$$\begin{aligned} \limsup_k \int_{A_k} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w_k(x)\right) dx &= \limsup_k \sum_{i\in Z_k} \int_{B(x_k^i,\alpha d_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla \varphi_k^i(x)\right) dx \\ &= \limsup_k \sum_{i\in Z_k} |u_k^i|^d \frac{C(\lambda) + o_k(1)}{|\log \varepsilon_k|^{d-1}} = C(\lambda) \int_\Omega |u(x)|^d \, dx. \quad (52) \end{aligned}$$

为了估计 $\Omega \setminus A_k$ 上的贡献，我们令

$$Z_k' := \{i \in \mathbb{Z}^d : B(x_k^i, \varepsilon_k) \cap \Omega \neq \emptyset, i \notin Z_k\} \qquad , \qquad r_k := \alpha 2^{M+1} d_k$$

并定义

$$A'_k := \bigcup_{i \in Z'_k} B(x_k^i, r_k)$$

为了分别研究 A'_k 和 $\Omega \setminus (A_k \cup A'_k)$ 上的行为。

考虑 A'_k 的贡献。我们设

$$Q_k^i := x_k^i + \left(-\frac{d_k}{2}, \frac{d_k}{2}\right),$$

并且我们初步得到

$$|\Omega \cap A'_k| \le \sum_{i \in Z'_k} (r_k)^d \sim \#Z'_k (d_k)^d = \left| \bigcup_{i \in Z'_k} Q_k^i \right| \to |\partial\Omega| = 0 \tag{53}$$

根据假设。

F对于每个 $i \in Z'_k$，令 ψ_k^i 为齐次容量问题的解

$$\min\Big\{ \int_{B(x_k^i, r_k)} |\nabla u(x)|^d \, dx : u \in 1 + W_0^{1,d}(B(x_k^i, r_k)), u = 0 \text{ on } B(x_k^i, \varepsilon_k) \Big\}$$

其（已知）等于 $\sigma_{d-1} |\log r_k - \log \varepsilon_k|^{1-d}$。

将 ψ_k^i 以值 1 延拓到 $\mathbb{R}^d \setminus B(x_k^i, r_k)$ 后，我们将其设为恢复序列

$$w'_k := w_k \prod_{i \in Z'_k} \psi_k^i \qquad \text{on } \Omega.$$

这样的 w'_k 是对 w_k 在 A'_k上所作的修改。根据半径 r_k 和 ρ_k^i的选取，对于每个 k 和 $i \in Z_k$，该修改与 A_k 不相交。这意味着，将 w_k 替换为 w'_k后，估计式 (52) 仍然成立。

我们证明

$$\limsup_k \int_{\Omega \cap A'_k} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w'_k(x)\right) dx = 0. \tag{54}$$

对于每个 $i \in Z'_k$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \cap B(x_k^i, r_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w'_k(x)\right) &\le \beta \int_{\Omega \cap B(x_k^i, r_k)} |\nabla w'_k(x)|^d \, dx \\
&\le 2^{d-1}\beta \left[(1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)})^d \int_{B(x_k^i, r_k)} |\nabla \psi_k^i(x)|^d \, dx + \int_{\Omega \cap B(x_k^i, r_k)} |\nabla w_k(x)|^d \, dx \right] \\
&\le C \left[|\log r_k - \log \varepsilon_k|^{1-d} + \int_{\Omega \cap B(x_k^i, r_k)} |\nabla w_k(x)|^d \, dx \right]
\end{aligned}$$

其中 C 是一个正定常数，仅依赖于$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ β 和维数 d。注意，由于 $i \in Z'_k$，根据 w_k 的定义，我们有

$$\int_{\Omega\cap B(x_k^i,r_k)} |\nabla w_k(x)|^d\,dx = \int_{\Omega\cap B(x_k^i,r_k)} |\nabla v_k(x)|^d\,dx\,,$$

根据引理2.2的性质 (ii)，即对初始函数的修改发生在非常接近指定半径的位置，也可得

$$\int_{\Omega\cap B(x_k^i,r_k)} |\nabla v_k(x)|^d\,dx = \int_{\Omega\cap B(x_k^i,r_k)} |\nabla u_k(x)|^d\,dx\,.$$

利用 $(|\nabla u_k|^d)_k$ 的等可积性，由 (53) 可推得

$$\limsup_k \sum_{i\in Z'_k} \int_{\Omega\cap B(x_k^i,r_k)} |\nabla w_k(x)|^d\,dx = 0.$$

此时

$$\limsup_k \int_{\Omega\cap A'_k} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w'_k(x)\right)\,dx \le C \limsup_k \sum_{i\in Z'_k} |\log r_k - \log\varepsilon_k|^{1-d},$$

但由于 $\varepsilon_k \ll d_k$，我们得出

$$\limsup_k \sum_{i\in Z'_k} |\log\varepsilon_k|^{1-d} = \limsup_k \#Z'_k (d_k)^d = 0$$

再次由 (53) 可得。

最后，我们处理 $\Omega\setminus(A_k\cup A'_k)$ 上的贡献。可得

$$\begin{aligned}\limsup_k \int_{\Omega\setminus(A_k\cup A'_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w'_k(x)\right)\,dx &= \limsup_k \int_{\Omega\setminus(A_k\cup A'_k)} f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right)\,dx\\ \le \limsup_k \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla v_k(x)\right)\,dx &\le \left(1+\frac{C}{M-1}\right)\limsup_k \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla u_k(x)\right)\,dx\\ &\le \left(1+\frac{C}{M-1}\right)\int_\Omega f_{\rm hom}(\nabla u(x))\,dx\,, \quad (55)\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式源于这样一个事实：$(u_k)_k$ 最初被选作针对泛函 $(F_k^0)_k$ 的 u 恢复序列。

综合 (52)、(54) 和 (55)，我们得到

$$\limsup_k \int_\Omega f\left(\frac{x}{\delta_k}, \nabla w'_k\right)dx \le \left(1+\frac{C}{M-1}\right)\int_\Omega f_{\rm hom}(\nabla u)dx + C(\lambda)\int_\Omega |u|^d dx\,.$$

由于我们可以对每个 $\alpha > 0$ 重复这一论证，因此可以任意增大 M，从而证明了近似上极限不等式。

我们还需要验证 $w'_k \to u$ 属于 $L^d(\Omega)$，也就是说，它确实是一个（近似）恢复序列。

注意到 $\lim_k |\{w'_k \neq w_k\}| = 0$ 和 $\sup_k \|w'_k - w_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$意味着 $w'_k - w_k \to 0$ in $L^d(\Omega)$，因此，只需证明 $w_k \to u$ in $L^d(\Omega)$。
由于 $\lim_k |\{w_k \neq v_k\}| = 0$ 和 $\sup_k \|w_k - v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$，有 $w_k - v_k \to 0$ in $L^d(\Omega)$ 成立；此外，根据我们在基于引理 3.3 的下极限不等式证明中所使用的相同论证，可得 $v_k \to u$ in $L^d(\Omega)$；因此， $w_k \to u$ in $L^d(\Omega)$。

最后，我们去除假设 $u \in L^\infty(\Omega)$。回顾一下，$(F_k)_k$ 的 Γ-上极限定义为

$$F''(u) := \inf\{\limsup_k F_k(u_k) : u_k \to u \in L^d(\Omega)\}$$

对每个 $u \in W^{1,d}(\Omega)$。 F''关于 $L^d(\Omega)$ 中的强收敛是序列下半连续的；根据我们已经证明的结果，它在 $W^{1,d}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 上与 F一致。

因此，给定一个序列 $(u_k)_k \subseteq W^{1,d}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，其在 $W^{1,d}(\Omega)$ 中收敛到 u，则有

$$F''(u) \leq \liminf_k F''(u_k) = \liminf_k F(u_k) = F(u)$$

根据 $W^{1,d}(\Omega)$ 中强收敛下 F 的连续性，证明 Γ-收敛的部分至此完成。

参考文献

[1] N. Ansini 和 A. Braides。《穿孔周期介质的尺度分离与近周期效应：渐近行为》。《应用数学学报》 65 （ 2001 ），59–81[2] N. Ansini 和 A. Braides。《周期穿孔非线性介质的渐近分析》。《纯粹与应用数学杂志》81（2002），439–451。[3] X. Blanc 和 C. Le Bris。《周期介质中的均匀化.....或非周期介质中的均匀化：导论》。施普林格，2022年。[4] A. Braides。《初学者的Γ-收敛》。牛津大学出版社，牛津，2002年。[5]A. Braides 和 G. C. Brusca。《二维非均匀介质中容量的渐近行为》。《林琴国家科学院物理、数学与自然科学学部院刊》（2022年）。[6] A. Braides 和 A. Defranceschi。《多重积分的均质化》。牛津大学出版社，牛津，1998年。

[7]D. Cioranescu、A. Damlamian 和 G. Griso。《周期展开法》。施普林格，2018年。[8] D. Cioranescu 和 F. Murat。《一个不知从何而来的奇异项》，第一、二部分。非线性偏微分方程及其应用。法兰西公学院研讨会。第二卷，98–138页；第三卷，154–178页。数学研究札记第60、70卷，皮特曼，伦敦，1982年和1983年；译文见：《一个不知从何而来的奇异项》。载于《复合材料数学建模专题》（Cherkaev, A.V. 和 Kohn, R.V. 编），Birkhäuser，波士顿，1994年。[9] G. Dal Maso。《Γ-收敛导论》。Birkhäuser，波士顿，1993年。[10] G. Dal Maso 和 F. Murat。《齐次单调算子下穿孔区域中狄利克雷问题的渐近行为与校正子》。《比萨高等师范学校科学类年刊》24（1997年），239–290。[11] I. Fonseca、S. Müller 和 P. Pedregal。《梯度产生的集中效应与振荡效应分析》。SIAM 数学分析杂志 29（1998年），736–756。[12] V.V. Jikov、S.M. Kozlov 和 O.A. Oleinik。《微分算子与积分泛函的均匀化》。施普林格出版社，柏林，1994年。[13] C. Le Bris、F. Legoll 和 A. Lozinski。《一种用于穿孔区域的 MsFEM 型方法》。多尺度建模与仿真：SIAM 跨学科期刊 12（2014年），1046–1077。[14] A.V. Marchenko 和 E.Ya. Khruslov。《细颗粒边界区域中的边值问题》（俄文），Naukova Dumka，基辅，1974年。[15] L. Sigalotti。《临界指数下周期穿孔非线性介质的渐近分析》。连续数学通讯 11（2009年），1009–1033。