arXiv:2304.01128v1 [math.AP] 3 Apr 2023

非线性连续数据同化算法的超指数收敛率：二维纳维-斯托克斯方程范例

ELIZABETH CARLSON、ADAM LARIOS 和 EDRISS S. TITI

Abstract. 我们研究了针对二维不可压缩纳维–斯托克斯方程的 Azouani-Olson-Titi 连续数据同化（降尺度）算法的一种非线性松弛修正。我们严格证明了该非线性 nudging 系统整体适定，而且其解会随时间指数快速收敛到真实解。此外，我们还证明，一旦误差降低到某个常数量级阈值以下，收敛速度便会变为双指数速度，直至达到由观测数据的稀疏性决定的精度。此外，我们通过计算展示了这些分析结果的适用性及其精确性。

1. Introduction

许多用于建模物理过程的耗散动力系统具有混沌特性，并且对初始条件高度敏感。因此，初始条件信息不完整会使准确模拟这些系统变得十分困难。为解决这一实际问题，可以利用现有的空间离散观测数据，通过多种技术向模型提供信息，这些技术统称为数据同化。数据同化可以通过多种不同方法实现：通常采用统计方法或连续方法，将观测数据纳入数学模型。本文聚焦于一种连续数据同化（CDA）算法，即 Azouani-Olson-Titi（AOT）算法。该连续数据同化算法基于这样一种数学理论：许多描述流体流动的耗散演化方程，其解在足够长的时间后由有限个适当分布的节点或模态上的解值唯一确定（例如，参见 [44] 及其中的参考文献）。该算法在偏微分方程（PDE）层面利用反馈控制（松弛）项将观测数据纳入模型。本文研究连续数据同化算法的非线性松弛版本的收敛性。

连续数据同化算法最早在 [4, 5]中提出（关于这一方向的早期思路，另见 [16, 54, 70, 71]）。该算法考虑一个耗散动力系统

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{u}), \tag{1.1}$$

具有未知的初始条件。我们将对未知参考解$\mathbf{u}$ 在粗空间尺度上的观测数据进行的一种给定插值记为 $I_h(\mathbf{u})$，其中 h 是观测数据的某个特征长度尺度（例如，观测点之间的平均空间距离）。这些观测数据通过反馈

Date：2023年4月4日。*Key words and phrases.* 数据同化、反馈控制、纳维–斯托克斯方程、松弛。MSC 分类：34D06、35K61、35Q93、93C20。

控制项纳入以下修正系统

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{v}) + \mu(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0, \tag{1.2b}$$

其中，$\mu > 0$ 是适当选取的正松弛（松弛）参数，而$\mathbf{v}_0$是任意充分光滑的初始条件。通过对 [4] 的分析可知，一大类标准插值算子 I_h均可使用，例如分片常数插值、线性插值和傅里叶截断等，这使得该算法能够很好地适用于物理模型，且实现成本低廉。在具有无滑移边界条件和周期边界条件的二维不可压缩纳维-斯托克斯方程背景下，(1.2)的整体适定性以及随时间向(1.1)的参考解$\mathbf{u}$ 指数收敛已在 [4]中得到证明。随后，研究人员在多种假设下，将该算法应用于众多耗散动力系统，包括含噪数据、错误参数、错误模型、以离散时间提供的数据，以及仅同化部分而非全部状态变量等情形，例如 [1–3, 6, 8–14, 17–25, 30–33, 36–43, 45–50, 52, 53, 55–58, 61–69, 72– 74, 76, 79, 81–84] 及其中的参考文献）。在这些论文中，无论初始条件如何选取，均证明了系统以指数速度收敛至0，或收敛至某个可测误差范围内；而对现有模型所需进行的轻微修改，也使连续数据同化算法成为一种高效且有效的数据同化算法。经典的数据同化方法通常具有统计性质，包括卡尔曼滤波器及其变体以及四维变分同化（4DVAR）；但这些方法实现起来并不简单，计算成本也远高于单独运行动力系统的模拟，因此，连续数据同化算法成为某些现实世界模型中更高效且可能可行的替代方案（例如参见 [21, 30, 31]）。

本研究的动机源于计算研究 [61], ，该研究在库拉莫托–西瓦辛斯基方程的背景下提出并考察了 CDA 算法的一个非线性版本。该非线性 nudging 算法通过计算表明，对于一维库拉莫托–西瓦辛斯基方程，解会随时间以超指数 速度收敛至参考解。后来，[55] 中关于二维磁流体动力学方程的计算研究也通过类似的修改展示了这一点。在 [33], 中，作者将 [61] 的非线性推送数据同化方案应用于洛伦兹方程，并证明了指数收敛（但非超指数收敛）。请注意， [51], 也提出并研究了另一种非线性牵引方法，但采用的方法与本文的方法截然不同。在我们的情形中，为简化实际实现，我们考虑以下非线性 nudging 方程组：

$$\mathbf{v}_t = \mathcal{F}(\mathbf{v}) + \mu\mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})) + \beta(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \tag{1.3a}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{1.3b}$$

其中，我们用 $\gamma \in [0, 1)$ 表示，

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}) := \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \boldsymbol{\phi}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^{-\gamma}, & \text{if} \quad \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} > 0. \end{cases}$$

注意，当 $\gamma = 0$ 时，我们在形式上恢复了线性 nudging CDA 算法。正如在 [55, 61], 中通过计算所展示的，我们预期，一旦 $\|I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} < 1$，非线性 nudging 算法的误差就应具有超指数衰减率，并且比线性 nudging 算法更早达到机器精度。

我们预计，如果 $\gamma \in (0,1)$，这种表述应使该算法实现双指数收敛。用于展示这种线性/非线性逼近算法收敛性的范例方程是二维不可压缩纳维-斯托克斯方程。事实上，在对 I_h 作出某些合理假设且给定充分发展的参考流场后，我们在此证明，误差具有双指数衰减率，至少可衰减至由 h 和参考解 $\mathbf{u}$ 的初始数据的 L^2 范数（其大小）所决定的水平 $\epsilon > 0$（但不依赖于初始数据），以及系统中的其他物理参数（详见下文定理 4.1）。我们还证明，达到精度 ϵ 后（这会在有限时间内发生），误差仍将继续衰减至零，且至少具有指数衰减率。

我们认为，上文讨论的超指数收敛屏障很可能无法逾越，原因有二：1）证明方法直接揭示了这一点（见注 4.2）；2）附录 7.1 中针对更一般耗散系统对同一观察给出了启发式论证。具体而言，正如附录 7.1 中的论证所示，式 (1.3a) 中的非线性项 $\mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v}))$ 会迫使较大的空间尺度（例如低模态）以超指数速率收敛；然而，这一过程似乎最终会使较小的空间尺度变得极不稳定，以至于线性黏性效应无法抑制并稳定它们，从而在误差足够小时阻碍超指数收敛。因此，我们预计早期会出现超指数收敛速率，而当误差变得非常小时，后期则仅呈指数收敛。事实上，这正是我们在第 5 节的数值模拟中观察到的现象。

本文结构安排如下：第 2 节介绍符号，并给出定义以及供参考的预备定理和结果；第 3 节证明非线性 nudging 系统 (2.3) 的整体适定性；第 4 节证明上述收敛结果；第 5 节通过数值模拟考察这些结果。第 6 节给出总结性评论。

2. Preliminaries

本文以具有周期边界条件的二维不可压缩纳维-斯托克斯方程为范例，证明非线性推送连续数据同化算法的收敛性。不过，这一结果同样适用于具有物理边界条件的一般耗散方程系统。我们首先介绍一些预备理论基础。首先，初边值问题

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\triangle\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \qquad \text{在 } \Omega \times (0,T), \tag{2.1a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad \text{在 } \Omega \times (0,\ T), \tag{2.1b}$$

$$\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0(\cdot), \qquad \text{在 } \Omega, \tag{2.1c}$$

确定数据同化系统的参考解，其中$\mathbf{u}$是速度，p 是压力，$\nu > 0$ 是黏度，$\Omega = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 是区域（因此该区域的长度为单位长度 $L = 1$），$T > 0$，$\mathbf{f}$ 是某种外力，$\mathbf{u}_0$ 是初始条件，且该系统采用周期边界条件。

将线性 nudging CDA 算法应用于二维不可压缩纳维-斯托克斯方程 (2.1)，得到如下系统，其中 $\mu > 0$ 为常数，

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\triangle\mathbf{v} + \nabla\widetilde{q} = \mathbf{f} + \mu(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \qquad \text{在 } \Omega \times (0,T), \tag{2.2a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \text{在 } \Omega \times (0,T), \tag{2.2b}$$

$$\mathbf{v}(\cdot,0) = \mathbf{v}_0(\cdot), \qquad \text{在 } \Omega。 \tag{2.2c}$$

将非线性推送连续数据同化算法应用于二维不可压缩纳维-斯托克斯方程 (2.1)，得到如下系统，其中常数为 μ，$\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nu\triangle\mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{f} + \mu\mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})) \\
&\qquad\qquad + \beta(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), && \text{在 } \Omega \times (0,T), \qquad (2.3a)\\
&\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, && \text{在 } \Omega \times (0,T), \qquad (2.3b)\\
&\mathbf{v}(\cdot,0) = \mathbf{v}_0(\cdot), && \text{在 } \Omega。 \qquad (2.3c)
\end{aligned}$$

我们回顾以下众所周知的空间。令

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \dot{C}^\infty_{\mathrm{p}}(\Omega) : \nabla\cdot\mathbf{u} = 0\},$$

其中 $C^\infty_{\mathrm{p}}(\Omega)$ 是环面上由无限可微、零均值的周期函数构成的空间。我们将 H 记为 $\mathcal{V}$ 在 L^2 中的闭包，并将 V 记为 $\mathcal{V}$ 在H^1中的闭包。H 上的内积是通常的 L^2 内积,

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} u_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in H,$$

并将 V 上的内积记为

$$((\mathbf{u},\mathbf{v})) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V.$$

由此得到以下范数。

$$\|\mathbf{u}\|_H := \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}, \qquad \|\mathbf{u}\|_V := \sqrt{((\mathbf{u},\mathbf{u}))}.$$

注意，V-范数的正定性由庞加莱不等式推出（例如参见 [27], [35], [78]）。

我们将 Leray投影算子记为 P_σ：$\dot{L}^2(\Omega) \to H$，其中对于光滑函数 $\mathbf{w}$,$P_\sigma\mathbf{w} = \mathbf{w} - \nabla\triangle^{-1}\nabla\cdot\mathbf{w}$，（拉普拉斯算子逆是在周期边界条件和零均值条件下计算的），并通过连续性将 P_σ 扩展到 $\dot{L}^2(\Omega)$（例如参见 [27, 78]）。我们记 A：$\mathcal{D}(A) \to H$ 和 B：$V \times V \to V^*$，其中 A 和 B 是算子的连续扩展

$$\begin{aligned}
A\mathbf{u} &= -P_\sigma\triangle\mathbf{u}, && \mathbf{u} \in \mathcal{V},\\
B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= P_\sigma((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}), && \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V},
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D}(A) := V \cap H^2(\Omega)$。注意，$A$ 是一个线性、自伴且具有紧逆算子的正定算子，因此存在一组正交归一基特征函数$\{\mathbf{w}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，属于 H，使得 $A\mathbf{w}_i = \lambda_i\mathbf{w}_i$，其特征值 $\lambda_i > 0$ 按 i 单调非递减（例如参见 [27, 75, 78]）。此外，在这种情况下（即周期边界条件下），注意到 $A = -\triangle$。此外，以下版本的庞加莱不等式成立,

$$\begin{aligned}
\lambda_1\|\mathbf{u}\|_H^2 &\le \|\nabla\mathbf{u}\|_H^2 \ \text{ for } \mathbf{u} \in V,\\
\lambda_1\|\nabla\mathbf{u}\|_H^2 &\le \|A\mathbf{u}\|_H^2 \ \text{ for } \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A),
\end{aligned}$$

其中，$\lambda_1 = 4\pi^2$ 是 Ω 上斯托克斯算子的第一特征值。

此外，双线性算子 B 具有如下性质：

$$\langle B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle_{V^*,V} = -\langle B(\mathbf{u},\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle_{V^*,V} \qquad (2.4)$$

对所有的 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w} \in V$；下文中，我们记 $\langle \cdot, \cdot \rangle := {}_{V^*}\langle \cdot, \cdot \rangle_V$。这意味着以下恒等式

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0 \tag{2.5}$$

对所有 $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in V$。最后，以下标准不等式成立（例如，参见 [27, 44, 75,77, 78]）

$$|\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle| \leq c \|\mathbf{u}\|_H^{1/2} \|\mathbf{u}\|_V^{1/2} \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_H^{1/2} \|\mathbf{w}\|_V^{1/2}, \text{ for } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \tag{2.6}$$

$$|\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle| \leq c \|\mathbf{u}\|_H^{1/2} \|A\mathbf{u}\|_H^{1/2} \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_H, \text{ for } \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A), \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in H. \tag{2.7}$$

在二维周期性边界条件下，以下恒等式成立（例如，参见 [27, 75, 78]）

$$(B(\mathbf{w}, \mathbf{w}), A\mathbf{w}) = 0 \text{ for every } \mathbf{w} \in \mathcal{D}(A). \tag{2.8}$$

这意味着恒等式

$$(B(\mathbf{u}, \mathbf{w}), A\mathbf{w}) + (B(\mathbf{w}, \mathbf{u}), A\mathbf{w}) = -(B(\mathbf{w}, \mathbf{w}), A\mathbf{u}) \text{ for all } \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{D}(A). \tag{2.9}$$

我们假设 $\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; H)$，使得 $P_\sigma \mathbf{f} = \mathbf{f}$（不失一般性，因为 $\mathbf{f}$ 的梯度部分可以并入压力梯度）。对 (2.1) 形式上应用 Leray投影，可得等价的演化系统

$$\mathbf{u}_t + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nu A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \tag{2.11}$$

同样，可以对 (2.2) 形式上应用 Leray投影，得到系统

$$\mathbf{v}_t + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \nu A\mathbf{v} = \mathbf{f} + \mu P_\sigma (I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{2.13}$$

并与 (2.3) 联立，得到该系统

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \nu A\mathbf{v} = \mathbf{f} &+ \mu P_\sigma \mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \\ &+ \beta P_\sigma (I_h(\mathbf{u}) - I_h(\mathbf{v})), \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{2.15}$$

其中，对所有 $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$，回顾 $\mathcal{N}(\mathbf{w}) := \begin{cases} \|\mathbf{w}\|_H^\gamma \mathbf{w} & \|\mathbf{w}\|_H \neq 0, \\ \mathbf{0}, & \|\mathbf{w}\|_H = 0. \end{cases}$

注意，采用这一选择时，$\mathcal{N}$, μ 的单位为（长度）$^{2\gamma}$/（时间）$^{1+\gamma}$，而 β 的单位为1/（时间）。

压力梯度可通过运用 de Rham 定理的以下推论恢复（例如，参见 [44, 78, 80]）：

$\mathbf{g} = \nabla p$ 是一个分布，当且仅当 $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = 0$ 对所有 $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$.

在此框架下，我们定义系统 (2.10)、(2.12) 和 (2.14) 的强解概念（例如，参见 [27, 44, 75, 78]）。

定义 2.1. (2.10)、(2.12) 或 (2.14) 的强解是一个函数 $\mathbf{u} \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A))$，使得系统 (2.10)、(2.12) 或 (2.14) 中的等式在 $L^2(0, T; H)$ 中成立，且其时间导数为 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; H)$。

我们引用关于 (2.1) 存在全局强解的经典结果

定理 2.2. 给定初始数据 $\mathbf{u}_0 \in V$和强迫函数 $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H)$，存在一个唯一的强解满足 (2.10) $\mathbf{u}$，使得 $\mathbf{u} \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A))$且 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; H)$。

对于 (2.10)，我们将无量纲格拉晓夫数记为

$$G = \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} \limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{f}(t)\|_H. \tag{2.16}$$

下面的定理（参见例如 [27, 29, 44, 75, 78], ）给出了关于 (2.1) 的强解大时间行为的结果。

定理 2.3。 固定 $T > 0$。设 $\mathbf{u}$ 是方程 (2.1) 的一个强解，对应于初始数据 $\mathbf{u}_0 \in V$。那么存在一个时间 $t_0 \geq 0$ ，它依赖于 $\|\mathbf{u}_0\|_H$，使得对所有 $t \geq t_0$,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_H^2 \leq 2G^2\nu^2 \quad and \quad \int_t^{t+T} \|\mathbf{u}(\tau)\|_V^2 d\tau \leq 2\left(1 + T\lambda_1\nu\right) G^2\nu, \tag{2.17}$$

此外

$$\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq 2\lambda_1 G^2\nu^2, \qquad \int_t^{t+T} \|A\mathbf{u}(\tau)\|_H^2 d\tau \leq 2\left(1 + T\lambda_1\nu\right) \lambda_1 G^2\nu. \tag{2.18}$$

此外，若 $\mathbf{f} \in H$ 与时间无关，则

$$\|A\mathbf{u}(t)\|_H^2 \leq \lambda_1^2\nu^2 c(1+G)^4. \tag{2.19}$$

在本文中，我们始终假设算子 I_h 是满足以下条件的线性算子

$$\|\boldsymbol{\phi} - I_h(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_0 h^2 \|\nabla\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ for all } \boldsymbol{\phi} \in \dot{H}^1(\Omega), \tag{2.20a}$$

$$\int_\Omega I_h(\boldsymbol{\phi}) = 0 \text{ whenever } \int_\Omega \boldsymbol{\phi} = 0. \tag{2.20b}$$

在我们的定理中，我们对插值算子 I_h 作出了若干额外假设。这里列出这些假设以供参考，不过需要指出的是，有些定理只要求其中一部分假设成立。

$$I_h^2 = I_h, \tag{2.21a}$$

$$(I_h(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\phi}, I_h(\boldsymbol{\psi})) \text{ for all } \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \dot{L}^2(\Omega), \tag{2.21b}$$

$$(I_h\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{\phi} \in \dot{L}^2(\Omega), \tag{2.21c}$$

$$\|I_h\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \text{ for some } \alpha > 0 \text{ and for all } \boldsymbol{\phi} \in \dot{L}^2(\Omega), \tag{2.21d}$$

$$(I_h\boldsymbol{\phi}, A\boldsymbol{\phi}) \geq 0 \text{ and for all } \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(A). \tag{2.21e}$$

请注意，傅里叶截断和对有限体积单元进行局部平均都是满足 (2.20) 的算子（例如参见 [4, 15, 26, 59]）。似乎存在一项技术性限制，无法允许更一般的插值算子，参见注 4.7。由于我们在零均值空间中工作，Poincar´e 不等式适用；结合 (2.20)，我们得到关于 $\|I_h(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(\Omega)}$ 的以下界：

$$\begin{aligned} \|I_h(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\boldsymbol{\phi} - I_h(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq \sqrt{c_0} h \|\nabla\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_1^{-1/2} \|\nabla\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}, \\ &= (\sqrt{c_0} h + \lambda_1^{-1/2}) \|\nabla\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

为证明非线性 nudging 系统中解的唯一性，以及该系统的解收敛到方程 (2.1) 的未知参考解，我们将对线性插值算子 I_h 作出若干假设，即上述 (2.21c) 和 (2.21d)。

作为参考，我们陈述文献 [4] 中已证明的线性 nudging CDA 算法的存在性和收敛定理。

定理 2.4. *[4]* 假设 I_h 满足 (2.20)、$\mathbf{v}_0 \in V$ 和 $\mu c_0 h^2 \leq \nu$，其中 c_0 是 (2.20)中的常数。则系统 (2.12) 存在唯一的强解，使得

$$\mathbf{v} \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;\mathcal{D}(A)) \text{ and } \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(0,T;H),$$

对任意 $T > 0$均成立。此外，该解关于初始数据 $\mathbf{v}_0$在 V 范数下连续依赖。

定理 2.5. *[4]* 设 $\Omega = \mathbb{T}^2$，且设 $\mathbf{u}$ 是满足周期边界条件的 (2.10) 的一个解。设 I_h 满足 (2.20)。那么，在 $\mu \geq 5\lambda_1 c^2 \nu G^2$ 和 $h \leq \left(\frac{1}{10\lambda_1 c^2 c_0 G^2}\right)^{1/2}$成立的条件下，对于任意 $\mathbf{v}_0 \in V$，(2.12) 的解将指数收敛于 (2.10) 的解，在 H 范数下收敛得指数快速，其指数收敛率为 $\mu/2$，当 $t \to \infty$时。

定理 2.6。 *[4]* 设 $\Omega = \mathbb{T}^2$，并设 $\mathbf{u}$ 是满足周期边界条件的 (2.10) 的解。令 I_h 满足 (2.20)。那么，只要 $\mu c_0 h^2 \leq \nu$ 且 $\mu \geq 3\nu\lambda_1(2c\log(2c^{3/2} + 8c\log(1+G))G$，其中 c 是一个取决于区域大小的常数，则对任意$\mathbf{v}_0 \in V$，(2.12) 的解都将收敛到(2.10) 的解，且当 $t \to \infty$时以 $\mu/2$的指数收敛率在 V 中指数地快速收敛。

我们还将用到以下初等引理，其证明见附录。

引理 2.7。 固定 $\gamma \in (0,1)$ 和 $\epsilon > 0$。给定 $a > 0$ 和

$$\delta := \min\left\{ a/2, a^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(\frac{\epsilon}{\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma}}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\},$$

那么由 $f:\ [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ 定义的函数为

$$f(x) = ax^2 - \delta x^{2-\gamma},$$

满足 $f(x) \geq -\epsilon$ 对所有 $x \geq 0$均成立。

3. Global Existence and Uniqueness of the Nonlinear-Nudging System

在证明 (2.3) 的解收敛到 (2.1) 的参考解 $\mathbf{u}$之前，我们必须证明 (2.3) 的解在全时间范围内存在；为此，我们采用不动点方法。这种方法的优势在于多方面：它直接利用纳维–斯托克斯方程解的性质，并充分发挥非线性松弛项的单调性。

注 3.1. 请注意，在以下各节的定理中，我们强调假设 $0 < \mu c_0 h^2 < \nu$ 至关重要；此外，为保持单位一致，我们说明 μ 前有一个系数 1。

定理 *3.2.* 设 $T > 0$。假设 I_h 满足 *(2.20)*、$0 < \mu c_0 h^2 < \nu$，且 $0 < \beta c_0 h^2 < \nu$。固定 $0 < \gamma < 1$。设 $v_0 \in V$ 为初始数据，$f \in H$ 为 *(2.14)* 的时间无关的强迫函数。设 $u \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$ 是系统 *(2.10)* 的一个强解，其初始数据为 $u_0 \in V$，且外力函数 f 相同。则存在系统 *(2.14)* 的一个强解 $v \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$。

证明。首先，我们证明

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{f} + \mu P_\sigma \mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})) + \beta P_\sigma I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})$$

将元素 $\mathbf{v} \in L^2(0,T;\, V)$ 映射到 $L^2(0,T;\, H)$。根据假设 $\mathbf{f} \in H$，因此显然$\int_0^T |\mathbf{f}|^2 dx = T|\mathbf{f}|^2 < \infty$，所以我们只需证明第二项和第三项属于 $L^2(0,T;\, H)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|P_\sigma \mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v}))\|_H^2 dt \\
&\leq \int_0^T \|\mathcal{N}(I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v}))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \|I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\gamma)} dt \\
&\leq (\lambda_1^{-1/2} + h\sqrt{c_0})^{2(1-\gamma)} \int_0^T \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_V^{2(1-\gamma)} dt \\
&\leq 2^{2(1-\gamma)} (\lambda_1^{-1/2} + h\sqrt{c_0})^{2(1-\gamma)} \int_0^T \left(\|\mathbf{u}\|_V^{2(1-\gamma)} + \|\mathbf{v}\|_V^{2(1-\gamma)} \right) dt \\
&\leq 2^{2(1-\gamma)} (\lambda_1^{-1/2} + h\sqrt{c_0})^{2(1-\gamma)} T^\gamma \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)} + \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)} \right) \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，对于第二个不等式，我们应用了 (2.22)。对 $\gamma = 0$进行相同的分析可知，第三项也属于 $L^2(0,T;\, H)$。因此，对于任意 $\mathbf{v} \in L^2(0,T;\, V)$，都有 $g(\mathbf{v}) \in L^2(0,T;\, H)$。接下来，我们证明 $g\colon\ L^2(0,T;\, V) \to L^2(0,T;\, H)$ 连续。为此，设 $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$ 属于 $L^2(0,T;\, V)$。反设存在一个 $\epsilon_0 > 0$ 和一个子序列 $\{\mathbf{v}_{k_j}\}$，使得 $\|g(\mathbf{v}^{k_j}) - g(\mathbf{v})\|_{L^2(0,T;H)} \geq \epsilon_0$。由于$\|\mathbf{v}^{k_j} - \mathbf{v}\|_{L^2(0,T;V)} \to 0$，存在一个子序列 $\{\mathbf{v}_{k_{j_l}}\}$，使得 $\|\mathbf{v}^{k_{j_l}}(t) - \mathbf{v}(t)\|_V \to 0$ 对几乎处处的 $t \in [0,T]$ 成立。这意味着，根据 (2.22)，$\|I_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}^{k_{j_l}}) - I_h(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_H \to 0$ 在时间上几乎处处逐点成立，因此 $\|g(\mathbf{v}^{k_{j_l}}) - g(\mathbf{v})\|_H^2 \to 0$ 也在时间上几乎处处逐点成立。此外，存在 $\mathbf{w} \in L^2(0,T;\, V)$，使得对于所有$k_{j_l} \in \mathbb{N}$，且对几乎处处的 $t \in [0,T]$，$\|I_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}^{k_{j_l}})\|_H \leq \|\mathbf{w}\|_V$；于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|g(\mathbf{v}_{k_{j_l}}) - g(\mathbf{v})\|_H^2 dt \\
&\leq \int_0^T \Big(\mu \|I_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_{k_{j_l}})\|_H^{1-\gamma} + \mu \|I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_H^{1-\gamma} \\
&\qquad + \beta \|I_h(\mathbf{v}_{k_{j_l}} - \mathbf{u})\|_H + \beta \|I_h(\mathbf{v}-\mathbf{u})\|_H \Big)^2 dt \\
&\leq \int_0^T \left(\mu \|\mathbf{w}\|_V^{2(1-\gamma)} + \beta \|\mathbf{w}\|_V^2 + \mu \|I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_H^{1-\gamma} + \beta \|I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_H \right)^2 < \infty,
\end{aligned}$$

有限性直接由 (3.1) 中计算得到的界得出。因此，根据勒贝格控制收敛定理，$g(\mathbf{v}^{k_{j_l}}) \to g(\mathbf{v})$ 在 $L^2(0,\ T;\, H)$ 中强收敛。这与假设矛盾，因此 $g\colon L^2(0,\ T;\, V) \to L^2(0,\ T;\, H)$ 是连续的。

给定 $\mathbf{v} \in L^2(0,\ T;\, V)$，考虑该系统

$$\widetilde{\mathbf{u}}_t + B(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{u}}) + \nu A \widetilde{\mathbf{u}} = g(\mathbf{v}), \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

令 $F(\mathbf{v}) = \widetilde{\mathbf{u}} \in C([0,T];\, V) \cap L^2(0,T;\, \mathcal{D}(A))$ 为方程 (3.2) 的唯一强解。根据定理 2.2，由于 $g(\mathbf{v}) \in L^2(0,T;\, H)$，这一结论成立（因此 F 定义良好）。

为证明 F 连续，取序列 $\{\mathbf{v}_k\} \subset L^2(0,T;V)$，其中 $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$ 属于$L^2(0,T;V)$，并考虑其对应的解序列 $F(\mathbf{v}_k) = \tilde{\mathbf{u}}_k$，它们满足方程 (3.2)。令 $M > 0$ 满足 $\|\mathbf{v}k\|_{L^2(0,T;V)} \le M$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。对方程 (3.2) 与 $A\tilde{\mathbf{u}}_k$ 取内积，并运用标准能量估计技巧，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{u}}_k\|_V^2 + \nu\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^2 \le \frac{1}{2\nu}\|g(\mathbf{v}_k)\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^2$$

因此

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{u}}_k\|_V^2 + \nu\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^2 \le \frac{1}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k)\|_H^2,$$

这意味着，由于初始数据与 k 无关，

$$\begin{aligned}
(3.4)\qquad \|\tilde{\mathbf{u}}_k(t)\|_V^2 + \nu\int_0^t \|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^2 dt &\le \|\tilde{\mathbf{u}}_k(0)\|_V^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|g(\mathbf{v}_k)\|_H^2 dt \\
&\le \|\mathbf{v}_0\|_V^2 + \frac{2}{\nu}T\|f\|_H^2 + \frac{C_\gamma(\mu,h)}{\nu}T^\gamma(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)} + \|\mathbf{v}_k\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)}) \\
&\quad + \frac{C(\beta,h)}{\nu}(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|\mathbf{v}_k\|_{L^2(0,T;V)}^2) \\
&\le \|\mathbf{v}_0\|_V^2 + \frac{2}{\nu}T\|f\|_H^2 + \frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu}T^\gamma(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)} + M^{2(1-\gamma)}) \\
&\quad + \frac{C(\beta,h)}{\nu}(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^2 + M^2),
\end{aligned}$$

where $C_\gamma(h,\mu) = 2^{2-\gamma}\mu^2\left(\sqrt{c_0}h + \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\right)^{2(1-\gamma)}$ and $C(h,\beta) = 4\beta^2\left(\sqrt{c_0}h + \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\right)^2$.

由 (3.4) 可知，$\{\tilde{\mathbf{u}}_k\}$ 在 $C([0,T];V) \cap L(0,T;\mathcal{D}(A))$ 中一致有界。我们证明 $\{\tilde{\mathbf{u}}_k\}$ 是一个柯西序列。设 $m \ge k$ 和 $\mathbf{w}_{m,k} = \tilde{\mathbf{u}}_m - \tilde{\mathbf{u}}_k$；则 $\mathbf{w}_{m,k}$ 满足

(3.5)
$$\frac{d}{dt}\mathbf{w}_{m,k} + \nu A\mathbf{w}_{m,k} + B(\tilde{\mathbf{u}}_k, \mathbf{w}_{m,k}) + B(\mathbf{w}_{m,k}, \tilde{\mathbf{u}}_k) + B(\mathbf{w}_{m,k}, \mathbf{w}_{m,k}) = g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m).$$

在 H 中与 $A\mathbf{w}_{m,k}$ 取内积，并应用 (2.8)、(2.9)，

(3.6)
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 + \nu\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^2 = (B(\mathbf{w}_{m,k}, \mathbf{w}_{m,k}), A\tilde{\mathbf{u}}_k) + (g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m), A\mathbf{w}_{m,k}).$$

因此，利用庞加莱不等式和杨氏不等式，

$$\begin{aligned}
(3.7)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 + \nu\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^2 &\le c\|\mathbf{w}_{m,k}\|_H^{\frac{1}{2}}\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H \\
&\quad + \|g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m)\|_H\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H \\
&\le c^{\frac{4}{3}}\lambda_1^{-\frac{1}{3}}\nu^{-3}\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^{\frac{4}{3}}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 \\
&\quad + \frac{\nu}{2}\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m)\|_H^2,
\end{aligned}$$

由此可得

(3.8)
$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 + \nu\|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^2 \le 2c^{\frac{4}{3}}\lambda_1^{-\frac{1}{3}}\nu^{-3}\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^{\frac{4}{3}}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 + \frac{2}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m)\|_H^2$$

这意味着，满足 $\tilde{c} = 2c^{\frac{4}{3}}\lambda_1^{-\frac{1}{3}}\nu^{=3}$

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 \leq \tilde{c}\|A\tilde{\mathbf{u}}_K\|_H^{\frac{4}{3}}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2 + \frac{2}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m)\|_H^2 \tag{3.9}$$

并由 Gr¨onwall 不等式（因为 $\mathbf{w}_{k,m}(0) = 0$），

$$\|\mathbf{w}_{k,m}(t)\|_V^2 \leq \int_0^t \exp\left(\tilde{c}\int_s^t \|A\tilde{\mathbf{u}}_k(\tau)\|_H^{\frac{4}{3}}d\tau\right)\frac{2}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k(s)) - g(\mathbf{v}_m(s))\|_H^2 ds \tag{3.10}$$

$$\leq \exp\left(\tilde{c}\int_0^T \|A\tilde{\mathbf{u}}_k(\tau)\|_H^{\frac{4}{3}}d\tau\right)\int_0^T \frac{2}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k(s)) - g(\mathbf{v}_m(s))\|_H^2 ds \tag{3.11}$$

因此，取上确界并应用 H¨older 不等式，

(3.12)

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{w}_{k,m}(t)\|_V^2 \leq \exp\left(\tilde{c}\left(\int_0^T \|A\tilde{\mathbf{u}}_k(\tau)\|_H^2 d\tau\right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}}\right)\|g(\mathbf{v}_k(s)) - g(\mathbf{v}_m(s))\|_{L^2(0,T;H)}^2.$$

由 $\|A\tilde{\mathbf{u}}_k(\tau)\|_{L^2(0,T;H)}^2$的一致有界性，且由于 g连续，我们有$\{\tilde{\mathbf{u}}_k\}$在 $C([0,T];\, V)$ 范数下是柯西列，因此收敛到某个 $\tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T];\, V)$。接下来，我们直接对 (3.8) 积分，并利用 $\mathbf{w}_{k,m}(0) = 0$，得到

$$\nu\int_0^T \|A\mathbf{w}_{m,k}\|_H^2 ds \leq \tilde{c}\left(\int_0^T \|A\tilde{\mathbf{u}}_k(s)\|_H^2 ds\right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{w}_{m,k}\|_V^2\right) + \frac{2}{\nu}\|g(\mathbf{v}_k) - g(\mathbf{v}_m)\|_{L^2(0,T;H)}^2, \tag{3.13}$$

这意味着 $\{A\tilde{\mathbf{u}}_k\}$在 $L^2(0,T;\, H)$ 中是柯西列，并在该范数下收敛到 $A\tilde{\mathbf{u}}$。接下来，我们证明 $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{dt} \to \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt}$在$L^2(0,T;\, H)$ 中。首先注意到，由 (2.7) 可得，

$$\begin{aligned}&\|B(\tilde{\mathbf{u}}_k,\tilde{\mathbf{u}}_k) - B(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{u}})\|_H + \|B(\tilde{\mathbf{u}}_k,\tilde{\mathbf{u}})\|_H + \|B(\tilde{\mathbf{u}}_k,\tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathbf{u}})\|_H\\ \leq& c\|\tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathbf{u}}\|_H^{\frac{1}{2}}\|A\tilde{\mathbf{u}}_k - A\tilde{\mathbf{u}}\|_H^{\frac{1}{2}}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_V + c\|\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^{\frac{1}{2}}\|A\tilde{\mathbf{u}}_k\|_H^{\frac{1}{2}}\|\tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathbf{u}}\|_V.\end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，

$$\int_0^T \|B(\widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathbf{u}})\|_H^2 dt \leq c\frac{1}{\lambda_1}\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;V)}^2\|A\widetilde{\mathbf{u}}_k - A\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + c\|\widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;V)}^2\|\widetilde{\mathbf{u}}_k\|_{L^2(0,T;H)}\|A\widetilde{\mathbf{u}}_k\|_{L^2(0,T;H)},$$

由 $\tilde{\mathbf{u}}_k \to \tilde{\mathbf{u}}$ 在 $C([0,T];\, V) \cap L^2(0,T;\, \mathcal{D}(A))$ 中强收敛这一事实可知，$B(\tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k)$ 在 $L^2(0,T;\, H)$ 中收敛到 $B(\tilde{\mathbf{u}}\ \tilde{\mathbf{u}})$。由于

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{dt} = -\nu A\tilde{\mathbf{u}}_k - B(\tilde{\mathbf{u}}_k,\tilde{\mathbf{u}}_k) + g(\mathbf{v}_k), \tag{3.15}$$

右端在 $L^2(0,T;\, H)$ 中收敛，因此 $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{dt}$ 收敛到 $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt}$ 在 $L^2(0,T;\, H)$ 中。因此，$F(\mathbf{v}_k) \to F(\mathbf{v})$ 在 $C([0,T];\, V) \cap L^2(0,T;\, \mathcal{D}(A))$ 中。

接下来证明 F是作用于 $L^2(0,T;\, V)$ 上的紧算子。对于任意有界序列 $\{\mathbf{v}_k\} \subset L^2(0,T;\, V)$，估计式 (3.4) 成立，这意味着 $\{\tilde{\mathbf{u}}_k\}$一致有界，尤其是在 $L^2(0,T;\, \mathcal{D}(A))$ 中一致有界；并且沿用相同的论证可由 (3.15) 得出一致有界性，而非收敛性，即$\{\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{dt}\}$ 在 $L^2(0,T;\, H)$ 中一致有界。因此，根据 Aubin紧性定理，存在一个子序列 $\{\overline{\mathbf{v}_{k_j}}\}$，使得 $F(\mathbf{v}^{k_j}) = \tilde{\mathbf{u}}^{k_j}$ 在 $L^2(0,T;\, V)$ 中强收敛。因此，F 是一个（非线性）连续紧算子。

我们采用 Schauder不动点定理的一个版本。该定理指出，若 Banach空间 X 中的闭、有界凸集 B 满足： $F: X \to X$ 是一个紧算子，且 $F: B \to B$，则 F 在 B 中有一个不动点（例如参见 [28]）。给定初始数据 $\mathbf{v}_0 \in V$，固定 $R > \frac{\|\mathbf{v}_0\|_V^2}{\nu\lambda_1}$。令 [1]

$$T_* := \frac{R}{\nu\lambda_1 R + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}\|\mathbf{f}\|_H^2 + \frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu^{1+\gamma}\lambda_1^\gamma}\left(\|\mathbf{u}\|^{2(1-\gamma)}_{L^2(0,T;V)} + R^{(1-\gamma)}\right) + \frac{C(h,\beta)}{\nu}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;V)} + R\right)}.$$

and

$$B := \left\{\mathbf{v} \in L^2(0,T;V) : \int_0^{T_*} \|\mathbf{v}\|_V^2 \le R\right\},$$

注意到 $T_* < \frac{1}{\nu\lambda_1}$。对于任意 $\mathbf{v} \in B$，根据定义，我们注意到 $F(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T_*]; V) \cap L^2(0,T_*; \mathcal{D}(A))$，因此 $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0,T_*; V)$。此外，采用与 (3.4) 中第一个不等式相同的估计方法，只是改为在 $[0,T_*]$ 上积分，并用 $g(\mathbf{v})$ 代替 $g(\mathbf{v}_k)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_*} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_V^2 dt &\le T_*\|\mathbf{v}_0\|_V^2 + \frac{1}{\nu}T_*^2\|\mathbf{f}\|_H^2 \\
&\quad + T_*^{1+\gamma}\frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu}\left(\left(\int_0^{T_*}\|\mathbf{u}\|_V^2\right)^{1-\gamma} + \left(\int_0^{T_*}\|\mathbf{v}\|_V^2\right)^{1-\gamma}\right) \\
&\quad + T_*\frac{C(\beta,h)}{\nu}\left(\int_0^{T_*}\|\mathbf{u}\|_V^2 + \int_0^{T_*}\|\mathbf{v}\|_V^2\right) \\
&\le T_*\Big(\nu\lambda_1 R + \frac{1}{\nu}T_*\|\mathbf{f}\|_H^2 + \frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu}T_*^\gamma\left(\|\mathbf{u}\|^{2(1-\gamma)}_{L^2(0,T;V)} + R^{1-\gamma}\right) \\
&\quad + \frac{C(\beta,h)}{\nu}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;V)} + R\right)\Big) \\
&\le T_*\Big(\nu\lambda_1 R + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}\|\mathbf{f}\|_H^2 + \frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu^{1+\gamma}\lambda_1^\gamma}\left(\|\mathbf{u}\|^{2(1-\gamma)}_{L^2(0,T;V)} + R^{1-\gamma}\right) \\
&\quad + \frac{C(\beta,h)}{\nu}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;V)} + R\right)\Big) \le R
\end{aligned}$$

根据 T_* 的定义。换言之， $\tilde{\mathbf{u}} \in B$，因此， $F: B \to B$。由于 F 在 $L^2(0,T; V)$ 上是紧的，所以 F 在 B 中存在一个不动点，即 $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ 在 $[0,T_*]$ 上。将此不动点记为 $\mathbf{v}_1 \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$。考虑以初始数据 $\mathbf{v}_1(T_*/2)$ 为条件的 (3.2)（这是允许的，因为解必须关于时间连续）。现在选择 $\tilde{R} > \max\left\{R, \frac{\|\mathbf{v}_1(T_*/2)\|_V^2}{\nu\lambda_1}\right\}$，并且

$$\tilde{B} := \left\{\mathbf{v} \in L^2(0,T;V) : \int_{T_*/2}^{\tilde{T}_*} \|\mathbf{v}\|_V^2 \le \tilde{R}\right\} \tag{3.16}$$

and

$$\tilde{T}_* := \frac{T_*}{2} + \Delta T,$$

[1]不难验证，尽管这一过程稍显繁琐， T_* 的表达式在量纲上是正确的。

其中

$$\Delta T = \frac{\tilde{R}}{\nu\lambda_1\tilde{R} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}\|\mathbf{f}\|_H^2 + \frac{C_\gamma(h,\mu)}{\nu^{1+\gamma}\lambda_1^\gamma}\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^{2(1-\gamma)} + \tilde{R}^{(1-\gamma)}\right) + \frac{C(h,\beta)}{\nu}\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \tilde{R}\right)}.$$

注意到 $T_*/2 < T_* < T_*$，并且还要注意，区间的长度 ΔT 略大于前一个区间的长度，因为函数 $\frac{x}{a+bx^{1-\gamma}+cx}$ 在 x 上关于 $a, b, c, x > 0$ 单调递增。对 $T_*/2$ 到 T_* 积分可得 $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(T_*/2,\tilde{T}_*;V)}^2 \le \tilde{R}$，这意味着 $\tilde{\mathbf{u}} \in B$。因此，F 有一个不动点 $\mathbf{v}_2 \in \tilde{B}$，使得 $F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$ 在 $[T_*/2, T_*]$ 上成立，并且 $\mathbf{v}_2(T_*/2) = \mathbf{v}_1(T_*/2)$。对 $\tilde{T}_*$ 进行归纳可得，F 有一个不动点 $\mathbf{v} \in C([0,T];\, V) \cap L^2(0,T;\, \mathcal{D}(A))$。□

注记 3.3. 或者，也可以使用 Schaefer不动点定理，这样就不必像上述证明那样按时间逐步提升正则性。

定理 3.4. 假设 I_h 满足 (2.20)、(2.21a) 和 (2.21b)。则具有初始数据 $\mathbf{v}_0 \in V$ 的系统 (2.14) 存在唯一的强解。

证明. 假设 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是具有相同初始条件的方程 (2.3) 的两个强解。令 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{v}_1$，$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{v}_2$，且 $\mathbf{V} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$。则 $\mathbf{V}$ 满足该系统

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nu A\mathbf{V} + B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1) + B(\mathbf{v}_2,\mathbf{V}) &= \mu P_\sigma\left(\mathcal{N}(I_h(\mathbf{w}_1)) - \mathcal{N}(I_h(\mathbf{w}_2))\right)\\ &\quad - \beta I_h(\mathbf{V})\\ \nabla\cdot\mathbf{V} &= 0\\ \mathbf{V}(\mathbf{x},0) &= 0.\end{aligned}$$

我们证明 $\mathcal{N}$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的单调算子：给定 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in L^2(\Omega)$，其中 $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ 且非零（例如 $\mathbf{u}_2 = 0$ 时，证明类似），

$$\begin{aligned}&(\|\mathbf{u}_1\|_H^{-\gamma}\mathbf{u}_1 - \|\mathbf{u}_2\|_H^{-\gamma}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\\ &= \|\mathbf{u}_1\|_H^{2-\gamma} + \|\mathbf{u}_2\|_H^{2-\gamma} - (\|\mathbf{u}_1\|_H^{-\gamma} + \|\mathbf{u}_2\|_H^{-\gamma})(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\\ &\ge \|\mathbf{u}_1\|_H^{2-\gamma} + \|\mathbf{u}_2\|_H^{2-\gamma} - (\|\mathbf{u}_1\|_H^{-\gamma} + \|\mathbf{u}_2\|_H^{-\gamma})\|\mathbf{u}_1\|_H\|\mathbf{u}_2\|_H\\ &= \|\mathbf{u}_1\|_H^{2-\gamma} - \|\mathbf{u}_1\|_H^{1-\gamma}\|\mathbf{u}_2\|_H + \|\mathbf{u}_2\|_H^{2-\gamma} - \|\mathbf{u}_2\|_H^{1-\gamma}\|\mathbf{u}_1\|_H\\ &= (\|\mathbf{u}_1\|_H^{1-\gamma} - \|\mathbf{u}_2\|_H^{1-\gamma})(\|\mathbf{u}_1\|_H - \|\mathbf{u}_2\|_H)\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

由于 I_h 是线性的并满足 (2.21b)，我们与 $\mathbf{V}$ 取内积

(3.17)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{V}\|_H^2 + \nu\|\mathbf{V}\|_V^2\\ &= -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V}) + \mu(P_\sigma(\mathcal{N}(I_h(\mathbf{w}_1)) - \mathcal{N}(I_h(\mathbf{w}_2))),\mathbf{V}) - \beta(I_h(\mathbf{V}),\mathbf{V})\\ &= -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V}) - \mu\left(\frac{I_h(\mathbf{w}_1)}{\|I_h(\mathbf{w}_1)\|_{L^2(\Omega)}} - \frac{I_h(\mathbf{w}_2)}{\|I_h(\mathbf{w}_2)\|_{L^2(\Omega)}}, \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\right) - \beta\|I_h(\mathbf{V})\|^2\\ &\le -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V}) - \mu\left(I_h\left(\frac{\mathbf{w}_1}{\|I_h(\mathbf{w}_1)\|_{L^2(\Omega)}} - \frac{\mathbf{w}_2}{\|I_h(\mathbf{w}_2)\|_{L^2(\Omega)}}\right), \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\right)\end{aligned}$$

$$= -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V}) - \mu\left(I_h\left(\frac{\mathbf{w}_1}{\|I_h(\mathbf{w}_1)\|_{L^2(\Omega)}} - \frac{\mathbf{w}_2}{\|I_h(\mathbf{w}_2)\|_{L^2(\Omega)}}\right), I_h(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\right)$$
$$= -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V}) - \mu\left(\mathcal{N}(I_h\mathbf{w}_1) - \mathcal{N}(I_h\mathbf{w}_2), I_h(\mathbf{w}_1) - I_h(\mathbf{w}_2)\right)$$

此时，由单调性可知，我们可以去掉中间项，从而得到

$$\leq -(B(\mathbf{V},\mathbf{v}_1),\mathbf{V})$$
$$\leq c\|\mathbf{v}_1\|_V\|\mathbf{V}\|_H\|\mathbf{V}\|_V$$
$$\leq \frac{c^2}{2\nu}\|\mathbf{v}_1\|_V^2\|\mathbf{V}\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{V}\|_V^2.$$

因此，

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{V}\|_H^2 + \nu\|\mathbf{V}\|_V^2 \leq \frac{c^2}{\nu}\|\mathbf{v}_1\|_V^2\|\mathbf{V}\|_H^2.$$

对时间积分，得到

$$\|\mathbf{V}(t)\|_H^2 \leq \|\mathbf{V}(0)\|_H^2 e^{\frac{c^2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{v}_1\|_V^2 ds} = 0.$$

因此，$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, 且方程 (2.3) 的强解是唯一的。 □

注 3.5。 注意，若 $\beta = 0$，则存在性与唯一性的证明对 $\|I_h(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|_H$ 的整个取值范围均成立。

4. Convergence

本节证明，(2.14) 的解至少以指数速率收敛到 (2.10) 的解。给定误差 $\epsilon > 0$，$\mathbf{v}$ 是 (2.14) 的一个强解，$\mathbf{u}$ 是 (2.10) 的一个强解。我们证明，如果在解开始指数收敛之前，$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ 不小于 epsilon，那么在一个较短的时间区间内，$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$ 会以至少双指数速率在有限时间内收敛，并且在 H 和 V 范数下也会在有限时间内达到所选定的小误差 ϵ。为说明双指数收敛，我们利用以下简单事实：对于$y \in (0, 1]$, $1 - y^{-\gamma} \leq \log(y^{\gamma}$。

对于 H 中的收敛，我们假设 I_h 满足 (2.20)、(2.21c) 和 (2.21d)。例如，通过投影到低阶傅里叶模态以及在有限体积单元上进行局部平均得到的插值算子满足这些条件。对于满足 (2.20) 且另满足 (2.21e) 的插值算子，V 范数下的收敛证明同样成立；例如，当 I_h 是投影到低阶傅里叶模态的投影算子时，便满足这一条件。因此，下面的收敛定理将考虑这样一种 (2.14)：其初始数据取自将 (2.12) 演化至某个特定且足够大的时间之后的结果（该时间仅取决于已知的系统参数和可观测数据）。

现在我们引入一个比（2.21b）限制更少的假设，即（2.21c），并将其用于证明（2.14）的所有强解都收敛到（2.10）相应的唯一参考解。具体而言，由于我们不再假设（2.21b）成立，因此（2.14）不一定存在唯一强解，但根据定理 3.2，其解在全局范围内存在。因此，我们将在下文的定理 4.1 中证明，在假设（2.21c）下，（2.14）的所有强解，无论其是否唯一，都会收敛到（2.10）的唯一强参考解。

定理 4.1。固定 $0 < \gamma < 1$。令 I_h 为满足 (2.20)、(2.21c) 和 (2.21d) 的插值算子。设 $v \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$ 是方程 (2.14) 的强解，其初始数据为 $v_0 \in V$，外力为与时间无关的 $f \in H$，且 $u \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$

方程 (2.10) 的强解，其初始数据为 $\mathbf{u}_0 \in V$，外力相同，即 $\mathbf{f}$。固定$0 < \epsilon \ll \min\{1, \|\mathbf{u}(0) - \mathbf{v}(0)\|_H\}$。令 μ、β 满足以下条件：

$$\mu > \max\left\{5c^2\lambda_1 G^2\nu, \alpha^\gamma c^2\lambda_1 G^2\nu, \frac{\alpha^\gamma}{\gamma}\right\},\ \beta > c^2\lambda_1 G^2\nu \tag{4.1}$$

其中 c 是 (2.6) 中指定的常数。令 $\epsilon > 0$ 满足

- $\mu c_0 h^2 < \nu/2$,
- $\beta c_0 h^2 < \nu$, *and*
- $h \leq \frac{a\alpha^\gamma(\epsilon/2)^{\gamma/2}\ \nu^{\ 1-\gamma/2}\ (\ )}{\mu\sqrt{c_0}}$,

其中[2]

$$\begin{aligned} a &:= \left(\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{(2-\gamma)/\gamma} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{2/\gamma}\right)^{\gamma/2} \lambda_1^{(1-\gamma)/2} 2^{\gamma/2-1} \\ &= (2-\gamma)^{1-\frac{\gamma}{2}}\gamma^{\gamma/2}\lambda_1^{(1-\gamma)/2}2^{\frac{\gamma}{2}-2}. \end{aligned}$$

那么对于所有 $t \geq \tilde{t}$（其中 $\tilde{t}$ 如定理 *2.3* 中所规定），$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_H^2 \to 0$ 至少以指数收敛率收敛，如 *[4]* 所示。若 $\|\mathbf{v}(\tilde{t}) - \mathbf{u}(\tilde{t})\|_H > \epsilon$，则存在一个时间区间 $[t_0, t^*]$，使得 $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_H^2 \to \epsilon$ 以双指数速率收敛。特别地，

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)\|_H^2 \leq A\exp\left(-b\exp\left(\mu\alpha^{-\gamma}\gamma(t-t_0)\right)\right),$$

对于所有 $t < t^*$，其中 $A := \exp\left(-\frac{1}{\mu\alpha^{-\gamma}\gamma}\right)$ 且 $b := \frac{1}{\mu\alpha^{-\gamma}\gamma}(-(\mu\alpha^{-\gamma}\gamma - 1)\log\|\mathbf{w}(t_0)\|_H^2) > 0$。

证明。假设上述条件成立，并令 $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$。我们将两者之差与式 (2.14) 相减，得到如下系统 (2.10)

$$\mathbf{w}_t + B(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \nu A\mathbf{w} = -\mu P_\sigma \mathcal{N}(\mathbf{w}) - \beta P_\sigma I_h(\mathbf{w}) \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0. \tag{4.2b}$$

W我们对 (4.2a) 作用于$\mathbf{w}$，并使用 Lions-Magenes 引理，得到 n

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \langle B(\mathbf{w}, \mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle + \nu\|\mathbf{w}\|_V^2 = -\mu(\mathcal{N}(\mathbf{w}), \mathbf{w}) - \beta(I_h(\mathbf{w}), \mathbf{w}) \tag{4.3}$$

不失一般性，设 $\|\mathbf{w}(0)\|_H > 1$。由于 $(I_h\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq 0$，(4.3) 右端非正，因此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \langle B(\mathbf{w}, \mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle + \nu\|\mathbf{w}\|_V^2 \leq -\beta(I_h(\mathbf{w}), \mathbf{w}). \tag{4.4}$$

按照 [18], 的分析，我们得到能量估计

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \left(\beta - \frac{c^2}{\nu}\|\mathbf{u}\|_V^2\right)\|\mathbf{w}\|_H^2 \leq 0.$$

由于我们已选取 $\beta > c^2\lambda_1 G^2\nu$，因此可以继续按照 [18] 的分析，通过˜ ˜得到 $t \geq t$ 的指数收敛，其中 t 由定理 2.3 给出。

如果$\|\mathbf{w}\|_H^2 \tilde{<} \epsilon$，那么结论成立。否则，由于 $t \geq \tilde{t}$的指数收敛以及$\mathbf{w} \in C([0,T]; V)$这一事实，$\mathbf{w}($存在一个区间 $[t_0, t^*]$，在该区间上

$$\epsilon < \|\mathbf{w}(t)\|_H^2 < \min\left\{e^{-\frac{\alpha^\gamma}{\gamma\mu}}, \left(\frac{\mu\alpha^{-\gamma}}{\mu\alpha^{-\gamma}+1}\right)^{1/\gamma}\right\}$$

[2] 显然可证，$\gamma \in (0,1)$ 意味着 $a > 0$。稍加繁复的计算可得 $a \leq \frac{1}{2}\lambda_1^{(1-\gamma)/2}$。

对于 $t \in [t_0, t^*]$。因此，记 $\eta := \alpha^{-\gamma}$，并利用 $\|I_h\mathbf{w}\|_H \le \alpha\|\mathbf{w}\|_H$、(2.6)、柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式和庞加莱不等式，对于几乎处处的 $t \in [t_0, t^*]$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \nu\|\mathbf{w}\|_V^2 \\
\le& -\langle B(\mathbf{w},\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle - \mu\eta(\|\mathbf{w}\|_H^{-\gamma} I_h(\mathbf{w}),\mathbf{w}) - \beta(I_h\mathbf{w},\mathbf{w}) \\
\le& -\langle B(\mathbf{w},\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle - \mu\eta(\|\mathbf{w}\|_H^{-\gamma} I_h(\mathbf{w}),\mathbf{w}) \\
\le& -\langle B(\mathbf{w},\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle + \mu\eta[-\|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma} + \|\mathbf{w}\|_H^{-\gamma}(\mathbf{w} - I_h\mathbf{w},\mathbf{w})] \\
\le& c\|\mathbf{w}\|_H\|\mathbf{w}\|_V\|\mathbf{u}\|_V - \mu\eta\|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma} + \mu\eta\sqrt{c_0}h\|\mathbf{w}\|_V\|\mathbf{w}\|_H^{1-\gamma} \\
\le& \frac{c^2}{2\nu}\|\mathbf{u}\|_V^2\|\mathbf{w}\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{w}\|_V^2 - \mu\eta\|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma} + \frac{\mu\eta\sqrt{c_0}h}{\lambda_1^{(1-\gamma)/2}}\|\mathbf{w}\|_V^{2-\gamma}.
\end{aligned}$$

根据定理 2.3，$\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \le 2\lambda_1 G^2(\nu)^2$ 对所有 $t \in [t_0, T]$ 均成立，因此条件 (4.1) 蕴含 $\mu > \frac{c^2}{2\nu}\|\mathbf{u}\|_V^2$对所有 $t \in [t_0, T]$ 均成立，从而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{w}\|_V^2 - \frac{\mu\eta\sqrt{c_0}h}{\lambda_1^{(1-\gamma)/2}}\|\mathbf{w}\|_V^{2-\gamma} &\le \frac{c^2}{2\nu}\|\mathbf{u}\|_V^2\|\mathbf{w}\|_H^2 - \mu\eta\|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma} \\
&\le \mu\eta(\|\mathbf{w}\|_H^2 - \|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma}).
\end{aligned}$$

我们可以将左侧包含 $\|\mathbf{w}\|_V$ 项的表达式写成 $f(x) = ax^2 - b(h)x^{2-\gamma}$ 的形式，其中 x 取为 $\|\mathbf{w}\|_V$。根据引理 2.7，项 $b(h)$ 决定了 $f(x)$ 的最小值；通过引理 2.7 的证明可以说明，h 足够小，因此条件 $\frac{\nu}{2}\|\mathbf{w}\|_V^2 - \frac{\mu\eta\sqrt{c_0}h}{\lambda_1^{(1-\gamma)/2}}\|\mathbf{w}\|_V^{2-\gamma} \ge -\epsilon/2$ 成立。注意，h 有一个涉及常数 a 的表达式作为其上界。

根据我们对 h 的小量条件,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 - \epsilon/2 \le \mu\eta(\|\mathbf{w}\|_H^2 - \|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma})$$

或者简单地说,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 \le 2\mu\eta(\|\mathbf{w}\|_H^2 - \|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma}) + \epsilon. \tag{4.5}$$

此外，我们注意到右侧的第一项为负，因此利用以下事实：对于 $y \in (0, 1]$，我们有 $1 - y^{-\gamma} \le \log(y^\gamma)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 &\le 2\mu\eta(1 - \|\mathbf{w}\|_H^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_H^2 + \epsilon \\
&\le 2\mu\eta(\log\|\mathbf{w}\|_H^\gamma)\|\mathbf{w}\|_H^2 + \epsilon \\
&= \gamma\mu\eta(\log\|\mathbf{w}\|_H^2)\|\mathbf{w}\|_H^2 + \epsilon. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

因此，我们得到两个不等式：(4.5) 是一个伯努利型微分不等式，(4.6) 则提供了不同的信息。我们先分析 (4.5)，以直接得到在有限时间内收敛到 ϵ。

根据我们的初始假设，我们特别注意到，对于所有 $t \in [t_0, t^*]$，均有 $\|\mathbf{w}(t)\|_H^2 > \epsilon$，因此对于几乎处处的 $t \in [t_0, t^*]$,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 \le 2(\mu\eta + 1)\|\mathbf{w}\|_H^2 - 2\mu\eta\|\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma}.$$

令 $z = \|\mathbf{w}\|_H^\gamma$，

$$\frac{dz}{dt} \leq \gamma(\mu\eta + 1)\left(z - \frac{\mu\eta}{\mu\eta+1}\right),$$

这可以改写为

$$\frac{d}{dt}\log\left(\frac{\mu\eta}{\mu\eta+1} - z\right) \geq \gamma(\mu\eta+1)$$

并从 t_0 到 t^*积分，

$$z(t^*) \leq \frac{\mu\eta}{\mu\eta+1} - \left(\frac{\mu\eta}{\mu\eta+1} - z(t_0)\right)e^{\gamma(\mu\eta+1)(t^*-t_0)},$$

换言之，

$$\|\mathbf{w}(t^*)\|_H^\gamma \leq \frac{\mu\eta}{\mu\eta+1} - \left(\frac{\mu\eta}{\mu\eta+1} - \|\mathbf{w}(t_0)\|_H^\gamma\right)e^{\gamma(\mu\eta+1)(t^*-t_0)}.$$

这个不等式的右侧在 $t^* \to \infty$ 时趋近于 $-\infty$。注意，t^* 是固定的，但由于我们已证明在此时间区间内，$\|\mathbf{w}(t)\|_H$ 随时间衰减，因此我们可以将 t^* 延长至 $\|\mathbf{w}\|_H^2 = \epsilon$。

我们注意到，利用不等式 (4.6) 可以更好地刻画衰减率。同样，由于对于所有 $t \in [t_0, t^*]$，$\|\mathbf{w}(t)\|^2 > \epsilon$，那么对于几乎处处的 $t \in [t_0, t^*]$，

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 \leq (\gamma\mu\eta(\log\|\mathbf{w}\|_H^2) + 1)\|\mathbf{w}\|_H^2.$$

代入 $z = -\log\|\mathbf{w}\|_H^2$，得到

$$\frac{dz}{dt} \geq \gamma\mu\eta z - 1,$$

这等价于

$$\frac{d}{dt}\left(\log\left(\mu\eta\gamma z - 1\right)\right) \geq \mu\eta\gamma.$$

在区间 $[t_0, t^*]$ 上积分，得到

$$z(t^*) \geq \frac{1}{\mu\eta\gamma}\left(1 + e^{\log(\mu\eta\gamma z(t_0)-1)+\mu\eta\gamma(t^*-t_0)}\right),$$

可改写为

$$\log\|\mathbf{w}(t^*)\|_H^2 \leq -\frac{1}{\mu\eta\gamma}\left(1 + e^{\log(-(\mu\eta\gamma-1)\log\|\mathbf{w}(t_0)\|_H^2)+\mu\eta\gamma(t^*-t_0)}\right).$$

这意味着

$$\|\mathbf{w}(t^*)\|_H^2 \leq A\exp\left(-b\exp\left(\mu\eta\gamma(t^*-t_0)\right)\right),$$

其中 $A := \exp\left(-\frac{1}{\mu\eta\gamma}\right)$ 且 $b := \frac{1}{\mu\eta\gamma}(-(\mu\eta\gamma-1)\log\|\mathbf{w}(t_0)\|_H^2)$。由于该不等式表明 $\|\mathbf{w}(t)\|_H^2$ 至少以双指数速度单调衰减，我们注意到可以将 t^* 延伸至 $\|\mathbf{w}(t^*)\|_H^2 = \epsilon$。

现在，我们注意到，收敛到 0 仍然成立，因为仅使用关于μ 和 h的假设，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_H^2 + \langle B(\mathbf{w},\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle + \nu\|\mathbf{w}\|_V^2 &= -\mu(P_\sigma\mathcal{N}(I_h\mathbf{w}),\mathbf{w}) \\ &= -\mu(|I_h\mathbf{w}|^{-\gamma}I_h\mathbf{w},\mathbf{w}) - \mu(I_h\mathbf{w},\mathbf{w}) \\ &\leq -\mu(I_h\mathbf{w},\mathbf{w}),\end{aligned}$$

以及　因此，根据定理 2.5，按照我们对 μ 和 h的选择，收敛到 0 仍然成立。　□

注 4.2. 注意，在定理 4.1 中，只需分析 (4.6)，即可得到有限时间内双指数收敛。如果能够改进证明，使ϵ 趋于 0，那么不等式 (4.5)表明，我们仍能在有限时间内得到 H 范数下的收敛。阻碍我们将 ϵ 趋于 0 的主要原因是：与线性松弛情形不同，在线性松弛情形中我们可以使用不等式 $\mu c_0 h^2 < \nu$；而在非线性松弛情形中，与之对应的不等式为 $\mu c_0 h^2 \|\mathbf{w}\|^{-\gamma} < \nu$。因此，随着$\|\mathbf{w}\|_H \to 0$，这个界最终会被违反。

推论 4.3。 假设定理 *4.1* 的条件成立，但将假设 $(2.21\mathrm{c})$替换为假设 $(2.21\mathrm{b})$。则(2.14)的唯一强解满足定理 *4.1* 的相同结论。

证明。 注意到假设 (2.21b) 蕴含 (2.21c)。因此，根据在更严格的假设 (2.21b)（而非 (2.21c)）下的定理 3.4，(2.14) 存在全局唯一强解。由定理 4.1，该唯一强解如所述收敛于唯一参考强解。□

在下面的定理中，我们证明$\mathbf{v}$ 在 V 范数下以双指数速率并在有限时间内收敛于 $\mathbf{u}$ 。在此情形下，我们对插值算子要求一个略有不同的限制，即 (2.21e)。

定理 *4.4.* 固定 $0 < \gamma < 1$。设 I_h 满足 *(2.20)* 和 *(2.21e)*。设 $v \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$ 是满足初始数据 $v_0 \in V$和外力 $f \in H$的方程 *(2.14)* 的强解，且 $u \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathcal{D}(A))$ 是满足初始数据 $u_0 \in V$ 且受相同外力 f 作用的方程 *(2.10)* 的强解。固定 $0 < \epsilon \ll min\{1, \|u(0) - v_0\|_V\}$。选取 μ, β 使得

$$\mu > \max\left\{(\sqrt{c_0} + \lambda_1^{-1/2})^\gamma c \lambda_1^2 (\nu)^2 (1+G)^4, \frac{1}{\gamma \lambda^{\gamma/2}}, 3\lambda_1 \nu J G\right\}, \tag{4.7}$$

$$\beta > 3\lambda_1 \nu J G \tag{4.8}$$

其中 c 是由不等式 (2.7)给出的常数，且

$$J := 2c \log\left(2c^{3/2}\right) + 4c \log(1+G).$$

选择 h 使得

- $h < 1$ （其中 1 的单位是长度，即它是区域的线性尺寸）
- $\mu c_0 h_a^2 < \nu$ 和
- $h \le \frac{(\epsilon/2)^{\gamma/2} \nu^{1-\gamma/2}}{\mu \sqrt{c_0}}(),$

其中 $a := \left(\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{(2-\gamma)/\gamma} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{2/\gamma}\right)^{\gamma/2} \lambda_1^{(1-2\gamma)/2} 2^{\gamma/2-1}$。那么，对于所有 $t > \tilde{t}$ （其中$\tilde{t}$ 在定理 *2.3* 中给出）， $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_V^2 \to 0$ 至少以 *[4]* 所述的指数收敛率收敛。若$\|\mathbf{v}(\tilde{t}) - \mathbf{u}(\tilde{t})\| > \epsilon$，则存在一个时间区间 $[t_0, t^*]$，使得 $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_V^2 \to \epsilon$ 以双指数速率收敛。特别是，

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \le K e^{-b e^{\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}(t-t_0)}},$$

[1]其中 $K := e^{-\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}}$ 且 $b := \frac{1}{\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}}(-(\mu\gamma\lambda^{\gamma/2} - 1)\log \|\mathbf{v}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)\|_V^2)$。

注 4.5。 请注意，在 $I_h = P_m$的情况下，投影到指标为 $m < 1/h$ 的傅里叶模态上，显然 (2.21e) 和 (2.21d) 均成立（其中 $\alpha = 1$），因此本例满足该定理的假设。

证明。 令 $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$。将 (2.10) 与 (2.14) 相减，得到如下**系统**

$$\mathbf{w}_t + B(\mathbf{w},\mathbf{u}) + B(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \nu A\mathbf{w} = -\mu P_\sigma \mathcal{N}(I_h(\mathbf{w})) - \beta P_\sigma I_h(\mathbf{w}) \tag{4.9}$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0.$$

对 (4.9) 与 $A\mathbf{w}$ 取 H 内积，并应用 Lions-Magenes 引理，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 + (B(\mathbf{u},\mathbf{w}),A\mathbf{w}) + (B(\mathbf{w},\mathbf{u}),A\mathbf{w}) + (B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{w}) + \nu\|A\mathbf{w}\|_H^2\\ &= -\mu(\mathcal{N}(\mathbf{w}),A\mathbf{w}) - \beta(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w}),\end{aligned}$$

利用 (2.9)，可将其改写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 - (B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) + \nu\|A\mathbf{w}\|_H^2 = -\mu(\mathcal{N}(\mathbf{w}),A\mathbf{w}) - \beta(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w})$$

不失一般性，设 $\|\mathbf{w}(0)\|_V > 1$。根据假设 (2.21e)，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 - (B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) + \nu\|A\mathbf{w}\|_H^2 \le -\beta(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w}).$$

按照 [4], 的分析，我们得到如下估计

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 + \frac{1}{2}\left[\beta - \frac{J^2}{\beta}\|A\mathbf{u}\|_H^2\right]\|\mathbf{w}\|_V^2 \le 0. \tag{4.10}$$

由于 $\beta > 3\lambda_1\nu JG$，我们可以继续沿用该分析，得到 $t \ge \tilde{t}$ 的**指数收敛**，其中 $\tilde{t}$ 是定理 2.3 中的 t_0。若 $\|\mathbf{w}(\tilde{t})\|_V^2 < \epsilon$，则结论成立。否则，由于 $t \ge \tilde{t}$ 的指数收敛，且 $\mathbf{w} \in C([0,T];V)$，存在一个区间 $[t_0,t^*]$，在该区间上 $\epsilon < \|\mathbf{w}(t)\|_H^2 <$最小值 $\left\{e^{-\frac{1}{\mu\gamma\lambda_1^{\gamma/2}}}, \left(\frac{\mu\lambda_1^{\gamma/2}}{\mu\lambda_1^{\gamma/2}+1}\right)^{1/\gamma}\right\}$

对于 $t \in [t_0,t^*]$。利用 $\|A\mathbf{u}\|_H^2 \le c\lambda_1^2(\nu)^2(1+G)^4$ 以及 $(I_h\mathbf{w}\ A\mathbf{w}) \ge 0$，可知对于几乎处处的 $t \in [t_0,t^*]$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 + \nu\|A\mathbf{w}\|_H^2\\ &\le -(B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) - \mu c(h)\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma}(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w}) - \beta(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w})\\ &\le -(B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) - \mu c(h)\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma}(I_h\mathbf{w},A\mathbf{w})\\ &= -(B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) + \mu c(h)[(1-\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2 - \|\mathbf{w}\|_V^2\\ &\quad + \|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma}(\mathbf{w} - I_h\mathbf{w},A\mathbf{w})]\\ &\le c\|\mathbf{w}\|_H^{1/2}\|A\mathbf{w}\|_H^{1/2}\|\mathbf{w}\|_V\|A\mathbf{u}\|_H\\ &\quad + \mu c(h)(1-\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2\\ &\quad + \mu c(h)\sqrt{c_0}h\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma}\|\mathbf{w}\|_V\|A\mathbf{w}\|_H - \mu c(h)\|\mathbf{w}\|_V^2\\ &\le c\lambda_1\|A\mathbf{w}\|_H\|\mathbf{w}\|_V\|A\mathbf{u}\|_H\\ &\quad + \mu c(h)(1-\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2\\ &\quad + \mu c(h)\sqrt{c_0}h\|\mathbf{w}\|_V^{1-\gamma}\|A\mathbf{w}\|_H - \mu c(h)\|\mathbf{w}\|_V^2\\ &\le \frac{c\lambda_1^2}{2\nu}\|\mathbf{w}\|_V^2\|A\mathbf{u}\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|A\mathbf{w}\|_H^2\\ &\quad + \mu c(h)(1-\|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2 + \mu c(h)\sqrt{c_0}h\|\mathbf{w}\|_V^{1-\gamma}\|A\mathbf{w}\|_H\\ &\quad - \mu c(h)\|\mathbf{w}\|_V^2,\end{aligned}$$

其中 $c(h) = (\sqrt{c_0}h + \lambda_1^{-1/2})^{-\gamma}$。由于 $h < 1$，可得 $c(h) \geq (\sqrt{c_0} + \lambda_1^{-1/2})^{-\gamma} := \eta$。还需注意，此常数可由一个与 h无关的常数从上方界定，具体而言， $c(h) \leq (\lambda^{-1/2})^{-\gamma} = \lambda_1^{\gamma/2}$。因此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 + \frac{\nu}{2}\|A\mathbf{w}\|_H^2 + \left[\mu\eta - \frac{c\lambda_1^2}{2\nu}\|A\mathbf{u}\|_H^2\right]\|\mathbf{w}\|_V^2$$
$$\leq \mu\eta(1 - \|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2 + \frac{\mu\sqrt{c_0}h}{\lambda_1^{(1-2\gamma)/2}}\|A\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma}.$$

由于根据定理 2.3，对所有 $t \in [t_0, T]$ 均有 $\|A\mathbf{u}(t)\|_H^2 \leq c\lambda_1^2(\nu)^2(1+G)^4$，因此条件 (4.7) 蕴含 $\mu\eta - \frac{c\lambda_1^2}{2\nu}\|A\mathbf{u}\|_H^2 \geq 0$。其次，利用引理 2.7，定理 4.1 中的同样论证表明， h 足够小，从而对于我们给定的容差 $\epsilon > 0$，有 $\left(\frac{\nu}{2}\|A\mathbf{w}\|_H^2 - \frac{\mu\sqrt{c_0}h}{\lambda_1^{(1-2\gamma)/2}}\|A\mathbf{w}\|_H^{2-\gamma}\right) \geq -\epsilon/2$。因此，我们得到不等式

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 \leq 2\mu\lambda_1^{\gamma/2}(1 - \|\mathbf{w}\|_V^{-\gamma})\|\mathbf{w}\|_V^2 + \epsilon. \tag{4.11}$$

此外，我们注意到右侧第一项为负，并利用以下事实：对于 $y \in (0, 1]$，有 $1 - y^{-\gamma} \leq \log(y^\gamma)$，可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 &\leq 2\mu\lambda^{\gamma/2}(\log\|\mathbf{w}\|_V^\gamma)\|\mathbf{w}\|_V^2 + \epsilon \\ &= \gamma\mu\lambda^{\gamma/2}(\log\|\mathbf{w}\|_V^2)\|\mathbf{w}\|_V^2 + \epsilon.\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此，我们得到两个与定理 4.1 中类似的不等式。我们再次先分析 (4.11)，直接得到在有限时间内收敛到 ϵ。根据初始假设，我们特别注意到，对于所有 $t \in [t_0, t^*]$， $\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 > \epsilon$，因此对于几乎处处的 $t \in [t_0, t^*]$,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 \leq 2(\mu\lambda_1^{\gamma/2} + 1)\|\mathbf{w}\|_V^2 - 2\mu\lambda_1^{\gamma/2}\|\mathbf{w}\|_V^{2-\gamma}.$$

采用与定理 4.1 相同的方法，我们得到

$$\|\mathbf{w}(t^*)\|_V^\gamma \leq \frac{\mu\lambda_1^{\gamma/2}}{\mu\lambda_1^{\gamma/2} + 1} - \left(\frac{\mu\lambda_1^{\gamma/2}}{\mu\lambda_1^{\gamma/2} + 1} - \|\mathbf{w}(t_0)\|_V^\gamma\right)e^{\gamma(\mu\lambda_1^{\gamma/2}+1)(t^*-t_0)},$$

并再次注意到，当 $t^* \to \infty$ 时，该不等式右侧趋近于 $-\infty$。注意， t^* 是固定选取的，但由于我们已证明在此时间区间内， $\|\mathbf{w}(t)\|_V$ 随时间衰减，因此我们可以将 t^* 延长至 $\|\mathbf{w}\|_V^2 = \epsilon$。

如定理 4.1 所述，我们注意到，利用不等式 (4.12) 可以更好地刻画衰减率本身。由于对于所有 $t \in [t_0, t^*]$ 都有 $\|\mathbf{w}\|_V^2 > \epsilon$，因此对于几乎处处的 $t \in [t_0, t^*]$,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 \leq (\gamma\mu\lambda^{\gamma/2}(\log\|\mathbf{w}\|_V^2) + 1)\|\mathbf{w}\|_V^2.$$

按照定理 4.1 证明中的类似步骤，我们得到

$$\log\|\mathbf{w}(t^*)\|_V^2 \leq -\frac{1}{\mu\eta\gamma\lambda^{\gamma/2}}\left(1 + e^{\log(-(\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}-1)\log\|\mathbf{w}(t_0)\|_V^2) + \mu\gamma\lambda^{\gamma/2}(t^*-t_0)}\right)$$
$$\|\mathbf{w}(t^*)\|_V^2 \leq Ke^{-be^{\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}(t^*-t_0)}},$$

[1]其中 $K := e^{-\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}}$ 且 $b := \frac{1}{\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}}(-(\mu\gamma\lambda^{\gamma/2}-1)\log\|\mathbf{w}(t_0)\|_V^2)$。由于这个不等式表明，$\|\mathbf{w}\|_V^2$ 至少以双指数速度单调衰减，我们再次指出，可以将 t^* 延伸至 $\|\mathbf{w}(t^*)\|_V^2 = \epsilon$。

此外，请注意，基于对插值算子的这些假设，我们可以直接得到 L^2 的双指数收敛和有限时间内的收敛：根据庞加莱不等式，$\|\mathbf{w}\|_H^2$ 收敛到 ϵ/λ_1。

我们再次指出，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|_V^2 - (B(\mathbf{w},\mathbf{w}),A\mathbf{u}) + \nu\|A\mathbf{w}\|_H^2 \\
&= -\mu\left(\mathcal{N}(I_h(\mathbf{w})),A\mathbf{w}\right) \\
&= -\mu\left(|I_h\mathbf{w}|^{-\gamma}I_h(\mathbf{w}),A\mathbf{w}\right) - \mu\left(I_h(\mathbf{w}),A\mathbf{w}\right), \\
&\leq -\mu\left(I_h(\mathbf{w}),A\mathbf{w}\right),
\end{aligned}$$

利用假设 $(I_h(\mathbf{w})\ A\mathbf{w}) \geq 0$。根据我们对 μ 和 h 的选择，由定理 2.6 可知，指数收敛仍然成立。□

注 4.6。除了考虑始终采用非线性推送连续数据同化算法外，还可以考虑这样一种情形：初始时观测较少的数据点，并采用线性 nudging CDA 算法，直至某个可计算的时间 T（见附录 7.3）；在该时刻，对于 H 范数或 V 范数，$\|\mathbf{w}\| < 1$（精确上界即上文定理 4.1 和 4.4 的假设中给出的上界）。此时，非线性项可通过令 $\beta = 0$ 并将 $\mathcal{N}$ 重新定义为

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\phi}) := \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \boldsymbol{\phi}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^{-\gamma}, & \text{if} \quad 0 < \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} < 1, \\ \boldsymbol{\phi}, & \text{if} \quad 1 \leq \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

随后，可以用线性 nudging CDA 算法系统的数据初始化非线性推送连续数据同化系统，从而“开启”非线性。在这种设置下，线性 nudging 数据同化中的 h 是固定的；然后，根据 ϵ的选择，可以确定是维持还是减小 h（或细化插值所用的网格），以始终保证双指数收敛。换言之，所要求的收敛误差需要对插值算子的精度进行调节：误差越小，我们要求 h 越小，也就是说，插值算子需要越精确。例如，对于傅里叶截断，需要观测更多的波模态；对于体积插值，则需要了解覆盖整个区域的更小体积内解的平均值。线性 nudging CDA 算法及随后实施的非线性推送连续数据同化算法，也可以通过计算来实现；在线性 nudging CDA 算法与非线性推送连续数据同化算法（无论是否包含线性部分）之间切换所需的时间将在下文附录 7.3 中计算。

注释 4.7。对于 2 型插值函数，也可以进行类似的存在性和收敛性论证，此时 I_h 满足的界为

$$\|\boldsymbol{\phi} - I_h(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tfrac{1}{4}c_0^2h^4\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\Omega)}^2. \tag{4.13}$$

然而，这并没有太大启发性，也未必能扩大我们对插值算子的可能选择，因为超指数收敛的证明在很大程度上依赖于对 I_h 所作的其他假设。值得注意的是，在定理 4.1 中，超指数收敛的证明完全依赖于界 (2.21c)、(2.21d)，

而在定理 4.4 中，超指数收敛的证明完全依赖于条件 (2.21e) 和 (2.20)。特别是，分别需要非线性权重能够在 H 范数和 V 范数下有界，而界 (2.22) 并不能保证这一点。

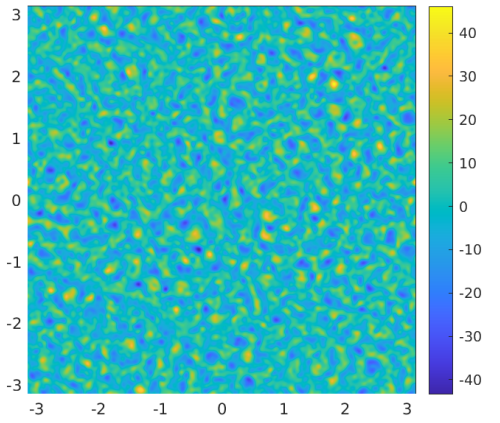
5. Computational Results

本节中，我们展示上述非线性松弛数据同化算法的一些数值模拟，研究对象是具有周期边界条件、并受到跨越宽广尺度范围的外力作用的二维不可压缩纳维-斯托克斯方程。特别地，我们证明，收敛速率随时间呈超指数级，直到误差变得很小（$\|\psi-\psi_{\mathrm{DA}}\|_{L^2}\approx 5\times 10^{-12}$在我们的试验中如此，见下文的符号说明）；此时，收敛仅为指数级，正如注 4.2 和附录 7.1 中所述。结果见（5.2a）。

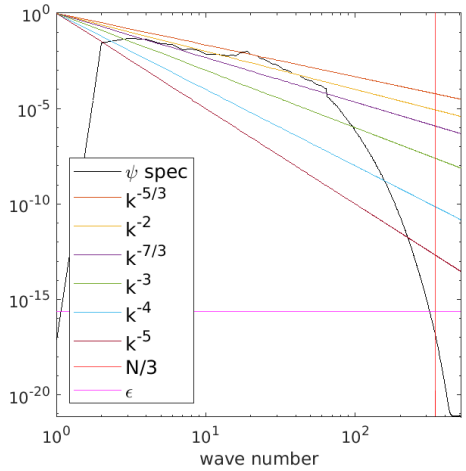
所有数值模拟均在流函数层面采用伪谱方法，通过我们自行编写的 Matlab 代码完成，并使用 Matlab 2020b 版运行。零均值流函数 ψ 和 ψ_{DA} 由 $\nabla^{\perp}\psi=\mathbf{u}$ 和 $\nabla^{\perp}\psi_{\mathrm{DA}}=\mathbf{v}$确定。傅里叶变换使用 Matlab 的 fftn 工具计算。线性黏性项采用积分因子法欧拉算法隐式处理，例如参见 [60]。对于插值算子 I_h，我们采用投影到低阶傅里叶模态上的方法。时间步长统一取为 $\Delta t=3.1250\times 10^{-4}$，足以满足对流 CFL 条件。非线性项采用显式处理（遵循 2/3 去混叠规则），并使用 Basdevant 公式（例如参见 [7, 34]）。周期区域为 $[-\pi,\pi)^2$，采用 1024^2 个网格点构成的均匀网格。用于“真实”模拟的初始数据 $\mathbf{u}_0$ 通过从零初始数据开始运行模拟生成；持续运行直至能量和涡量平方积分看起来达到近似统计稳态（凭视觉判断），这一状态在 $t\approx 240$时出现。初始数据的能谱 ψ_0及其对应的涡量（$\triangle\psi_0$）见图 5.1。

关于外力，鉴于注 4.2，我们希望使用一个与时间无关、且在高波数模态注入能量的外力，以便更清楚地观察非线性松弛数据同化项的作用（进一步的理由见 7.1）。因此，我们为波数介于 16 和 64 之间的外力的每个傅里叶系数的实部和虚部选取正态分布随机值，从而确定外力；具体而言，集合为 $\{\mathbf{k}=(k_1,k_2)|\,16^2\le k_1^2+k_2^2\le 64^2\}$（实际上，只为一半的波模态赋了值，其余则根据实值条件$\mathbf{f}_{-\mathbf{k}}=\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$计算得出）。为确保一致性和可重复性，Matlab 的随机数生成器使用 rng(0) 初始化。图 5.1 展示了外力的旋度及其能谱。

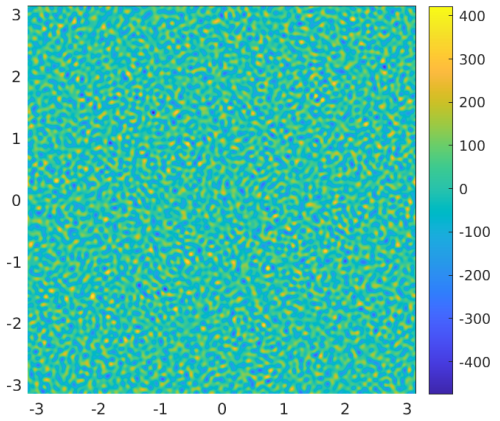
我们的参数选择如下：格拉晓夫数为 $G=250{,}000$，黏度为 $\nu=0.008$，并且 h 的取值使得能够观测到波数小于或等于 32 的波模态；也就是说，观测到了波数为 $\left\{\mathbf{k}=(k_1,k_2)|\,0<k_1^2+k_2^2\le 32^2\right\}$ 的波模态。对于非线性推送数据同化参数，我们取 $\gamma=0.1$ 和 $\mu=\beta=2$。这些参数范围并未经过精细调节以呈现任何特殊行为，唯一的考虑是避免不稳定性（例如，μ 过大时会出现不稳定性）。在我们自己的测试中（此处未报告数据），我们发现这些参数值的适度变化并未导致结果出现显著的定性变化，这表明结果具有定性稳健性。



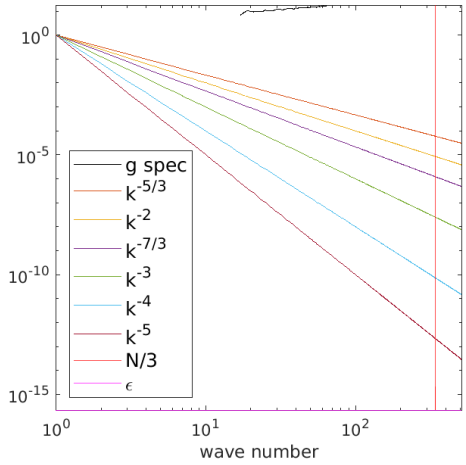
(A) 初始速度的旋度



(B) 初始 ψ的谱

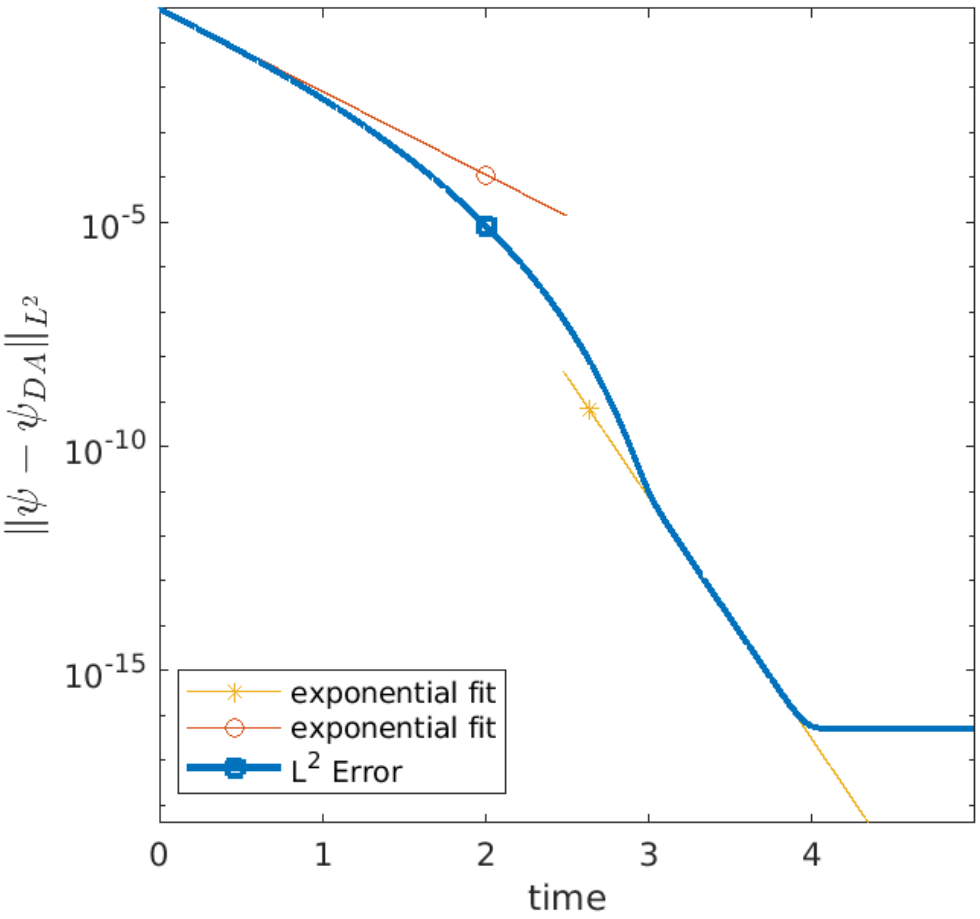


(C) 外力旋度

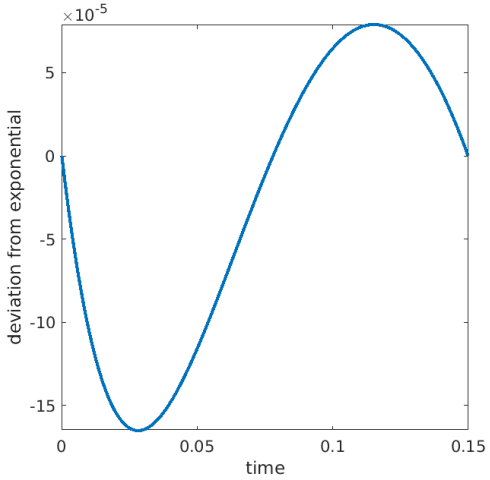


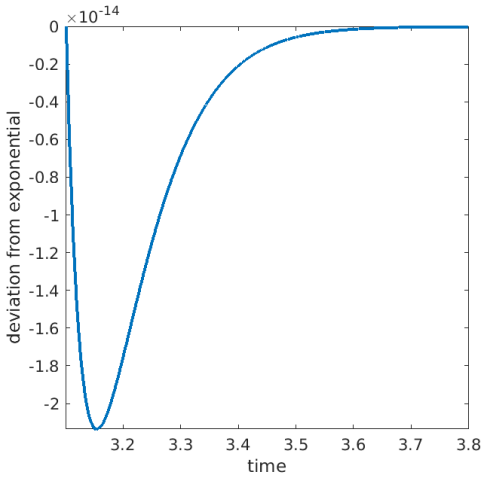
(D) 外力旋度的谱

FIGURE 5.1. 初始数据和外力。



(A) （对数-线性图）蓝色曲线： L^2 解的误差。红线：截至时间$t \approx 0.15$的指数拟合。橙线：针对$3.1 \lesssim t \lesssim 3.8$的指数拟合。





(B) （线性-线性图）误差减去（红线） (C) （线性-线性图）误差减去（橙色指数拟合线）指数拟合。

FIGURE 5.2. （A）： L^2 同化解与真实解之间的误差。（B）和（C）：与指数拟合的偏差。

尤其是，这些图形印证了我们的分析：如图 5.2 所示，由于达到 ϵ-障碍，超指数收敛失效。具体而言，在图 5.2a 中，收敛在早期时间看似呈指数收敛，随后变为超指数收敛，最终在较晚时间又恢复为仅仅指数收敛。观察到与指数拟合的偏差相当小：早期时间为 1.7×10^{-4}（见图 5.2b），较晚时间为 2.2×10^{-14}。在这两个时间段之间，观察到了超指数收敛（见图 5.2a）。

6. Conclusion

本文在与线性松弛数据同化系统相同的插值算子假设下，证明了非线性推送数据同化系统的解的存在性。在对观测测量的插值算子施加更严格假设的条件下，证明了解的唯一性。对于插值算子的不同假设，我们证明，任何相应的非线性推送数据同化解都会以至少双指数速率在有限时间内收敛到二维不可压纳维–斯托克斯方程的真实解，直至达到给定误差。特别地，非线性 nudging 系统的任何解，即使在唯一性可能不成立的情形下，也将收敛到真实解。这些结果为 [55, 61], 和本文数值模拟中所见的计算结果提供了理论基础。

7. 附录

7.1. 关于 ϵ-屏障的启发式论证。 我们在纳维-斯托克斯情形 (2.10) 下分析 (1.3a)，即 $\mathcal{F}(\mathbf{v}) = -B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - \nu A\mathbf{v} + \mathbf{f}$，其中 $I_h = P_m$，即投影到指标为 $m < 1/h$ 的低阶傅里叶模态上。这得到方程

$$\mathbf{v}_t + \nu A\mathbf{v} = B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - \mu\|P_m(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}P_m(\mathbf{v}-\mathbf{u}) - \beta P_m(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \tag{7.1}$$

令 $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$。从参考系统中减去 (7.1)，得到

$$\mathbf{w}_t + \nu A\mathbf{w} = B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}P_m\mathbf{w} - \beta P_m\mathbf{w}. \tag{7.2}$$

与$\mathbf{w}$ 取（形式上的）内积并化简，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|A^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad= \langle B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle - \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}\|P_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta\|P_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{7.3}$$

记 $Q_m := I - P_m$，并注意到 $\|\mathbf{w}\|^2_{L^2} = \|P_m\mathbf{w}\|^2_{L^2} + \|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2}$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|A^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle + \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

重新整理后，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|P_mA^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|A^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+ \beta\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle + \mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2(\Omega)}\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+ \beta\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\nu}{2}\|Q_mA^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{7.4}$$

我们将部分耗散保留在左端，以吸收界定$B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u})$的项。项 $\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|Q_m\mathbf{w}\|^{2-\gamma}_{L^2(\Omega)}$ 阻碍了$\mathbf{v}$ 向参考解$\mathbf{u}$的指数收敛，因此我们希望最后这三项总体为负。展开右端最后三项可得

$$\sum_{|\mathbf{k}|=m+1}^{\infty} (\mu\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2} + \beta - \frac{\nu}{2}|\mathbf{k}|^2)|\hat{\mathbf{w}}_\mathbf{k}|^2 \le 0. \tag{7.5}$$

无论 m 取多大（也就是说， h 取多小；由于我们通常取$m \sim L/h^2$，其中 L 是特征长度尺度），当 $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$时， $\|P_m\mathbf{w}\|^{-\gamma}_{L^2} \to \infty$，这表明存在某个时刻，误差会变得足够小，以至于这一项非但无助于收敛速率，反而会对其造成不利影响。此外，从 (7.4) 可以看出， β 取值越大（例如，为了提高小尺度的收敛速率），小尺度（以 $\|Q_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}$ 衡量）的不稳定性就越强。这似乎正是超指数收敛率最终遭到破坏的原因，我们的分析和数值模拟都显示了这一点。我们将此称为“溢出效应”；也就是说，对大尺度的控制增强会导致小尺度的不稳定性加剧。对于纳维–斯托克斯方程，能量向小尺度的溢出受到黏度的控制；具体而言，当 ν足够大时，小尺度误差会受到足够强的阻尼，从而抵消溢出效应。

值得注意的是，在纳维-斯托克斯情形下，尽管存在溢出效应，指数收敛仍然成立。将 (7.3) 写成如下形式即可看出：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|A^{1/2}\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle B(\mathbf{v},\mathbf{v}) - B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle - (\beta+\mu)\|P_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu(\|P_m\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|P_m\mathbf{w}\|^{2-\gamma}_{L^2(\Omega)});\end{aligned} \tag{7.6}$$

当 $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ 时，最后一项变为负值，因此，由于线性项中加入了 μ ，收敛仍保持指数收敛，且其收敛率优于标准线性松弛 CDA 算法。换言之，尽管收敛率不再是超指数的，非线性松弛项也不会变得如此有害，以至于 $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ 时抵消标准的指数收敛；事实上，它仍能提高指数收敛率。这进一步阐明了我们在注 4.6 中的评论，即仅凭非线性松弛项就能维持指数收敛率。

7.2. 引理 2.7 的证明。

Proof. Let $\delta := \min\left\{a/2, a^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\frac{\epsilon}{\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma}}}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right\}$. Note that $f(x)$ has two critical points at $x = 0$ and $x = \left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{\gamma}$. We further claim that $f(x_0)$ is the global minimum, since $f(0) = 0$,

临界点位于 $x = 0$和$x = \left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{\gamma}$。我们进一步指出， $f(x_0)$ 是全局最小值，因为 $f(0) = 0$,

$$f(x_0) = a\left(\left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^2 - \delta\left(\left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{2-\gamma}$$

$$= a^{-\frac{2-\gamma}{\gamma}}\delta^{\frac{2}{\gamma}}\left(\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}}\right) \leq 0,$$

$f'(x) \geq 0$对所有 $x \geq x_0$均成立，而 $f'(x) \leq 0$对 $x \leq x_0$成立。事实上， $f'(x) \geq 0$对所有 $x \geq x_0$ 均成立，因为

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 2ax - (2-\gamma)\delta x_0^{1-\gamma} \\ &= 2ax - (2-\gamma)\delta\left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= 2a\left(x - \left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) \\ &= 2a(x-x_0) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

并且对所有 $x \leq x_0$， $f'(x) \leq 0$，因为

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 2ax_0 - (2-\gamma)\delta x^{1-\gamma} \\ &= 2a\left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - (2-\gamma)\delta x^{1-\gamma} \\ &= (2-\gamma)\delta(\left(\frac{(2-\gamma)\delta}{2a}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - x^{1-\gamma}) \\ &= (2-\gamma)\delta(x_0^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因此，对所有 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，有 $f(x) \geq f(x_0)$。于是，记

$$b := \left(\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\right),$$

由我们对 δ 的选择可得

$$f(x) \geq f(x_0) \geq a^{-\frac{2-\gamma}{\gamma}}\left(a^{\frac{2-\gamma}{2}}\left(\frac{\epsilon}{b}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right)^{\frac{2}{\gamma}}(-b) = -\epsilon.$$

□

7.3. 计算算法中非线性松弛项提升收敛速率的显式时间。注意，可以计算出一个时间 t_a， 此时 $\mathbf{u}$ 位于吸收球内（例如参见 [44, 75, 78]），因而定理 2.3 适用，且 [4] 中的指数衰减成立。非线性松弛算法的衰减由 [4] 中线性 nudging 算法的指数衰减控制（参见定理 4.1、4.4 的证明开头），可显式写为（例如参见 [18]）

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_H^2 \leq \|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|_H^2 e^{1+r/2}e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)},$$

其中 $\frac{1}{\nu\lambda_1} < T < \infty$ 和

$$\begin{aligned} r &= \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+T} \beta - \frac{2c^2}{\nu}\|\mathbf{u}(s)\|^2 ds \\ &\geq T\beta - \frac{2c^2}{\nu}\left(2(1+\lambda_1 T\nu)\nu G^2\right) > 0, \end{aligned}$$

且 c 是不等式 (2.6) 中的常数。

根据定理 4.1 的假设，我们需要 $\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\|_H < R_H$，其中$R_H = \min\left\{e^{-\frac{}{\beta\gamma\lambda_1^{\gamma/2}}}, \left(\frac{\beta\lambda_1^{\gamma/2}}{\beta\lambda_1^{\gamma/2}+1}\right)^{1/\gamma}\right\}$，因此我们需要选择 t_a，使得

$$\|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|_H^2 e^{1+r/2} e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)} < R_H^2.$$

利用定理 2.3 对 $\|\mathbf{u}(t_a)\|_H^2$ 进行估计，并利用 r 的界，我们转而求得一个时间 t_a，使得

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|_H^2 e^{1+r/2} e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)} \\
&\quad \le 2(2(\nu)^2 G^2 + \|\mathbf{v}(t_a)\|_H^2) e^{1+\beta T} e^{-\beta/2 - \frac{c^2}{\nu T}(2(1+\lambda_1 T\beta)\nu G^2)(t-t_a)} \\
&\quad < R_H^2.
\end{aligned}$$

因此，我们确定非线性松弛系统可以从任意时间t_0 开始初始化，使得

$$t_0 > t_a - \frac{\log\left\{\frac{R_H^2 e^{-1-\beta T}}{2(2(\nu)^2 G^2 + \|\mathbf{v}(t_a)\|_H^2)}\right\}}{\beta/2 - \frac{c^2}{T\nu}(2(1+\lambda_1\nu T)\nu G^2)}.$$

无需在固定时间 t_a 观测 $\|\mathbf{v}(t_a)\|_H$；相反，来自 [4] 的界

$$\|\mathbf{v}(t_a)\|_H^2 \le e^{-\nu\lambda_1 t_a}\|\mathbf{v}_0\|_H^2 + \frac{M}{\beta\nu\lambda_1}(1 - e^{-\nu\lambda t_a}) := \mathrm{RHS}_H,$$

其中 M 是一个常数，使得 $\|f + \beta P_\sigma I_h(\mathbf{w}))\|_H^2 < M$，可用于选择一个时间 t_0，使得

$$t_0 > t_a - \frac{\log\left\{\frac{R_H^2 e^{-1-\beta T}}{2(2(\nu)^2 G^2 + \mathrm{RHS}_H)}\right\}}{\beta/2 - \frac{c^2}{T\nu}(2(1+\lambda_1\nu T)\nu G^2)}.$$

对于定理 4.4 的设定，我们有如下界

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_V^2 \le \|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|^2 e^{\Gamma+1+r/2} e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)},$$

其中 $\lambda_1\nu \le T < \infty$,

$$r = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{J^2}{\beta}\|A\mathbf{u}\|_H^2\right) ds > \frac{5}{6} JG > 0,$$

and

$$\Gamma = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+T} \max\left\{\frac{1}{2}\left(\beta - \frac{J^2}{\beta}\|A\mathbf{u}\|_H^2\right), 0\right\} ds \ge r > 0,$$

其中 $J = 2c\log(2c^{3/2}) + 4c\log(1+G)$，且 c 是由 Brezis-Gallouet 不等式确定的、依赖于区域的常数。根据定理 4.4 的假设，我们需要 $\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\|_V < R_V$，其中 $R_V = \min\left\{e^{-\frac{}{\beta\gamma\lambda_1^{\gamma/2}}}, \left(\frac{\beta\lambda_1^{\gamma/2}}{\beta\lambda_1^{\gamma/2}+1}\right)^{1/\gamma}\right\}$，因此

我们需要选择 t_0 使得

$$\|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|_V^2 e^{\Gamma+1+r/2} e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)} < R_V^2.$$

再次利用定理 2.3 对 $\|\mathbf{u}(t_a)\|_V^2$ 进行估计，并利用 Γ 和 r的界，我们转而找到一个时间 t_a，使得

$$\|\mathbf{u}(t_a) - \mathbf{v}(t_a)\|_V^2 e^{\Gamma+1+r/2} e^{-\frac{r}{2T}(t-t_a)}$$

$$\leq 2(2\lambda_1(\nu)^2G^2 + \|\mathbf{v}(t_a)\|^2)e^{1+\beta T}e^{-\frac{5}{6}GJ(t-t_a)} < R_V^2$$

T那么，非线性 nudging 系统可以从任意满足以下条件的时间 t_0 开始初始化：

$$t_0 > t_a - \frac{6}{5GJ}\log\left\{\frac{R_V^2 e^{-(1+\beta T)}}{2(2\lambda_1(\nu)^2G^2 + \|\mathbf{v}(t_a)\|_V^2)}\right\}.$$

同样，无需在固定时间 t_a观测 $\|\mathbf{v}(t_a)\|_V$，因为根据[4]得到的界

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}(t_a)\|_V^2 \leq \mathrm{RHS}_V\\ &:= e^{\frac{54c^4}{(\nu)^3}\left(\frac{1}{\nu}\|\mathbf{v}_0\|_H^2+\frac{T}{\nu\beta}M\right)^2\left(\frac{1}{\nu}\|\mathbf{v}_0\|_V^2+\frac{M}{\beta\nu\lambda_1}\right)^2}\left(\|\mathbf{v}_0\|_V^2 + \frac{4T}{\nu}M\right)\end{aligned}$$

其中 M是满足 $\|f+\beta P_\sigma I_h(\mathbf{w})\|_H^2 < M$的同一个常数，可用于选择一个时间 t_0，使得

$$t_0 > t_a - \frac{6}{5GJ}\log\left\{\frac{R_V^2 e^{-(1+\beta T)}}{2\left(2\lambda_1(\nu)^2G^2 + \mathrm{RHS}_V\right)}\right\}.$$

Acknowledgments

作者谨此感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所和剑桥，在“湍流的数学方面：我们处于什么位置？”项目期间提供支持和热情款待，本文的相关研究即在该项目期间开展。本研究得到英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目资助，项目编号为 EP/R014604/1。E.C. 的研究部分得到美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划资助，项目编号为 1610400；另有部分研究得到太平洋数学科学研究所（PIMS）的支持。研究结果未必反映该研究所的观点。E.C. 感谢洛斯阿拉莫斯国家实验室 COSIM 小组的热情款待，本文的部分工作即在那里完成；并承认和尊重 Lekwungen 人民的传统领地，维多利亚大学坐落于此，也承认并尊重 Songhees、Esquimalt 和 WSANEC 人民与这片土地延续至今的历史联系。A.L. 的研究部分得到美国国家科学基金会拨款 CMMI-1953346 和 DMS-2206762 的支持。E.S.T. 的研究得以开展，得益于卡塔尔国家研究基金（卡塔尔基金会成员）提供的 NPRP 项目拨款 #S-0207-200290；同时，本研究基于阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）赞助研究办公室（OSR）根据资助编号 OSR-2020-CRG9-4336 提供支持的工作。

References

[1] M. Akbas 和 A. C¸ibik. 双扩散自然对流的连续数据同化。*arXiv: 2008.02224*, 2020。[2] D. A. Albanez、H. J. Nussenzveig Lopes 和 E. S. Titi. 三维纳维–斯托克斯模型的连续数据同化。《渐近分析》，97(1-2):139–164，2016。[3] M. U. Altaf、E. S. Titi、O. M. Knio、L. Zhao、M. F. McCabe 和 I. Hoteit. 使用连续数据同化对二维 Benard 对流方程进行降尺度。《计算地球科学》，21(3):393–410，2017。[4] A. Azouani、E. Olson 和 E. S. Titi. 使用一般插值观测量进行连续数据同化。《非线性科学杂志》，24(2):277–304，2014。[5] A. Azouani 和 E. S. Titi. 通过有限确定参数对非线性耗散系统进行反馈控制——反应扩散范式。演化方程与控制理论，3(4):579–594，2014。

[6] A. Balakrishna 和 A. Biswas. 三维 Boussinesq 系统的确定映射、数据同化及可观测正则性判据。《应用数学与优化》，86，2022。[7] C. Basdevant. 均匀三维湍流直接数值模拟的技术改进。《计算物理学杂志》，50(2):209–214，1983。[8] H. Bessaih、V. Ginting 和 B. McCaskill. 多孔介质位移的连续数据同化。《数值数学》，151:927–962，2022。[9] H. Bessaih、E. Olson 和 E. S. Titi. 使用随机含噪数据的连续数据同化。非线性，28(3):729–753，2015。[10] A. Biswas、Z. Bradshaw 和 M. S. Jolly. 使用局部可观测量对纳维–斯托克斯方程进行数据同化。*SIAM* 应用动力系统杂志，20(4):2174–2203，2021。[11] A. Biswas、C. Foias、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi. 降尺度数据同化算法及其在纳维–斯托克斯方程统计解中的应用。载于亨利·庞加莱研究所年刊 ´*C*辑，非线性分析 ´，第295–326页。Elsevier，2019。[12] A. Biswas、J. Hudson、A. Larios 和 Y. Pei. 使用速度场和磁场的一个分量对二维磁流体动力学方程进行连续数据同化。《渐近分析》，108(1-2):1–43，2018。[13] A. Biswas 和 V. R. Martinez. 二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的高阶同步。《非线性分析：现实世界应用》，35:132–157，2017。[14] A. Biswas 和 R. Price. 三维纳维–斯托克斯方程的连续数据同化。《*SIAM*数学分析杂志》，53(6):6697–6723，2021。[15] S. Brenner 和 L. R. Scott. 有限元方法的数学理论。《应用数学丛书》。Springer，2008。[16] C. Cao、I. G. Kevrekidis 和 E. S. Titi. 纳维–斯托克斯方程稳态稳定化的数值判据。印第安纳大学数学杂志，50(特刊):37–96，2001。谨以此文献给 Ciprian Foias 和 Roger Temam 教授（美国印第安纳州布卢明顿，2000年）。[17] Y. Cao、A. Giorgini、M. Jolly 和 A. Pakzad. 三维Ladyzhenskaya模型的连续数据同化：分析与计算。《非线性分析：现实世界应用》，68，2022。[18] E. Carlson、J. Hudson 和 A. Larios. 通过连续数据同化恢复二维纳维–斯托克斯方程的参数。*SIAM*科学计算杂志，42(1):A250–A270，2020。[19] E. Carlson、J. Hudson、A. Larios、V. R. Martinez、E. Ng 和 J. Whitehead. 利用部分观测动态学习混沌系统的参数。《离散与连续动力系统*A*辑》，42(8):3809–3839，2022。[20] E. Carlson 和 A. Larios. 二维纳维–斯托克斯方程的敏感性分析及其在连续数据同化中的应用。《非线性科学杂志》，31(5):第84号论文，30页，2021。[21] E. Carlson、L. Van Roekel、M. Petersen、H. C. Godinez 和 A. Larios. 在 MPAS-O 中实现数据同化算法，以改进中尺度模拟中的涡旋效应。2023。（已投稿）。[22] E. Celik、E. Olson 和 E. S. Titi. 离散时间降尺度数据同化算法中插值观测量的谱滤波。《*SIAM*应用动力系统杂志》，18(2):1118–1142，2019。

[23] N. Chen、Y. Li 和 E. Lunasin。湍流 Sabra 壳模型的高效连续数据同化算法。《Chaos》，31(10)：103123，2021。[24]Y. T. Chow、W. T. Leung 和 A. Pakzad。两相流的连续数据同化：分析与数值模拟。《计算物理学杂志》，466：111395，2022。[25] P. Clark Di Leoni、A. Mazzino 和 L. Biferale。利用物理信息数据同化和谱逼近推断流动参数与湍流构型。《Phys. Rev. Fluids》，3(10)：104604，2018。[26] B. Cockburn、D. Jones 和 E. S. Titi。估计非线性耗散系统的渐近自由度数量。《Math. Comput.》，66(219)：1073–1087，1997。[27] P. Constantin 和 C. Foias。纳维–斯托克斯方程。《芝加哥数学讲义》。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1988。[28] J. B. Conway。泛函分析教程，《数学研究生教材》第 96 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1990。[29] R. Dascaliuc、C. Foias 和 M. S. J olly。二维湍流的涡量平方积分、耗散率平方积分及不变测度估计。《J. Differential Equations》，248(4)：792–819，2010。[30] S. Desamsetti、H. Dasari、S. Langodan、O. Knio、I. Hoteit 和 E. S. Titi。利用连续数据同化对大气环流模式进行高效动力降尺度。《Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society》，2019。[31] S. Desamsetti、H. P. Dasari、S. Langodan、Y. Viswanadhapalli、R. Attada、T. M. Luong、O. Knio、E. S. Titi 和 I. Hoteit。利用区域气候建模和连续数据同化增强印度夏季风降雨模拟。《Frontiers in Climate》，4，2022。[32]A. E. Diegel 和 L. G. Rebholz。C^0 内罚方法中 Cahn–Hilliard 方程的连续数据同化与长时间精度。《Appl. Math. Comput.》，424：论文编号 127042，22 页，2022。[33] Y. J. Du 和 M.-C. Shiue。基于非线性逼近技术的 Lorenz 63 系统连续数据同化算法的分析与计算。《J. Comput. Appl. Math.》，386：113246，2021。[34] P. Emami 和 J. C. Bowman。随机强迫下二维不可压湍流的全局吸引子。《J. Differential Equations》，264(6)：4036–4066，2018。[35] L. C. Evans。偏微分方程，《数学研究生教程》第 19 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，2010。[36] A. Farhat、N. E. Glatt-Holtz、V. R. Martinez、S. A. McQuarrie 和 J. P. Whitehead。根据热测量对大 Prandtl 数 Rayleigh–B´énard 对流进行数据同化。《SIAM J. Appl. Dyn. Syst.》，19(1)：510–540，2020。[37] A. Farhat、H. Johnston、M. Jolly 和 E. S. Titi。通过涡量或局部环流测量同化近湍流 Rayleigh–B´énard 流：一项计算研究。《Journal of Scientific Computing》，77(3)：1519–1533，2018 年 12 月。[38] A. Farhat、M. S. Jolly 和 E. S. Titi。仅通过速度测量对二维 B´énard 对流进行连续数据同化。《Phys. D》，303：59–66，2015。[39] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。利用速度场的一个分量的测量，对二维纳维–斯托克斯方程进行简化连续数据同化。《J. Math. Fluid Mech.》，18(1)：1–23，2016。[40] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅采用温度测量的多孔介质中三维 B´énard 对流数据同化算法。《J. Math.

Anal. Appl.，438(1)：492–506，2016。[41] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅采用温度测量的数据同化 Charney 猜想：三维行星地转模型范式。《气候与天气预报数学》，2(1)，2016。[42] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。仅通过水平速度测量对二维 B´énard 对流系统进行连续数据同化。《J. Nonlinear Sci.》，第 1–23 页，2017。[43] A. Farhat、E. Lunasin 和 E. S. Titi。数据同化算法：三维 Leray-α 湍流模型范式。《源于物理与几何的偏微分方程》，450：253–273，2019。[44] C. Foias、O. Manley、R. Rosa 和 R. Temam。《纳维–斯托克斯方程与湍流》，《数学及其应用百科全书》第 83 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2001。[45] C. Foias、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。二维纳维–斯托克斯方程的解及其统计量的离散数据同化方案。*SIAM*数值分析杂志，15(4)：2109–2142，2016。[46]K. Foyash、M. S. Dzholli、R. Kravchenko 和 `E. S. Titi。构造二维纳维–斯托克斯方程系统定义形式的统一方法：一般插值算子的情形。《Uspekhi Mat. Nauk》，69(2(416))：177–200，2014。[47]T. Franz、A. Larios 和 C. Victor。哔声、扫掠与爬行：通过数据同化实现二维纳维–斯托克斯方程动态观测器模式的收敛速率。《计算方法与应用力学和工程》，392：论文编号 114673，19 页，2022。[48] B. Garc´ía-Archilla 和 J. Novo。纳维–斯托克斯方程全离散混合有限元数据同化方案的误差分析。《Adv. Comput. Math.》，46(4)：论文编号 61，33 页，2020。[49] B. Garc´ía-Archilla、J. Novo 和 E. S. Titi。应用于纳维–斯托克斯方程降尺度数据同化算法的有限元方法一致时间误差估计。《SIAM数值分析杂志》，58(1)：410–429，2020。[50] M. Gardner、A. Larios、L. G. Rebholz、D. Vargun 和 C. Zerfas。连续数据同化应用于二维纳维–斯托克斯方程的速度-涡量表述。《Electron. Res. Arch.》，29(3)：2223–2247，2021。[51] M. Germano。流体动力学中的混合与松弛：一些简单观察。《流体动力学研究》，49(5)：055503，2017 年 8 月。[52] M. Gesho、E. Olson 和 E. S. Titi。二维纳维–斯托克斯方程数据同化算法的计算研究。《Commun. Comput. Phys.》，19(4)：1094–1110，2016。[53] N. Glatt-Holtz、I. Kukavica、V. Vicol 和 M. Ziane。三维随机原始方程不变测度的存在性与正则性。《J. Math. Phys.》，55(5)：051504，34 页，2014。[54] K. Hayden、E. Olson 和 E. S. Titi。Lorenz 系统和二维纳维–斯托克斯方程中的离散数据同化。《Phys. D》，240(18)：1416–1425，2011。[55] J. Hudson 和 M. Jolly。二维磁流体动力学方程数据同化的数值效能研究。《J. Comput. Dyn.》，6(1)：131–145，2019。[56] H. A. Ibdah、C. F. Mondaini 和 E. S. Titi。数据同化算法的全离散数值格式：一致时间误差估计。《IMA 数值分析杂志》，40(4)：2584–2625，2020。[57] M. S. Jolly、V. R. Martinez、E. J. Olson 和 E. S. Titi。带有时间模糊测量的表面准地转方程连续数据同化。

中国数学年刊*B*辑, 40(5):721–764, 2019.[58] M. S. Jolly、V. R. Martinez 和 E. S. Titi. 亚临界表面准地转方程的数据同化算法. 非线性研究进展, 17(1):167– 192, 2017.[59] D. A. Jones 和 E. S. Titi. 纳维–斯托克斯方程决定模态、节点和体积元数量的上界. 印第安纳大学数学杂志, 42(3):875–887, 1993.[60] A.-K. Kassam 和 L. N. Trefethen. 刚性偏微分方程的四阶时间推进.*SIAM*科学计算杂志, 26(4):1214–1233, 2005.[61]A. Larios 和 Y. Pei. 非线性连续数据同化.（已提交）arXiv:1703.03546.[62] A. Larios 和 Y. Pei. 通过 Voigt正则化和可观测数据对二维纳维–斯托克斯方程进行近似连续数据同化. 演化方程与控制理论, 9(3):733–751, 2020.[63] A. Larios、L. G. Rebholz 和 C. Zerfas. 纳维–斯托克斯方程 IMEX-FEM 数据同化格式的全时间稳定性与精度. 计算方法与应用力学和工程, 345:1077–1093, 2019.[64] A. Larios 和 C. Victor. 对反应扩散方程采用移动数据点簇的连续数据同化：一项计算研究. 《计算物理通讯》, 29(4):1273–1298, 2021.[65] E. Lunasin 和 E. S. Titi. 分布式非线性耗散系统的有限决定参数反馈控制——一项计算研究. 演化方程与控制理论, 6(4):535–557, 2017.[66] P. A. Markowich、E. S. Titi 和 S. Trabelsi. 三维Brinkman–Forchheimer扩展Darcy模型的连续数据同化. 非线性, 29(4):1292–1328, 2016.[67] V. R. Martinez. 二维纳维–斯托克斯方程黏度参数恢复算法的收敛性分析. 非线性, 35(5):2241–2287, 2022.[68] V. R. Martinez. 根据二维纳维–斯托克斯方程的低模态观测重建未知驱动力. *arXiv*, 2022.[69] C. F. Mondaini 和 E. S. Titi. 后处理Galerkin方法应用于数据同化算法的一致时间误差估计. *SIAM*数值分析杂志, 56(1):78–110, 2018.[70] E. Olson 和 E. S. Titi. 二维湍流连续数据同化的决定模态. 统计物理学杂志, 113(5-6):799–840, 2003. 统计流体动力学进展（圣菲，NM，2002）.[71] E. Olson 和 E. S. Titi. 二维湍流中的决定模态与格拉晓夫数：一项数值案例研究. 理论与计算流体动力学, 22(5):327–339, 2008.[72] B. Pachev、J. P. Whitehead 和 S. A. McQuarrie. 在 Kuramoto–Sivashinsky方程中展示并发多参数学习. *SIAM*科学计算杂志, 44(5):A2974–A2990, 2022.[73] Y. Pei. 三维海洋原始方程的连续数据同化.纯粹与应用分析通讯, 18(2):643–661, 2019.[74] L. G. Rebholz 和 C. Zerfas. 通过代数松弛实现演化方程简单高效的连续数据同化. 《数值方法与偏微分方程》, 第1–25页, 2021.[75] J. C. Robinson. 无限维动力系统. 剑桥应用数学丛书. 剑桥大学出版社，剑桥, 2001. 耗散型抛物偏微分方程与全局吸引子理论导论。

[76] S. S. Rodrigues. 非自治半线性类抛物方程的半全局斜投影指数动力观测器. 《非线性科学杂志》, 31, 2021.[77]R. Temam. 纳维–斯托克斯方程与非线性泛函分析, 第66卷，收录于 *CBMS-NSF*应用数学区域会议系列. 工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，第二版，1995.[78]R. Temam. 纳维–斯托克斯方程：理论与数值分析. AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，2001. 理论与数值分析，1984年版重印.[79] E. S. Titi 和 S. Trabelsi. 多孔介质中三维 Brinkman–Forchheimer–B´enard 对流模型的整体适定性. *arXiv:* 偏微分方程分析, 2022.[80] X. M. Wang. 关于分布的梯度刻画的一个注记.《应用分析》, 51(1-4):35–40, 1993.[81] B. You. 大尺度海洋环流三维行星地转方程的离散数据同化算法. 《动力系统与微分方程杂志》, 2022.[82] B. You 和 Q. Xia. 二维 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes 系统的连续数据同化算法. 《应用数学与优化》, 85, 2022.[83] M. Zauner 、 V. Mons 、 O. Marquet 和 B. Leclaire. 基于松弛的方柱周围湍流数据同化 . 《流体力学杂志》, 937:A38, 2022.[84] C. Zerfas 、 L. G. Rebholz 、 M. Schneier 和 T. Iliescu. 流体流动的连续数据同化降阶模型. 计算方法与应用力学和工程, 357:112596, 18, 2019.

（Elizabeth Carlson） Department of Mathematics, University of Victoria, Victoria, BCV8P 5C2, Canada*Email address*, Elizabeth Carlson: ecarlson10@uvic.ca（Adam Larios） Department of Mathematics, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln,NE 68588-0130, USA*Email address*, Adam Larios: alarios@unl.edu（Edriss S. Titi） Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station,TX 77843, USA and Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge Cambridge CB3 0WA UK , , , Edriss S. Titi: titi@math.tamu.edu，以及 *Email address* edriss.titi@damtp.cam.ac.uk