arXiv:2304.01129v1 [math.AP] 3 Apr 2023

有界区域中玻尔兹曼方程的扩散极限

Zhimeng Ouyang 和 Lei Wu

Abstract. 近年来，有界区域内动理学方程流体力学极限的严格论证一直受到广泛研究。尽管漫反射边界情形已取得进展[23, 50, 25]，但更具挑战性的流入边界情形仍未解决，因为其中的主阶边界层效应不可忽略。

本文研究一般（凸或非凸）有界区域内具有流入边界条件的定常及演化玻尔兹曼方程，并证明其在 L^2 下的不可压缩纳维–斯托克斯–傅里叶（INSF）极限。

我们的方法依赖于核估计中 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 的一个新颖且出人意料的增益，其根源在于对精心选取的测试函数和守恒律进行的一项关键抵消。我们还引入带掠射集截断的边界层，并研究其 BV正则性估计，借助 Hardy 不等式控制余项方程的源项。

Contents

1. 引言1.1. 定常问题 1.2. 演化问题 2. 背景与 2
方法 2.1. 文献综述 2.2. 困难 2.3. 方法论—— 2
定常问题 2.4. 方法论——演化问题 4
6
6
7
8
m 10
3. 定常问题 3.1. 渐近分析 3.2. 余项方程 10
3.3. 能量估计 3.4. 核估计 3.5. L^∞估计 10
3.6. 余项估计 4. 演化问题 4.1. 渐近分析 15
4.2. 余项方程 4.3. 能量估计——累积型 21
4.4. 核估计——累积型 4.5. 能量估计—— 22
瞬时 4.6. 核估计——瞬时 4.7. L^∞估计 28
4.8. 余项估计 31
32
32
34
40
41
50
51
52
56

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35Q20；次要分类：76P05、82B40、82C40。*Key words and phrases.* 流体力学极限、非凸区域、守恒律。Z. OUYANG 获 NSF资助项目 DMS-2202824。L. WU 获 NSF资助项目 DMS-2104775。

附录 A. 线性化玻尔兹曼算子附录 B. 内积与范 57
数 附录 C. 符号与常数 参考文献 57
58
58

1. Introduction

非凸区域（或所谓的外部区域）中的流体力学极限在科学和工程问题中发挥着重要作用，例如飞机机翼或高层建筑周围的气体动力学、船舶或桥墩附近的水动力学等。然而，由于非凸区域中动理学方程固有的奇异性[54, 24], ，从动理学方程严格推导出流体系统迄今仍是一个悬而未决的问题。

本文将研究存在边界层修正时，一般（凸或非凸）光滑有界区域中定常和演化玻尔兹曼方程的渐近行为。鉴于问题的复杂性，为方便读者，我们将大部分符号放在附录中。

1.1. 定常问题。

我们考虑三维光滑有界区域 $\Omega \ni x = (x_1, x_2, x_3)$ 和速度区域 $\mathbb{R}^3 \ni v = (v_1, v_2, v_3)$ 中的定常玻尔兹曼方程。定常密度函数 $\mathfrak{F}(x, v)$ 满足

$$\begin{cases} v \cdot \nabla_x \mathfrak{F} = \varepsilon^{-1} Q[\mathfrak{F}, \mathfrak{F}] \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ \mathfrak{F}(x_0, v) = \mathfrak{F}_b(x_0, v) \quad \text{for} \quad x_0 \in \partial\Omega \quad \text{and} \quad v \cdot n < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $n(x_0)$ 是 $x_0 \in \partial\Omega$ 处的单位外法向量，而克努森数 $0 < \varepsilon \ll 1$ 表征粒子在两次碰撞之间可能行进的平均距离。

这里 Q 是硬球碰撞算子

$$Q[F, G] := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} q(\omega, |\mathfrak{u} - v|) \Big[F(\mathfrak{u}_*) G(v_*) - F(\mathfrak{u}) G(v) \Big] \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\mathfrak{u}, \tag{1.2}$$

其中 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 为单位向量， $\mathfrak{u}_* := \mathfrak{u} + \omega\big((v - \mathfrak{u}) \cdot \omega\big)$, $v_* := v - \omega\big((v - \mathfrak{u}) \cdot \omega\big)$, 硬球碰撞核 $q(\omega, |\mathfrak{u} - v|) := q_0 \left|\omega \cdot (v - \mathfrak{u})\right|$ ，其中正数 q_0为常数。

我们旨在研究当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\mathfrak{F}(x, v)$ 的渐近极限。

1.1.1. 设置与假设。

假设流入边界数据

$$\mathfrak{F}_b(x_0, v) := \mu(v) + \varepsilon \mu^{\frac{1}{2}}(v) \mathfrak{f}_b(x_0, v), \tag{1.3}$$

其中 μ 表示全局麦克斯韦分布

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|v|^2}{2}}, \tag{1.4}$$

且 $\mathfrak{f}_b(x_0, v)$ 是满足以下条件的小扰动

$$|\mathfrak{f}_b|_{W^{3,\infty} W^{1,\infty}_{\gamma_-, \varrho, \vartheta}} = o(1). \tag{1.5}$$

1.1.2. 边界附近的法向坐标图。

我们沿用 [71] 中的方法来定义几何量。

对于光滑流形 $\partial\Omega$，存在一个正交曲线坐标系（ι_1, ι_2） ，使得在任意 $x_0 \in \partial\Omega$ 处（至少在局部） ，坐标线与主方向重合。假设 $\partial\Omega$ 由 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\iota_1, \iota_2)$ 参数化。设向量长度为 $L_i = |\partial_{\iota_i} \mathbf{r}|$ ，单位向量为 $\varsigma_i = L_i^{-1} \partial_{\iota_i} \mathbf{r}$。

考虑相应的新坐标系（$\iota_1, \iota_2, \mathfrak{n}$） ，其中 $\mathfrak{n}$ 表示到边界曲面 $\partial\Omega$的法向距离，即

$$x = \mathbf{r} - \mathfrak{n} n. \tag{1.6}$$

对 $\mathfrak{v}$ 定义正交速度代换：$=(v_\eta, v_\varphi, v_\psi)$，即

$$-v\cdot n := v_\eta, \qquad -v\cdot \varsigma_1 := v_\varphi, \qquad -v\cdot \varsigma_2 := v_\psi. \tag{1.7}$$

最后，我们定义缩放变量 $\eta=\varepsilon^{-1}\mathfrak{n}$，这意味着 $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{n}}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \eta}$。记 $\mathfrak{x}:=(\eta,\iota_1,\iota_2)$。

1.1.3. 渐近展开。 我们寻求形式如下的 (1.1) 的解

$$\mathfrak{F}(x,v)=\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R=\mu+\mu^{\frac12}\Big(\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2\Big)+\mu^{\frac12}\Big(\varepsilon f_1^B\Big)+\varepsilon\mu^{\frac12}R, \tag{1.8}$$

其中内部解为

$$f(x,v):=\mu^{\frac12}(v)\Big(\varepsilon f_1(x,v)+\varepsilon^2 f_2(x,v)\Big), \tag{1.9}$$

边界层为

$$f^B(\mathfrak{x},\mathfrak{v}):=\mu^{\frac12}(\mathfrak{v})\Big(\varepsilon f_1^B(\mathfrak{x},\mathfrak{v})\Big). \tag{1.10}$$

这里 f和 f^B定义见第 3.1 节， $R(x,v)$ 是满足以下条件的余项

$$\begin{cases} v\cdot\nabla_x R+\varepsilon^{-1}\mathcal{L}[R]=S \ \text{ in } \ \Omega\times\mathbb{R}^3,\\ R(x_0,v)=h(x_0,v) \ \text{ for } \ v\cdot n<0 \ \text{ and } \ x_0\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 h 和 S 定义于（3.62）–（3.69）。

令 $\mathbf{P}[R]$ 为 R 在零空间 $\mathcal{N}$ 上的投影，该零空间 $\mathcal{L}$ 定义于（A.2）。于是我们将其分解为

$$R=\mathbf{P}[R]+(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]:=\mu^{\frac12}(v)\left(p(x)+v\cdot\mathbf{b}(x)+\frac{|v|^2-5}{2}c(x)\right)+(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]. \tag{1.12}$$

将工作空间记为

$$\begin{aligned}\|R\|_X :=\ &\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}+\|R\|_{L^6}+\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}\\ &+\varepsilon^{\frac12}\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon^{\frac12}|R|_{L^\infty_{\gamma,\varrho,\vartheta}}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

1.1.4. 主要结果。

定理 1.1 （定常问题）。 假设 Ω 是有界的 C^3 区域，且 (1.5) 成立。则存在$\varepsilon_0>0$使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，存在一个非负解 $\mathfrak{F}(x,v)$ 满足方程 (1.1)，且可表示为 (1.8)，并满足

$$\|R\|_X\lesssim o_T, \tag{1.14}$$

其中 X 范数定义于 (1.13)。在所有满足条件 (1.14)的解中，该解是唯一的。这进一步推出

$$\left\|\mu^{-\frac12}\mathfrak{F}-\mu^{\frac12}-\varepsilon\mu^{\frac12}\left(\rho_1+v\cdot u_1+\frac{|v|^2-3}{2}T_1\right)\right\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac32}, \tag{1.15}$$

其中 $\big(\rho_1(x)\ u_1(x)\ T_1(x)\big)$ 满足稳态 Navier–Stokes–Fourier 系统

$$\begin{cases} \nabla_x P_1=0,\\ u_1\cdot\nabla_x u_1-\gamma_1\Delta_x u_1+\nabla_x\mathfrak{p}_1=0,\\ \nabla_x\cdot u_1=0,\\ u_1\cdot\nabla_x T_1-\gamma_2\Delta_x T_1=0, \end{cases} \tag{1.16}$$

对于 $P_1:=\rho_1+T_1$，常数 $\gamma_1>0$ 和 $\gamma_2>0$。边界条件

$$\Big(\rho_1(x_0),u_1(x_0),T_1(x_0)\Big)=\Big(\rho^B(x_0),u^B(x_0),T^B(x_0)\Big) \tag{1.17}$$

由下式给出

$$\Phi_\infty(x_0,v)=\Phi_\infty(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v}):=\mu^{\frac{1}{2}}\bigg(\rho^B(\iota_1,\iota_2)+v\cdot u^B(\iota_1,\iota_2)+\frac{|v|^2-3}{2}T^B(\iota_1,\iota_2)\bigg)\in\mathcal{N},\tag{1.18}$$

由关于 $\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{v})$ 的米尔恩问题求得:

$$\begin{cases} v_\eta\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}+\mathcal{L}[\Phi]=0,\\ \Phi(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})=\mathfrak{f}_b(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\quad for\quad v_\eta>0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\Phi(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}=M_f,\\ \displaystyle\lim_{\eta\to\infty}\Phi(\eta,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})=\Phi_\infty(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v}). \end{cases}\tag{1.19}$$

这里，$M_f(\iota_1,\iota_2)$ 的选取满足 $\rho^B+T^B=$常数，且 $\int_{\partial\Omega}\big(u^B\cdot n\big)\mathrm{d}x=0$。

1.2. 演化问题。我们考虑三维光滑有界区域 $\Omega\ni x=(x_1,x_2,x_3)$ 和速度区域 $\mathbb{R}^3\ni v=(v_1,v_2,v_3)$ 中的演化玻尔兹曼方程，时间为 $t\in\mathbb{R}_+$。演化密度函数 $\mathfrak{F}(t,x,v)$ 满足

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t\mathfrak{F}+v\cdot\nabla_x\mathfrak{F}=\varepsilon^{-1}Q\left[\mathfrak{F},\mathfrak{F}\right]\quad\text{in}\quad\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^3,\\ \mathfrak{F}(0,x,v)=\mathfrak{F}_i(x,v)\quad\text{in}\quad\Omega\times\mathbb{R}^3,\\ \mathfrak{F}(t,x_0,v)=\mathfrak{F}_b(t,x_0,v)\quad\text{for}\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x_0\in\partial\Omega\quad\text{and}\quad v\cdot n(x_0)<0. \end{cases}\tag{1.20}$$

我们旨在研究当 $\varepsilon\to0$ 时 $\mathfrak{F}(t,x,v)$ 的渐近极限。

1.2.1. 问题设置与假设。设入流边界数据

$$\mathfrak{F}_b(t,x_0,v):=\mu(v)+\varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}(v)\mathfrak{f}_b(t,x_0,v),\tag{1.21}$$

其中 $\mathfrak{f}_b(t,x_0,v)$ 是满足以下条件的小扰动

$$\|\mathfrak{f}_b\|_{W^{1,\infty}W^{3,\infty}W^{1,\infty}_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}=o(1).\tag{1.22}$$

假设初始数据

$$\mathfrak{F}_i(x,v):=\mu(v)+\varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}(v)\mathfrak{f}_i(x,v)=\mu(v)+\sum_{k=1}^{4}\varepsilon^k\mu^{\frac{1}{2}}(v)\mathfrak{f}_i^{[k]}(x,v)\tag{1.23}$$

其中，对某个 $\big(\rho^I(x)\ u^I(x)\ T^I(x)\big)$，满足 $\rho^I+T^I=$常数、$\nabla_x\cdot u^I=0$和 $\nabla_x\times\big(u^I\cdot\nabla_xu^I-\gamma_1\Delta_xu^I\big)=\mathbf{0}$:

$$\mathfrak{f}_i^{[1]}(x,v):=\mu^{\frac{1}{2}}(v)\bigg(\rho^I(x)+v\cdot u^I(x)+\frac{|v|^2-3}{2}T^I(x)\bigg),\tag{1.24}$$

$$\mathfrak{f}_i^{[2]}(x,v):=\mathcal{L}^{-1}\Big[-v\cdot\nabla_x\mathfrak{f}_i^{[1]}+\Gamma\big[\mathfrak{f}_i^{[1]},\mathfrak{f}_i^{[1]}\big]\Big],\tag{1.25}$$

$$\mathfrak{f}_i^{[3]}(x,v):=\mathcal{L}^{-1}\Big[-v\cdot\nabla_x\overline{\mathfrak{f}_i}+2\Gamma\big[\mathfrak{f}_i^{[1]},\mathfrak{f}_i^{[2]}\big]\Big],\tag{1.26}$$

且 $\mathfrak{f}_i^{[4]}(x,v)$ 可以是任意函数。我们假设 $\mathfrak{f}_i(x,v)$ 是满足以下条件的扰动项

$$\|\mathfrak{f}_i\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\le\sum_{k=1}^{4}\Big\|\mathfrak{f}_i^{[k]}\Big\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}=o(1).\tag{1.27}$$

注记 1.1。 由 $\partial_t\mathfrak{F}$ 从（1.20）求解，我们对 $\mathfrak{f}_i$ 以及（1.27）的定义保证

$$\Big\|\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t\mathfrak{F}\big|_{t=0}\Big\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}=o(1)\varepsilon,\qquad\big\|\partial_tf_1\big|_{t=0}\big\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}=0,\tag{1.28}$$

这将在余项估计中发挥重要作用。事实上，我们的证明在一个稍弱的假设下仍然成立：对于 f_1, f_2 在（1.8）中引入

$$\left\|\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t\mathfrak{F}\big|_{t=0}-\partial_t f_1\big|_{t=0}-\varepsilon\partial_t f_2\big|_{t=0}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}=o(1)\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{1.29}$$

与[23], 这一要求非常严格，可确保余项 $\left\|\partial_t R\big|_{t=0}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\ \vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 的初始时刻导数。

此外，假设　设 $\mathfrak{f}_b$ 和 $\mathfrak{f}_i$ 在 $t=0, x_0\in\partial\Omega$ 和 $v\cdot n<0$处满足兼容条件:

$$\mathfrak{f}_b(0,x_0,v)=\mathfrak{f}_i(x_0,v)=0,\qquad \partial_t\mathfrak{f}_b(0,x_0,v)=0. \tag{1.30}$$

注1.2。兼容条件（1.30）保证在 $t=0$处不会出现边界层。

1.2.2. 渐近展开。 我们尝试将（1.20）的解设为如下形式

$$\mathfrak{F}(t,x,v)=\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}R=\mu+\mu^{\frac{1}{2}}\Big(\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2\Big)+\mu^{\frac{1}{2}}\Big(\varepsilon f_1^B\Big)+\varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}R, \tag{1.31}$$

其中，内部解为

$$f(t,x,v):=\mu^{\frac{1}{2}}(v)\Big(\varepsilon f_1(t,x,v)+\varepsilon^2 f_2(t,x,v)\Big), \tag{1.32}$$

边界层为

$$f^B(t,\mathfrak{x},\mathfrak{v}):=\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\Big(\varepsilon f_1^B(t,\mathfrak{x},\mathfrak{v})\Big). \tag{1.33}$$

其中 f和 f^B定义见第 4.1 节，且 $R(t,\ x,\ v)$ 是满足下式的余项

$$\begin{cases}\varepsilon\partial_t R+v\cdot\nabla_x R+\varepsilon^{-1}\mathcal{L}[R]=S\ \text{ in }\ \mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^3,\\ R(0,x,v)=z(x,v)\ \text{ in }\ \Omega\times\mathbb{R}^3,\\ R(t,x_0,v)=h(t,x_0,v)\ \text{ for }\ v\cdot n<0\ \text{ and }\ x_0\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.34}$$

其中 z、 h 和 S 定义见（4.25）–（4.33）。

类似于（1.12），我们将其拆分为

$$R=\mathbf{P}[R]+(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]=\mu^{\frac{1}{2}}(v)\left(p(t,x)+v\cdot\mathbf{b}(t,x)+\frac{|v|^2-5}{2}c(t,x)\right)+(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]. \tag{1.35}$$

记工作空间为

$$\begin{aligned}|||R|||_X:=&|||R|||_{L^\infty_t L^2_{x,v}}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|R\|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|||\mathbf{P}[R]|||_{L^2}+\varepsilon^{-1}|||(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|||_{L^2_\nu}\\ &|||\partial_t R|||_{L^\infty_t L^2_{x,v}}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\partial_t R\|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|||\partial_t\mathbf{P}[R]|||_{L^2}+\varepsilon^{-1}|||\partial_t(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|||_{L^2_\nu}\\ &+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|R\|_{L^\infty_t L^2_{\gamma_+}}+\left\|\mu^{\frac{1}{4}}R\right\|_{L^\infty_t L^4_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}|||(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|||_{L^\infty_t L^2_\nu}+|||R|||_{L^\infty_t L^6_{x,v}}\\ &+\varepsilon^{\frac{1}{2}}|||R|||_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

1.2.3. 主要结果。

定理 1.2（演化问题）。假设 Ω 是一个有界的 C^3 域，且 (1.22)(1.27)(1.30) 成立。存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 以及任意给定的常数 $\mathfrak{T}>0$，都存在一个非负解 $\mathfrak{F}(t,x,v)$，定义在 $(t,x,v)\in[0,\mathfrak{T}]\times\Omega\times\mathbb{R}^3$ 上，满足由 (1.31) 表示的方程 (1.20)，并且

$$|||R|||_X\lesssim o_T, \tag{1.37}$$

其中 X 范数定义见 (1.36)。满足 (1.37) 的所有解中，此解是唯一的。这进一步得到

$$\left\|\mu^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{F}-\mu^{\frac{1}{2}}-\varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}\left(\rho_1+v\cdot u_1+\frac{|v|^2-3}{2}T_1\right)\right\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \tag{1.38}$$

其中 $\left(\rho_1(t,x)\ u_1(t,x)\ T_1(t,x)\right)$ 满足非定常 Navier–Stokes–Fourier 系统

$$\begin{cases} \nabla_x P_1 = 0, \\ \partial_t u_1 + u_1 \cdot \nabla_x u_1 - \gamma_1 \Delta_x u_1 + \nabla_x \mathfrak{p}_1 = 0, \\ \nabla_x \cdot u_1 = 0, \\ \partial_t T_1 + u_1 \cdot \nabla_x T_1 - \gamma_2 \Delta_x T_1 = 0. \end{cases} \tag{1.39}$$

初始条件

$$\left(\rho_1(0,x), u_1(0,x), T_1(0,x)\right) = \left(\rho^I(x), u^I(x), T^I(x)\right) \tag{1.40}$$

由 (1.24)给出，且边界条件

$$\left(\rho_1(t,x_0), u_1(t,x_0), T_1(t,x_0)\right) = \left(\rho^B(t,x_0), u^B(t,x_0), T^B(t,x_0)\right) \tag{1.41}$$

由 (1.18) 通过求解米尔恩问题 (1.19) 得到，适用于 $\Phi(t,\mathfrak{x},\mathfrak{v})$。

注 1.3. 若加强边界数据假设（1.22），使得对于某个常数 $K_0 > 0$

$$\left\| \mathrm{e}^{K_0 t} \mathfrak{f}_b \right\|_{W^{1,\infty} W^{3,\infty} W^{1,\infty}_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}} = o(1), \tag{1.42}$$

则通过类似的论证，定理 1.2 仍然成立，其中 $\mathfrak{T} = \infty$ 并且改进为（1.38），对于某个常数$K \in (0, K_0)$

$$\left\| \mathrm{e}^{Kt} \left\{ \mu^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F} - \mu^{\frac{1}{2}} - \varepsilon \mu^{\frac{1}{2}} \left(\rho_1 + v \cdot u_1 + \frac{|v|^2 - 3}{2} T_1 \right) \right\} \right\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{1.43}$$

2. Background and Methodology

2.1. 文献综述。 自希尔伯特开创性工作以来，玻尔兹曼方程的流体力学极限 [43, 44]一直备受关注。这是解决他著名的[42] 物理学公理化第六问题的关键。大多数重要的流体模型至少在形式上都可以通过对克努森数进行渐近展开 ε （即所谓的希尔伯特展开）推导出来。人们已在许多不同情形（区域、标度、解的类型）下研究了这种渐近收敛的严格论证，因此我们几乎不可能提供一份详尽的文献综述。

当马赫数为 $O(1)$、雷诺数为 $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$ 时，玻尔兹曼方程的解将收敛到可压缩欧拉方程的解。Caflisch [14] 和 Lachowicz [57], 得到了这一结果，而 Nishida [60], 和 Asano-Ukai [4] 则通过不同的方法证明了类似结果。关于存在奇异性时欧拉方程解的收敛性，请参阅 Yu [75] 和 Huang-Wang-Yang [47, 46]。Huang-Wang-Yang [48], 、Huang-Wang-Wang-Yang [45] 和 Guo-Huang-Wang [36]研究了具有边界效应的有界区域情形。Speck-Strain [65]研究了相对论欧拉极限。由于局部麦克斯韦分布本身的困难，以及欧拉方程可能出现奇异性，这些结果大多只在局部时间内成立，而有界区域情形在很大程度上仍未解决。

在更长的时间尺度 ε^{-1} 上，扩散效应变得显著，此时只有在低马赫数区域内才能解决该问题（马赫数为 $O(\varepsilon)$ 或更小，雷诺数为 $O(1)$）。玻尔兹曼方程的解将收敛到一个全局麦克斯韦分布加上一个 $O(\varepsilon)$ 扰动，该扰动满足不可压缩纳维-斯托克斯方程。关于光滑解，参见 Bardos-Ukai [10], DeMasi-Esposito-Lebowitz [19],Guo [34], Guo-Jang [37] ; 关于重整化解，参见 Bardos-Golse-Levermore [6, 7, 8, 9], Lions-Masmoudi [58], Jiang-Masmoudi [51], Masmoudi-Saint-Raymond [59], Golse-Saint-Raymond [33] 。关于更多参考文献、相关主题及进展，参见 Villani [66], Desvillettes-Villani [21,20], Carlen-Carvalho [16], Arkeryd-Nouri [3], Arkeryd-Esposito-Marra-Nouri [1, 2], Esposito-Lebowitz-Marra[27, 28]。此外，还可参阅 Saint-Raymond [62], Golse [31], Esposito-Marra [29], 撰写的综述及其中的参考文献。

当马赫数为 $O(\varepsilon)$，雷诺数为 $O(\varepsilon^{\alpha})$ 时，对于 $0<\alpha<1$，玻尔兹曼方程的解将收敛到一个全局麦克斯韦分布加上一个 $O(\varepsilon)$ 扰动，该扰动满足不可压缩欧拉方程。除上述重叠的参考文献外，关于包含边界效应（包括克努森层和普朗特层）的最新进展，还可参见 Jang-Kim [50], Cao-Jang-Kim[15], Kim-La [55]。

当马赫数为 $O(\varepsilon)$、雷诺数为 $O(1)$，而密度/温度为 $O(\varepsilon)$ 时，正如 Sone[63, 64] 所预测的那样，一类新型混合流体系统（即所谓的幽灵效应方程）作为玻尔兹曼方程的流体力学极限出现。关于近期进展，请参阅 [25, 26]。

本文将重点研究有界区域中玻尔兹曼方程的扩散极限，涵盖稳态和演化情形。我们的工作与近期发展的 $L^2-L^6-L^\infty$ 框架以及具有几何效应的动理学边界层密切相关。对于漫反射边界，请参阅 Esposito-Guo-Kim-Marra[22, 23], 和 Wu [68], Wu-Ouyang [71, 72, 73] 。特别地， [22, 23]借助改进的 $L^2-L^6-L^\infty$框架，在不进行边界层展开的情况下证明了 L^2 收敛性（适用于凸区域和非凸区域）；而 [68, 71, 72, 73] 通过边界层展开证明了凸区域中的 L^∞ 收敛性。正如 [74, 41] 所揭示的那样，经过精心设计并带有几何修正的边界层无法在非凸区域中达到 $W^{1,\infty}$ 正则性，因此 L^∞ 收敛性仍遥不可及。镜面反射边界和反弹边界的情形在很大程度上仍是开放问题（通道区域的半空间情形除外），主要原因是缺乏能够追踪 ε 依赖性[35, 12]的显式核估计。

对于更具挑战性的流入边界，边界效应和掠射奇异性起着更为重要的作用，因为只有在这种情况下，主阶边界层才不会消失。因此，即使对于L^2 收敛，我们也看不到任何能够完全避免边界层展开的可行方案。据我们所知，目前最好的结果是针对单位圆盘或单位球区域的 L^∞ 收敛 [67], ，但尚无明确途径将这些技术推广至一般光滑凸区域，更不用说非凸区域了。

此外，我们还纳入了一些近期关于玻尔兹曼方程扩散极限及相关模型的论文 [12, 13, 52, 49]。我们也列举了沿着 $L^2-L^p-L^\infty$ 框架 [35, 37, 38,40, 39, 53, 54, 65, 70, 69]取得的一些最新进展。

本文采用一种不同的方法，并设计了截断边界层，从而在一般光滑有界区域（包括凸区域和非凸区域）中获得 L^2 收敛。

2.2. 困难。 下文将利用定态余项方程（1.11）来阐述关键思路。基于基本能量估计以及 $\langle\mathcal{L}[R],R\rangle$ 的强制性，我们知道可以对 $|||(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|||_{L^2_\nu}$ 作如下估计：

$$\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\lesssim o(1)\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac12}. \tag{2.1}$$

然后，用函数 1.11）检验方程（ $\nabla_x\varphi\cdot\overline{\mathscr{A}}$，其中 $\varphi\sim\Delta_x^{-1}p$, $\Delta_x^{-1}c$ 且 $\nabla_x\psi$： $\overline{\mathscr{B}}$，其中 $\psi\sim\Delta_x^{-1}\mathbf{b}$，进而可以用（$\mathbf{P}[R]\,\mathrm{I}\,\mathrm{P}$） 来估计：

$$\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac12}. \tag{2.2}$$

显然， （2.1）和（2.2）可推出

$$\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{-\frac12}. \tag{2.3}$$

注意， （2.3）不足以证明所需的 L^2 收敛性

$$\lim_{\varepsilon\to0}|||R|||_{L^2}=0. \tag{2.4}$$

对于漫反射边界 [23, 72], ， 克服这一困难的一般策略是将内部解和边界层展开到足够高阶，即重新定义

$$\mathfrak{F}(x,v)=\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R=\mu+\mu^{\frac12}\left(\varepsilon f_1+\varepsilon^2f_2+\varepsilon^3f_3\right)+\mu^{\frac12}\left(\varepsilon f_1^B+\varepsilon^2f_2^B\right)+\varepsilon\mu^{\frac12}R. \tag{2.5}$$

漫反射边界条件意味着 $f_1^B=0$ 因此不存在由边界层的正则性 [67]引起的困难。额外项 $\varepsilon^3f_3\mu^{\frac12}$和 $\varepsilon^2f_2^B\mu^{\frac12}$ 有助于改进 S的界

且 h 在（1.11）中。最终，这将导致

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{\alpha}, \tag{2.6}$$

与 $\alpha>0$ 因此（2.4）成立。

遗憾的是，这一策略不适用于流入边界，因为 f_1^B不一定为零，且 $\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\notin L^\infty$ [67]。因此，我们不能期望展开为 f_2^B使其满足米尔恩问题

$$v_\eta\frac{\partial f_2^B}{\partial\eta}+\mathcal{L}\left[f_2^B\right]\approx\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}. \tag{2.7}$$

f_1^B正则性的损失使得无法[67] 证明（2.7）的适定性，因此（2.4）无法实现。

2.3. 方法论——定常问题。 如上文分析所示，对于流入边界采用展开（1.8）时，（2.3）的瓶颈在于核估计（2.2）以及（2.1）和（2.2）的源项估计。本文将设计若干精巧的测试函数，以获得

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\lesssim o(1)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+1, \tag{2.8}$$

and

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+1, \tag{2.9}$$

与（2.2）相比，这会带来关键的半阶增益 ε ，并导出（2.4 ）.

我们的核心思路是巧妙结合弱形式与守恒律，消去右端（ $\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}$ 的最棘手项（2.2）。下面将更精确地阐述这一论证。由于（ $\Gamma[R,R]$ 中存在非线性项（1.11），我们需要估计$L^2-L^6-L^\infty$ 范数，分别对应$\mathbf{P}[R]$ 和（$\mathbf{I}$ $-\mathbf{P}$)$[R]$。

能量估 计。检验（1.11）并结合 $\varepsilon^{-1}R$ 利用强制性和正交性可得

$$\varepsilon^{-1}|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2}\lesssim\left|\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle\right|. \tag{2.10}$$

这里， S 中最难处理的项是 f_1^B的法向速度导数:

$$\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta},\mathbf{P}[R]\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left|\langle f_1^B,\mathbf{P}[R]\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left\|f_1^B\right\|_{L^2_xL^1_v}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2_xL^\infty_v}\lesssim o_T\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}, \tag{2.11}$$

这依赖于对 v_η 进行关键的分部积分，并充分利用重标度$\eta=\varepsilon^{-1}\mathfrak{n}$。

因此，我们得到

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T, \tag{2.12}$$

并进一步借助插值

$$\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^6}+\left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T. \tag{2.13}$$

估计 p。检验（1.11）与光滑函数 $\psi=\mu^{\frac{1}{2}}\left(v\cdot\nabla_x\varphi\right)$ 及 $\varphi\sim\Delta_x^{-1}p$ 得到

$$\int_\gamma R\psi(v\cdot n)-\langle R,v\cdot\nabla_x\psi\rangle=\langle S,\psi\rangle. \tag{2.14}$$

利用奇性和正交性，我们消除了最不利的贡献 $\varepsilon^{-1}\langle\mathcal{L}[R],\psi\rangle=0$。随后，对源项 $\langle S,\psi\rangle$ 进行直接估计，得到 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 增益:

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|p\|_{L^2}+\|p\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T. \tag{2.15}$$

对 c 的估计。对于光滑函数 $\varphi\sim\Delta_x^{-1}c$，满足 $\varphi\big|_{\partial\Omega}=0$，我们将 (1.11) 与 $\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12}$作对偶，得到

$$-\left\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\right\rangle_x+\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n=\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},S\right\rangle, \tag{2.16}$$

并与 $\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}$相乘，得到

$$\begin{aligned}&-\kappa\left\langle\Delta_x\varphi,c\right\rangle_x+\varepsilon^{-1}\left\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\right\rangle\\ =&\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\right\rangle_{\gamma_-}-\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\right\rangle_{\gamma_+}+\left\langle v\cdot\nabla_x\left(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle+\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $\varsigma:=\int_{\mathbb{R}^3}\mu^{\frac12}v\left|v\right|^2(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]$。

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$(2.16) 与 (2.17) 相加，可恰好消去麻烦项 $\varepsilon^{-1}\left\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\right\rangle_x$ 和 $\varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n$；这些项会导致最严重的 $\varepsilon^{-2}\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\|_{L^2_\nu}^2$ 贡献。这些新的守恒律将成为 c 估计的基础。因此，我们得到 $\varepsilon^{\frac12}$ 增益:

$$\varepsilon^{-\frac12}\left\|c\right\|_{L^2}+\left\|c\right\|_{L^6}\lesssim o_T\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T, \tag{2.18}$$

这依赖于对源项的仔细估计 $\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},S\right\rangle$ 和 $\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle$。这里我们将充分利用截断边界层（参见引理 3.8中的关键界）以及 Hardy 不等式

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\right\rangle\right|\lesssim&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},f_1^B\right\rangle\right|=\left|\left\langle\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{n}}\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},\eta f_1^B\right\rangle\right|\\ \lesssim&\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{n}}\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12}\right\|_{L^2}\left\|\eta f_1^B\right\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac12}\left\|\varphi\right\|_{H^1}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac12}\left\|c\right\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

估计 $\mathbf{b}$。对于光滑函数 $\psi\sim\Delta_x^{-1}\mathbf{b}$，满足 $\nabla_x\cdot\psi=0$ 以及 $\psi\big|_{\partial\Omega}=0$（由斯托克斯问题求解），我们将（1.11）与 $\psi\cdot v\mu^{\frac12}$进行检验，得到

$$-\left\langle\nabla_x\cdot\psi,p\right\rangle_x-\left\langle\nabla_x\psi,\varpi\right\rangle_x+\int_{\partial\Omega}\left(p\psi+\psi\cdot\varpi\right)\cdot n=\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\right\rangle, \tag{2.20}$$

并将其与 $\nabla_x\psi:\mathscr{B}$ 进行检验，得到

$$\begin{aligned}&-\lambda\left\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\right\rangle_x+\varepsilon^{-1}\left\langle\nabla_x\psi,\varpi\right\rangle\\ =&\left\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},h\right\rangle_{\gamma_-}-\left\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},R\right\rangle_{\gamma_+}+\left\langle v\cdot\nabla_x\left(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\right),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle+\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.21}$$

其中 $\varpi:=\int_{\mathbb{R}^3}\mu^{\frac12}(v\otimes v)\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)[R]$。

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$（2.20）与（2.21）相加，可以完全消去令人担忧的项 $\varepsilon^{-1}\left\langle\nabla_x\psi,\varpi\right\rangle_x$ $\varepsilon^{-1}\left\langle\nabla_x\cdot\psi,p\right\rangle_x$ 以及 $\varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega}\left(p\psi+\psi\cdot\varpi\right)\cdot n$，从而得到最严重的 $\varepsilon^{-2}\left\|\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)[R]\right\|_{L^2_\nu}^2$ 贡献。然后，类似于 c 估计，在仔细估计源项 $\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\right\rangle$ 以及 $\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\right\rangle$之后，我们得到$O(\varepsilon^{\frac12})$对右端项的增益:

$$\varepsilon^{-\frac12}\left\|\mathbf{b}\right\|_{L^2}+\left\|\mathbf{b}\right\|_{L^6}\lesssim o_T\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T, \tag{2.22}$$

这些新的守恒律将成为 $\mathbf{b}$ 估计的核心。

L^∞ 估计。我们将采用 $L^2-L^6-L^\infty$ 框架来获得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\frac12}\left\|R\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon^{\frac12}\left|R\right|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}}\lesssim&\left\|\mathbf{P}[R]\right\|_{L^6}+\varepsilon^{-1}\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\|_{L^2_\nu}+o_T\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T\\ \lesssim&\,o_T\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T.\end{aligned} \tag{2.23}$$

注意，法向速度导数 $\frac{\partial f_1^B}{\partial\eta}\approx o_T\varepsilon^{-1}$ 来自引理 3.8，而掠射集截断则由（3.222）控制。

2.4. 方法论——演化问题。 除了定常问题中提到的困难和方法论外，在演化情形下处理余项方程（1.34）时，我们还面临另一层障碍。 L^∞ 估计

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R\right\|_{L^\infty_{\overline{\gamma}_+,\varrho,\vartheta}}\lesssim\left\|\!\left|\mathbf{P}[R]\right|\!\right\|_{L^\infty_t L^6_{x,v}}+\varepsilon^{-1}\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^\infty_t L^2_{x,v}}+o_T\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T \tag{2.24}$$

需要控制 $\left\|\!\left|\mathbf{P}[R]\right|\!\right\|_{L^\infty_t L^6_{x,v}}$，而非通过能量估计和核估计得到的完整 L^6 bound $\left\|\!\left|\mathbb{P}[R]\right|\!\right\|_{L^6}$。因此，我们必须仔细估计累积范数和瞬时范数。

累积估计。通过精心选择测试函数，并利用弱形式和守恒律中的类似抵消，我们得到能量估计

$$\left\|R(t)\right\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|R\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\varepsilon^{-1}\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T, \tag{2.25}$$

$$\left\|\partial_t R(t)\right\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\partial_t R\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\varepsilon^{-1}\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[\partial_t R]\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T, \tag{2.26}$$

以及核估计

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\!\left|\mathbf{P}[R]\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T, \tag{2.27}$$

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\!\left|\partial_t\mathbf{P}[R]\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T. \tag{2.28}$$

请注意，为便于进行瞬时估计，我们需要同时控制 R 及其时间导数 $\partial_t R$。值得注意的是， $\partial_t R$ 估计要求 $\left\|\partial_t R(0)\right\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 这是我们的论证仅适用于充分准备的初始数据（1.23）且无法讨论初始层（与输运方程的情形相反） [61]的关键原因。

在演化守恒律的分析中，我们还需要仔细控制时间导数项，因为它们具有有利的符号，并分别估计 $\partial_t\nabla_x\varphi$ 和 $\partial_t\nabla_x\psi$，以完成证明。

瞬时估计。我们通过将4.37中的 $\partial_t R$ 移至右端

$$v\cdot\nabla_x R+\varepsilon^{-1}\mathcal{L}[R]=S-\varepsilon\partial_t R, \tag{2.29}$$

其中，我们将 $\partial_t R$ 视为定态余项方程中的源项。因此，通过与定态情形类似的估计，我们得到能量估计

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|R(t)\right|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R](t)\right\|_{L^2}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T, \tag{2.30}$$

$$\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R](t)\right\|_{L^6}+\left|\mu^{\frac{1}{4}}R(t)\right|_{L^4_{\gamma_+}}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T, \tag{2.31}$$

以及核估计

$$\left\|\mathbf{P}[R](t)\right\|_{L^6}\lesssim o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T. \tag{2.32}$$

注意到，这些估计严重依赖于 L^2 在 $\partial_t R$ 中的累积上界（2.26）。接下来，我们可以进行 L^∞ 估计（2.24），并完成证明。

3. Stationary Problem

3.1. 渐近分析。

3.1.1. 内部解。 内部解的推导是经典的。我们参考 [63, 64, 31] 及其中的参考文献。将（1.9）代入（1.1），并比较 ε的阶数，我们要求

$$0=2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu,\mu^{\frac{1}{2}}f_1\right], \tag{3.1}$$

$$v\cdot\nabla_x f_1=2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu,\mu^{\frac{1}{2}}f_2\right]+\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}f_1,\mu^{\frac{1}{2}}f_1\right], \tag{3.2}$$

它们等价于

$$\mathcal{L}[f_1]=0, \tag{3.3}$$

$$v\cdot\nabla_x f_1+\mathcal{L}[f_2]=\Gamma[f_1,f_1]. \tag{3.4}$$

考虑到进一步的展开，我们还要求

$$v\cdot\nabla_x f_2\perp\mathcal{N}. \tag{3.5}$$

因此，我们得出

$$f_1(x,v)=\mu^{\frac12}(v)\Big(\rho_1(x)+v\cdot u_1(x)+\frac{|v|^2-3}{2}T_1(x)\Big), \tag{3.6}$$

其中（ρ_1， u_1， T_1）满足不可压缩纳维-斯托克斯-傅里叶系统（1.16）。

此外，我们有

$$\begin{aligned} f_2(x,v)=&\mu^{\frac12}(v)\left(\rho_2(x)+v\cdot u_2(x)+\frac{|v|^2-3}{2}T_2(x)\right)\\ &+\mu^{\frac12}(v)\left(\rho_1(v\cdot u_1)+\left(\rho_1T_1+\frac{|v|^2-3}{2}|u_1|^2\right)\right)+\mathcal{L}^{-1}\Big[-v\cdot\nabla_x f_1+\Gamma[f_1,f_1]\Big] \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中（ρ_2， u_2， T_2）满足流体系统

$$\begin{cases} \nabla_x P_2=0,\\ u_1\cdot\nabla_x u_2+(\rho_1u_1+u_2)\cdot\nabla_x u_1-\gamma_1\Delta_x u_2+\nabla_x\mathfrak{p}_2=-\gamma_2\nabla_x\cdot\Delta_xT_1-\gamma_4\nabla_x\cdot\Big(T_1\big(\nabla_xu_1+(\nabla_xu_1)^T\big)\Big),\\ \nabla_x\cdot u_2=-u_1\cdot\nabla_x\rho_1,\\ u_1\cdot\nabla_xT_2+(\rho_1u_1+u_2)\cdot\nabla_xT_1-u_1\cdot\nabla_x\mathfrak{p}_1=\gamma_1\Big(\nabla_xu_1+(\nabla_xu_1)^T\Big)^2+\Delta_x\big(\gamma_2T_2+\gamma_5T_1^2\big), \end{cases} \tag{3.8}$$

对于 $P_2:=\rho_2+T_2+\rho_1T_1$ 以及常数 γ_3、 γ_4、 γ_5。

3.1.2. 米尔恩问题。 第 1.1.2 节中定义的法向坐标图 [25, 26], 旨在分离法向变量和切向变量，以便于定义边界层。作代换（x， v） $\to$ （$\mathfrak{x}$， $\mathfrak{v}$），可得

$$\begin{aligned} v\cdot\nabla_x=&\frac1\varepsilon v_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\varphi^2\frac{\partial}{\partial v_\eta}-v_\eta v_\varphi\frac{\partial}{\partial v_\varphi}\right)-\frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\psi^2\frac{\partial}{\partial v_\eta}-v_\eta v_\psi\frac{\partial}{\partial v_\psi}\right)\\ &+\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_1}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_2\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\psi^2\right)\frac{\partial}{\partial v_\varphi}\\ &+\frac{1}{L_1L_2}\left(R_2\frac{\partial_{\iota_2\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi^2\right)\frac{\partial}{\partial v_\psi}\\ &+\left(\frac{R_1v_\varphi}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}\frac{\partial}{\partial\iota_1}+\frac{R_2v_\psi}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}\frac{\partial}{\partial\iota_2}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

适定性与正则性。现在我们讨论$\mathcal{G}(\mathfrak{x},\mathfrak{v})$的米尔恩问题的适定性与正则性:

$$\begin{cases} v_\eta\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial\eta}+\nu\mathcal{G}-K\left[\mathcal{G}\right]=0,\\ \mathcal{G}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})=\overline{h}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\quad\text{for}\quad v_\eta>0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac12}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathcal{G}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}=M_f. \end{cases} \tag{3.10}$$

以下结果是对 [25, 定理 2.1] 和 [5, 71, 67] 的推广，其中考虑了非零质量通量 M_f:

命题 3.1。假设 $\overline{h}\in W^{k,\,\iota_1\,\infty,\,\iota_2}$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$。给定 $M_f\in\mathbb{R}$。则存在

$$\mathcal{G}_\infty(\mathfrak{v})=\mu^{\frac12}\left(\rho^\infty+v\cdot u^\infty+\frac{|v|^2-3}{2}T^\infty\right)\in\mathcal{N} \tag{3.11}$$

且存在唯一解 $\mathcal{G}(\eta,\ \mathfrak{v})$ 满足 (3.10) 使得 $\mathfrak{G}:=\mathcal{G}-\mathcal{G}_\infty$ 满足

$$\begin{cases} v_\eta\dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\eta}+\nu\mathfrak{G}-K\left[\mathfrak{G}\right]=0,\\ \mathfrak{G}(0,\mathfrak{v})=\overline{h}(\mathfrak{v})-\mathcal{G}_\infty(\mathfrak{v}):=\mathfrak{h}(\mathfrak{v})\quad for\quad v_\eta>0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\mathfrak{G}(0,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}=0, \end{cases}\tag{3.12}$$

且对于某个 $K_0>0$ 和任意 $0<r\le k$

$$\left|\mathcal{G}_\infty-v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}M_f\right|+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim\left|\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\left|M_f\right|,\tag{3.13}$$

$$\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}v_\eta\partial_\eta\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}v_\eta\partial_{v_\eta}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim\left|\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\left|\nabla_{\mathfrak{v}}\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\left|M_f\right|,\tag{3.14}$$

$$\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\partial_{v_\varphi}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\partial_{v_\psi}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim\left|\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\left|\nabla_{\mathfrak{v}}\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\left|M_f\right|,\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\partial^r_{\iota_1}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\partial^r_{\iota_2}\mathfrak{G}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim&\left|\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\sum_{j=1}^r\left|\partial^j_{\iota_1}\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\sum_{j=1}^r\left|\partial^j_{\iota_2}\overline{h}\right|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}\\&+\left|M_f\right|+\sum_{j=1}^r\left|\partial^j_{\iota_1}M_f\right|+\sum_{j=1}^r\left|\partial^j_{\iota_2}M_f\right|.\end{aligned}\tag{3.16}$$

注记 3.1. 记 $u^\infty=\left(u^\infty_n,\ u^\infty_{\iota_1},\ u^\infty_{\iota_2}\right)$分别表示法向分量和两个切向分量。对（ $\mathbb{R}^3$ 式（3.12）直接积分，得到

$$M_f=\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\mathcal{G}(0,\mathfrak{v})=\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\mathcal{G}_\infty(\mathfrak{v})=u^\infty_n.\tag{3.17}$$

因此，$\mathcal{G}-v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}M_f$满足（3.12），且质量通量为零。于是我们可以直接应用以下著名结果： [25, 定理 2。1] 和 [5, 71, 67]。

BV估计。对于 $\mathfrak{G}(\mathfrak{x},\mathfrak{v})$，记半范数

$$\|\mathfrak{G}\|_{\widetilde{\mathrm{BV}}}:=\sup\left\{\iint_{\eta,\mathfrak{v}}\mathfrak{G}(\nabla_{\eta,\mathfrak{v}}\cdot\psi)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mathfrak{v}:\ \psi\in C^1_c\ \text{and}\ \|\psi\|_{L^\infty}\le1\right\},\tag{3.18}$$

因此，BV范数可定义为

$$\left\|\mathfrak{G}\right\|:=\|\mathfrak{G}\|_{L^1}+\|\mathfrak{G}\|_{\widetilde{\mathrm{BV}}}.\tag{3.19}$$

这是经典结果： $W^{1,\ 1}\hookrightarrow$ BV。以下结果出自[25, 定理 2.16]:

命题 3.2。我们有

$$\left\|\nu\mathfrak{G}\right\|\lesssim|\mathfrak{h}|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}+\int_{v_\eta>0}\left|\partial_{v_\eta}\mathfrak{h}\right|v_\eta\mathrm{d}\mathfrak{v}+\int_{v_\eta>0}|\mathfrak{h}|\,\mathrm{d}\mathfrak{v}+\left|M_f\right|.\tag{3.20}$$

质量通量。质量通量 M_f 在（3.12）中与 $\rho^\infty+T^\infty$ 在 $\mathcal{G}$定义的 $_\infty$:

命题 3.3。给定 $\overline{h}$如命题3.1所示。对于任意给定的常数 P，存在 M_f（ι_1，ι_2）使得 $\mathcal{G}_\infty$ 满足命题3.1 中的条件

$$\rho^\infty(\iota_1,\iota_2)+T^\infty(\iota_1,\iota_2)=P.\tag{3.21}$$

证明。我们首先为 $\overline{\mathcal{G}}$ 求解一个零质量通量问题:

$$\begin{cases} v_\eta\dfrac{\partial\overline{\mathcal{G}}}{\partial\eta}+\nu\overline{\mathcal{G}}-K\left[\overline{\mathcal{G}}\right]=0,\\ \overline{\mathcal{G}}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})=\overline{h}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\quad\text{for}\quad v_\eta>0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\overline{\mathcal{G}}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}=0. \end{cases}\tag{3.22}$$

根据命题3.1，存在一个极限函数

$$\overline{\mathcal{G}}_\infty(\mathfrak{v})=\mu^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\rho}^\infty+v\cdot\overline{u}^\infty+\frac{|v|^2-3}{2}\overline{T}^\infty\right)\in\mathcal{N}. \tag{3.23}$$

如果我们已经有 $P=\overline{\rho}^\infty+\overline{T}^\infty$，那么直接取 $M_f=0$。否则，我们考虑以下关于 $\mathcal{G}$ 的辅助~问题

$$\begin{cases} v_\eta\dfrac{\partial\widetilde{\mathcal{G}}}{\partial\eta}+\nu\widetilde{\mathcal{G}}-K[\widetilde{\mathcal{G}}]=0,\\ \widetilde{\mathcal{G}}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})=0\quad\text{for}\quad v_\eta>0,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\widetilde{\mathcal{G}}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}=\widetilde{M_f}. \end{cases} \tag{3.24}$$

根据命题3.1，存在一个极限函数

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\infty(\mathfrak{v})=\mu^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\rho}^\infty+v\cdot\widetilde{u}^\infty+\frac{|v|^2-3}{2}\widetilde{T}^\infty\right)\in\mathcal{N}. \tag{3.25}$$

~不失一般性，我们可以考虑固定的 (3.24)（ι_1、ι_2）。将 $\mathcal{G}$ 乘在 (3.24) 两边，并在（η、$\mathfrak{v}$）$\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3$上积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\left|\widetilde{\mathcal{G}}_\infty\right|^2-\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\left|\widetilde{\mathcal{G}}(0)\right|^2+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{\mathcal{G}}\left(\nu\widetilde{\mathcal{G}}-K[\widetilde{\mathcal{G}}]\right)=0. \tag{3.26}$$

当 $M_f\neq0$ 时，直接计算可知 $\widetilde{g}$ 不可能属于核 $\mathcal{N}$。然后根据命题3.1的证明，我们知道

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{\mathcal{G}}\left(\nu\widetilde{\mathcal{G}}-K[\widetilde{\mathcal{G}}]\right)>0 \tag{3.27}$$

显然，由 (3.24) 中的边界条件可知

$$-\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\left|\widetilde{\mathcal{G}}(0)\right|^2=-\int_{v_\eta<0}v_\eta\left|\widetilde{\mathcal{G}}(0)\right|^2\geq0. \tag{3.28}$$

因此，我们必须有

$$\int_{\mathbb{R}^3}v_\eta\left|\widetilde{\mathcal{G}}_\infty\right|^2=2\widetilde{u}_n^\infty\left(\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty\right)=2\widetilde{M_f}\left(\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty\right)<0. \tag{3.29}$$

~~~因此，当 $M_f\neq0$时，我们也必须有 $\widetilde{\rho}^\infty+T^\infty\neq0$。由于（3.24）是一个线性方程，我们知道 M_f~与 $\widetilde{\rho}^\infty+T^\infty$成正比，即存在一个非零常数 D 使得

$$\widetilde{M_f}=D\left(\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty\right). \tag{3.30}$$

然后将（3.22）与 $\dfrac{P-\overline{\rho}^\infty-\overline{T}^\infty}{\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty}\times$（3.24）相加，我们知道极限函数为

$$\left(\overline{\rho}^\infty+\overline{T}^\infty\right)+\frac{P-\overline{\rho}^\infty-\overline{T}^\infty}{\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty}\times\left(\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty\right)=P \tag{3.31}$$

它满足要求。在这种情况下，我们知道质量通量

$$M_f=\frac{P-\overline{\rho}^\infty-\overline{T}^\infty}{\widetilde{\rho}^\infty+\widetilde{T}^\infty}\times\widetilde{M_f}=D\Big(P-\overline{\rho}^\infty-\overline{T}^\infty\Big). \tag{3.32}$$

□

推论 3.3.1. 给定 $\overline{h}$ 如命题 *3.1*中所述。存在常数 P和 $M_f(\iota_1,\iota_2)$ 使得 $\mathcal{G}_\infty$ 满足命题 *3.1*中的条件

$$\rho^\infty(\iota_1,\iota_2)+T^\infty(\iota_1,\iota_2)=P, \tag{3.33}$$
~~~

and

$$\int_{\partial\Omega} M_f = \int_{\partial\Omega} u_n^{\infty} = 0. \tag{3.34}$$

证明。 根据命题 3.3的证明，我们有

$$\int_{\partial\Omega} M_f = \int_{\partial\Omega} D\Big(P - \overline{\rho}^{\infty} - \overline{T}^{\infty}\Big) = 0, \tag{3.35}$$

因此我们必须取

$$P = \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\Big(\overline{\rho}^{\infty} + \overline{T}^{\infty}\Big). \tag{3.36}$$

所需结论由命题3.3得出。 □

3.1.3. 边界层。 设 Φ 是米尔恩问题（1.19）的解，其中 M_f 由推论3.3.1求得，且 $\overline{h} = \mathfrak{f}_b$。根据命题 3.1，我们知道存在

$$\Phi_{\infty}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v}) := \mu^{\frac{1}{2}}\left(\rho^B(\iota_1,\iota_2) + v\cdot u^B(\iota_1,\iota_2) + \frac{|v|^2-3}{2}T^B(\iota_1,\iota_2)\right) \in \mathcal{N}, \tag{3.37}$$

使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_\eta \mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\Phi_{\infty}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v} = M_f, \tag{3.38}$$

并且对于某些 $K_0>0$, $\overline{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) = \Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) - \Phi_{\infty}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})$ 满足

$$|\Phi_{\infty}| + \left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\overline{\Phi}\right\|_{L^{\infty}_{\varrho,\vartheta}} \lesssim |\mathfrak{f}_b|_{L^{\infty}_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}. \tag{3.39}$$

设 $\chi(y) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 和 $\overline{\chi}(y) = 1-\chi(y)$ 是满足以下条件的光滑截断函数

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y|\le 1,\\ 0 & \text{if } |y|\ge 2,\end{cases} \tag{3.40}$$

我们定义截断边界层 f_1^B。记

$$f_1^B(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) = \overline{\chi}\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\chi(\varepsilon\eta)\overline{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}). \tag{3.41}$$

我们可以验证， f_1^B满足

$$v_\eta\frac{\partial f_1^B}{\partial\eta} + \mathcal{L}\left[f_1^B\right] = v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi} + \chi(\varepsilon\eta)\left(\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)Kg[\overline{\Phi}] - K\left[\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\overline{\Phi}\right]\right), \tag{3.42}$$

with

$$f_1^B(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v}) = \overline{\chi}\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\Big(\mathfrak{f}_b(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v}) - \Phi_{\infty}(\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\Big) \quad \text{for} \quad v_\eta>0. \tag{3.43}$$

由于截断操作， $\overline{\chi}$， f_1^B可能无法保持质量通量，即

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})f_1^B(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v} &= \int_{\mathbb{R}^3} v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\overline{\chi}\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\overline{\Phi}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v}\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} v_\eta\mu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{v})\chi\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\overline{\Phi}(0,\iota_1,\iota_2,\mathfrak{v})\mathrm{d}\mathfrak{v} = M_f + O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.44}$$

3.1.4. 匹配过程。 根据命题3.1，我们有

$$|P| = \left|\rho^B + T^B\right| \lesssim o_T, \quad |M_f| \lesssim o_T, \tag{3.45}$$

并且对于某个 $K_0>0$ 及任意 $0<r\le 3$

$$\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}f_1^B\right\|_{L^{\infty}_{\varrho,\vartheta}} + \left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_1^r}\right\|_{L^{\infty}_{\varrho,\vartheta}} + \left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_2^r}\right\|_{L^{\infty}_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T. \tag{3.46}$$

考虑式（1.1）中的边界条件和展开式（1.8），我们要求$x_0\in\partial\Omega$ 与 $v\cdot n<0$的匹配条件：

$$\mu^{\frac{1}{2}}\left(f_1 + f_1^B\right)\Big|_{v\cdot n<0} = \mathfrak{f}_b. \tag{3.47}$$

因此，只需定义

$$\rho_1\Big|_{\partial\Omega}=\rho^B,\quad u_1\Big|_{\partial\Omega}=u^B,\quad T_1\Big|_{\partial\Omega}=T^B. \tag{3.48}$$

因此，由（3.46）和（3.48），我们知道

$$|\rho_1|_{W^{3,\infty}}+|u_1|_{W^{3,\infty}}+|T_1|_{W^{3,\infty}}\lesssim o_T. \tag{3.49}$$

特别地，我们知道

$$\big(\rho_1+T_1\big)\Big|_{\partial\Omega}=\rho^B+T^B=P,\quad \int_\Omega\big(\nabla_x\cdot u_1\big)=\int_{\partial\Omega}\big(u_1\cdot n\big)=\int_{\partial\Omega}M_f=0. \tag{3.50}$$

根据标准流体理　　论[11, 17] 对于定常纳维-斯托克斯方程（1.16），对于任意 $s\in[2,\infty)$

$$\|\rho_1\|_{W^{3,s}}+\|u_1\|_{W^{3,s}}+\|T_1\|_{W^{3,s}}\lesssim o_T. \tag{3.51}$$

于是，对于 f_2，不存在相应的边界层，因此我们可以直接取

$$\rho_2\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad u_2\Big|_{\partial\Omega}=-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_\Omega\big(u_1\cdot\nabla_x\rho_1\big),\quad T_2\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.52}$$

根据标准流体　　理论 [11, 17] 对于线性稳态纳维–斯托克斯方程（3.8），对于任意 $s\in[2,\infty$　　$)$

$$\|\rho_2\|_{W^{2,s}}+\|u_2\|_{W^{2,s}}+\|T_2\|_{W^{2,s}}\lesssim o_T. \tag{3.53}$$

定理 3.4。 在假设 (1.5)下，稳态纳维-斯托克斯方程 $(\rho_1,u_1,T_1$ 存在唯一解，且满足对于任意 (1.16)　$s\in[2,\infty)$

$$\|\rho_1\|_{W^{3,s}}+\|u_1\|_{W^{2,s}}+\|T_1\|_{W^{3,s}}\lesssim o_T. \tag{3.54}$$

此外，我们可以构造 f_1、 f_2 和 f_1^B，使得

$$\|f_1\|_{W^{3,s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+|f_1|_{W^{3-\frac{1}{s},s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T, \tag{3.55}$$

$$\|f_2\|_{W^{2,s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+|f_2|_{W^{2-\frac{1}{s},s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T, \tag{3.56}$$

并且对于某个 $K_0>0$ 以及任意 $0<r\le 3$

$$\big\|\mathrm{e}^{K_0\eta}f_1^B\big\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_1^r}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_2^r}\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T. \tag{3.57}$$

3.2. 余项方程。 将（1.8）代入（1.1），得到

$$v\cdot\nabla_x\Big(\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\Big)=\varepsilon^{-1}Q^*\Big[\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R,\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\Big] \tag{3.58}$$

或等价地

$$\begin{aligned}v\cdot\nabla_xR-2\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}Q^*\Big[\mu,\mu^{\frac12}R\Big]=&-\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}\Big(v\cdot\nabla_x\big(f+f^B\big)\Big)+\mu^{-\frac12}Q^*\Big[\mu^{\frac12}R,\mu^{\frac12}R\Big]\\&+2\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}Q^*\Big[f+f^B,\mu^{\frac12}R\Big]+\varepsilon^{-2}\mu^{-\frac12}Q^*\big[\mu+f+f^B,\mu+f+f^B\big].\end{aligned} \tag{3.59}$$

此外，我们有边界条件

$$\Big(\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\Big)\Big|_{\gamma_-}=\mu+\varepsilon\mu^{\frac12}\mathfrak{f}_b, \tag{3.60}$$

这等价于

$$R\Big|_{\gamma_-}=\mathfrak{f}_b-\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}\big(f+f^B\big). \tag{3.61}$$

因此，我们需要考虑余项方程（1.11）。这里的边界数据为

$$h=\Big(-\varepsilon f_2+\chi\big(\varepsilon^{-1}v_\eta\big)\overline{\Phi}\Big)\Big|_{\gamma_-}, \tag{3.62}$$

and

$$S:=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6, \tag{3.63}$$

其中

$$S_1 := -\varepsilon v\cdot\nabla_x f_2, \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} S_2 :=& \frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\varphi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}-v_\eta v_\varphi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\right)+\frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\psi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}-v_\eta v_\psi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\right)\\ &-\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_1}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_2\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\psi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\\ &-\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_2\partial_{\iota_2\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\\ &-\left(\frac{R_1v_\varphi}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_1}+\frac{R_2v_\psi}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_2}\right)\\ &+\varepsilon^{-1}v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi}-\varepsilon^{-1}\Big(K\left[\overline{\Phi}\right]\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)-K\Big[\overline{\Phi}\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)\Big]\Big), \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$S_3 := 2\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}f_1+\varepsilon\mu^{\frac12}f_2,\mu^{\frac12}R\right]=2\Gamma[f_1+\varepsilon f_2,R], \tag{3.66}$$

$$S_4 := 2\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}f_1^B,\mu^{\frac12}R\right]=2\Gamma\left[f_1^B,R\right], \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} S_5 :=& \varepsilon\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}f_2,\mu^{\frac12}\left(2f_1+\varepsilon f_2\right)\right]+2\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}\left(2f_1+2\varepsilon f_2+f_1^B\right),\mu^{\frac12}f_1^B\right]\\ =&\varepsilon\Gamma\left[f_2,2f_1+\varepsilon f_2\right]+\Gamma\left[2f_1+2\varepsilon f_2+f_1^B,f_1^B\right], \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$S_6 := \mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}R,\mu^{\frac12}R\right]=\Gamma[R,R]. \tag{3.69}$$

特别地，我们还可以进一步拆分 S_2:

$$S_{2a} := \frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\varphi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\right)+\frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\psi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\right), \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} S_{2b} :=& -\frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\eta v_\varphi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\right)-\frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\eta v_\psi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\right)\\ &-\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_1}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_2\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\psi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\\ &-\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_2\partial_{\iota_2\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi+\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\\ &-\left(\frac{R_1v_\varphi}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_1}+\frac{R_2v_\psi}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_2}\right)+\varepsilon^{-1}v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$S_{2c} := -\varepsilon^{-1}\Big(K\left[\overline{\Phi}\right]\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)-K\Big[\overline{\Phi}\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)\Big]\Big). \tag{3.72}$$

引理 3.5 (Green 恒等式，[22]的引理 2.2。假设 $f(x,v)\quad g(x,v)\in L^2_\nu(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 且 $v\cdot\nabla_x f,\ v\cdot\nabla_x g\in L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 满足 $f,\ g\in L^2_\gamma$。则

$$\left\langle v\cdot\nabla_x f,g\right\rangle+\left\langle v\cdot\nabla_x g,f\right\rangle=\int_\gamma fg(v\cdot n). \tag{3.73}$$

利用引理3.5，我们可以推导出（1.11）的弱形式。对于任意测试函数 $g(x,v)\in L^2_\nu(\Omega\times\mathbb{R}^3)$，满足 $v\cdot\nabla_x g\in L^2(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 且 $g\in L^2_\gamma$，有

$$\int_\gamma Rg(v\cdot n)-\left\langle v\cdot\nabla_x g,R\right\rangle+\varepsilon^{-1}\left\langle\mathcal{L}[R],g\right\rangle=\left\langle S,g\right\rangle. \tag{3.74}$$

3.2.1. 边界与源项的估计。 以下估计可由与下式类似的论证得到[25, 节 3] 中的 $\alpha=1$，因此省略细节，仅给出结果。下文假设g 是一个给定函数，且 $2\le r\le 6$。

对 h的估计。

引理 3.6。 在假设 (1.5)下，对于 h 中定义的 (3.62)，有

$$|h|_{L^2_{\gamma_-}} \lesssim o_T\varepsilon, \quad |h|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_-}} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac{3}{r}}, \quad |h|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T, \quad \sup_{\iota_1,\iota_2}\int_{v\cdot n<0}|h|\,|v\cdot n|\,\mathrm{d}v \lesssim o_T\varepsilon. \tag{3.75}$$

注 3.2. 我们可以直接计算得到，对于 $x_0\in\partial\Omega$

$$\mathbf{b}(x_0)\cdot n = \int_{\mathbb{R}^3} R(x_0)\mu^{\frac12}(v\cdot n)\mathrm{d}v = \int_{v\cdot n<0} h(x_0)\mu^{\frac12}(v\cdot n)\mathrm{d}v + \int_{v\cdot n>0} R(x_0)\mu^{\frac12}(v\cdot n)\mathrm{d}v. \tag{3.76}$$

对 S_1的估计。

引理 3.7. 在假设 (1.5)下，对于 S_1 由 (3.64)定义，我们有

$$\left\|\langle v\rangle^2 S_1\right\|_{L^2} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|S_1\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|S_1\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\varepsilon. \tag{3.77}$$

此外，我们还有正交性

$$\left\langle \mu^{\frac12}, S_1\right\rangle_v = 0, \quad \left\langle \mu^{\frac12}v, S_1\right\rangle_v = \mathbf{0}, \quad \left\langle \mu^{\frac12}|v|^2, S_1\right\rangle_v = 0. \tag{3.78}$$

S_2的估计。

引理 3.8. 在假设 (1.5)下，对于 S_2 在 (3.65)中定义的量，我们有

$$\|S_2\|_{L^1} + \|\eta(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^1} + \left\|\eta^2(S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^1} \lesssim o_T\varepsilon, \tag{3.79}$$

$$\left\|\langle v\rangle^2 S_2\right\|_{L^2} + \|\eta(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^2} + \left\|\eta^2(S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^2} \lesssim o_T, \tag{3.80}$$

$$\|S_2\|_{L^r} + \|\eta(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^r} + \left\|\eta^2(S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}-1}, \tag{3.81}$$

$$\|S_2\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} + \|\eta(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} \lesssim o_T\varepsilon,, \tag{3.82}$$

and

$$\|S_{2b}+S_{2c}\|_{L^r_xL^1_v} + \|\eta(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^r_xL^1_v} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac1r}, \tag{3.83}$$

$$|\langle S_{2a}, g\rangle| + |\langle \eta S_{2a}, g\rangle| + \left|\left\langle \eta^2 S_{2a}, g\right\rangle\right| \lesssim \left\|\langle v\rangle^2 f_1^B\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \|\nabla_v g\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon^{1-\frac1r}\|\nabla_v g\|_{L^r}. \tag{3.84}$$

此外，我们有

$$\|S_2\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\varepsilon^{-1}. \tag{3.85}$$

注 3.3. 请注意，定理 3.2 中的 BV估计在 η中不包含指数衰减，因此我们无法直接对 ηS_{2a} 和 $\eta^2 S_{2a}$进行估计。相反，我们应像 (3.84) 那样先对 v_η 进行分部积分，以研究 f_1^B:

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r} + \left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r} + \left\|\eta^2 f_1^B\right\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac2r-1}, \tag{3.86}$$

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} + \left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} \lesssim o_T\varepsilon,, \tag{3.87}$$

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r_xL^1_v} + \left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r_xL^1_v} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac1r}. \tag{3.88}$$

S_3的估计。

引理 3.9. 在假设 (1.5)下，对于 S_3 在 (3.66)中定义的量，我们有

$$|\langle S_3, g\rangle_v| \lesssim o_T\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|g|^2\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|R|^2\right)^{\frac12}, \tag{3.89}$$

因此

$$|\langle S_3, g\rangle| \lesssim o_T\|g\|_{L^2_\nu}\|R\|_{L^2_\nu} \lesssim o_T\|g\|_{L^2_\nu}\left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right). \tag{3.90}$$

此外，我们有

$$\|S_3\|_{L^2} \lesssim o_T\|R\|_{L^2_\nu}, \quad \left\|\nu^{-1}S_3\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{3.91}$$

S_4 的估计。

引理 3.10。 在假设 (1.5)下，对于 S_4 由 (3.67)定义，我们有

$$|\langle S_4, g\rangle_v| \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |f_1^B|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |R|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.92}$$

因此

$$|\langle S_4, g\rangle| \lesssim o_T \|g\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^2_\nu} \lesssim o_T \|g\|_{L^2_\nu} \left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right), \tag{3.93}$$

$$|\langle S_4, g\rangle| \lesssim o_T \left\|f_1^B\right\|_{L^2_\nu} \|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \|R\|_{L^2_\nu} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right). \tag{3.94}$$

此外，我们有

$$\|S_4\|_{L^2} \lesssim o_T \|R\|_{L^2_\nu}, \quad \left\|\nu^{-1} S_4\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{3.95}$$

S_5 的估计。

引理 3.11。 在假设 (1.5)下，对于 S_5 定义于 (3.68)中，我们有

$$|\langle S_5, g\rangle_v| \lesssim o_T \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.96}$$

因此

$$|\langle S_5, g\rangle| \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2_\nu}, \quad |\langle S_5, g\rangle| \lesssim o_T \varepsilon \|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{3.97}$$

此外，我们有

$$\|S_5\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \left\|\nu^{-1} S_5\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T. \tag{3.98}$$

关于 S_6的估计。

引理 3.12. 在假设 (1.5)下，对于 S_6 定义于 (3.69)，我们有

$$|\langle S_6, g\rangle_v| \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |R|^2\right), \tag{3.99}$$

因此

$$|\langle S_6, g\rangle| \lesssim \|g\|_{L^2_\nu} \left(\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \|\mathbf{P}[R]\|_{L^3} \|\mathbf{P}[R]\|_{L^6}\right) \lesssim \|g\|_{L^2_\nu} \|R\|_X^2. \tag{3.100}$$

此外，我们有

$$\|S_6\|_{L^2} \lesssim \left(\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \|\mathbf{P}[R]\|_{L^3} \|\mathbf{P}[R]\|_{L^6}\right) \lesssim \|R\|_X^2, \tag{3.101}$$

$$\left\|\nu^{-1} S_6\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim \|R\|^2_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{3.102}$$

3.2.2. 守恒律。

经典守恒律。

引理 3.13. 在假设 (1.5)下，我们有以下守恒律

$$\nabla_x \cdot \mathbf{b} = \left\langle \mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle_v = \left\langle \mu^{\frac{1}{2}}, S_2\right\rangle_v, \tag{3.103}$$

$$\nabla_x p + \nabla_x \cdot \varpi = \left\langle v\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle_v = \left\langle v\mu^{\frac{1}{2}}, S_2\right\rangle_v, \tag{3.104}$$

$$5\nabla_x \cdot \mathbf{b} + \nabla_x \cdot \varsigma = \left\langle |v|^2 \mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle = \left\langle |v|^2 \mu^{\frac{1}{2}}, S_2\right\rangle_v, \tag{3.105}$$

其中 $\varpi := \int_{\mathbb{R}^3} \mu^{\frac{1}{2}} (v\otimes v)(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]$ 且 $\varsigma := \int_{\mathbb{R}^3} \mu^{\frac{1}{2}} v |v|^2 (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]$。

证明。 我们将测试函数 $\mu^{\frac{1}{2}}$、$v\mu^{\frac{1}{2}}$、$|v|^2\mu^{\frac{1}{2}}$分别乘到 (1.11) 的两边，并在 $v\in\mathbb{R}^3$上积分。利用 $\mathcal{L}$ 的正交性以及引理 3.7 (由 (3.5) 得出)，即可得到结论。 □

以测试函数 $\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}$ 得到的守恒律。

引理 3.14。 在假设 (1.5)成立的条件下，对于任意光滑函数 $\varphi(x)$，有

$$\begin{aligned}&-\kappa\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle_x+\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\big\rangle \\ =&\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.106}$$

证明。 取测试函数 $g=\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}$代入（3.74），得到

$$\int_\gamma\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big)R(v\cdot n)-\big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),R\big\rangle+\varepsilon^{-1}\big\langle\mathcal{L}[R],\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle=\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle.\tag{3.107}$$

利用分解（1.12）、的奇性和正交性，其中 $\mathscr{A}$，可推得

$$\begin{aligned}&-\kappa\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle_x+\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\big\rangle \\ =&-\int_\gamma\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big)R(v\cdot n)+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.108}$$

注意到

$$R\mathbf{1}_\gamma=R\mathbf{1}_{\gamma_+}+h\mathbf{1}_{\gamma_-},\tag{3.109}$$

我们有（3.106）。 □

取测试函数 $\nabla_x\psi:\mathscr{B}$ 的守恒律。

引理 3.15。 在假设 (1.5)下，对于任意光滑函数 $\psi(x)$ 满足 $\nabla_x\cdot\psi=0$，我们有

$$\begin{aligned}&-\lambda\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle_x+\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle \\ =&\big\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.110}$$

证明。 取测试函数 $g=\nabla_x\psi:\ \ \mathscr{B}$ 作为（3.74），可得

$$\int_\gamma\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big)R(v\cdot n)-\big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),R\big\rangle+\varepsilon^{-1}\big\langle\mathcal{L}[R],\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle=\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle.\tag{3.111}$$

利用分解（1.12）、奇性以及 $\mathscr{B}$ 的正交性，我们推得

$$\begin{aligned}&-\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),v\mu^{\frac12}\cdot\mathbf{b}\Big\rangle+\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle \\ =&-\int_\gamma\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big)R(v\cdot n)+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.112}$$

这里，我们还可以进一步计算

$$\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),v\mu^{\frac12}\cdot\mathbf{b}\Big\rangle=\big\langle\overline{\mathscr{B}}\cdot\nabla_x\big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big),\mathbf{b}\big\rangle,\tag{3.113}$$

并利用 $\nabla_x\cdot\psi=0$ 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\mathscr{B}}\cdot\nabla_x\big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big)&=\begin{pmatrix}\alpha\partial_{11}\psi_1+(\gamma+\lambda)\partial_{12}\psi_2+(\gamma+\lambda)\partial_{13}\psi_3+\lambda\partial_{22}\psi_1+\lambda\partial_{33}\psi_1\\ \alpha\partial_{22}\psi_2+(\gamma+\lambda)\partial_{12}\psi_1+(\gamma+\lambda)\partial_{23}\psi_3+\lambda\partial_{11}\psi_2+\lambda\partial_{33}\psi_2\\ \alpha\partial_{33}\psi_3+(\gamma+\lambda)\partial_{13}\psi_1+(\gamma+\lambda)\partial_{23}\psi_2+\lambda\partial_{11}\psi_3+\lambda\partial_{22}\psi_3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(\alpha-\gamma-\lambda)\partial_{11}\psi_1+\lambda\partial_{22}\psi_1+\lambda\partial_{33}\psi_1\\ (\alpha-\gamma-\lambda)\partial_{22}\psi_2+\lambda\partial_{11}\psi_2+\lambda\partial_{33}\psi_2\\ (\alpha-\gamma-\lambda)\partial_{33}\psi_3+\lambda\partial_{11}\psi_3+\lambda\partial_{22}\psi_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\Delta_x\psi_1\\ \Delta_x\psi_2\\ \Delta_x\psi_3\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.114}$$

这里，我们利用 $\mathscr{B}=\Upsilon\big(|v|\big)\overline{\mathscr{B}}$存在某个函数 Υ，它只依赖于 $|v|$（见 [32, 引理 14]）。然后直接计算可得 $\alpha-\gamma-\lambda=\lambda$: 对于 $i\neq j$

$$\begin{aligned}\alpha-\gamma-2\lambda&=\int_{\mathbb{R}^3}\Upsilon\big(|v|\big)\left(\left(v_i^2-\frac13|v|^2\right)^2-\left(v_i^2-\frac13|v|^2\right)\left(v_j^2-\frac13|v|^2\right)-2v_i^2v_j^2\right)\mu(v)\mathrm{d}v\\ &=\int_{\mathbb{R}^3}\Upsilon\big(|v|\big)\Big(v_i^4-3v_i^2v_j^2\Big)\mu(v)\mathrm{d}v.\end{aligned}\tag{3.115}$$

然后我们使用球坐标

$$v_i = |v|\sin\theta\sin\varphi, \qquad v_j = |v|\sin\theta\cos\varphi, \tag{3.116}$$

进行估计

$$\alpha-\gamma-2\lambda=\int_0^\infty |v|^2\,\Upsilon\big(|v|\big)\mu\big(|v|\big)\mathrm{d}\,|v|\int_0^\pi \sin^5\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\Big(\sin^4\varphi-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi=0. \tag{3.117}$$

利用（3.109），我们得到（3.110）。 □

带测试函数 $\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}+\varepsilon^{-1}\varphi\big(|v|^2-5\big)\mu^{\frac12}$ 的守恒律。

引理 3.16. 令 在假设 （1.5）成立的条件下，对于任意满足 φ（x）的光滑函数 $\varphi\big|_{\partial\Omega}=0$，我们有 e

$$\begin{aligned}-\kappa\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle_x=&\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\varphi\Big(|v|^2-5\Big)\mu^{\frac12},S\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle.\end{aligned} \tag{3.118}$$

证明。 由（3.103）和（3.105），可得

$$\nabla_x\cdot\varsigma=\Big\langle\Big(|v|^2-5\Big)\mu^{\frac12},S\Big\rangle_v. \tag{3.119}$$

将 φ（x）$\in\mathbb{R}$ 乘到（3.119）两边，并在 $x\in\Omega$ 上积分，得到 n

$$-\big\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\big\rangle_x+\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n=\Big\langle\varphi\Big(|v|^2-5\Big)\mu^{\frac12},S\Big\rangle. \tag{3.120}$$

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$（3.120）与（3.106）相加以消去 $\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\varphi,\ \varsigma\big\rangle_x$ 可得

$$\begin{aligned}&-\kappa\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle_x+\varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n\\=&\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\varphi\Big(|v|^2-5\Big)\mu^{\frac12},S\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle.\end{aligned} \tag{3.121}$$

假设 $\varphi\big|_{\partial\Omega}=0$ 完全消除了（$\varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n$ 中的边界项（3.121）。因此，有（3.118）。

□

带测试函数 $\nabla_x\psi:\ \mathscr{B}+\varepsilon^{-1}\psi\cdot v\mu^{\frac12}$ 的守恒律。

引理 3.17。 在假设 （1.5）下，对于任意满足 ψ（x）的光滑函数 $\nabla_x\cdot\psi=0,\ \ \psi\big|_{\partial\Omega}=0$，有

$$\begin{aligned}-\lambda\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle_x=&\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle.\end{aligned} \tag{3.122}$$

证明。 将 $\psi(x)\in\mathbb{R}^3$ 两边乘以并对 (3.104) 在 $x\in\Omega$ 上积分，得到

$$-\big\langle\nabla_x\cdot\psi,p\big\rangle_x-\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle_x+\int_{\partial\Omega}\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n=\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle. \tag{3.123}$$

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$(3.123) 和 (3.110) 相加以消去 $\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle_x$ 可得

$$\begin{aligned}&-\lambda\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle-\varepsilon^{-1}\big\langle\nabla_x\cdot\psi,p\big\rangle_x+\varepsilon^{-1}\int_{\partial\Omega}\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n\\=&\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},h\big\rangle_{\gamma_-}-\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},R\big\rangle_{\gamma_+}+\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle+\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle.\end{aligned} \tag{3.124}$$

假设 $\nabla_x\cdot\psi=0$ 和 $\psi\big|_{\partial\Omega}=0$ 消去 $\varepsilon^{-1}\langle\nabla_x\cdot\psi,p\rangle_x$ 以及 $\varepsilon^{-1}\int_\partial\Omega\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n$ 在 (3.124) 中。因此，我们得到 (3.122)。 □

3.3. 能量估计。

命题 3.18. 在假设 (1.5)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.125}$$

证明。只需说明

$$\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.126}$$

弱形式。取测试函数 $g=\varepsilon^{-1}R$ 代入 (3.74)，得到

$$\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_\gamma R^2(v\cdot n)+\varepsilon^{-2}\langle\mathcal{L}[R],R\rangle=\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle. \tag{3.127}$$

注意到

$$\int_\gamma R^2(v\cdot n)=|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}-|R|^2_{L^2_{\gamma_-}}=|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}-|h|^2_{L^2_\gamma}, \tag{3.128}$$

and

$$\langle\mathcal{L}[R],R\rangle\gtrsim\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2_\nu}. \tag{3.129}$$

于是我们知道

$$\varepsilon^{-1}|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2_\nu}\lesssim\left|\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle\right|+\varepsilon^{-1}|h|^2_{L^2_\gamma}. \tag{3.130}$$

利用引理 3.6，我们得到

$$\varepsilon^{-1}|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2}\lesssim\left|\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle\right|+o_T\varepsilon. \tag{3.131}$$

源项估计。我们将其拆分

$$\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle=\varepsilon^{-1}\langle S,\mathbf{P}[R]\rangle+\varepsilon^{-1}\langle S,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\rangle. \tag{3.132}$$

我们可以直接利用引理 3.7 – 引理 3.12进行界定

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1}\langle S,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\rangle\right|\lesssim&\varepsilon^{-1}\|S\|_{L^2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}\\ \lesssim&\big(o(1)+o_T\big)\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2}+o_T\|R\|_X^2+\|R\|_X^4+o_T.\end{aligned} \tag{3.133}$$

利用 Γ 的正交性，我们得到

$$\varepsilon^{-1}\langle S,\mathbf{P}[R]\rangle=\varepsilon^{-1}\langle S_1+S_2,\mathbf{P}[R]\rangle. \tag{3.134}$$

根据引理 3.7，我们知道

$$\left|\varepsilon^{-1}\langle S_1,\mathbf{P}[R]\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\|S_1\|_{L^2}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim o_T\|\mathbf{P}[R]\|^2_{L^2}+o_T. \tag{3.135}$$

此外，根据引理 3.8 和注释 3.3，我们有

$$\varepsilon^{-1}\langle S_2,\mathbf{P}[R]\rangle=\varepsilon^{-1}\langle S_{2a},\mathbf{P}[R]\rangle+\varepsilon^{-1}\langle S_{2b}+S_{2c},\mathbf{P}[R]\rangle. \tag{3.136}$$

对 S_{2a} 项关于 v_η 进行分部积分后，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1}\langle S_2,\mathbf{P}[R]\rangle\right|\lesssim&\varepsilon^{-1}\Big(\left\|f_1^B\right\|_{L^2_xL^1_v}+\|S_{2b}+S_{2c}\|_{L^2_xL^1_v}\Big)\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2_xL^\infty_v}\\ \lesssim&o_T\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{-1}\|\mathbf{P}[R]\|^2_{L^2}+o_T.\end{aligned} \tag{3.137}$$

总计，我们有

$$\left|\varepsilon^{-1}\langle S,R\rangle\right|\lesssim o_T\varepsilon^{-1}\|\mathbf{P}[R]\|^2_{L^2}+\big(o(1)+o_T\big)\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2}+o_T\|R\|_X^2+\|R\|_X^4+o_T. \tag{3.138}$$

综合。将（3.138）代入（3.131），我们有

$$\varepsilon^{-1}|R|^2_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^2_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{-1}\|\mathbf{P}[R]\|^2_{L^2}+o_T\|R\|^2_X+\|R\|^4_X+o_T. \tag{3.139}$$

于是我们有（3.126）。 □

推论 3.18.1. 在假设 （1.5）下，我们有

$$\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^6}+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T. \tag{3.140}$$

证明。 通过插值和命题3.18，我们得到

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^6}&\lesssim\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^{\frac13}_{L^2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^{\frac23}_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \qquad (3.141)\\ &\lesssim\Big(o_T\|R\|^{\frac13}_X+\|R\|^{\frac13}_X+o_T\Big)\Big(\varepsilon^{\frac12}\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\Big)^{\frac23}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T,\\ \left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}&\lesssim|R|^{\frac12}_{L^2_{\gamma_+}}|R|^{\frac12}_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}} \qquad (3.142)\\ &\lesssim\Big(o_T\|R\|^{\frac12}_X+\|R\|^{\frac12}_X+o_T\Big)\Big(\varepsilon^{\frac12}|R|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}}\Big)^{\frac12}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T.\end{aligned}$$

于是所需结果由（3.141）（3.142）得出。 □

3.4. 核估计。

3.4.1. p的估计。

命题 3.19. 在假设 (1.5)下，有

$$\varepsilon^{-\frac12}\|p\|_{L^2}+\|p\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|^2_X+o_T. \tag{3.143}$$

证明。只需证明 $2\le r\le 6$

$$\|p\|_{L^r}\lesssim\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}+o_T\varepsilon^{\frac2r}. \tag{3.144}$$

弱形式。记

$$\psi(x,v):=\mu^{\frac12}(v)\Big(v\cdot\nabla_x\varphi(x)\Big), \tag{3.145}$$

其中 $\varphi(x)$ 通过求解椭圆问题定义

$$\begin{cases}-\Delta_x\varphi=p|p|^{r-2} & \text{in }\ \Omega,\\ \varphi=0 & \text{on }\ \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.146}$$

根据标准椭圆估计 [56], 存在一个解 φ 满足

$$\|\psi\|_{W^{1,\frac{r}{r-1}}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim\|\varphi\|_{W^{2,\frac{r}{r-1}}}\lesssim\left\|p|p|^{r-2}\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\lesssim\|p\|^{r-1}_{L^r}. \tag{3.147}$$

基于Sobolev嵌入和迹估计，对于 $2\le r\le 6$，我们有

$$\|\psi\|_{L^2}+|\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_\gamma}\lesssim\|p\|^{r-1}_{L^r}. \tag{3.148}$$

取测试函数 $g=\psi$ 在（3.74）中，我们得到

$$\int_\gamma R\psi\mathrm{d}\gamma-\langle R,v\cdot\nabla_x\psi\rangle=\langle S,\psi\rangle. \tag{3.149}$$

由引理 3.6，我们知道

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma R\psi\mathrm{d}\gamma\right|&\le\left|\int_{\gamma_+}R\psi\mathrm{d}\gamma\right|+\left|\int_{\gamma_-}h\psi\mathrm{d}\gamma\right|\lesssim\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}|\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\gamma_+}}+|h|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_-}}|\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\gamma_-}} \qquad (3.150)\\ &\lesssim o(1)|\psi|^{\frac{r}{r-1}}_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_\gamma}+\left|\mu^{\frac14}R\right|^r_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}+|h|^r_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_-}}\lesssim o(1)\|p\|^r_{L^r}+\left|\mu^{\frac14}R\right|^r_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}+o_T\varepsilon^3.\end{aligned}$$

由奇性和正交性可得

$$\left\langle \mu^{\frac{1}{2}}(v\cdot\mathbf{b}), v\cdot\nabla_x\psi\right\rangle = \left\langle (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R], v\cdot\nabla_x\psi\right\rangle = 0. \tag{3.151}$$

由于 $\overline{\mathscr{A}}$ 的正交性，我们知道

$$\left\langle \mu^{\frac{1}{2}}\frac{|v|^2-5}{2}c, v\cdot\nabla_x\psi\right\rangle = \left\langle c, \mu^{\frac{1}{2}}\overline{\mathscr{A}}\cdot\nabla_x\psi\right\rangle = 0. \tag{3.152}$$

此外，我们有

$$-\left\langle \mu^{\frac{1}{2}}p, v\cdot\nabla_x\psi\right\rangle = -\left\langle p\mu, v\cdot\nabla_x\Big(v\cdot\nabla_x\varphi\Big)\right\rangle = -\frac{1}{3}\int_\Omega p(\Delta_x\varphi)\int_{\mathbb{R}^3}\mu|v|^2 = \|p\|_{L^r}^r. \tag{3.153}$$

综上，我们有

$$\|p\|_{L^r}^r \lesssim \left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}^r + o_T\varepsilon^3 + \left|\langle S,\psi\rangle\right|. \tag{3.154}$$

源项估计。由于 Γ 和引理 3.7，我们知道

$$\langle S,\psi\rangle = \langle S_2,\psi\rangle. \tag{3.155}$$

根据 Hardy 不等式，并对 v_η 关于 S_{2a}分部积分，基于引理 3.8 和备注3.3，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\langle S_2,\psi\rangle\right| &\le \left|\left\langle S_2,\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\right| + \left|\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\right| = \left|\left\langle S_2,\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\right| + \left|\varepsilon\left\langle \eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\right| \\
&\lesssim \left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\psi|_{L^2_\gamma} + \varepsilon\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^r}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \\
&\lesssim \left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\psi|_{L^2_\gamma} + \varepsilon\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^r}\|\partial_{\mathfrak{n}}\psi\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \\
&\lesssim o_T\varepsilon|\psi|_{L^2_\gamma} + o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}}\|\partial_{\mathfrak{n}}\psi\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}}\|p\|_{L^r}^{r-1} \lesssim o_T\|p\|_{L^r}^r + o_T\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

将（3.156）代入（3.154），我们已证明

$$\|p\|_{L^r}^r \lesssim \left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}^r + o_T\varepsilon^2. \tag{3.157}$$

因此，我们得到（3.144）。 □

3.4.2. c 的估计。

命题 3.20。在假设 （1.5）下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|c\|_{L^2} + \|c\|_{L^6} \lesssim o_T\|R\|_X + \|R\|_X^2 + o_T. \tag{3.158}$$

证明。只需证明 $2\le r\le 6$ 的情形

$$\|c\|_{L^r} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4r}}\|R\|_X^{\frac{1}{r}}\|c\|_{L^r} + \left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r} + o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_X + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_X^2 + o_T\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\varepsilon^{\frac{2}{r}}\big). \tag{3.159}$$

弱形式。 我们考虑守恒律 (3.118)，其中光滑测试函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_x\varphi = c|c|^{r-2} & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.160}$$

根据标准椭圆估计 [56], , 存在一个解 φ 满足

$$\|\varphi\|_{W^{2,\frac{r}{r-1}}} \lesssim \left\|c|c|^{r-2}\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \lesssim \|c\|_{L^r}^{r-1}. \tag{3.161}$$

根据Sobolev嵌入和迹估计，对于 $2\le r\le 6$，我们有

$$\|\varphi\|_{H^1} + |\nabla_x\varphi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}} \lesssim \|c\|_{L^r}^{r-1}. \tag{3.162}$$

因此，由（3.118），我们有

$$\begin{aligned}\kappa\|c\|_{L^r}^r =&\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\right\rangle_{\gamma_-}-\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\right\rangle_{\gamma_+}+\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},S\right\rangle+\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.163}$$

由引理 3.6，可得

$$\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\right\rangle_{\gamma_-}\right|\lesssim|\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\gamma_-}}|h|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_-}}\lesssim o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^3,\tag{3.164}$$

$$\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\right\rangle_{\gamma_+}\right|\lesssim|\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\gamma_+}}|R|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}\lesssim o(1)\|c\|_{L^r}^r+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}^r,\tag{3.165}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\right|\lesssim&\left\|v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big)\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r}\\\lesssim&o(1)\|c\|_{L^r}^r+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r}^r.\end{aligned}\tag{3.166}$$

综合以上结果，可得

$$\|c\|_{L^r}^r\lesssim\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}^r+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^3+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S\right\rangle\right|+\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle\right|.\tag{3.167}$$

源项估计。由于 Γ 的正交性以及引理 3.7，可得

$$\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S\right\rangle=\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S_2\right\rangle.\tag{3.168}$$

类似于（3.156），基于引理 3.8、注3.3 以及 Hardy 不等式，我们有 e

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S_2\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left|\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\rangle\right|\\\lesssim&\left|\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\rangle\right|\lesssim\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^2_xL^1_v}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\|_{L^2}\\\lesssim&\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^2_xL^1_v}\|\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\|_{L^2}\lesssim o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}.\end{aligned}\tag{3.169}$$

由引理 3.7，我们可直接估计

$$\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_1\right\rangle\right|\lesssim\|\nabla_x\varphi\|_{L^2}\|S_1\|_{L^2}\lesssim o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^r.\tag{3.170}$$

与（3.156）类似，根据引理 3.8、注3.3 以及 Hardy 不等式，我们有 e

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_2\right\rangle\right|\leq&\left|\left\langle S_2,\nabla_x\varphi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\right|+\left|\varepsilon\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi\right\rangle\right|\\\lesssim&\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\nabla_x\varphi|_{L^2_\gamma}+\varepsilon\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^r}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\\\lesssim&\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\nabla_x\varphi|_{L^2_\gamma}+\varepsilon\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^r}\|\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{r}{r-1}}\|c\|_{L^r}^{r-1}\lesssim o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{3.171}$$

根据引理 3.9、引理 3.10和引理 3.11，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_3+S_4+S_5\right\rangle\right|\lesssim&\|\nabla_x\varphi\|_{L^2}\|S_3+S_4+S_5\|_{L^2}\\\lesssim&o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\|R\|_{L^2}^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}\lesssim o_T\|c\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}.\end{aligned}\tag{3.172}$$

最后，根据引理 3.12，我们有

$$\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_6\right\rangle\right|\lesssim\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\big]\right\rangle\right|+\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\big]\right\rangle\right|.\tag{3.173}$$

奇性和正交性结合插值 $\|\mathfrak{b}\|_{L^3}\lesssim\|\mathfrak{b}\|_{L^2}^{\frac12}\|\mathfrak{b}\|_{L^6}^{\frac12}\lesssim\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X$，可推出

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\big]\right\rangle\right|\lesssim&\left|\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\left[\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b}),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\right|\\\lesssim&\|\nabla_x\varphi\|_{L^{\frac{3r}{2r-3}}}\|\mathbf{b}\|_{L^3}\|c\|_{L^r}\lesssim\|\varphi\|_{W^{2,\frac{r}{r-1}}}\|\mathbf{b}\|_{L^3}\|c\|_{L^r}\lesssim\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X\|c\|_{L^r}^r.\end{aligned}\tag{3.174}$$

此外，利用插值 $\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^3} \lesssim \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R\|_X$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}, \Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\right| &\lesssim \|\nabla_x\varphi\|_{L^2}\|R\|_{L^6}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^3} \\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|c\|_{L^r}^{r-1}\|R\|_X^2 \lesssim o(1)\|c\|_{L^r}^r + \varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^{2r}.\end{aligned} \tag{3.175}$$

因此，我们知道

$$\left|\left\langle \nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}, S_6\right\rangle\right| \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4}}\|R\|_X\|c\|_{L^r}^r + o(1)\|c\|_{L^r}^r + \varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^{2r}. \tag{3.176}$$

综上可得

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle \varphi\big(|v|^2-5\big)\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}, S\right\rangle\right| \\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4}}\|R\|_X\|c\|_{L^r}^r + \big(o(1)+o_T\big)\|c\|_{L^r}^r + o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^r + \varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^{2r} + o_T\left(\varepsilon^{\frac{r}{2}}+\varepsilon^2\right).\end{aligned} \tag{3.177}$$

将（3.177）代入（3.167），可得

$$\|c\|_{L^r}^r \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4}}\|R\|_X\|c\|_{L^r}^r + \left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}^r + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r}^r + o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^r + \varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|_X^{2r} + o_T\left(\varepsilon^{\frac{r}{2}}+\varepsilon^2\right). \tag{3.178}$$

因此，结论（3.159）成立。 □

3.4.3. b 的估计。

命题 3.21。 在假设 (1.5)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{b}\|_{L^2} + \|\mathbf{b}\|_{L^6} \lesssim o_T\|R\|_X + \|R\|_X^2 + o_T. \tag{3.179}$$

证明。只需证明 $2 \le r \le 6$

$$\|\mathbf{b}\|_{L^r} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4r}}\|R\|_X^{\frac{1}{r}}\|\mathbf{b}\|_{L^r} + \left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}} + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r} + o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_X + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_X^2 + o_T\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\varepsilon^{\frac{2}{r}}\big). \tag{3.180}$$

弱形式。假设 $(\psi, q) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ （其中 q 的平均值为零）是斯托克斯问题的唯一强解

$$\begin{cases} -\lambda\Delta_x\psi + \nabla_x q &= \mathbf{b}\,|\mathbf{b}|^{r-2} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla_x\cdot\psi &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \psi &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.181}$$

我们有标准估计 [17]

$$\|\psi\|_{W^{2,\frac{r}{r-1}}} + \|q\|_{W^{1,\frac{r}{r-1}}} \lesssim \left\|\mathbf{b}\,|\mathbf{b}|^{r-2}\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \lesssim \|\mathbf{b}\|_{L^r}^{r-1}. \tag{3.182}$$

基于Sobolev嵌入和迹估计，对于 $2 \le r \le 6$，我们有

$$\|\psi\|_{H^1} + |\nabla_x\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}} + \|q\|_{L^2} + |q|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}} \lesssim \|\mathbf{b}\|_{L^r}^{r-1}. \tag{3.183}$$

在等式 $\mathbf{b}$ （3.181）两边乘以 $\langle\nabla_x q$，并对 $\mathbf{b}\rangle_x$进行分部积分，我们有

$$-\left\langle\lambda\Delta_x\psi, \mathbf{b}\right\rangle_x - \left\langle q, \nabla_x\cdot\mathbf{b}\right\rangle_x + \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{b}\cdot n) = \|\mathbf{b}\|_{L^r}^r, \tag{3.184}$$

由结合式（3.103）与注释 3.2，可得

$$-\left\langle\lambda\Delta_x\psi, \mathbf{b}\right\rangle_x - \left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle + \left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, R\right\rangle_{\gamma_+} - \left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, h\right\rangle_{\gamma_-} = \|\mathbf{b}\|_{L^r}^r. \tag{3.185}$$

将（3.185）代入（3.122），以替换 $-\left\langle\lambda\Delta_x\psi、\mathbf{b}\right\rangle_x$，得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r =& -\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, h\right\rangle_{\gamma_-} + \left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, R\right\rangle_{\gamma_+} + \left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B}, h\right\rangle_{\gamma_-} - \left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B}, R\right\rangle_{\gamma_+} \\ &+ \left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big), (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle - \left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle + \varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle + \left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B}, S\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.186}$$

由引理 3.6，可得

$$\begin{aligned}\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},h\right\rangle_{\gamma_-}\right|+\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},h\right\rangle_{\gamma_-}\right| &\lesssim \left(|q|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}}+|\nabla_x\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}}\right)|h|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_-}} \\ &\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^3, \end{aligned}\tag{3.187}$$

$$\begin{aligned}\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},R\right\rangle_{\gamma_+}\right|+\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},R\right\rangle_{\gamma_+}\right| &\lesssim \left(|q|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}}+|\nabla_x\psi|_{L^{\frac{2r}{2r-3}}_{\partial\Omega}}\right)|R|_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}} \\ &\lesssim o(1)\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+\left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|^r_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}, \end{aligned}\tag{3.188}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\right| &\lesssim \left\|v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big)\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r} \\ &\lesssim o(1)\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^r_{L^r}. \end{aligned}\tag{3.189}$$

综上所述，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}\lesssim&\left|\mu^{\frac{1}{4}}R\right|^r_{L^{\frac{2r}{3}}_{\gamma_+}}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^3\\ &+\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\right|+\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\right\rangle\right|. \end{aligned}\tag{3.190}$$

源项估计。由于 Γ 的正交性以及引理 3.7，我们有

$$\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\right|=\left|\left\langle q,\mu^{\frac{1}{2}}S_2\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S_2\right\rangle\right|.\tag{3.191}$$

利用引理 3.8和注 3.3，对 v_η 在 S_{2a}上分部积分，得到

$$\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},S_2\right\rangle\right|\lesssim\|q\|_{L^2}\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_xL^1_v}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|q\|_{L^2}\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}.\tag{3.192}$$

类似于（3.156），我们有

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S_2\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left|\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\right| \\ \lesssim&\left|\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\right|\lesssim\left\|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right\|_{L^2_xL^1_v}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\|_{L^2} \\ \lesssim&\left\|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right\|_{L^2_xL^1_v}\|\partial_{\mathfrak{n}}\psi\|_{L^2}\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}\tag{3.193}$$

由引理 3.7，我们可直接估计

$$\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_1\right\rangle\right|\lesssim\|\nabla_x\psi\|_{L^2}\|S_1\|_{L^2}\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^r.\tag{3.194}$$

与（3.156）类似，根据引理 3.8、注3.3 和 Hardy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_2\right\rangle\right|\le&\left|\left\langle S_2,\nabla_x\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\right|+\left|\varepsilon\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi\right\rangle\right| \\ \lesssim&\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\nabla_x\psi|_{L^2_\gamma}+\varepsilon\left\|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right\|_{L^r}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}} \\ \lesssim&\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}|\nabla_x\psi|_{L^2_\gamma}+\varepsilon\left\|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right\|_{L^r}\|\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}}\|\mathbf{b}\|^{r-1}_{L^r}\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^2. \end{aligned}\tag{3.195}$$

根据引理 3.9、引理 3.10和引理 3.11，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_3+S_4+S_5\right\rangle\right|&\lesssim\|\nabla_x\psi\|_{L^2}\|S_3+S_4+S_5\|_{L^2} \\ &\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\|R\|^r_{L^2}+o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}\lesssim o_T\|\mathbf{b}\|^r_{L^r}+o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}\|R\|^r_X+o_T\varepsilon^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}\tag{3.196}$$

最后，根据引理 3.12，我们得到

$$\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_6\right\rangle\right|\lesssim\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\right\rangle\right|+\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\right|.\tag{3.197}$$

奇性和正交性意味着

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\right\rangle\right| \\ \lesssim&\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(v\cdot\mathbf{b}\right),\mu^{\frac12}\left(v\cdot\mathbf{b}\right)\right]\right\rangle\right|+\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\right|.\end{aligned}\tag{3.198}$$

我们可以直接估计

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(v\cdot\mathbf{b}\right),\mu^{\frac12}\left(v\cdot\mathbf{b}\right)\right]\right\rangle\right|\lesssim&\|\nabla_x\psi\|_{L^{\frac{3r}{2r-3}}}\|\mathbf{b}\|_{L^3}\|\mathbf{b}\|_{L^r}\\ \lesssim&\|\psi\|_{W^{2,\frac{r}{r-1}}}\|\mathbf{b}\|_{L^3}\|\mathbf{b}\|_{L^r}\lesssim\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r.\end{aligned}\tag{3.199}$$

由于奇性和 $\mathscr{B}_{ii}=\mathcal{L}^{-1}\left[\left(|v_i|^2-\frac13|v|^2\right)\mu^{\frac12}\right]$，注意到 $\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]$ 仅依赖于 $|v|^2$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\right|\\ =&\left|\left\langle \partial_1\psi_1\mathscr{B}_{11}+\partial_2\psi_2\mathscr{B}_{22}+\partial_3\psi_3\mathscr{B}_{33},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\right|\\ =&\left|\left\langle \left(\nabla_x\cdot\psi\right)\mathscr{B}_{ii},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\right|=0.\end{aligned}\tag{3.200}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\right|\lesssim&\|\nabla_x\psi\|_{L^2}\|R\|_{L^6}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^3}\\ \lesssim&\varepsilon^{\frac12}\|\mathbf{b}\|_{L^r}^{r-1}\|R\|_X^2\lesssim o(1)\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^{2r}.\end{aligned}\tag{3.201}$$

因此，我们知道

$$\left|\left\langle \nabla_x\psi:\mathscr{B},S_6\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+o(1)\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^{2r}.\tag{3.202}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle q\mu^{\frac12},S\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\right\rangle\right|+\left|\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\right\rangle\right|\\ \lesssim&\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+\left(o(1)+o_T\right)\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^r+\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^{2r}+o_T\left(\varepsilon^{\frac r2}+\varepsilon^2\right).\end{aligned}\tag{3.203}$$

将（3.203）代入（3.190），得到

$$\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r\lesssim\varepsilon^{\frac14}\|R\|_X\|\mathbf{b}\|_{L^r}^r+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^{\frac{2r}{\gamma_+}}_{\frac3\gamma}}^r+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^r}^r+o_T\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^r+\varepsilon^{\frac r2}\|R\|_X^{2r}+o_T\left(\varepsilon^{\frac r2}+\varepsilon^2\right).\tag{3.204}$$

因此，式（3.180）得证。 □

3.4.4. 核估计的综合。

命题 3.22. 在假设 (1.5)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\|\mathbf{P}[R]\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T.\tag{3.205}$$

证明。整理 Pr 命题 3.19，命题 3.20 和命题3.20，我们得到了所需结果。 □

3.5. L^∞ 估计。我们定义了由参数 $0 \le \varrho < \frac{1}{2}$ 和 $\vartheta \geq$缩放的权函数 0,

$$w(v) := \langle v \rangle^{\vartheta} \, \mathrm{e}^{\varrho \frac{|v|^2}{2}}, \tag{3.206}$$

$$\widetilde{w}(v) := \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(v) w(v)} = (2\pi)^{\frac{3}{4}} \, \langle v \rangle^{-\vartheta} \, \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)|v|^2} \tag{3.207}$$

引理 3.23. 我们有

$$|k(\mathfrak{u}, v)| \lesssim \left(|\mathfrak{u} - v| + |\mathfrak{u} - v|^{-1} \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}|\mathfrak{u}-v|^2 - \frac{1}{4}\frac{\left| |\mathfrak{u}|^2 - |v|^2 \right|^2}{|\mathfrak{u}-v|^2}}. \tag{3.208}$$

设 $0 \le \varrho < \frac{1}{2}$ 和 $\vartheta \geq 0$。那么对于充分小的 $\delta > 0$ 以及任意的 $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\delta|\mathfrak{u}-v|^2} \, |k(\mathfrak{u}, v)| \, \frac{\langle v \rangle^{\vartheta} \, \mathrm{e}^{\varrho \frac{|v|^2}{2}}}{\langle \mathfrak{u} \rangle^{\vartheta} \, \mathrm{e}^{\varrho \frac{|\mathfrak{u}|^2}{2}}} \mathrm{d}\mathfrak{u} \lesssim \nu^{-1}. \tag{3.209}$$

证明。 这是 [35, 引理 3] 和 [38, 引理 2。3]。 □

命题 3.24. 在假设 (1.5)下，我们有

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} |R|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T \|R\|_X + \|R\|_X^2 + o_T. \tag{3.210}$$

证明。我们将使用众所周知的 $L^2 - L^6 - L^\infty$ 框架。

步骤 1：温和公式。记加权解为

$$R_w(x, v) := w(v) R(x, v), \tag{3.211}$$

并记加权非局部算子为

$$K_{w(v)}[R_w](v) := w(v) K \left[\frac{R_w}{w} \right](v) = \int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v, \mathfrak{u}) R_w(\mathfrak{u}) \mathrm{d}\mathfrak{u}, \tag{3.212}$$

其中

$$k_{w(v)}(v, \mathfrak{u}) := k(v, \mathfrak{u}) \frac{w(v)}{w(\mathfrak{u})}. \tag{3.213}$$

两边同乘 εw，得到（1.11）：

$$\begin{cases} \varepsilon v \cdot \nabla_x R_w + \nu R_w = K_w[R_w](x, v) + \varepsilon w(v) S(x, v) \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ R_w(x_0, v) = w h(x_0, v) \quad \text{for} \quad x_0 \in \partial\Omega \quad \text{and} \quad v \cdot n < 0, \end{cases} \tag{3.214}$$

根据杜哈梅尔原理，我们可以沿特征线将方程（3.214）的解改写为

$$\begin{aligned} R_w(x, v) =& w(v) h(x_b, v) \mathrm{e}^{-\nu(v) t_b} + \int_0^{t_b} w(v) \varepsilon S\Big(x - \varepsilon(t_b - s)v, v\Big) \mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b - s)} \mathrm{d}s \\ &+ \int_0^{t_b} \int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v, \mathfrak{u}) R_w\Big(x - \varepsilon(t_b - s)\mathfrak{u}, \mathfrak{u}\Big) \mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b - s)} \mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.215}$$

其中

$$t_b(x, v) := \inf \left\{ t > 0 : x - \varepsilon t v \notin \Omega \right\}, \tag{3.216}$$

and

$$x_b(x, v) := x - \varepsilon t_b(x, v) v \notin \Omega. \tag{3.217}$$

我们进一步将非局部项沿特征线改写为

$$
\begin{aligned}
&R_w(x,v) \qquad (3.218)\\
=&w(v)h(x_b,v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_b}+\int_0^{t_b} w(v)\varepsilon S\Big(x-\varepsilon(t_b-s)v,v\Big)\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})h(x_b',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_b'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{t_b'}\varepsilon S\Big(x-\varepsilon(t_b-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{t_b'}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')R_w\Big(x-\varepsilon(t_b-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中

$$
t_b'(x,v;s,\mathfrak{u}):=\inf\big\{t>0:x-\varepsilon(t_b-s)-\varepsilon t\mathfrak{u}\notin\Omega\big\}, \qquad (3.219)
$$

and

$$
x_b'(x,v;s,\mathfrak{u}):=x-\varepsilon(t_b-s)-\varepsilon t_b'(x,v;s,\mathfrak{u})\mathfrak{u}\notin\Omega. \qquad (3.220)
$$

步骤 2：源项和边界项的估计。根据引理 3.6 – 引理 3.12，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Big|w(v)h(x_b,v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_b}\Big|+\left|\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})h(x_b',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_b'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\right| \qquad (3.221)\\
\lesssim&|h|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_b} w(v)\varepsilon S\Big(x-\varepsilon(t_b-s)v,v\Big)\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}s\right| \qquad (3.222)\\
&+\left|\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{t_b'}\varepsilon S\Big(x-\varepsilon(t_b-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\right|\\
\lesssim&\varepsilon\left\|\nu^{-1}S\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T+o_T\varepsilon\left\|R\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon\left\|R\right\|^2_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|^2_X+o_T.
\end{aligned}
$$

步骤 3：非局部项的估计。(3.218) 中唯一剩余的项是非局部项

$$
\begin{aligned}
&\qquad (3.223)\\
I:=&\int_0^{t_b}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{t_b'}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')R_w\Big(x-\varepsilon(t_b-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(t_b-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

下面分五种情况进行估计：

$$
I:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5. \qquad (3.224)
$$

情况 I：I_1：$|v|\geq N$。根据引理 3.23，我们有

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\right|\lesssim\frac{1}{1+|v|}\lesssim\frac{1}{N}. \qquad (3.225)
$$

因此，我们得到

$$
|I_1|\lesssim\frac{1}{N}\left\|R_w\right\|_{L^\infty}. \qquad (3.226)
$$

情形 II: I_2: $|v| \le N$、$|\mathfrak{u}| \ge 2N$，或 $|\mathfrak{u}| \le 2N$、$|\mathfrak{u}'| \ge 3N$。注意，这意味着 $|\mathfrak{u}-v| \ge N$或 $|\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'| \ge N$。因此，相应地，以下任一项都成立:

$$\left|k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\right| \le C\mathrm{e}^{-\delta N^2}\left|k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\right|\mathrm{e}^{\delta|v-\mathfrak{u}|^2}, \tag{3.227}$$

$$\left|k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')\right| \le C\mathrm{e}^{-\delta N^2}\left|k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')\right|\mathrm{e}^{\delta|\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'|^2}. \tag{3.228}$$

根据引理 3.23，我们知道

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\right|\mathrm{e}^{\delta|v-\mathfrak{u}|^2}\mathrm{d}\mathfrak{u} < \infty, \tag{3.229}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|k_{w(\mathfrak{u}}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')\right|\mathrm{e}^{\delta|\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'|^2}\mathrm{d}\mathfrak{u}' < \infty. \tag{3.230}$$

因此，我们有

$$|I_2| \lesssim \mathrm{e}^{-\delta N^2}\left\|R_w\right\|_{L^\infty}. \tag{3.231}$$

情形 III: I_3: $t_b'-r \le \delta$且 $|v| \le N, |\mathfrak{u}| \le 2N, |\mathfrak{u}'| \le 3N$。在此情形下，由于关于 r 的积分仅限于一个非常短的区间，因此其贡献很小，具体为

$$|I_3| \lesssim \left|\int_{t_b'-\delta}^{t_b'}\mathrm{e}^{-(t_b'-r)}\mathrm{d}r\right|\left\|R_w\right\|_{L^\infty} \lesssim \delta\left\|R_w\right\|_{L^\infty}. \tag{3.232}$$

情形 IV: I_4: $t_b'-r \ge |\ln(\delta)|$且 $|v| \le N, |\mathfrak{u}| \le 2N, |\mathfrak{u}'| \le 3N$。在此情形下，$t_b'-r$ 显著增大，因此 $\mathrm{e}^{-(t_b'-r)} \le \delta$ 非常小。因此，其贡献很小

$$|I_4| \lesssim \left|\int_{|\ln(\delta)|}^{\infty}\mathrm{e}^{-(t_b'-r)}\mathrm{d}r\right|\left\|R_w\right\|_{L^\infty} \lesssim \delta\left\|R_w\right\|_{L^\infty}. \tag{3.233}$$

情形 V: I_5: $\delta \le t_b'-r \le |\ln(\delta)|$且 $|v| \le N, |\mathfrak{u}| \le 2N, |\mathfrak{u}'| \le 3N$。这是最复杂的情形。由于 $k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})$ 可能具有关于 $|v-\mathfrak{u}|^{-1}$ 的可积奇异性，我们可以引入截断核 $k_N(v,\mathfrak{u})$，它是光滑的，且具有紧支撑范围，使得

$$\sup_{|v|\le 3N}\int_{|\mathfrak{u}|\le 3N}\left|k_N(v,\mathfrak{u})-k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\right|\mathrm{d}\mathfrak{u} \le \frac{1}{N}. \tag{3.234}$$

然后我们可以拆分

$$\begin{aligned}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') =& k_N(v,\mathfrak{u})k_N(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) + \Big(k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})-k_N(v,\mathfrak{u})\Big)k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \\ &+ \Big(k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')-k_N(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')\Big)k_N(v,\mathfrak{u}).\end{aligned} \tag{3.235}$$

这意味着我们进一步将 I_5 拆分为

$$I_5 := I_{5,1}+I_{5,2}+I_{5,3}. \tag{3.236}$$

根据（3.234），我们有

$$|I_{5,2}| \lesssim \frac{1}{N}\left\|R_w\right\|_{L^\infty}, \quad |I_{5,3}| \lesssim \frac{1}{N}\left\|R_w\right\|_{L^\infty}. \tag{3.237}$$

因此，唯一剩下的项是 $I_{5,\ 1}$。注意，我们总有 $x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u} \in \Omega$。因此，我们定义变量代换 $\mathfrak{u} \to y$ 为 $y=(y_1,y_2,y_3) = x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}$。然后，雅可比行列式

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathfrak{u}}\right| = \left|\left|\begin{array}{ccc}\varepsilon(t_b'-r) & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon(t_b'-r) & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon(t_b'-r)\end{array}\right|\right| = \varepsilon^3(t_b'-r)^3 \ge \varepsilon^3\delta^3. \tag{3.238}$$

考虑 根据 $|v|, |\mathfrak{u}|, |\mathfrak{u}'| \le 3N$，我们知道 $|R_w| \simeq |R|$。此外，由于 k_N有界，我们估计

$$|I_{5,1}| \lesssim \int_{|\mathfrak{u}|\le 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\le 3N}\int_0^{t_b'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}'. \tag{3.239}$$

利用 H¨older 不等式，我们估计

(3.240)

$$\begin{aligned}
&\int_{|\mathfrak{u}|\le 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\le 3N}\int_0^{t_b'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\\
\le&\left(\int_{|\mathfrak{u}|\le 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\le 3N}\int_0^{t_b'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\right)^{\frac{5}{6}}\\
&\times\left(\int_{|\mathfrak{u}|\le 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\le 3N}\int_0^{t_b'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(x-\varepsilon(t_b-s)v-\varepsilon(t_b'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|^6\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(t_b'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\right)^{\frac{1}{6}}\\
\lesssim&\left|\int_0^{t_b'}\frac{1}{\varepsilon^3\delta^3}\int_{|\mathfrak{u}'|\le 3N}\int_\Omega\mathbf{1}_{\{y\in\Omega\}}\left|R(y,\mathfrak{u}')\right|^6\mathrm{e}^{-(t_b'-r)}\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\right|^{\frac{1}{6}}\lesssim\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}.
\end{aligned}$$

将（3.240）代入（3.239），得到

$$|I_{5,1}|\lesssim\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}. \tag{3.241}$$

结合（3.237），可知

$$I_5\lesssim\frac{1}{N}\|R_w\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}. \tag{3.242}$$

汇总（3.226）（3.231）（3.232）（3.233）（3.242）中的所有五种情况，得到

$$|I|\lesssim\left(\frac{1}{N}+\mathrm{e}^{-\delta N^2}+\delta\right)\|R_w\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}. \tag{3.243}$$

取 δ 足够小，再取 N 足够大，可得

$$|I|\lesssim\delta\|R_w\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}. \tag{3.244}$$

步骤 4：综合。综上所述，对于任意 $(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^3$，

$$\left|R_w(x,v)\right|\lesssim\delta\|R_w\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta^{\frac12}}\|R\|_{L^6}+o_T\varepsilon^{\frac12}\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.245}$$

因此，当 $\delta\ll 1$ 时，我们得到

$$\left|R_w(x,v)\right|\lesssim\varepsilon^{-\frac12}\|R\|_{L^6}+o_T\varepsilon^{\frac12}\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T, \tag{3.246}$$

因此，所需结果由命题3.22得出。 □

3.6. 余项估计。

定理 3.25。 在假设 (1.5)下，我们有

$$\|R\|_X\lesssim o_T. \tag{3.247}$$

证明。 根据命题 3.18 和推论3.18.1，我们有

$$\varepsilon^{\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.248}$$

根据命题3.22，我们得到

$$\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\|\mathbf{P}[R]\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.249}$$

将二者结合起来，我们得到

$$\varepsilon^{-\frac12}|R|_{L^2_{\gamma_+}}+\left|\mu^{\frac14}R\right|_{L^4_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-\frac12}\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2}+\|R\|_{L^6}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.250}$$

根据命题3.24，可得

$$\varepsilon^{\frac12}\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon^{\frac12}|R|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T. \tag{3.251}$$

将（3.250）（3.251）合并，可得

$$\|R\|_X \lesssim o_T \|R\|_X + \|R\|_X^2 + o_T. \tag{3.252}$$

因此，我们有

$$\|R\|_X \lesssim \|R\|_X^2 + o_T. \tag{3.253}$$

通过标准迭代/不动点论证，可得所需结果。 □

定理 *1.1* 的证明。 估计（1.14）由定理 3.25 得出。基于展开式（$\mathfrak{F}$ （1.8），其构造和正性是标准的，参见 [25, 23], ，因此我们将重点证明（1.15）。由定理 3.25，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{P}[R]\|_{L^2} + \varepsilon^{-1} \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2} \lesssim o_T, \tag{3.254}$$

由此得到

$$\|R\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{3.255}$$

由（1.8），我们知道

$$\left\|\mu^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{F} - \mu^{\frac{1}{2}} - \varepsilon f_1 - \varepsilon^2 f_2 - \varepsilon f_1^B\right\|_{L^2} = \|\varepsilon R\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{3.256}$$

根据定理 3.4 及重标度 $\eta = \varepsilon^{-1}\mathfrak{n}$，可得

$$\left\|\varepsilon^2 f_2\right\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^2, \quad \left\|\varepsilon f_1^B\right\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{3.257}$$

因此，可得

$$\left\|\mu^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{F} - \mu^{\frac{1}{2}} - \varepsilon f_1\right\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{3.258}$$

因此，式（1.15）成立。 □

4. Evolutionary Problem

4.1. 渐近分析。

4.1.1. 内部解。 内部解的推导是经典的。我们参见 [63, 64, 31] 及其中的参考文献。将式（1.32）代入式（1.20），并比较 ε的阶数，要求

$$0 = 2\mu^{-\frac{1}{2}} Q^*\left[\mu, \mu^{\frac{1}{2}} f_1\right], \tag{4.1}$$

$$v \cdot \nabla_x f_1 = 2\mu^{-\frac{1}{2}} Q^*\left[\mu, \mu^{\frac{1}{2}} f_2\right] + \mu^{-\frac{1}{2}} Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}} f_1, \mu^{\frac{1}{2}} f_1\right], \tag{4.2}$$

这等价于

$$\mathcal{L}[f_1] = 0, \tag{4.3}$$

$$v \cdot \nabla_x f_1 + \mathcal{L}[f_2] = \Gamma[f_1, f_1]. \tag{4.4}$$

考虑到进一步的展开，我们还要求

$$\partial_t f_1 + v \cdot \nabla_x f_2 \perp \mathcal{N}. \tag{4.5}$$

因此，我们得出

$$f_1(t,x,v) = \mu^{\frac{1}{2}}(v)\left(\rho_1(t,x) + v \cdot u_1(t,x) + \frac{|v|^2 - 3}{2} T_1(t,x)\right), \tag{4.6}$$

其中（ρ_1、 u_1、 T_1）满足不可压缩纳维-斯托克斯-傅里叶系统（1.39）。

此外，我们有

$$f_2(t,x,v)=\mu^{\frac{1}{2}}(v)\left(\rho_2(t,x)+v\cdot u_2(t,x)+\frac{|v|^2-3}{2}T_2(t,x)\right)\tag{4.7}$$
$$+\mu^{\frac{1}{2}}(v)\left(\rho_1(v\cdot u_1)+\left(\rho_1T_1+\frac{|v|^2-3}{2}|u_1|^2\right)\right)+\mathcal{L}^{-1}\Big[-v\cdot\nabla_x f_1+\Gamma[f_1,f_1]\Big]$$

其中（ρ_2， u_2， T_2）满足流体系统

$$\begin{cases}\nabla_x P_2=0,\\ \partial_t u_2+u_1\cdot\nabla_x u_2+(\rho_1u_1+u_2)\cdot\nabla_x u_1-\gamma_1\Delta_x u_2+\nabla_x\mathfrak{p}_2=-\gamma_2\nabla_x\cdot\Delta_x T_1-\gamma_4\nabla_x\cdot\Big(T_1\big(\nabla_x u_1+(\nabla_x u_1)^T\big)\Big),\\ \nabla_x\cdot u_2=-u_1\cdot\nabla_x\rho_1,\\ \partial_t T_2+u_1\cdot\nabla_x T_2+(\rho_1u_1+u_2)\cdot\nabla_x T_1-u_1\cdot\nabla_x\mathfrak{p}_1=\gamma_1\Big(\nabla_x u_1+(\nabla_x u_1)^T\Big)^2+\Delta_x\big(\gamma_2T_2+\gamma_5T_1^2\big),\end{cases}\tag{4.8}$$

对于 $P_2:=\rho_2+T_2+\rho_1T_1$ 以及常数 γ_3、 γ_4、 γ_5。

4.1.2. 边界层。 我们将截断边界层 f_1^B定义为（3.41）。记

$$f_1^B(t,\eta,\mathfrak{v})=\overline{\chi}\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\chi(\varepsilon\eta)\overline{\Phi}(t,\eta,\mathfrak{v}).\tag{4.9}$$

我们可以验证，f_1^B满足

$$v_\eta\frac{\partial f_1^B}{\partial\eta}+\mathcal{L}\left[f_1^B\right]=v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi}+\chi(\varepsilon\eta)\left(\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)K\left[\overline{\Phi}\right]-K\left[\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\overline{\Phi}\right]\right),\tag{4.10}$$

with

$$f_1^B(t,0,\mathfrak{v})=\overline{\chi}\left(\varepsilon^{-1}v_\eta\right)\Big(\mathfrak{f}_b(\mathfrak{v})-\Phi_\infty(\mathfrak{v})\Big)\quad\text{for}\quad v_\eta>0.\tag{4.11}$$

4.1.3. 匹配过程。 边界层的构造和内部解的边界条件与第 3.1.4 节完全相同，因此我们只讨论内部解的初始条件。利用（1.27），我们要求 $t=0$满足匹配条件:

$$\rho_1\Big|_{t=0}=\rho^I,\quad u_1\Big|_{t=0}=u^I,\quad T_1\Big|_{t=0}=T^I.\tag{4.12}$$

根据标准流体理论 ， [11, 17] 对于非定常纳维-斯托克斯方程（1.39），对于任意 $s\in[2,\infty$)

$$\|\rho_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}}+\|u_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}}+\|T_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}}\lesssim o_T.\tag{4.13}$$

此外，对于 f_2，由于不存在初始层，我们可以直接取

$$\rho_2\Big|_{t=0}=0,\quad u_2\Big|_{t=0}=\mathbf{0},\quad T_2\Big|_{t=0}=0.\tag{4.14}$$

根据标准流体理论 [11, 17] 对于线性非定常纳维-斯托克斯方程（4.8），对于任意$s\in[2,\infty)$

$$\|\rho_2\|_{W^{1,\infty}W^{2,s}}+\|u_2\|_{W^{1,\infty}W^{2,s}}+\|T_2\|_{W^{1,\infty}W^{2,s}}\lesssim o_T.\tag{4.15}$$

定理 4.1。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，存在唯一解 $(\rho_1,u_1,T_1$ ，该解满足非定常纳维-斯托克斯方程 (1.39) 对于任意 $s\in[2,\infty)$

$$\|\rho_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}}+\|u_1\|_{W^{1,\infty}W^{2,s}}+\|T_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}}\lesssim o_T.\tag{4.16}$$

此外，我们可以构造 f_1、 f_2 和 f_1^B，使得

$$\|f_1\|_{W^{1,\infty}W^{3,s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+|f_1|_{W^{1,\infty}W^{3-\frac{1}{s},s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T,\tag{4.17}$$
$$\|f_2\|_{W^{1,\infty}W^{2,s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+|f_2|_{W^{1,\infty}W^{2-\frac{1}{s},s}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T,\tag{4.18}$$

并且对于某个 $K_0>0$ 和任意 $0<r\leq 3$

$$\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}f_1^B\right\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_1^r}\right\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\left\|\mathrm{e}^{K_0\eta}\frac{\partial^r f_1^B}{\partial\iota_2^r}\right\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T. \tag{4.19}$$

4.2. 余项方程。 将（1.31）代入（1.20），得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\partial_t\left(\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\right)+v\cdot\nabla_x\left(\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\right)\\ =&\varepsilon^{-1}Q^*\left[\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R,\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\right]\end{aligned} \tag{4.20}$$

或者等价地

$$\varepsilon\partial_tR+v\cdot\nabla_xR-2\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu,\mu^{\frac12}R\right] \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}=&-\mu^{-\frac12}\partial_t\left(f+f^B\right)-\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}\Big(v\cdot\nabla_x\left(f+f^B\right)\Big)+\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu^{\frac12}R,\mu^{\frac12}R\right]\\ &+2\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}Q^*\left[f+f^B,\mu^{\frac12}R\right]+\varepsilon^{-2}\mu^{-\frac12}Q^*\left[\mu+f+f^B,\mu+f+f^B\right].\end{aligned} \tag{4.22}$$

此外，我们有初始和边界条件

$$\left(\mu+f+\varepsilon\mu^{\frac12}R\right)\Big|_{t=0}=\mu+\varepsilon\mu^{\frac12}\mathfrak{f}_i,\qquad\left(\mu+f+f^B+\varepsilon\mu^{\frac12}R\right)\Big|_{\overline{\gamma}_-}=\mu+\varepsilon\mu^{\frac12}\mathfrak{f}_b, \tag{4.23}$$

这等价于

$$R\big|_{t=0}=\mathfrak{f}_i-\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}f,\qquad R\big|_{\overline{\gamma}_-}=\mathfrak{f}_b-\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac12}\big(f+f^B\big). \tag{4.24}$$

注意，由于兼容条件（1.30），边界层对初始数据没有影响。因此，我们需要考虑余项方程（1.34）。这里，初始数据为

$$z:=-\varepsilon f_2, \tag{4.25}$$

边界数据由以下给出

$$h=-\varepsilon f_2+\chi\big(\varepsilon^{-1}v_\eta\big)\overline{\Phi}, \tag{4.26}$$

and

$$S:=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6, \tag{4.27}$$

其中

$$S_1 := -\varepsilon\partial_t f_1 - \varepsilon^2\partial_t f_2 - \varepsilon v\cdot\nabla_x f_2, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} S_2 :=& -\varepsilon\partial_t f_1^B + \frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\varphi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta} - v_\eta v_\varphi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\right) + \frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\psi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta} - v_\eta v_\psi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\right) \\ &- \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_1}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi + \frac{R_2\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\psi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi} \\ &- \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_2\partial_{\iota_2\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi + \frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi} \\ &- \left(\frac{R_1v_\varphi}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_1} + \frac{R_2v_\psi}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_2}\right) \\ &+ \varepsilon^{-1}v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi} - \varepsilon^{-1}\Big(K\left[\overline{\Phi}\right]\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta) - K\Big[\overline{\Phi}\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)\Big]\Big), \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$S_3 := 2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}f_1 + \varepsilon\mu^{\frac{1}{2}}f_2, \mu^{\frac{1}{2}}R\right] = 2\Gamma[f_1+\varepsilon f_2, R], \tag{4.30}$$

$$S_4 := 2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}f_1^B, \mu^{\frac{1}{2}}R\right] = 2\Gamma\left[f_1^B, R\right], \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} S_5 :=& \varepsilon\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}f_2, \mu^{\frac{1}{2}}\left(2f_1+\varepsilon f_2\right)\right] + 2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}\left(2f_1+2\varepsilon f_2+f_1^B\right), \mu^{\frac{1}{2}}f_1^B\right] \\ =& \varepsilon\Gamma\left[f_2, 2f_1+\varepsilon f_2\right] + \Gamma\left[2f_1+2\varepsilon f_2+f_1^B, f_1^B\right], \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$S_6 := \mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}R, \mu^{\frac{1}{2}}R\right] = \Gamma[R,R]. \tag{4.33}$$

特别地，我们还可以进一步拆分 S_2:

$$S_{2a} := \frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\varphi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\right) + \frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\psi^2\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\eta}\right), \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} S_{2b} :=& -\varepsilon\partial_t f_1^B - \frac{1}{R_1-\varepsilon\eta}\left(v_\eta v_\varphi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi}\right) - \frac{1}{R_2-\varepsilon\eta}\left(v_\eta v_\psi\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi}\right) \\ &- \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_1}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi + \frac{R_2\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_2}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\psi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\varphi} \\ &- \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{R_2\partial_{\iota_2\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}v_\varphi v_\psi + \frac{R_1\partial_{\iota_1\iota_2}\mathbf{r}\cdot\partial_{\iota_1}\mathbf{r}}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}v_\varphi^2\right)\frac{\partial f_1^B}{\partial v_\psi} \\ &- \left(\frac{R_1v_\varphi}{L_1(R_1-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_1} + \frac{R_2v_\psi}{L_2(R_2-\varepsilon\eta)}\frac{\partial f_1^B}{\partial\iota_2}\right) + \varepsilon^{-1}v_\eta\overline{\chi}(\varepsilon^{-1}v_\eta)\frac{\partial\chi(\varepsilon\eta)}{\partial\eta}\overline{\Phi}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$S_{2c} := -\varepsilon^{-1}\Big(K\left[\overline{\Phi}\right]\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta) - K\Big[\overline{\Phi}\chi(\varepsilon^{-1}v_\eta)\chi(\varepsilon\eta)\Big]\Big). \tag{4.36}$$

我们还考虑余项方程的时间导数

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t\big(\partial_t R\big) + v\cdot\nabla_x\big(\partial_t R\big) + \varepsilon^{-1}\mathcal{L}[\partial_t R] = \partial_t S \ \text{ in } \ \mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^3, \\ \partial_t R(0,x,v) = \partial_t z(x,v) \ \text{ in } \ \Omega\times\mathbb{R}^3, \\ \partial_t R(t,x_0,v) = \partial_t h(t,x_0,v) \ \text{ for } \ v\cdot n<0 \ \text{ and } \ x_0\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

这里的初始数据 $\partial_t z$ 由（1.31）和注记 1.1给出:

$$\partial_t z := \partial_t R\big|_{t=0} = \Big(\varepsilon^{-1}\mu^{-\frac{1}{2}}\partial_t\mathfrak{F} - \partial_t f_1 - \varepsilon\partial_t f_2\Big)\Big|_{t=0}. \tag{4.38}$$

对于任意固定的 $t\in\mathbb{R}_+$，我们也可以将（1.34）改写为定态余项方程

$$\begin{cases} v\cdot\nabla_x R(t) + \varepsilon^{-1}\mathcal{L}[R(t)] = S(t) - \varepsilon\partial_t R(t) \ \text{ in } \ \Omega\times\mathbb{R}^3, \\ R(t,x_0,v) = h(t,x_0,v) \ \text{ for } \ v\cdot n<0 \ \text{ and } \ x_0\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.39}$$

引理 4.2（Green 恒等式，[22] 的引理 2.2）。假设 $f(t,x,v)$ $g(t,x,v) \in L^\infty([0,T]; L^2_\nu(\Omega \times \mathbb{R}^3))$，且 $\partial_t f + v\cdot\nabla_x f$, $\partial_t g + v\cdot\nabla_x g \in L^2([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3)$，其中 f, $g \in L^2_{\overline{\gamma}}$ 那么，对于几乎所有的 $t,s\in[0,T]$

$$\int_s^t \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \big(\partial_t f + v\cdot\nabla_x f\big) g + \int_s^t \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} \big(\partial_t g + v\cdot\nabla_x g\big) f \tag{4.40}$$
$$= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} f(t)g(t) - \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3} f(s)g(s) + \int_s^t \int_\gamma fg(v\cdot n).$$

利用引理 4.2，我们可以推导出（1.34）的弱形式。对于任意测试函数 $g(t,x,v)$ $\in L^\infty([0,T]; L^2_\nu(\Omega\times\mathbb{R}^3))$，其中 $\partial_t g + v\cdot\nabla_x g \in L^2([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3)$ 满足 $g\in L^2_{\overline{\gamma}}$，我们有

$$\varepsilon\big\langle R(t), g(t)\big\rangle - \varepsilon\big\langle z, g(0)\big\rangle - \varepsilon\big\langle\!\big\langle R, \partial_t g\big\rangle\!\big\rangle + \int_{\overline{\gamma}} Rg(v\cdot n) - \big\langle\!\big\langle v\cdot\nabla_x g, R\big\rangle\!\big\rangle + \varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle \mathcal{L}[R], g\big\rangle\!\big\rangle = \big\langle\!\big\langle S, g\big\rangle\!\big\rangle. \tag{4.41}$$

4.2.1. 初值、边界和源项的估计。下面的估计可由与 [25, 第 3] 节中 $\alpha = 1$ 以及第 3.2.1节类似的论证得出，因此省略细节，仅强调关键差异。特别是，对于 S_1–S_6 估计，我们需要累积L^p_t 和瞬时 L^∞_t两种形式。为简单起见，我们只写出瞬时估计（与第 3.2.1 节中的类似），累积估计也类似。

z的估计。

引理 4.3。在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于 z 由 (4.25)定义，我们有

$$\|z\|_{L^2} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|z\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\varepsilon. \tag{4.42}$$

此外，对于 $\partial_t z$ 由 (4.38)定义，我们有

$$\|\partial_t z\|_{L^2} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|\partial_t z\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\varepsilon. \tag{4.43}$$

证明。这些估计可由注记 1.1 和定理 4.1推出。 □

h的估计。

引理 4.4。在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于 h 由 (4.26)定义，我们有 ve

$$|h|_{L^2_{\gamma_-}} \lesssim o_T\varepsilon, \quad |h|_{L^{2r}_{\gamma_-}} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac{3}{r}}, \quad |h|_{L^\infty_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T, \quad \sup_{\iota_1,\iota_2}\int_{v\cdot n<0} |h|\,|v\cdot n|\,\mathrm{d}v \lesssim o_T\varepsilon. \tag{4.44}$$

此外，$\partial_t h$满足与上述完全相同的估计。

S_1的估计。

引理 4.5. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于 S_1 定义于 (4.28)的量，我们有

$$\big\|\langle v\rangle^2 S_1\big\|_{L^2} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|S_1\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon, \qquad \|S_1\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T\varepsilon. \tag{4.45}$$

此外，我们有如下性质：

$$\Big\langle \mu^{\frac12}, S_1\Big\rangle_v = \varepsilon^2\Big\langle \mu^{\frac12}, \partial_t f_2\Big\rangle_v, \quad \Big\langle \mu^{\frac12} v, S_1\Big\rangle_v = \varepsilon^2\Big\langle \mu^{\frac12} v, \partial_t f_2\Big\rangle_v, \quad \Big\langle \mu^{\frac12}|v|^2, S_1\Big\rangle_v = \varepsilon^2\Big\langle \mu^{\frac12}|v|^2, \partial_t f_2\Big\rangle_v. \tag{4.46}$$

此外，$\partial_t S_1$ 满足与上述完全相同的估计。

S_2的估计

Lemma 4.6. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于 S_2 定义于 (4.29)，我们有 e

$$\|S_2\|_{L^1} + \|\eta\,(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^1} + \big\|\eta^2\,(S_{2b}+S_{2c})\big\|_{L^1} \lesssim o_T\varepsilon, \tag{4.47}$$
$$\big\|\langle v\rangle^2 S_2\big\|_{L^2} + \|\eta\,(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^2} + \big\|\eta^2\,(S_{2b}+S_{2c})\big\|_{L^2} \lesssim o_T, \tag{4.48}$$
$$\|S_2\|_{L^r} + \|\eta\,(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^r} + \big\|\eta^2\,(S_{2b}+S_{2c})\big\|_{L^r} \lesssim o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}-1}, \tag{4.49}$$
$$\|S_2\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} + \|\eta\,(S_{2b}+S_{2c})\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} \lesssim o_T\varepsilon,, \tag{4.50}$$

and

$$\|S_{2b}+S_{2c}\|_{L^r_x L^1_v}+\|\eta\left(S_{2b}+S_{2c}\right)\|_{L^r_x L^1_v}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{r}}, \tag{4.51}$$

$$|\langle S_{2a},g\rangle|+|\langle\eta S_{2a},g\rangle|+\left|\left\langle\eta^2 S_{2a},g\right\rangle\right|\lesssim\left\|\langle v\rangle^2 f_1^B\right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\|\nabla_v g\|_{L^r}\lesssim o_T\varepsilon^{1-\frac{1}{r}}\|\nabla_v g\|_{L^r}. \tag{4.52}$$

此外，我们有

$$\|S_2\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon^{-1}. \tag{4.53}$$

此外， $\partial_t S_2$ 满足与上述完全相同的估计。

注 4.1。 注意，定理3.2 中的 BV估计不包含关于 η的指数衰减，因此我们无法直接对 ηS_{2a} 和 $\eta^2 S_{2a}$进行有界估计。相反，我们应首先按照（ v_η 4.52）对其进行分部积分，以研究 f_1^B:

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r}+\left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r}+\left\|\eta^2 f_1^B\right\|_{L^r}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{2}{r}-1}, \tag{4.54}$$

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}+\left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}\lesssim o_T\varepsilon,, \tag{4.55}$$

$$\left\|f_1^B\right\|_{L^r_x L^1_v}+\left\|\eta f_1^B\right\|_{L^r_x L^1_v}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{r}}. \tag{4.56}$$

S_3的估计。

Le引理 **4.7**。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于 S_3 （定义见 (4.30)），有

$$|\langle S_3,g\rangle_v|\lesssim o_T\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|R|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.57}$$

从而

$$|\langle S_3,g\rangle|\lesssim o_T\varepsilon\|g\|_{L^2_\nu}\|R\|_{L^2_\nu}\lesssim o_T\varepsilon\|g\|_{L^2_\nu}\left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right). \tag{4.58}$$

此外，我们有

$$\|S_3\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon\|R\|_{L^2_\nu},\qquad\left\|\nu^{-1}S_3\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.59}$$

此外，将 R 替换为 $\partial_t R$ 后， $\partial_t S_3$ 满足与上述类似的估计。

S_4 的估计。

Le引理 **4.8**。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30) 下，对于 S_4 定义于 (4.31)，我们有

$$|\langle S_4,g\rangle_v|\lesssim\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|f_1^B|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\nu|R|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.60}$$

因此

$$|\langle S_4,g\rangle|\lesssim o_T\|g\|_{L^2_\nu}\|R\|_{L^2_\nu}\lesssim o_T\|g\|_{L^2_\nu}\left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right), \tag{4.61}$$

$$|\langle S_4,g\rangle|\lesssim o_T\left\|f_1^B\right\|_{L^2_\nu}\|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\|R\|_{L^2_\nu}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\left(\|\mathbf{P}[R]\|_{L^2}+\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\|_{L^2_\nu}\right). \tag{4.62}$$

此外，我们有

$$\|S_4\|_{L^2}\lesssim o_T\|R\|_{L^2_\nu},\qquad\left\|\nu^{-1}S_4\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.63}$$

此外， $\partial_t S_4$ 满足与上述类似的估计，只需将 R 替换为 $\partial_t R$。

S_5的估计。

Le引理 4.9。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)成立时，对于 S_5 由 (4.32)定义，我们有

$$|\langle S_5, g\rangle_v| \lesssim o_T \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.64}$$

因此

$$|\langle S_5, g\rangle| \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2_\nu}, \qquad |\langle S_5, g\rangle| \lesssim o_T \varepsilon \|g\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.65}$$

此外，我们有

$$\|S_5\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \qquad \left\|\nu^{-1} S_5\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T. \tag{4.66}$$

此外， $\partial_t S_5$ 满足与上述完全相同的估计。

估计 S_6。注意 $\partial_t \Gamma[R,R] = \Gamma[R, \partial_t R]$。然后，证明可由引理 3.12得出。

Lemma 4.10. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)成立时，对于 S_6 由 (4.33)定义，我们有 e

$$|\langle S_6, g\rangle_v| \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |R|^2\right), \tag{4.67}$$

因此

$$|\langle S_6, g\rangle| \lesssim \|g\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.68}$$

此外，我们有

$$\|S_6\|_{L^2} \lesssim \|R\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}, \tag{4.69}$$

$$\left\|\nu^{-1} S_6\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim \|R\|^2_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.70}$$

此外，我们有

$$|\langle \partial_t S_6, g\rangle_v| \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nu |R| |\partial_t R|\right), \tag{4.71}$$

因此

$$|\langle \partial_t S_6, g\rangle| \lesssim \|g\|_{L^2_\nu} \|\partial_t R\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.72}$$

此外，我们有

$$\|\partial_t S_6\|_{L^2} \lesssim \|\partial_t R\|_{L^2_\nu} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}, \tag{4.73}$$

$$\left\|\nu^{-1} \partial_t S_6\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim \|\partial_t R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}. \tag{4.74}$$

4.2.2. 守恒律。

经典守恒律。

引理 4.11。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30) 下，我们有以下守恒律

$$\varepsilon \partial_t (p - c) + \nabla_x \cdot \mathbf{b} = \left\langle \mu^{\frac{1}{2}}, S_1 + S_2 \right\rangle_v, \tag{4.75}$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{b} + \nabla_x p + \nabla_x \cdot \varpi = \left\langle v\mu^{\frac{1}{2}}, S_1 + S_2 \right\rangle_v, \tag{4.76}$$

$$\varepsilon \partial_t (3p) + 5\nabla_x \cdot \mathbf{b} + \nabla_x \cdot \varsigma = \left\langle |v|^2 \mu^{\frac{1}{2}}, S_1 + S_2 \right\rangle_v, \tag{4.77}$$

其中 ϖ 和 ς 定义见引理 *3.13*。

证明。 我们将测试函数 $\mu^{\frac{1}{2}}$、$v\mu^{\frac{1}{2}}$、$|v|^2 \mu^{\frac{1}{2}}$分别乘到式 (1.34 两边，并在 $v \in \mathbb{R}^3$ 上积分。利用 $\mathcal{L}$ 的正交性，并注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu^{\frac{1}{2}} R = p - c, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} v\mu^{\frac{1}{2}} R = \mathbf{b}, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu^{\frac{1}{2}} R = 3p. \tag{4.78}$$

结果随之得出。 □

以测试函数 $\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}$ 为测试函数的守恒律。

引理 4。 **12.** 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于光滑测试函数 $\varphi(t,x)$，有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\varphi(t)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle\!\big\rangle-\kappa\big\langle\!\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\big\rangle\!\big\rangle\\&=\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.79}$$

证明。 取测试函数 $g=\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}$代入（4.41），得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\varphi(t)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle\!\big\rangle\\&+\int_{\overline{\gamma}}\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big)R\big(v\cdot n\big)-\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),R\Big\rangle\!\Big\rangle+\varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle\mathcal{L}[R],\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle\!\big\rangle=\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.80}$$

然后，按照引理 3.14证明中的类似论证，可得（4.79）。 □

以测试函数 $\nabla_x\psi$ 为测试函数的守恒律： $\mathscr{B}$。

引理 4.13。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于满足 $\psi(t,x)$ 和 $\nabla_x\cdot\psi=0$的光滑测试函数，有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\psi(t):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\psi(0):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle\!\big\rangle-\lambda\big\langle\!\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle\!\big\rangle\\&=\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi\cdot\mathscr{B},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.81}$$

证明。 取测试函数 $g=\nabla_x\psi:\ \mathscr{B}$ 代入（4.41），可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\psi(t):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\psi(0):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle\!\big\rangle\\&+\int_{\overline{\gamma}}\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big)R\big(v\cdot n\big)-\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),R\Big\rangle\!\Big\rangle+\varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle\mathcal{L}[R],\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle\!\big\rangle=\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.82}$$

然后，按照引理 3.15 证明中的类似论证，可得（4.81）。 □

以测试函数 $\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}+\varepsilon^{-1}\varphi\big(|v|^2-5\big)\mu^{\frac{1}{2}}$ 表示的守恒律。

引理 4.14。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，对于满足 $\varphi(t,x)$ 和 $\varphi\big|_{\partial\Omega}=0$的光滑测试函数，有

$$\begin{aligned}&\big\langle 5c(t)-2p(t),\varphi(t)\big\rangle_x-\big\langle 5c(0)-2p(0),\varphi(0)\big\rangle_x-\big\langle\!\big\langle 5c-2p,\partial_t\varphi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&+\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\varphi(t)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle\!\big\rangle-\kappa\big\langle\!\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&=\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\!\Big\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.83}$$

证明。 由（4.75）和（4.77），可得

$$\varepsilon\partial_t\big(5c-2p\big)+\nabla_x\cdot\varsigma=\Big\langle\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S\Big\rangle_v.\tag{4.84}$$

将 $\varphi(t,x)\in\mathbb{R}$ 两边同时乘以 4.84，并在 t,x 上 $\in[0,t]\times$对 Ω 积分，得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle 5c(t)-2p(t),\varphi(t)\big\rangle_x-\varepsilon\big\langle 5c(0)-2p(0),\varphi(0)\big\rangle_x-\varepsilon\big\langle\!\big\langle 5c-2p,\partial_t\varphi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n=\Big\langle\!\Big\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S\Big\rangle\!\Big\rangle.\end{aligned}\tag{4.85}$$

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$(4.85) 与 (4.79) 相加以消去 $\varepsilon^{-1}\langle\!\langle\nabla_x\varphi,\varsigma\rangle\!\rangle_{tx}$，得到

$$\begin{aligned}&\big\langle 5c(t)-2p(t),\varphi(t)\big\rangle_x-\big\langle 5c(0)-2p(0),\varphi(0)\big\rangle_x-\big\langle\!\big\langle 5c-2p,\partial_t\varphi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&+\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\varphi(t)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\big\rangle\!\big\rangle-\kappa\big\langle\!\big\langle\Delta_x\varphi,c\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\varepsilon^{-1}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\varphi\varsigma\cdot n\\=&\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\!\Big\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac12},S\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.86}$$

该假设$\varphi\big|_{\partial\Omega}=0$完全消除了边界项 $\varepsilon^{-1}\int_0^t\int_\partial\Omega\varphi\varsigma\cdot n$ 在（4.86）中。因此，我们得到（4.83）。

□

测试函数 $\nabla_x\psi$ 对应的守恒律：$\mathscr{B}+\varepsilon^{-1}\psi\cdot v\mu^{\frac12}$。

引理 4.15。在假设（1.22）（1.27）（1.30）下，对于满足 ψ（t, x）的光滑测试函数 $\nabla_x\cdot\psi=0$, $\psi\big|_{\partial\Omega}=0$，我们有

$$\begin{aligned}&\big\langle\mathbf{b}(t),\psi(t)\big\rangle_x-\big\langle\mathbf{b}(0),\psi(0)\big\rangle_x-\big\langle\!\big\langle\mathbf{b},\partial_t\psi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&+\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\psi(t):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\psi(0):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle\!\big\rangle-\lambda\big\langle\!\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\=&\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\!\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.87}$$

证明。将 ψ（t, x）$\in\mathbb{R}^3$乘到（4.76）的两边，并在t, x）$\in[0,t]\times\Omega$上积分，得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big\langle\mathbf{b}(t),\psi(t)\big\rangle_x-\varepsilon\big\langle\mathbf{b}(0),\psi(0)\big\rangle_x-\varepsilon\big\langle\!\big\langle\mathbf{b},\partial_t\psi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\-&\big\langle\!\big\langle\nabla_x\cdot\psi,p\big\rangle\!\big\rangle_{tx}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi,\varpi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n=\Big\langle\!\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle\!\Big\rangle.\end{aligned}\tag{4.88}$$

因此，将 $\varepsilon^{-1}\times$（4.88）和（4.81）相加以消去 $\varepsilon^{-1}\langle\!\langle\nabla_x\psi,\ \varpi\rangle\!\rangle_{tx}$，得到

$$\begin{aligned}&\big\langle\mathbf{b}(t),\psi(t)\big\rangle_x-\big\langle\mathbf{b}(0),\psi(0)\big\rangle_x-\big\langle\!\big\langle\mathbf{b},\partial_t\psi\big\rangle\!\big\rangle_{tx}\\&+\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\psi(t):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\psi(0):\mathscr{B}\big\rangle-\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\nabla_x\psi:\mathscr{B}\big\rangle\!\big\rangle\\&-\lambda\big\langle\!\big\langle\Delta_x\psi,\mathbf{b}\big\rangle\!\big\rangle_{tx}-\varepsilon^{-1}\big\langle\!\big\langle\nabla_x\cdot\psi,p\big\rangle\!\big\rangle_{tx}+\varepsilon^{-1}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n\\=&\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},h\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},R\big\rangle\!\big\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\Big\langle\!\Big\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi:\mathscr{B}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big\rangle\!\Big\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\Big\langle\!\Big\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\Big\rangle\!\Big\rangle+\big\langle\!\big\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\big\rangle\!\big\rangle.\end{aligned}\tag{4.89}$$

这些假设 $\nabla_x\cdot\psi=0$ 和 $\psi\big|_{\partial\Omega}=0$ 消去 $\varepsilon^{-1}\langle\!\langle\nabla_x\cdot\psi,p\rangle\!\rangle_{tx}$ 和 $\varepsilon^{-1}\int_0^t\int_\partial\Omega\Big(p\psi+\psi\cdot\varpi\Big)\cdot n$ 在（4.89）中。因此，我们有（4.87）。□

4.3. 能量估计 – 累积。

命题 4.16。在假设(1.22)(1.27(1.30)下，我们有

$$\|R(t)\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac12}\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\varepsilon^{-1}\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|R|\!\|_X+|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T.\tag{4.90}$$

证明。只需说明

$$\|R(t)\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac12}\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\varepsilon^{-1}\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{-\frac12}\|\!|\mathbf{P}[R]|\!\|_{L^2}+o_T\|\!|R|\!\|_X+|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T.\tag{4.91}$$

弱形式。取测试函数 $g=\varepsilon^{-1}R$ 于（4.41）中，可得

$$\frac{1}{2}\|R(t)\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\|z\|_{L^2}^2+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_{\overline{\gamma}}R^2(v\cdot n)+\varepsilon^{-2}\langle\!\langle\mathcal{L}[R],R\rangle\!\rangle=\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,R\rangle\!\rangle. \tag{4.92}$$

注意到

$$\int_{\overline{\gamma}}R^2(v\cdot n)=\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2-\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}^2=\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2-\|h\|_{L^2_{\overline{\gamma}}}^2, \tag{4.93}$$

and

$$\langle\!\langle\mathcal{L}[R],R\rangle\!\rangle\gtrsim|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2_\nu}^2. \tag{4.94}$$

于是我们知道

$$\|R(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon^{-1}\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2+\varepsilon^{-2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2_\nu}^2\lesssim\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,R\rangle\!\rangle\right|+\varepsilon^{-1}\|h\|_{L^2_{\overline{\gamma}}}^2+\|z\|_{L^2}^2. \tag{4.95}$$

利用引理 4.3和引理 4.4，可得

$$\|R(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon^{-1}\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2+\varepsilon^{-2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2_\nu}^2\lesssim\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,R\rangle\!\rangle\right|+o_T\varepsilon. \tag{4.96}$$

源项估计。我们分解

$$\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,R\rangle\!\rangle=\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle+\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\rangle\!\rangle. \tag{4.97}$$

利用引理 4.5 –引理 4.10，我们可以直接进行估计

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\rangle\!\rangle\right|\lesssim&\varepsilon^{-1}|\!|\!|S|\!|\!|_{L^2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}\\ \lesssim&\big(o(1)+o_T\big)\varepsilon^{-2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o_T|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T.\end{aligned} \tag{4.98}$$

利用 Γ 的正交性，我们有

$$\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle=\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S_1+S_2,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle. \tag{4.99}$$

根据引理 4.5，我们知道

$$\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S_1,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle\right|=\varepsilon\left|\langle\!\langle\partial_t f_2,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle\right|\lesssim o_T\varepsilon|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2. \tag{4.100}$$

此外，根据引理 4 .6 和备注4.1，对 v_η 中的 S_{2a} 项分部积分后，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S_2,\mathbf{P}[R]\rangle\!\rangle\right|\lesssim&\varepsilon^{-1}\left|\!\left|\!\left|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right|\!\right|_{L^2_{tx}L^1_v}|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2_{tx}L^\infty_v}\\ \lesssim&o_T\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{-1}|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o_T.\end{aligned} \tag{4.101}$$

总之，我们有

$$\left|\varepsilon^{-1}\langle\!\langle S,R\rangle\!\rangle\right|\lesssim o_T\varepsilon^{-1}|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}^2+\big(o(1)+o_T\big)\varepsilon^{-2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o_T|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T. \tag{4.102}$$

综合。将（4.102）代入（4.96），我们有

$$\|R(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon^{-1}\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2+\varepsilon^{-2}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2_\nu}^2\lesssim o_T\varepsilon^{-1}|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o_T|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T. \tag{4.103}$$

于是我们有（4.91）。 □

命题 4.17。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|\partial_t R(t)\|_{L^2}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\partial_t R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\varepsilon^{-1}|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[\partial_t R]|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T|\!|\!|R|\!|\!|_X+|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.104}$$

证明。 对方程（4.37）应用命题 4.16 证明中的类似论证，并使用引理 4.3 – 引理 4.10，即可得到所需结果。特别地，我们应使用 $\partial_t z$ 引理 4.3中的估计。 □

4.4. 核估计——累积型。

4.4.1. p 的估计。

命题 **4.18.** 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|p|\!\|_{L^2} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^2} + o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.105}$$

证明。只需证明

$$\|\!|p|\!\|_{L^2} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R(t)\|_{L^2} + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}} + \|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^2} + \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2} + o_T\varepsilon. \tag{4.106}$$

弱形式。记

$$\psi(t,x,v) := \mu^{\frac{1}{2}}(v)\Big(v\cdot\nabla_x\varphi(t,x)\Big), \tag{4.107}$$

其中 $\varphi(t,x)$ 通过求解椭圆问题定义

$$\begin{cases} -\Delta_x\varphi = p \ \ \text{in} \ \ \Omega, \\ \varphi = 0 \ \ \text{on} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.108}$$

根据标准椭圆估计 [56] 和迹定理，存在一个解 φ 满足

$$|\psi(t)|_{L^2_\gamma} + \|\psi(t)\|_{H^1L^\infty_{\varrho,\vartheta}} \lesssim \|\varphi(t)\|_{H^2} \lesssim \|p(t)\|_{L^2}. \tag{4.109}$$

取测试函数 $g=\psi$ 代入（4.41），得到

$$\varepsilon\big\langle R(t),\psi(t)\big\rangle - \varepsilon\big\langle z,\psi(0)\big\rangle - \varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\psi\big\rangle\!\big\rangle + \int_{\overline{\gamma}} R\psi(v\cdot n) - \big\langle\!\big\langle R, v\cdot\nabla_x\psi\big\rangle\!\big\rangle = \big\langle\!\big\langle S,\psi\big\rangle\!\big\rangle. \tag{4.110}$$

由引理 4.3，可知

$$\big|\varepsilon\big\langle R(t),\psi(t)\big\rangle\big| \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}\|\psi(t)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}\|p(t)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2, \tag{4.111}$$

$$\big|\varepsilon\big\langle R(0),\psi(0)\big\rangle\big| \lesssim \varepsilon\|R(0)\|_{L^2}\|\psi(0)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|z\|_{L^2}^2 \lesssim o_T\varepsilon^3, \tag{4.112}$$

由奇性和正交性可得

$$\big|\varepsilon\big\langle\!\big\langle R,\partial_t\psi\big\rangle\!\big\rangle\big| = \Big|\varepsilon\big\langle\mu^{\frac{1}{2}}\big(v\cdot\mathbf{b}\big),\partial_t\psi\big\rangle\Big| \lesssim \|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\!|\partial_t\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}^2. \tag{4.113}$$

根据引理 4.4，可知

$$\begin{aligned}\left|\int_{\overline{\gamma}} R\psi(v\cdot n)\right| &\lesssim \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}\|\psi\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}} + \|h\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}\|\psi\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}} \\ &\lesssim o(1)\|\psi\|_{L^2_{\overline{\gamma}}}^2 + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 + \|h\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}^2 \lesssim o(1)\|\!|p|\!\|_{L^2}^2 + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 + o_T\varepsilon^2.\end{aligned} \tag{4.114}$$

由奇性和正交性可得

$$\Big\langle\!\Big\langle\mu^{\frac{1}{2}}\big(v\cdot\mathbf{b}\big), v\cdot\nabla_x\psi\Big\rangle\!\Big\rangle = \big\langle\!\big\langle(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R], v\cdot\nabla_x\psi\big\rangle\!\big\rangle = 0. \tag{4.115}$$

由于 $\overline{\mathscr{A}}$ 的正交性，可知

$$\left\langle\!\!\left\langle\mu^{\frac{1}{2}}\frac{|v|^2-5}{2}c, v\cdot\nabla_x\psi\right\rangle\!\!\right\rangle = \big\langle\!\big\langle c, \mu^{\frac{1}{2}}\overline{\mathscr{A}}\cdot\nabla_x\psi\big\rangle\!\big\rangle = 0. \tag{4.116}$$

此外，我们还有

$$-\Big\langle\!\Big\langle\mu^{\frac{1}{2}}p, v\cdot\nabla_x\psi\Big\rangle\!\Big\rangle = -\Big\langle\!\Big\langle p\mu, v\cdot\nabla_x\Big(v\cdot\nabla_x\varphi\Big)\Big\rangle\!\Big\rangle = -\frac{1}{3}\int_0^t\int_\Omega p(\Delta_x\varphi)\int_{\mathbb{R}^3}\mu|v|^2 = \|\!|p|\!\|_{L^2}^2. \tag{4.117}$$

综上所述，我们得到

$$\|\!|p|\!\|_{L^2}^2 \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2 + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 + \|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\!|\partial_t\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2 + \big|\big\langle\!\big\langle S,\psi\big\rangle\!\big\rangle\big|. \tag{4.118}$$

源项估计。由于 Γ 的正交性以及引理 3.7，我们知道

$$\langle\!\langle S,\psi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle S_1+S_2,\psi\rangle\!\rangle. \tag{4.119}$$

根据引理4.5，我们有

$$\left|\langle\!\langle S_1,\psi\rangle\!\rangle\right| = \varepsilon^2\left|\langle\!\langle \partial_t f_2,\psi\rangle\!\rangle\right| \lesssim o_T \left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^4. \tag{4.120}$$

利用 Hardy 不等式，并对 v_η 在 S_{2a}上分部积分，根据引理4.6 和注4.1，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\langle\!\langle S_2,\psi\rangle\!\rangle\right| &\le \left|\left\langle\!\!\left\langle S_2,\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\!\!\right\rangle\right| + \left|\left\langle\!\!\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right| = \left|\left\langle\!\!\left\langle S_2,\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\!\!\right\rangle\right| + \left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle \eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right| \\
&\lesssim \left|\!\left|\!\left| f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right|\!\right|_{L_t^2L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} \|\psi\|_{L^2_{\frac{\gamma}{\gamma}}} + \varepsilon\left|\!\left|\!\left|\eta\left(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right)\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\left|\!\left|\!\left|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right|\!\right|\!\right|_{L^2} \\
&\lesssim \left|\!\left|\!\left| f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right|\!\right|_{L_t^2L^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v} \|\psi\|_{L^2_{\frac{\gamma}{\gamma}}} + \varepsilon\left|\!\left|\!\left|\eta\left(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right)\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\left|\!\left|\!\left|\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right|\!\right|\!\right|_{L^2} \\
&\lesssim o_T\varepsilon\|\psi\|_{L^2_{\frac{\gamma}{\gamma}}} + o_T\varepsilon\left|\!\left|\!\left|\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right|\!\right|\!\right|_{L^2} \lesssim o_T\varepsilon\left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2} \lesssim o_T\left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

综合以上结果，我们得到

$$\left|\langle\!\langle S,\psi\rangle\!\rangle\right| \lesssim o_T\left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2 \tag{4.122}$$

将（4.122）代入（4.118），我们有

$$\left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2 + \|R\|_{L^2_{\frac{\gamma}{\gamma}_+}}^2 + \left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2. \tag{4.123}$$

对$\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}$的估计。记 $\Phi=\partial_t\varphi$。将 $g=\varepsilon\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}$代入（4.41），由正交性和 $\Phi\big|_{\partial\Omega}$=0，得到

$$\varepsilon^2\left\langle\!\!\left\langle \partial_t R,\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\!\right\rangle - \varepsilon\left\langle\!\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle = \varepsilon\left\langle\!\!\left\langle S,\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{4.124}$$

注意到

$$\varepsilon^2\left\langle\!\!\left\langle \partial_t R,\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle = 3\varepsilon^2\left\langle\!\!\left\langle \partial_t p,\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle = -3\varepsilon^2\left\langle\!\!\left\langle \Delta_x\Phi,\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle = 3\varepsilon^2\left\langle\!\!\left\langle \nabla_x\Phi,\nabla_x\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle = 3\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2. \tag{4.125}$$

此外，我们知道

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle\right| &\le \left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle \mu^{\frac{1}{2}}(v\cdot\mathbf{b}),v\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\cdot\nabla_x\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle\right| + \left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R],v\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\cdot\nabla_x\Phi\right\rangle\!\!\right\rangle\right| \\
&\lesssim \left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + \left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o(1)\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.126}$$

然后，利用与上述对S,ψ的估计类似的论证，我们有

$$\left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle S,\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\!\right\rangle\right| = \left|\varepsilon\left\langle S_1+S_2,\Phi\left|v\right|^2\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\right| \lesssim o_T\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2. \tag{4.127}$$

综合以上结果，我们有

$$\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 \lesssim \left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + \left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2. \tag{4.128}$$

将（4.128）代入（4.123），我们有

$$\left|\!\left|\!\left| p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2 + \|R\|_{L^2_{\frac{\gamma}{\gamma}_+}}^2 + \left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + \left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2. \tag{4.129}$$

于是（4.106）得证。 □

命题 4.19. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|\partial_t p\right|\!\right|\!\right|_{L^2} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|\partial_t\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2} + o_T\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X + \left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2 + o_T. \tag{4.130}$$

证明。 将命题的证明中类似的论证4.18 应用于方程（4.37），即可得到所需结果。 □

4.4.2. c 的估计。

命题 4.20。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}+o_T\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T. \tag{4.131}$$

证明。只需证明

$$\begin{aligned}\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}\lesssim{}&\varepsilon^{\frac{1}{12}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^{\frac{1}{2}}\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R(t)\right\|_{L^2}+\left\|R\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}+\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}+\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}\\&+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.132}$$

弱形式。 我们考虑守恒律 (4.83)，其中光滑测试函数 $\varphi(t,x)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta_x\varphi=5c-2p\ \ \text{in}\ \ \Omega,\\ \varphi=0\ \ \text{on}\ \ \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.133}$$

基于此 标准椭圆估计[56] 和迹定理，存在一个解 φ 满足

$$\left|\nabla_x\varphi(t)\right|_{L^2_{\partial\Omega}}+\left\|\varphi(t)\right\|_{H^2}\lesssim\left\|c(t)\right\|_{L^2}+\left\|p(t)\right\|_{L^2}. \tag{4.134}$$

由（4.83）可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\!\!\left\langle\partial_t\big(5c-2p\big),\varphi\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}+\varepsilon\big\langle R(t),\nabla_x\varphi(t)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\big\langle z,\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle-\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right\rangle\!\!\right\rangle-\kappa\left\langle\!\!\left\langle\Delta_x\varphi,c\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}\\=&\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\right\rangle\!\!\right\rangle_{\overline{\gamma}_-}-\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\right\rangle\!\!\right\rangle_{\overline{\gamma}_+}+\left\langle\!\!\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\!\!\right\rangle\\&+\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\varphi\left(\left|v\right|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\!\!\right\rangle+\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle\!\!\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.135}$$

直接计算可知

$$\left\langle\!\!\left\langle\partial_t\big(5c-2p\big),\varphi\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}=-\left\langle\!\!\left\langle\partial_t\Delta_x\varphi,\varphi\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}=\left\langle\!\!\left\langle\partial_t\nabla_x\varphi,\nabla_x\varphi\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}=\frac{1}{2}\left\|\nabla_x\varphi(t)\right\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\left\|\nabla_x\varphi(0)\right\|_{L^2}^2, \tag{4.136}$$

并由引理4.3

$$\left\|\nabla_x\varphi(0)\right\|_{L^2}^2\lesssim\left\|p(0)\right\|_{L^2}^2+\left\|c(0)\right\|_{L^2}^2\lesssim\left\|z\right\|_{L^2}^2\lesssim o_T\varepsilon^2. \tag{4.137}$$

此外，我们有

$$-\kappa\left\langle\!\!\left\langle\Delta_x\varphi,c\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}=\kappa\left\langle\!\!\left\langle5c-p,c\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}=5\kappa\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}^2-\kappa\left\langle\!\!\left\langle p,c\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx} \tag{4.138}$$

with

$$\left|\kappa\left\langle\!\!\left\langle p,c\right\rangle\!\!\right\rangle_{tx}\right|\lesssim o(1)\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}^2+\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2. \tag{4.139}$$

利用引理4.3，可得

$$\left|\varepsilon\big\langle R(t)\ \nabla_x\varphi(t)\ \cdot\mathscr{A}\big\rangle\right|\lesssim\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}\left\|\varphi(t)\right\|_{H^1}\lesssim\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}\Big(\left\|c(t)\right\|_{L^2}+\left\|p(t)\right\|_{L^2}\Big)\lesssim\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}^2, \tag{4.140}$$

$$\left|\varepsilon\big\langle R(0),\nabla_x\varphi(0)\cdot\mathscr{A}\big\rangle\right|\lesssim\varepsilon\left\|R(0)\right\|_{L^2}\left\|\varphi(0)\right\|_{H^1}\lesssim\varepsilon\left\|z\right\|_{L^2}^2\lesssim o_T\varepsilon^3. \tag{4.141}$$

由于 $\mathscr{A}$ 的正交性，我们知道

$$\left|\varepsilon\ \ \left\langle\!\!\left\langle R,\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right\rangle\!\!\right\rangle\right|=\left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R],\partial_t\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\lesssim\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right\|_{L^2}^2. \tag{4.142}$$

根据引理 4.4，我们有

$$\left|\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},h\right\rangle\!\!\right\rangle_{\overline{\gamma}_-}\right|\lesssim\left\|\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}\left\|h\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}\lesssim o_T\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}^2+o_T\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2, \tag{4.143}$$

$$\left|\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},R\right\rangle\!\!\right\rangle_{\overline{\gamma}_+}\right|\lesssim\left\|\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}\left\|R\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}\lesssim o(1)\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2+\left\|R\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2, \tag{4.144}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\!\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big),(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\lesssim{}&\left|\!\left|\!\left|v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A}\Big)\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}\\\lesssim{}&o(1)\left\|\!\left|c\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2+\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{4.145}$$

综上所述，我们已经证明

$$\begin{aligned}\|\nabla_x\varphi(t)\|_{L^2}^2+\|\!|c|\!\|_{L^2}^2\lesssim\varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2+\|R\|_{L^2_{\frac{\gamma}{2}+}}^2+\|\!|p|\!\|_{L^2}^2+\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\|\!|\partial_t\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2\\+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle\!\right\rangle\right|.\end{aligned}\tag{4.146}$$

源项估计。由于 Γ 的正交性，我们有

$$\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\right\rangle=\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S_1+S_2\right\rangle\!\right\rangle.\tag{4.147}$$

根据引理 4.5，我们有

$$\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S_1\right\rangle\!\right\rangle\right|=\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},\partial_tf_2\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim o_T\varepsilon\|\!|c|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\tag{4.148}$$

与（4.121）类似，根据引理 4.6、注4.1 和 Hardy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi(|v|^2-5)\mu^{\frac12},S_2\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left|\left\langle\!\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\rangle\!\right\rangle\right|\\&\lesssim\left|\left\langle\!\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^2_tL^2_xL^1_v}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\varphi\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right\|_{L^2_tL^2_xL^1_v}\|\!|\partial_{\mathfrak{n}}\varphi|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.149}$$

由引理 4.5，我们可以直接估计

$$\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_1\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\|\!|\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}\|\!|S_1|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\|c\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\tag{4.150}$$

与（4.121）类似，根据引理 4.6、备注4.1 和 Hardy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_2\right\rangle\!\right\rangle\right|&\le\left|\left\langle\!\left\langle S_2,\nabla_x\varphi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi\right\rangle\!\right\rangle\right|\\&\lesssim\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_tL^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}\|\nabla_x\varphi\|_{L^2_{\frac{\gamma}{2}}}+\varepsilon\left\|\!\left|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right|\!\right\|_{L^2}\left\|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right\|_{L^2_tL^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}\|\nabla_x\varphi\|_{L^2_{\frac{\gamma}{2}}}+\varepsilon\left\|\!\left|\eta(f_1^B+S_{2b}+S_{2c})\right|\!\right\|_{L^2}\|\!|\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon\|\!|c|\!\|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{4.151}$$

根据引理 4.7、引理 4.8和引理 4.9，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_3+S_4+S_5\right\rangle\!\right\rangle\right|&\lesssim\|\!|\nabla_x\varphi|\!\|_{L^2}\|\!|S_3+S_4+S_5|\!\|_{L^2}\\&\lesssim o_T\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o_T\|\!|R|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\lesssim o_T\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\|\!|R|\!\|_X^2+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.152}$$

最后，根据引理 4.10，我们得到

$$\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_6\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\!\right\rangle\right|.\tag{4.153}$$

奇性和正交性，借助插值 $\|\!|\mathfrak{b}|\!\|_{L^3}\lesssim\|\!|\mathfrak{b}|\!\|_{L^2}^{\frac23}\|\!|\mathfrak{b}|\!\|_{L^\infty_\varrho,\,\vartheta}^{\frac13}\lesssim\varepsilon^{\frac16}\|\!|R|\!\|_X$，可推出

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\right\rangle\!\right\rangle\right|&\lesssim\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\left[\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b}),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\!\right\rangle\right|\\&\lesssim\|\!|\nabla_x\varphi|\!\|_{L^6}\|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^3}\|\!|c|\!\|_{L^2}\lesssim\|\varphi\|_{L^2_tH^2_x}\|\!|\mathbf{b}|\!\|_{L^3}\|\!|c|\!\|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{\frac16}\|\!|R|\!\|_X\|\!|c|\!\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.154}$$

此外，借助 $\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^3}\lesssim\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2}^{\frac23}\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^\infty_\varrho,\,\vartheta}^{\frac13}\lesssim\varepsilon^{\frac12}\|\!|R|\!\|_X$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\!\right\rangle\right|&\lesssim\|\!|\nabla_x\varphi|\!\|_{L^6}\|\!|R|\!\|_{L^2}\|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^3}\\&\lesssim\varepsilon\|\!|c|\!\|_{L^2}\|\!|R|\!\|_X^2\lesssim o(1)\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+\varepsilon^2\|\!|R|\!\|_X^4.\end{aligned}\tag{4.155}$$

因此，我们知道

$$\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S_6\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{\frac16}\|\!|R|\!\|_X\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+o(1)\|\!|c|\!\|_{L^2}^2+\varepsilon^2\|\!|R|\!\|_X^4.\tag{4.156}$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\varphi\cdot\mathscr{A},S\right\rangle\!\right\rangle\right| \\ \lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\left(o(1)+o_T\right)\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^4+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.157}$$

将（4.157）代入（4.146），可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_x\varphi(t)\right\|_{L^2}^2+\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2\lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|R\right\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma_+}}}^2+\left|\!\left|\!\left|p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2\\&+o_T\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^4+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.158}$$

估计 $\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}$。记 $\Phi=\partial_t\varphi$。将 $g=\varepsilon\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}$代入（4.41），由正交性和$\Phi\big|_{\partial\Omega}=0$，可得

$$\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_tR,\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle-\varepsilon\left\langle\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle=\varepsilon\left\langle\!\left\langle S,\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle.\tag{4.159}$$

注意到

$$\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_tR,\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle=2\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_t(5c-p),\Phi\right\rangle\!\right\rangle=-2\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\Delta_x\Phi,\Phi\right\rangle\!\right\rangle=2\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2.\tag{4.160}$$

根据正交性，我们有

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle\right|=&\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R],v\cdot\nabla_x\left(\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle\right|\\\lesssim&\left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.161}$$

Then，与上述对 $\varepsilon^{-1}\varphi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}},S$ 的估计类似，我们有

$$\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle S,\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle\right|=\varepsilon\left|\left\langle\!\left\langle S_1+S_2,\Phi\left(|v|^2-5\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim o(1)\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\tag{4.162}$$

综合上述结果，我们有

$$\varepsilon^2\left|\!\left|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2\lesssim\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\tag{4.163}$$

将 (4.163) 代入 (4.158)，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_x\varphi(t)\right\|_{L^2}^2+\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2\lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X\left|\!\left|\!\left|c\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|R\right\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma_+}}}^2+\left|\!\left|\!\left|p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2+\left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2\\&+o_T\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+\varepsilon\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^4+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.164}$$

因此，(4.132) 得证。 □

命题 4.21。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30) 下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|\partial_tc\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\partial_tp\right\|_{L^2}+o_T\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X+\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+o_T.\tag{4.165}$$

证明。 对方程（4.37）应用命题4.20证明中的类似论证，我们即可得到所需结果。注意，在估计（4.154）和（4.155）中，我们应始终将 L^2 范数赋给时间导数项，将 L^3 赋给无导数项。□

4.4.3. b 的估计。

命题 4.22。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim o(1)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}+o_T\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X+\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+o_T.\tag{4.166}$$

证明。只需说明

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{12}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^{\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right|\!\right|_{L^2}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R(t)\right\|_{L^2}+\left\|R\right\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma_+}}}+o(1)\left|\!\left|\!\left|p\right|\!\right|\!\right|_{L^2}+\left|\!\left|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\\&+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left|\!\left|\!\left|R\right|\!\right|\!\right|_X^2+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.167}$$

弱形式。假设 $(\psi, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ （其中 q 的平均值为零）是斯托克斯问题的唯一强解

$$\begin{cases} -\beta\Delta_x\psi + \nabla_x q &= \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla_x \cdot \psi &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \psi &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.168}$$

根据标准的流体估计[17] 和迹定理，我们有

$$\|\psi(t)\|_{H^2} + |\nabla_x\psi(t)|_{L^2} + \|q(t)\|_{H^1} + |q(t)|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{b}(t)\|_{L^2}. \tag{4.169}$$

将$\mathbf{b}$ 乘到（4.168）两边，并对$\langle\!\langle \nabla_x q, \mathbf{b}\rangle\!\rangle_{tx}$分部积分，我们有 e

$$-\langle\!\langle \lambda\Delta_x\psi, \mathbf{b}\rangle\!\rangle_{tx} - \langle\!\langle q, \nabla_x\cdot\mathbf{b}\rangle\!\rangle_{tx} + \int_0^t\int_{\partial\Omega} q(\mathbf{b}\cdot n) = |\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2, \tag{4.170}$$

结合（4.75）和注释3.2，可得

$$-\langle\!\langle \lambda\Delta_x\psi, \mathbf{b}\rangle\!\rangle_{tx} - \left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle\!\!\right\rangle + \langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, R\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_+} - \langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, h\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_-} = |\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2. \tag{4.171}$$

将（4.171）代入（4.87）以替换 $-\langle\!\langle \lambda\Delta_x\psi, \mathbf{b}\rangle\!\rangle_{tx}$，得到

$$\begin{aligned} &\langle\!\langle \partial_t\mathbf{b}, \psi\rangle\!\rangle_{tx} + \varepsilon\langle R(t), \nabla_x\psi(t) : \mathscr{B}\rangle - \varepsilon\langle z, \nabla_x\psi(0) : \mathscr{B}\rangle - \varepsilon\langle\!\langle R, \partial_t\nabla_x\psi : \mathscr{B}\rangle\!\rangle + |\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2 \\ =& -\langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, h\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_-} + \langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, R\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_+} + \langle\!\langle \nabla_x\psi : \mathscr{B}, h\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_-} - \langle\!\langle \nabla_x\psi : \mathscr{B}, R\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_+} \\ &+ \left\langle\!\!\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi : \mathscr{B}\Big), (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\!\!\right\rangle - \left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle\!\!\right\rangle + \varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle \psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}, S\right\rangle\!\!\right\rangle + \langle\!\langle \nabla_x\psi : \mathscr{B}, S\rangle\!\rangle. \end{aligned} \tag{4.172}$$

利用 ψ 和 $\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$的无散性，我们有

$$\langle\!\langle \partial_t\mathbf{b}, \psi\rangle\!\rangle_{tx} = \langle\!\langle -\lambda\partial_t\Delta_x\psi + \partial_t\nabla_x q, \psi\rangle\!\rangle_{tx} = \lambda\langle\!\langle \partial_t\nabla_x\psi, \nabla_x\psi\rangle\!\rangle_{tx} = \frac{\lambda}{2}\|\nabla_x\psi(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2}\|\nabla_x\psi(0)\|_{L^2}^2, \tag{4.173}$$

并且由引理 4.3

$$\frac{\lambda}{2}\|\nabla_x\psi(0)\|_{L^2}^2 \lesssim \|\mathbf{b}(0)\|_{L^2}^2 \lesssim \|z\|_{L^2}^2 \lesssim o_T\varepsilon^2. \tag{4.174}$$

此外，根据引理 4.3，我们知道

$$\left|\varepsilon\langle R(t), \nabla_x\psi(t) : \mathscr{B}\rangle\right| \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}\|\nabla_x\psi(t)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}\|\mathbf{b}(t)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2, \tag{4.175}$$

$$\left|\varepsilon\langle z, \nabla_x\psi(0) : \mathscr{B}\rangle\right| \lesssim \varepsilon\|z\|_{L^2}\|\nabla_x\psi(0)\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\|z\|_{L^2}^2 \lesssim o_T\varepsilon^3, \tag{4.176}$$

and

$$\left|\varepsilon\langle\!\langle R, \partial_t\nabla_x\psi : \mathscr{B}\rangle\!\rangle\right| = \left|\varepsilon\langle\!\langle (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R], \partial_t\nabla_x\psi : \mathscr{B}\rangle\!\rangle\right| \lesssim |\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2 + o(1)\varepsilon^2|\!|\!|\partial_t\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}^2. \tag{4.177}$$

此外，根据引理 4.4，我们有

$$\begin{aligned} \left|\langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, h\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_-}\right| + \left|\langle\!\langle \nabla_x\psi : \mathscr{B}, h\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_-}\right| \lesssim& o(1)\left\|q\mu^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}^2 + o(1)\|\nabla_x\psi : \mathscr{B}\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}^2 + \|h\|_{L^2_{\overline{\gamma}_-}}^2 \\ \lesssim& o(1)|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2 + o_T\varepsilon^2, \end{aligned} \tag{4.178}$$

$$\begin{aligned} \left|\langle\!\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, R\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_+}\right| + \left|\langle\!\langle \nabla_x\psi : \mathscr{B}, R\rangle\!\rangle_{\overline{\gamma}_+}\right| \lesssim& o(1)\left\|q\mu^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 + o(1)\|\nabla_x\psi : \mathscr{B}\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2 \\ \lesssim& o(1)|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2 + \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2, \end{aligned} \tag{4.179}$$

and

$$\begin{aligned} \left|\left\langle\!\!\left\langle v\cdot\nabla_x\Big(\nabla_x\psi : \mathscr{B}\Big), (\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right\rangle\!\!\right\rangle\right| \lesssim& o(1)\left|\!\left|\!\left|\nabla_x^2\psi\right|\!\right|\!\right|_{L^2}^2 + |\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2 \\ \lesssim& o(1)|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2 + |\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{4.180}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla_x\psi(t)\|_{L^2}^2+\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2\lesssim&\varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2+\|R\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma}+}}^2+\|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\|\!|\!|\partial_t\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2\\&+\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\rangle\!\rangle\right|.\end{aligned}\tag{4.181}$$

源项估计。由于 Γ 的正交性，我们有

$$\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S\right\rangle\!\!\right\rangle\right|=\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},S_1+S_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S_1+S_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|.\tag{4.182}$$

根据引理 4.5，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},S_1\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S_1\right\rangle\!\!\right\rangle\right|=&\varepsilon^2\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},\partial_t f_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\varepsilon\left|\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},\partial_t f_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\\\lesssim&\varepsilon\Big(\|\!|\!|q|\!|\!|_{L^2}+\|\!|\!|\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}\Big)\|\!|\!|\partial_t f_2|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{4.183}$$

根据引理 4.6和注记 4.1，对 v_η 在 S_{2a}上分部积分，得到

$$\left|\left\langle\!\!\left\langle q\mu^{\frac12},S_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\lesssim\|\!|\!|q|\!|\!|_{L^2}\left\|\!\left|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right\|_{L^2_tL^2_xL^1_v}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac12}\|\!|\!|q|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\tag{4.184}$$

与（4.121）类似，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac12},S_2\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\left|\left\langle\!\!\left\langle S_2,\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\\\lesssim&\left|\left\langle\!\!\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\lesssim\left\|\!\left|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right|\!\right\|_{L^2_tL^2_xL^1_v}\left\|\!\left|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\psi\right|\!\right\|_{L^2}\\\lesssim&\left\|\!\left|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right|\!\right\|_{L^2_tL^2_xL^1_v}\|\!|\!|\partial_{\mathfrak{n}}\psi|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.185}$$

由引理 4.5，我们可直接估计

$$|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_1\rangle\!\rangle|\lesssim\|\!|\!|\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}\|\!|\!|S_1|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\tag{4.186}$$

与（4.121）类似，根据引理 4.6、注释4.1 和 Hardy 不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_2\rangle\!\rangle|\leq&\left|\left\langle\!\!\left\langle S_2,\nabla_x\psi\Big|_{\mathfrak{n}=0}\right\rangle\!\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon\left\langle\!\!\left\langle\eta S_2,\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi\right\rangle\!\!\right\rangle\right|\\\lesssim&\left\|\!\left|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right\|_{L^2_tL^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}\|\nabla_x\psi\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma}}}+\varepsilon\left\|\!\left|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right|\!\right\|_{L^2}\left\|\!\left|\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_0^{\mathfrak{n}}\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi\right|\!\right\|_{L^2}\\\lesssim&\left\|\!\left|f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\right|\!\right\|_{L^2_tL^2_{\iota_1\iota_2}L^1_{\mathfrak{n}}L^1_v}\|\nabla_x\psi\|_{L^2_{\frac{2}{\gamma}}}+\varepsilon\left\|\!\left|\eta\big(f_1^B+S_{2b}+S_{2c}\big)\right|\!\right\|_{L^2}\|\!|\!|\partial_{\mathfrak{n}}\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{4.187}$$

根据引理 4.7、引理 4.8和引理 4.9，我们有

$$\begin{aligned}|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_3+S_4+S_5\rangle\!\rangle|\lesssim&\|\!|\!|\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^2}\|\!|\!|S_3+S_4+S_5|\!|\!|_{L^2}\\\lesssim&o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\lesssim o_T\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.188}$$

最后，根据引理4.10，我们有

$$|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_6\rangle\!\rangle|\lesssim\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\rangle\!\rangle\right|+\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\rangle\!\rangle\right|.\tag{4.189}$$

奇性和正交性意味着

$$\begin{aligned}&\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[\mathbf{P}[R],\mathbf{P}[R]\Big]\rangle\!\rangle\right|\\\lesssim&\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b}),\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b})\right]\rangle\!\rangle\right|+\left|\left\langle\!\!\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac12}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\!\!\right\rangle\right|.\end{aligned}\tag{4.190}$$

与（4.154）类似，我们可以直接给出界

$$\begin{aligned}\left|\langle\!\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b}),\mu^{\frac12}(v\cdot\mathbf{b})\right]\rangle\!\rangle\right|\lesssim&\|\!|\!|\nabla_x\psi|\!|\!|_{L^6}\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^3}\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}\\\lesssim&\|\!|\!|\psi|\!|\!|_{L^2_tH^2_x}\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^3}\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}\lesssim\varepsilon^{\frac16}\|\!|\!|R|\!|\!|_X\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.191}$$

由于奇性和 $\mathscr{B}_{ii}=\mathcal{L}^{-1}\left[\left(|v_i|^2-\frac{1}{3}|v|^2\right)\mu^{\frac{1}{2}}\right]$，注意到 $\Gamma\left[\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]$ 仅依赖于 $|v|^2$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\left[\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\!\right\rangle\right| \\ =&\left|\left\langle\!\left\langle\partial_1\psi_1\mathscr{B}_{11}+\partial_2\psi_2\mathscr{B}_{22}+\partial_3\psi_3\mathscr{B}_{33},\Gamma\left[\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\!\right\rangle\right| \\ =&\left|\left\langle\!\left\langle(\nabla_x\cdot\psi)\mathscr{B}_{ii},\Gamma\left[\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right),\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}c\right)\right]\right\rangle\!\right\rangle\right|=0.\end{aligned}\tag{4.192}$$

此外，与（4.155）类似，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},\Gamma\Big[R,(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\Big]\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim&\left\|\!\left|\nabla_x\psi\right|\!\right\|_{L^6}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L^2}\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^3}\\ \lesssim&\varepsilon\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2\lesssim o(1)\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+\varepsilon^2\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^4.\end{aligned}\tag{4.193}$$

因此，我们知道

$$\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S_6\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+\varepsilon^2\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^4.\tag{4.194}$$

综合以上结果，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\!\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\!\left\langle\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S\right\rangle\!\right\rangle\right|+\left|\left\langle\!\left\langle\nabla_x\psi:\mathscr{B},S\right\rangle\!\right\rangle\right|\\ \lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+\left(o(1)+o_T\right)\left\|\!\left|\mathbf{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+\varepsilon\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^4+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.195}$$

将（4.195）代入（4.181），我们有

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_x\psi(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\!\left|\mathfrak{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2\lesssim&\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X\left\|\!\left|\mathfrak{b}\right|\!\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|R(t)\right\|_{L^2}^2+\left\|R\right\|_{L^2_{\gamma_+}}^2+\left\|\!\left|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\psi\right|\!\right\|_{L^2}^2\\ &+o_T\varepsilon\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^2+\varepsilon\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_X^4+o_T\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.196}$$

对 $\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\psi\right|\!\right\|_{L^2}$ 的估计。记 $\Psi=\partial_t\psi$。取 $g=\varepsilon\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}$ 于（4.41），由于正交性和 $\Psi\big|_{\partial\Omega}=0$，我们得到

$$\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_tR,\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle-\varepsilon\left\langle\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle=\varepsilon\left\langle\!\left\langle S,\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle.\tag{4.197}$$

注意到，由于 Ψ 和 $\Psi\big|_{\partial\Omega}=0$ 无散

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_tR,\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle=&\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle\partial_t\mathbf{b},\Psi\right\rangle\!\right\rangle=\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle-\lambda\Delta_x\Psi+\partial_t\nabla_xq,\Psi\right\rangle\!\right\rangle\\ =&\varepsilon^2\left\langle\!\left\langle-\lambda\Delta_x\Psi,\Psi\right\rangle\!\right\rangle=\lambda\varepsilon^2\left\|\partial_t\nabla_x\psi\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.198}$$

此外，利用正交性，我们有

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle R,v\cdot\nabla_x\left(\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle\right|=&\varepsilon\left|\left\langle\!\left\langle\mu^{\frac{1}{2}}p+\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|v|^2-5}{2}\right)c,v\cdot\nabla_x\left(\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle\right|\\ =&\varepsilon\left|\left\langle\!\left\langle\mu^{\frac{1}{2}}p,v\cdot\nabla_x\left(\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2+o(1)\varepsilon^2\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\psi\right|\!\right\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{4.199}$$

然后，按照与上述对 $\varepsilon^{-1}\psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}},S$ 的估计类似的论证，我们有

$$\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle S,\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle\right|=\left|\varepsilon\left\langle\!\left\langle S_1+S_2,\Psi\cdot v\mu^{\frac{1}{2}}\right\rangle\!\right\rangle\right|\lesssim o(1)\varepsilon^2\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\tag{4.200}$$

综合以上结果，我们得到

$$\varepsilon^2\left\|\!\left|\partial_t\nabla_x\varphi\right|\!\right\|_{L^2}^2\lesssim\left\|\!\left|p\right|\!\right\|_{L^2}^2+o_T\varepsilon.\tag{4.201}$$

将（4.201）代入（4.196），我们得到

$$\|\nabla_x\psi(t)\|_{L^2}^2+\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2\lesssim\varepsilon^{\frac{1}{6}}\|\!|\!|R|\!|\!|_X\|\!|\!|\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}^2+\varepsilon\|R(t)\|_{L^2}^2+\|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}}^2+o(1)\|\!|\!|p|\!|\!|_{L^2}^2+\|\!|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!|\!|_{L^2}^2 \\ +o_T\varepsilon\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+\varepsilon\|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T\varepsilon. \tag{4.202}$$

因此，4.167）成立。 □

命题4.23。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\!|\!|\partial_t\mathbf{b}|\!|\!|_{L^2}\lesssim o(1)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\!|\!|\partial_t p|\!|\!|_{L^2}+o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.203}$$

证明。 将命题4.22 证明中的类似论证应用于方程（4.37），即可得到所需结果。注意，在界（4.191）和（4.193）中，应始终将 L^2 范数用于时间导数项，将 L^3 用于无导数项。□

4.4.4. 核估计总结。

命题4.24。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\!|\!|\mathbf{P}[R]|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.204}$$

证明。 综合命题4.18、命题4.20 和命题4.22 即可得到所需结果。 □

命题4.25。 在假设(1.22)(1.27)(1.30)下，有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\!|\!|\mathbf{P}[\partial_t R]|\!|\!|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.205}$$

证明。 综合命题4.19、命题4.21 和命题4.23 即可得到所需结果。 □

4.5. 瞬时能量估计。

命题4.26。 在假设(1.22)(1.27)(1.30)下，有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|R(t)|_{L^2_{\gamma_+}}+\varepsilon^{-1}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R](t)\|_{L^2}\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.206}$$

证明。 对于固定的 $t\in\mathbb{R}_+$，我们对式（4.39 ）应用与命题3.18的证明类似的论证，得到

$$\varepsilon^{-1}|R(t)|_{L^2_{\gamma_+}}^2+\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R](t)\|_{L^2}^2\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T+\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varepsilon\partial_t R(t),R(t)\right\rangle\right|. \tag{4.207}$$

根据命题 4.16 和命题4.17，我们有

$$\left|\varepsilon^{-1}\left\langle\varepsilon\partial_t R(t),R(t)\right\rangle\right|=\left|\left\langle\partial_t R(t),R(t)\right\rangle\right|\lesssim\|R(t)\|_{L^2}^2+\|\partial_t R(t)\|_{L^2}^2\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^4+o_T. \tag{4.208}$$

□

推论 4.26.1. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R](t)\|_{L^6}+\left|\mu^{\frac{1}{4}}R(t)\right|_{L^4_{\gamma_+}}\lesssim o_T\|\!|\!|R|\!|\!|_X+\|\!|\!|R|\!|\!|_X^2+o_T. \tag{4.209}$$

证明。 这与推论的证明相似3.18.1。 □

4.6. 核估计——瞬时。

命题 4.27。 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|p(t)\|_{L^6} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.210}$$

证明。 固定 $t \in \mathbb{R}_+$时，我们对（4.39 ）应用与命题 3.19 的证明中类似的论证，令 $r = 6$。对于 ψ （定义见（3.145））， 我们得到

$$\|p(t)\|_{L^6}^6 \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T + \left|\left\langle \varepsilon \partial_t R(t), \psi \right\rangle\right|. \tag{4.211}$$

利用命题4.17，可得

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \varepsilon \partial_t R(t), \psi \right\rangle\right| &\lesssim \varepsilon \|\partial_t R(t)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \lesssim \varepsilon \|\partial_t R(t)\|_{L^2} \|\psi\|_{W^{1,\frac{6}{5}}} \\ &\lesssim \varepsilon \Big(o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T \Big) \|p(t)\|_{L^6}^5 \lesssim \varepsilon^6 \|p(t)\|_{L^6}^6 + o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T. \end{aligned} \tag{4.212}$$

因此，我们有

$$\|p(t)\|_{L^6}^6 \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T, \tag{4.213}$$

从而得到（4.210）。 □

命题 4.28. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|c(t)\|_{L^6} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.214}$$

证明. 固定 $t \in \mathbb{R}_+$，我们对 (4.39) 应用与命题 $r = 6$ 3.20 的证明类似的论证。对于 φ 在 (3.160) 中定义的

$$\|c(t)\|_{L^6}^6 \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T + \left|\varepsilon^{-1} \left\langle \varphi\big(|v|^2 - 5\big)\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla_x \varphi \cdot \mathscr{A}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right|. \tag{4.215}$$

利用命题 4.17，我们有

$$\begin{aligned} &\left|\varepsilon^{-1} \left\langle \varphi\big(|v|^2 - 5\big)\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla_x \varphi \cdot \mathscr{A}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| \\ \lesssim &\|\partial_t R(t)\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1} \lesssim \|\partial_t R(t)\|_{L^2} \|\varphi\|_{W^{2,\frac{6}{5}}} \lesssim \Big(o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T \Big) \|c(t)\|_{L^6}^5 \\ \lesssim &o(1) \|c(t)\|_{L^6}^6 + o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T. \end{aligned} \tag{4.216}$$

因此，我们有

$$\|c(t)\|_{L^6}^6 \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T, \tag{4.217}$$

从而 (4.214) 得证。 □

命题 4.29. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|\mathbf{b}(t)\|_{L^6} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.218}$$

证明。 固定 $t \in \mathbb{R}_+$后，我们对 $r = 6$ 应用与命题 3.21 证明中相似的论证，得到，再将其应用于 (4.39)。对于 ψ 和 q （定义见 (3.181)）

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}(t)\|_{L^6}^6 \lesssim &o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T \\ &+ \left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\varepsilon^{-1} \left\langle \psi \cdot v\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla_x \psi : \mathscr{B}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right|. \end{aligned} \tag{4.219}$$

利用命题4.17，我们有

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle q\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\varepsilon^{-1} \left\langle \psi \cdot v\mu^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla_x \psi : \mathscr{B}, \varepsilon \partial_t R(t) \right\rangle\right| \\ \lesssim &\|\partial_t R(t)\|_{L^2} \Big(\|\psi\|_{H^1} + \|q\|_{L^2} \Big) \lesssim \varepsilon \|\partial_t R(t)\|_{L^2} \Big(\|\psi\|_{W^{2,\frac{6}{5}}} + \|q\|_{W^{1,\frac{6}{5}}} \Big) \\ \lesssim &\Big(o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T \Big) \|\mathbf{b}(t)\|_{L^6}^5 \lesssim o(1) \|\mathbf{b}(t)\|_{L^6}^6 + o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T. \end{aligned} \tag{4.220}$$

因此，我们有

$$\|\mathbf{b}(t)\|_{L^6}^6 \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X^6 + \|\!|R|\!\|_X^{12} + o_T, \tag{4.221}$$

因此（4.218）成立。 □

命题 4.30. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\|\mathbf{P}[R](t)\|_{L^6} \lesssim o_T \|\!|\!| R |\!|\!|_X + |\!|\!| R |\!|\!|_X^2 + o_T. \tag{4.222}$$

证明. 综合命题 4.27、命题 4.28 和命题4.29 即可得到所需结果。 □

4.7. L^∞ 估计. 我们定义权函数如下：(3.206) 和 (3.207)。

命题 4.31. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)下，我们有

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\!|\!| R |\!|\!|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R\|_{L^\infty_{\gamma_+,\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T \|\!|\!| R |\!|\!|_X + |\!|\!| R |\!|\!|_X^2 + o_T. \tag{4.223}$$

证明. 我们将使用众所周知的 $L^2 - L^6 - L^\infty$ 框架。

步骤 1：温和公式。记加权解为

$$R_w(t,x,v) := w(v) R(t,x,v), \tag{4.224}$$

以及加权非局部算子

$$K_{w(v)}[R_w](v) := w(v) K\left[\frac{R_w}{w}\right](v) = \int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) R_w(\mathfrak{u}) \mathrm{d}\mathfrak{u}, \tag{4.225}$$

其中

$$k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) := k(v,\mathfrak{u}) \frac{w(v)}{w(\mathfrak{u})}. \tag{4.226}$$

将 εw 乘到（1.11）的两边，得到

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t R_w + \varepsilon v \cdot \nabla_x R_w + \nu R_w = K_w[R_w](x,v) + \varepsilon w(v) S(t,x,v) \ \text{ in } \ \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ R_w(0,x,v) = w z(x,v) \ \text{ in } \ \Omega \times \mathbb{R}^3, \\ R_w(t,x_0,v) = w h(t,x_0,v) \ \text{ for } \ x_0 \in \partial\Omega \ \text{ and } \ v \cdot n < 0, \end{cases} \tag{4.227}$$

我们可以重写 沿特征线利用杜哈梅尔原理，可得方程（4.227）的解 as

$$\begin{aligned} R_w(t,x,v) =& \mathbf{1}_{t_i < t_b} w(v) z(\mathfrak{x},v) \mathrm{e}^{-\nu(v) t_i} + \mathbf{1}_{t_b < t_i} w(v) h(\mathfrak{x},v) \mathrm{e}^{-\nu(v) t_b} \\ &+ \int_0^{\mathfrak{t}} w(v) \varepsilon S\Big(t - \varepsilon^2 s, x - \varepsilon(\mathfrak{t}-s)v, v\Big) \mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)} \mathrm{d}s \\ &+ \int_0^{\mathfrak{t}} \int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) R_w\Big(t - \varepsilon^2 s, x - \varepsilon(\mathfrak{t}-s)\mathfrak{u}, \mathfrak{u}\Big) \mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)} \mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.228}$$

其中

$$t_b(x,v) := \inf\big\{t > 0 : x - \varepsilon t v \notin \Omega\big\}, \quad t_i(t) = \varepsilon^{-2} t, \quad \mathfrak{t} = \min\big\{t_i, t_b\big\}, \tag{4.229}$$

and

$$\mathfrak{x}(x,v) := x - \varepsilon \mathfrak{t}(x,v) v. \tag{4.230}$$

我们进一步沿特征线将非局部项改写为

$$
\begin{aligned}
&R_w(t,x,v) \qquad (4.231)\\
=&\mathbf{1}_{t_i<t_b}w(v)z(\mathfrak{x},v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_i}+\mathbf{1}_{t_b<t_i}w(v)h(\mathfrak{x},v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_b}\\
&+\int_0^{\mathfrak{t}}w(v)\varepsilon S\Big(t-\varepsilon^2 s,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v,v\Big)\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}s\\
&+\mathbf{1}_{t_i'<t_b'}\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})z(\mathfrak{x}',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_i'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\\
&+\mathbf{1}_{t_b'<t_i'}\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})h(\mathfrak{x}',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_b'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{\mathfrak{t}'}\varepsilon S\Big(t-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2 r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{\mathfrak{t}'}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')R_w\Big(t-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2 r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中

$$
t_b'(x,v;s,\mathfrak{u}):=\inf\big\{t>0:x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)-\varepsilon t\mathfrak{u}\notin\Omega\big\},\quad t_i'(t;s)=\varepsilon^{-2}t-s,\quad \mathfrak{t}'=\min\big\{t_i',t_b'\big\},\qquad(4.232)
$$

and

$$
\mathfrak{x}'(x,v;s,\mathfrak{u}):=x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)-\varepsilon\mathfrak{t}'(x,v;s,\mathfrak{u})\mathfrak{u}.\qquad(4.233)
$$

步骤 2：估计　　源项与边界项。根据引理 4.3 – 引理 4.10，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{1}_{t_i<t_b}w(v)z(\mathfrak{x},v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_i}\Big|+\Big|\mathbf{1}_{t_i'<t_b'}\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})z(\mathfrak{x}',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_i'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\Big| \qquad (4.234)\\
\lesssim&\|z\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{1}_{t_b<t_i}w(v)h(\mathfrak{x},v)\mathrm{e}^{-\nu(v)t_b}\Big|+\Big|\mathbf{1}_{t_b'<t_i'}\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})w(\mathfrak{u})h(\mathfrak{x}',v)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})t_b'}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\Big| \qquad (4.235)\\
\lesssim&\|h\|_{L^\infty_{\overline{\gamma}_-,\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{\mathfrak{t}}w(v)\varepsilon S\Big(t-\varepsilon^2 s,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v,v\Big)\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}s\Big| \qquad (4.236)\\
&+\Big|\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{\mathfrak{t}'}\varepsilon S\Big(t-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2 r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s\Big|\\
\lesssim&\varepsilon\left\|\left\|\nu^{-1}S\right\|\right\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T+o_T\varepsilon\|R\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\varepsilon\|R\|^2_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|R\|_X+\|R\|_X^2+o_T.
\end{aligned}
$$

步骤 3：非局部项的估计。（4.231）中唯一剩下的项是非局部项　　m

(4.237)

$$
I:=\int_0^{\mathfrak{t}}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})\int_0^{\mathfrak{t}'}\int_{\mathbb{R}^3}k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')R_w\Big(t-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2 r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)\mathfrak{u}-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'\Big)\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{e}^{-\nu(v)(\mathfrak{t}-s)}\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}s,
$$

这将在以下五种情况下进行估计：

$$
I:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.\qquad(4.238)
$$

情形 I: I_1 : $|v| \geq N$。根据引理 3.23，可得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}\mathfrak{u}' \right| \lesssim \frac{1}{1+|v|} \lesssim \frac{1}{N}. \tag{4.239}$$

因此，我们得到

$$|I_1| \lesssim \frac{1}{N} \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}. \tag{4.240}$$

情形 II: I_2 : $|v| \leq N$、 $|\mathfrak{u}| \geq 2N$，或 $|\mathfrak{u}| \leq 2N$、 $|\mathfrak{u}'| \geq 3N$。注意，这意味着 $|\mathfrak{u}-v| \geq N$或 $|\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'| \geq N$。因此，相应地，以下任一项均成立:

$$\left| k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) \right| \leq C \mathrm{e}^{-\delta N^2} \left| k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) \right| \mathrm{e}^{\delta |v-\mathfrak{u}|^2}, \tag{4.241}$$

$$\left| k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \right| \leq C \mathrm{e}^{-\delta N^2} \left| k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \right| \mathrm{e}^{\delta |\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'|^2}. \tag{4.242}$$

根据引理 3.23，我们知道

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) \right| \mathrm{e}^{\delta |v-\mathfrak{u}|^2} \mathrm{d}\mathfrak{u} < \infty, \tag{4.243}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| k_{w(\mathfrak{u}}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \right| \mathrm{e}^{\delta |\mathfrak{u}-\mathfrak{u}'|^2} \mathrm{d}\mathfrak{u}' < \infty. \tag{4.244}$$

因此，我们有

$$|I_2| \lesssim \mathrm{e}^{-\delta N^2} \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}. \tag{4.245}$$

情形 III: I_3 : $\mathfrak{t}' - r \leq \delta$且 $|v| \leq N$、 $|\mathfrak{u}| \leq 2N$、 $|\mathfrak{u}'| \leq 3N$。在这种情形下，由于关于 r的积分仅在一个非常短的区间内进行，因此其贡献很小:

$$|I_3| \lesssim \left| \int_{\mathfrak{t}'-\delta}^{\mathfrak{t}'} \mathrm{e}^{-(\mathfrak{t}'-r)} \mathrm{d}r \right| \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty} \lesssim \delta \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}. \tag{4.246}$$

情形 IV: I_4 : $\mathfrak{t}' - r \geq |\ln(\delta)|$和 $|v| \leq N$、 $|\mathfrak{u}| \leq 2N$、 $|\mathfrak{u}'| \leq 3N$。在这种情况下， $\mathfrak{t}' - r$显著较大，因此 $\mathrm{e}^{-(\mathfrak{t}'-r)} \leq \delta$ 非常小。因此，这一项的贡献很小

$$|I_4| \lesssim \left| \int_{|\ln(\delta)|}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathfrak{t}'-r)} \mathrm{d}r \right| \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty} \lesssim \delta \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}. \tag{4.247}$$

情形 V: I_5 : $\delta \leq \mathfrak{t}' - r \leq |\ln(\delta)|$和 $|v| \leq N$、 $|\mathfrak{u}| \leq 2N$、 $|\mathfrak{u}'| \leq 3N$。这是最复杂的情形。由于$k_{w(v)}(v,\mathfrak{u})$可能具有 $|v-\mathfrak{u}|^{-1}$的可积奇异性，我们可以引入截断核 $k_N(v,\mathfrak{u})$，它是光滑的，且具有紧支撑范围，使得

$$\sup_{|v| \leq 3N} \int_{|\mathfrak{u}| \leq 3N} \left| k_N(v,\mathfrak{u}) - k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) \right| \mathrm{d}\mathfrak{u} \leq \frac{1}{N}. \tag{4.248}$$

然后我们可以将其拆分

$$\begin{aligned} k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') =& k_N(v,\mathfrak{u}) k_N(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) + \Big(k_{w(v)}(v,\mathfrak{u}) - k_N(v,\mathfrak{u}) \Big) k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \\ &+ \Big(k_{w(\mathfrak{u})}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') - k_N(\mathfrak{u},\mathfrak{u}') \Big) k_N(v,\mathfrak{u}). \end{aligned} \tag{4.249}$$

这意味着我们进一步将 I_5 拆分为

$$I_5 := I_{5,1} + I_{5,2} + I_{5,3}. \tag{4.250}$$

根据（4.248），我们有

$$|I_{5,2}| \lesssim \frac{1}{N} \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}, \quad |I_{5,3}| \lesssim \frac{1}{N} \left\| \left| R_w \right| \right\|_{L^\infty}. \tag{4.251}$$

因此，唯一剩下的项是 $I_{5,\ 1}$。注意，我们始终有 $x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}\in\Omega$。因此，我们定义变量代换 $\mathfrak{u}\to y$ 为 $y=(y_1,y_2,y_3)=x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}$。然后，雅可比行列式

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathfrak{u}}\right|=\left\|\begin{array}{ccc}\varepsilon(\mathfrak{t}'-r) & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon(\mathfrak{t}'-r) & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\end{array}\right\|=\varepsilon^3(\mathfrak{t}'-r)^3\geq\varepsilon^3\delta^3. \tag{4.252}$$

考虑 $|v|$、$|\mathfrak{u}|$、$|\mathfrak{u}'|\leq 3N$，我们知道 $|R_w|\simeq|R|$。此外，由于 k_N 有界，我们估计

$$|I_{5,1}|\lesssim\int_{|\mathfrak{u}|\leq 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\leq 3N}\int_0^{\mathfrak{t}'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(t-\varepsilon^2s-\varepsilon^2r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\mathfrak{u}'. \tag{4.253}$$

利用 H¨older 不等式，我们估计

$$\begin{aligned}&\int_{|\mathfrak{u}|\leq 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\leq 3N}\int_0^{\mathfrak{t}'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(t-\varepsilon^2s-\varepsilon^2r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\mathfrak{u}'\\ \leq&\left(\int_{|\mathfrak{u}|\leq 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\leq 3N}\int_0^{\mathfrak{t}'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\mathfrak{u}'\right)^{\frac{5}{6}}\\ &\times\left(\int_{|\mathfrak{u}|\leq 2N}\int_{|\mathfrak{u}'|\leq 3N}\int_0^{\mathfrak{t}'}\mathbf{1}_{\{x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u}\in\Omega\}}\left|R\Big(t-\varepsilon^2s-\varepsilon^2r,x-\varepsilon(\mathfrak{t}-s)v-\varepsilon(\mathfrak{t}'-r)\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\Big)\right|^6\mathrm{e}^{-\nu(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\mathfrak{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\mathfrak{u}'\right)^{\frac{1}{6}}\\ \lesssim&\left|\int_0^{\mathfrak{t}'}\frac{1}{\varepsilon^3\delta^3}\int_{|\mathfrak{u}'|\leq 3N}\int_\Omega\mathbf{1}_{\{y\in\Omega\}}\big|R(t-\varepsilon^2s-\varepsilon^2r,y,\mathfrak{u}')\big|^6\mathrm{e}^{-(\mathfrak{t}'-r)}\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathfrak{u}'\mathrm{d}r\right|^{\frac{1}{6}}\lesssim\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}.\end{aligned} \tag{4.254}$$

将 (4.254) 代入 (4.253，得到

$$|I_{5,1}|\lesssim\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}. \tag{4.255}$$

结合 (4.251)，我们知道

$$I_5\lesssim\frac{1}{N}\left\|\!\left|R_w\right|\!\right\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}. \tag{4.256}$$

汇总 (4.240)(4.245)(4.246)(4.247)(4.256) 中的全部五种情形，得到

$$|I|\lesssim\left(\frac{1}{N}+\mathrm{e}^{-\delta N^2}+\delta\right)\left\|\!\left|R_w\right|\!\right\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}. \tag{4.257}$$

选取 δ 充分小的值，然后令 N 充分大，我们有

$$|I|\lesssim\delta\left\|\!\left|R_w\right|\!\right\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}. \tag{4.258}$$

步骤 4：综合。综上所述，对于任意$(t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^3$，我们得到 ，

$$\big|R_w(t,x,v)\big|\lesssim\delta\left\|\!\left|R_w\right|\!\right\|_{L^\infty}+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T. \tag{4.259}$$

因此，当 $\delta\ll 1$时，我们得到

$$\big|R_w(t,x,v)\big|\lesssim\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left\|\!\left|R\right|\!\right\|_{L_t^\infty L_{x,v}^6}+o_T\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\|R\right\|_X+\left\|R\right\|_X^2+o_T, \tag{4.260}$$

因此，所需结果得证。 □

4.8. 余项估计。

定理 4.32. 在假设 (1.22)(1.27)(1.30)，我们有

$$\|\!|R|\!\|_X \lesssim o_T. \tag{4.261}$$

证明。 根据命题4.16，我们有

$$\|R\|_{L_t^\infty L_{xv}^2} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}} + \varepsilon^{-1} \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.262}$$

根据命题4.24，我们有

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|\mathbf{P}[R]|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.263}$$

将两者结合起来，可得

$$\|R\|_{L_t^\infty L_{xv}^2} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|\mathbf{P}[R]|\!\|_{L^2} + \varepsilon^{-1} \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.264}$$

类似地，结合命题 4.17 和命题4.25，可得

$$\|\partial_t R\|_{L_t^\infty L_{xv}^2} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t R\|_{L^2_{\overline{\gamma}_+}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|\partial_t \mathbf{P}[R]|\!\|_{L^2} + \varepsilon^{-1} \|\!|\partial_t(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.265}$$

根据命题 4.26 和推论4.26.1，可得

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|R\|_{L_t^\infty L^2_{\gamma_+}} + \left\|\mu^{\frac{1}{4}} R\right\|_{L_t^\infty L^4_{\gamma_+}} + \varepsilon^{-1} \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L_t^\infty L^2_\nu} + \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L_t^\infty L^6_{xv}} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.266}$$

根据命题4.30，可得

$$\|\mathbf{P}[R]\|_{L_t^\infty L^6_{xv}} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.267}$$

将两者结合，可得

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|R\|_{L_t^\infty L^2_{\gamma_+}} + \left\|\mu^{\frac{1}{4}} R\right\|_{L_t^\infty L^4_{\gamma_+}} + \varepsilon^{-1} \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L_t^\infty L^2_\nu} + \|\!|R|\!\|_{L_t^\infty L^6_{xv}} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.268}$$

根据命题4.31，可得

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\!|R|\!\|_{L_t^\infty L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R\|_{L_t^\infty L^\infty_{\gamma_+}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\!|R|\!\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|R\|_{L^\infty_{\overline{\gamma}_+,\varrho,\vartheta}} \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.269}$$

汇总（4.264）（4.265）（4.268）（4.269，可得

$$\|\!|R|\!\|_X \lesssim o_T \|\!|R|\!\|_X + \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.270}$$

因此，可得

$$\|\!|R|\!\|_X \lesssim \|\!|R|\!\|_X^2 + o_T. \tag{4.271}$$

通过标准迭代/不动点论证，即可得到我们所需的结果。 □

定理*1.2*的证明。估计式（1.37）由定理4.32得出。基于展开式（1.31）的构造与正性是标准的，详见[25, 23], 因此我们将重点证明（1.38）。由定理4.32，可得

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\!|\mathbf{P}[R]|\!\|_{L^2} + \varepsilon^{-1} \|\!|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[R]|\!\|_{L^2} \lesssim o_T, \tag{4.272}$$

由此可得

$$\|\!|R|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{4.273}$$

由（1.31），可知

$$\left\|\!\left|\mu^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{F} - \mu^{\frac{1}{2}} - \varepsilon f_1 - \varepsilon^2 f_2 - \varepsilon f_1^B\right|\!\right\|_{L^2} = \|\!|\varepsilon R|\!\|_{L^2} \lesssim o_T \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{4.274}$$

由定理 4.1 和重标度 $\eta=\varepsilon^{-1}\mathfrak{n}$，可得

$$\left|\!\left|\!\left|\varepsilon^2 f_2\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^2,\quad \left|\!\left|\!\left|\varepsilon f_1^B\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{4.275}$$

因此，我们有

$$\left|\!\left|\!\left|\mu^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{F}-\mu^{\frac{1}{2}}-\varepsilon f_1\right|\!\right|\!\right|_{L^2}\lesssim o_T\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{4.276}$$

因此，（1.38）成立。 □

Appendix A. Linearized Boltzmann Operator

根据[18, 第 7] 章和 [30, 第 1 章&3], , 定义.....的对称化形式 Q

$$Q^*[F,G]:=\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}q(\omega,|\mathfrak{u}-v|)\Big(F(\mathfrak{u}_*)G(v_*)+F(v_*)G(\mathfrak{u}_*)-F(\mathfrak{u})G(v)-F(v)G(\mathfrak{u})\Big)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathfrak{u}. \tag{A.1}$$

显然， $Q[F,F]=Q^*[F,F]$。将线性化玻尔兹曼算子记为 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[f]:=-2\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu,\mu^{\frac{1}{2}}f\right]:=\nu f-K[f], \tag{A.2}$$

其中，某些核函数 $k(\mathfrak{u},v)$,

$$\nu(v)=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2}q(\omega,|\mathfrak{u}-v|)\mu(\mathfrak{u})\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\mathfrak{u},\quad K[f](v)=\int_{\mathbb{R}^3}k(\mathfrak{u},v)f(\mathfrak{u})\mathrm{d}\mathfrak{u}. \tag{A.3}$$

$\mathcal{L}$ 在 $L^2_\nu(\mathbb{R}^3)$ 中是自伴的，满足强制性

$$\int_{\mathbb{R}^3}f\mathcal{L}[f]\gtrsim\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})[f]\|^2_{L^2_\nu}. \tag{A.4}$$

记 $\mathcal{L}^{-1}\colon\mathcal{N}^\perp\to\mathcal{N}^\perp$ 为 $\mathcal{L}$ 的拟逆。此外，记非线性玻尔兹曼算子为 Γ

$$\Gamma[f,g]:=\mu^{-\frac{1}{2}}Q^*\left[\mu^{\frac{1}{2}}f,\mu^{\frac{1}{2}}g\right]\in\mathcal{N}^\perp. \tag{A.5}$$

Appendix B. Inner Products and Norms

根据流动方向，我们可以依据 $v\cdot n(x_0)$ 的符号，将边界 $\gamma:=\{(x_0,v):\ x_0\in\partial\Omega\ v\in\mathbb{R}^3\}$ 划分为入射边界 γ_-、出射边界 γ_+ 和掠射集 γ_0。类似地，我们进一步将边界 $\overline{\gamma}:=\{(t,x_0,v):\ t\in\mathbb{R}_+,x_0\in\partial\Omega\ v\in\mathbb{R}^3\}$ 划分为 $\overline{\gamma}_-$、 $\overline{\gamma}_+$ 和 $\overline{\gamma}_0$。

令 $\langle\cdot,\cdot\rangle_v$ 表示 $v\in\mathbb{R}^3$ 中的内积， $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ 表示 Ω 中的内积， $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^3$ 中的内积。此外，令 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\gamma_\pm}$ 表示 $\gamma_\pm$ 上关于测度 $\mathrm{d}\gamma:=|v\cdot n|\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}s$ 的内积。

涉及时间积分时，我们定义相应的内积 $\cdot,\cdot_{tv}$、 $\cdot,\cdot_{tx}$、 $\cdot,\cdot$ 和 $\cdot,\cdot_{\overline{\gamma}_\pm}$。

记体域范数和边界范数

$$\|f\|_{L^r}:=\left(\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}|f(x,v)|^r\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}},\qquad |f|_{L^r_{\gamma_\pm}}:=\left(\int_{\gamma_\pm}|f(x,v)|^r\,|v\cdot n|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{B.1}$$

定义 $0\le\varrho<\frac{1}{2}$ 和 $\vartheta\ge0$ 的加权 L^∞ 范数

$$\|f\|_{L^\infty_{\varrho,\vartheta}}:=\operatorname*{ess\,sup}_{(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^3}\left(\langle v\rangle^\vartheta\,\mathrm{e}^{\varrho\frac{|v|^2}{2}}\,|f(x,v)|\right),\qquad |f|_{L^\infty_{\gamma_\pm,\varrho,\vartheta}}:=\operatorname*{ess\,sup}_{(x,v)\in\gamma_\pm}\left(\langle v\rangle^\vartheta\,\mathrm{e}^{\varrho\frac{|v|^2}{2}}\,|f(x,v)|\right). \tag{B.2}$$

记 ν-范数

$$\|f\|_{L^2_\nu}:=\left(\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^3}\nu(v)\,|f(x,v)|^2\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.3}$$

当涉及时间变量时，我们定义相应的范数：$\|\!|\!| f |\!|\!|_{L^r}$, $\|f\|_{L^r_{\overline{\gamma}_\pm}}$, $\|\!|\!| f |\!|\!|_{L^\infty_{\varrho,\,\vartheta}}$, $\|f\|_{L^\infty_{\overline{\gamma}_\pm,\,\varrho,\,\vartheta}}$和$\|\!|\!| f |\!|\!|_{L^2_\nu}$。

令$\|\cdot\|_{W^{k,p}L^q}$表示Ω上的 $W^{k,p}$范数， $x\in$表示 L^q的范数；令$|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{W^{m,s}W^{k,p}L^q}$表示 $t\in[0,\mathfrak{T}]$上的 $W^{m,s}$范数，其中两者相差某个常数倍 $\mathfrak{T}>0$， $W^{k,p}$表示Ω上的 $x\in$范数， L^q表示 $v\in\mathbb{R}^3$的范数。将 L^q 替换为 $L^\infty_{\varrho,\vartheta}$、 $W^{1,}{}_{\varrho}{}^{\infty}_{\vartheta}$,或 L^q_γ时，也采用类似的记号。只有在可能引起混淆时，我们才明确写出变量(t,x,v)。

Appendix C. Symbols and Constants

定义以下量

$$\overline{\mathscr{A}}:=v\cdot\left(|v|^2-5T\right)\mu^{\frac12}\in\mathbb{R}^3,\quad \mathscr{A}:=\mathcal{L}^{-1}\left[\overline{\mathscr{A}}\right]\in\mathbb{R}^3, \tag{C.1}$$

$$\overline{\mathscr{B}}=\left(v\otimes v-\frac{|v|^2}{3}\mathbf{1}\right)\mu^{\frac12}\in\mathbb{R}^{3\times3},\quad \mathscr{B}=\mathcal{L}^{-1}\left[\overline{\mathscr{B}}\right]\in\mathbb{R}^{3\times3}, \tag{C.2}$$

with

$$\kappa\mathbf{1}:=\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathscr{A}\otimes\overline{\mathscr{A}}\right)\mathrm{d}v,\quad \sigma\mathbf{1}:=\int_{\mathbb{R}^3}\left(|v|^2-5T\right)\left(\mathscr{A}\otimes\overline{\mathscr{A}}\right)\mathrm{d}v, \tag{C.3}$$

$$\lambda:=\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{B}_{ij}\overline{\mathscr{B}}_{ij},\quad \alpha:=\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{B}_{ii}\overline{\mathscr{B}}_{ii},\quad \gamma:=\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{B}_{ii}\overline{\mathscr{B}}_{jj}\ \text{ for }\ i\neq j. \tag{C.4}$$

在本文中， $C>0$ 表示一个只依赖于区域Ω、但不依赖于数据或 ε的常数。该常数称为普适的，并且在不同的不等式中可以取不同的值。写作 $C(z)$ 时，表示一个依赖于量 z的某个正的常数。我们用 $a\lesssim b$ 表示$a\le Cb$，用 $a\gtrsim b$ 表示 $a\ge Cb$。此外，若 $a\lesssim b$ 且 $a\gtrsim b$，则记作 $a\simeq b$。

在本文中，我们将用 $o(1)$ 表示一个与数据无关的充分小的常数。此外，令o_T为一个小常数。对于定常问题，o_T仅取决于 $\mathfrak{f}_b$，满足

$$o_T=o(1)\to0\ \text{ as }\ |\mathfrak{f}_b|_{W^{3,\infty}W^{1,\infty}_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}\to0. \tag{C.5}$$

对于演化问题， o_T取决于 $\mathfrak{f}_i$ 和 $\mathfrak{f}_b$，满足

$$o_T=o(1)\to0\ \text{ as }\ \|\mathfrak{f}_i\|_{W^{1,\infty}L^\infty_{\varrho,\vartheta}}+\|\mathfrak{f}_b\|_{W^{1,\infty}W^{3,\infty}W^{1,\infty}_{\gamma_-,\varrho,\vartheta}}\to0. \tag{C.6}$$

原则上，当 o $_T$由数据先验确定，我们可以根据估计自由选择 $o(1)$.

References

[1] L. Arkeryd, R. Esposito, R. Marra, and A. Nouri, *Stability for Rayleigh-Benard convective solutions of the Boltzmann equation* 198 2010 125 187 , Arch. Ration. Mech. Anal., ( ), pp. – .

[2] , *Ghost effect by curvature in planar Couette flow*, Kinet. Relat. Models, 4 (2011), pp. 109–138.

[3] L. Arkeryd and A. Nouri, *L^1 solutions to the stationary Boltzmann equation in a slab*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 9 (2000), pp. 375–413.

[4] K. Asano and S. Ukai, *The Euler limit and the initial layer of the nonlinear Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J., 12 (1983), pp. 303–324.

[5] C. Bardos, R. E. Caflisch, and B. Nicolaenko, *The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas* 39 1986 323 352 , Comm. Pure Appl. Math., ( ), pp. – .

[6] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore, *Fluid dynamical limits of kinetic equations I: formal derivations*, J. Statist. Phys., 63 (1991), pp. 323–344.

[7] , *Fluid dynamical limits of kinetic equations II: convergence proofs for the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 667–753.

[8] , *Acoustic and Stokes limits for the Boltzmann equation*, C. R Acad. Sci. Paris, Serie 1 Math, 327 (1998), pp. 323–328.

[9] , *The acoustic limit for the Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal., 153 (2000), pp. 177–204.

[10] C. Bardos and S. Ukai, *The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation*, Math. Models Methods Appl. Sci., 1 (1991), pp. 235–257.

[11] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models* 2013 , Springer, 纽约, .

[12] M. Briant and Y. Guo, *Asymptotic stability of the Boltzmann equation with Maxwell boundary conditions*, J. Differential Equations, 261 (2016), pp. 7000–7079.

[13] M. Briant, S. Merino-Aceituno, and C. Mouhot, *From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weight* 17 2019 85 116 , Anal. Appl., ( ), pp. – . [14] R. E. Caflisch, *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), pp. 651–666. [15] Y. Cao, J. Jang, and C. Kim, *Passage from the Boltzmann equation with diffuse boundary to the incompressible Euler equation with heat convection* 2104 02169, 2021 , arXiv: . ( ).

[16] E. A. Carlen and M. C. Carvalho, *Entropy production estimates for Boltzmann equations with physically realistic collision kernels* 74 1994 743 782 , J. Statist. Phys., ( ), pp. – . [17] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), pp. 308–340. [18] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Springer-Verlag, 纽约, 1994. [19] A. De Masi, R. Esposito, and J. L. Lebowitz, *Incompressible Navier-Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation*, Comm. Pure and Appl. Math., 42 (1989), pp. 1189–1214.

[20] L. Desvillettes and C. Villani, *On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation* 54 2001 1 42 , Comm. Pure Appl. Math., ( ), pp. – . [21] , *On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: the Boltzmann equation*, Invent. Math., 159 (2005), pp. 245–316. [22] R. Esposito, Y. Guo, C. Kim, and R. Marra, *Non-isothermal boundary in the Boltzmann theory and Fourier law*, 《数学物理通讯》, 323 (2013), pp. 177–239. [23] , *Stationary solutions to the Boltzmann equation in the hydrodynamic limit*, Ann. PDE, 4 (2018), pp. 1–119. [24] R. Esposito, Y. Guo, and R. Marra, *Hydrodynamic limit of a kinetic gas flow past an obstacle*, 《数学物理通讯》, 364 (2018), pp. 765–823.

[25] R. Esposito, Y. Guo, R. Marra, and L. Wu, *Ghost effect from Boltzmann theory*, arXiv:2301.09427, (2023). [26] , *Ghost effect from Boltzmann theory: Expansion with remainder*, arXiv:2301.09560, (2023). [27] R. Esposito, J. L. Lebowitz, and R. Marra, *Hydrodynamic limit of the stationary Boltzmann equation in a slab*, 《数学物理通讯》, 160 (1994), pp. 49–80. [28] , *The Navier-Stokes limit of stationary solutions of the nonlinear Boltzmann equation*, J. Statist. Phys., 78 (1995), pp. 389–412.

[29] R. Esposito and R. Marra, *Stationary non equilibrium states in kinetic theory*, J. Statist. Phys., 180 (2020), pp. 773–809.

[30] R. T. Glassey, *The Cauchy problem in kinetic theory*, 工业与应用数学学会 (SIAM), Philadel- phia, PA, 1996. [31] F. Golse, *Hydrodynamic limits*, Eur. Math. Soc. 苏黎世, (2005), pp. 699–717. [32] , *Fluid dynamic limits of the kinetic theory of gases*, S pringer Proc. Math. Stat., Springer, Heidelberg, 2014. [33] F. Golse and L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, Invent. Math, 155 (2004), pp. 81–161.

[34] Y. Guo, *Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation*, Comm. Pure Appl. Math., 59 (2006), pp. 626– 68. [35] , *Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., 197 (2010), pp. 713–809.

[36] Y. Guo, F. Huang, and Y. Wang, *Hilbert expansion of the Boltzmann equation with specular boundary condition in half-space* 241 2021 231 309 , Arch. Ration. Mech. Anal., ( ), pp. – . [37] Y. Guo and J. Jang, *Global Hilbert expansion for the Vlasov-Poisson-Boltzmann system*, 《数学物理通讯》, 299 (2010), pp. 469–501. [38] Y. Guo, J. Jang, and N. Jiang, *Acoustic limit for the Boltzmann equation in optimal scaling*, Comm. Pure Appl. Math., 63 (2010), pp. 337–361. [39] Y. Guo, C. Kim, D. Tonon, and A. Trescases, *BV-regularity of the boltzmann equation in non-convex domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., 220 (2016), pp. 1045–1093. [40] , *Regularity of the Boltzmann equation in convex domain*, Invent. Math., 207 (2016), pp. 115–290. [41] Y. Guo and L. Wu, *L^2 diffusive expansion for neutron transport equation*, arXiv:2301.11996, (2023). [42] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Gottinges Nachrichten, (1900), pp. 253–297. [43] , *Begrundung der kinetischen gastheorie*, Math. Ann., 72 (1912), pp. 331–407. [44] , *Grundzugeiner allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 切尔西, 纽约, 1953. [45] F. Huang, Y. Wang, Y. Wang, and T. Yang, *Justification of limit for the Boltzmann equation related to Korteweg theory* 74 2016 719 764 , Quart. Appl. Math., ( ), pp. – . [46] F. Huang, Y. Wang and T. Yang *Fluid dynamic limit to the Riemann solutions of Euler equations: I. superposition , , , of rarefaction waves and contact discontinuity* 3 2010 685 728 , Kinet. Relat. Models, ( ), pp. – . [47] , *Hydrodynamic limit of the Boltzmann equation with contact discontinuities*, 《数学物理通讯》, 295 (2010), pp. 293–326. [48] , *The limit of the Boltzmann equation to the Euler equations for Riemann problems*, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 45 (2013), pp. 1741–1811. [49] J. Jang, *Vlasov-Maxwell-Boltzmann diffusive limit*, Arch. Ration. Mech. Anal., 194 (2009), pp. 531–584. [50] J. Jang and C. Kim, *Incompressible Euler limit from Boltzmann equation with diffuse boundary condition for analytic data* 7 2021 103 , Ann. PDE, ( ), p. .

[51] N. Jiang and N. Masmoudi, *Boundary layers and incompressible Navier-Stokes-Fourier limit of the Boltzmann equation in bounded domain I* 70 2016 90 171 ,

Comm. Pure Appl. Math., ( ), pp. – . [52] , *Low Mach number limits and acoustic waves*, Springer, 尚, 2018. [53] C. Kim, *Formation and propagation of discontinuity for Boltzmann equation in non-convex domains*, 《数学物理通讯》, 308 (2011), pp. 641–701. [54] , *Boltzmann equation with a large potential in a periodic box*, 《偏微分方程通讯》, 39 (2014), pp. 1393–1423. [55] C. Kim and J. La, *Vorticity convergence from Boltzmann to 2D incompressible Euler equations below Yudovich class*, arXiv:2206.00543, (2022). [56] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces.*, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2008. [57] M. Lachowicz, *On the initial layer and the existence theorem for the nonlinear Boltzmann equation*, 《数学方法与应用科学》, 9 (1987), pp. 342–366. [58] P.-L. Lions and N. Masmoudi, *From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics. I, II.*, Arch. Ration. Mech. Anal., 158 (2001), pp. 173–193,195–211. [59] N. Masmoudi and L. Saint-Raymond, *From the Boltzmann equation to the Stokes-Fourier system in a bounded domain*, Comm. Pure and Appl. Math., 56 (2003), pp. 1263–1293. [60] T. Nishida, *Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation*, 《数学物理通讯》, 61 (1978), pp. 119–148. [61] Z. Ouyang, *Diffusive limit of the unsteady neutron transport equation in bounded domains*, arXiv:2303.15424, (2023). [62] L. Saint-Raymond, *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, Springer-Verlag, 柏林, 2009 [63] Y. Sone, *Kinetic theory and fluid dynamics.*, Birkhäuser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 2002. [64] , *Molecular gas dynamics. Theory, techniques, and applications.*, Birkhäuser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 2007. [65] J. Speck and R. M. Strain, *Hilbert expansion from the Boltzmann equation to relativistic fluids*, 《数学物理通讯》, 304 (2011), pp. 229–280. [66] C. Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, 《数学流体动力学手册》, Vol.I (2002), pp. 71–305. [67] L. Wu, *Hydrodynamic limit with geometric correction of stationary Boltzmann equation*, J. Differential Equations, 260 (2016), pp. 7152–7249. [68] , *Boundary layer of Boltzmann equation in 2D convex domains*, 《分析与偏微分方程》, 14 (2021), pp. 1363–1428. [69] , *Diffusive limit of transport equation in 3D convex domains*, 《北京数学杂志》, 4 (2021), pp. 203–284. [70] L. Wu and Y. Guo, *Geometric correction for diffusive expansion of steady neutron transport equation*, 《数学物理通讯》, 336 (2015), pp. 1473–1553. [71] L. Wu and Z. Ouyang, *Asymptotic analysis of Boltzmann equation in bounded domains*, arXiv:2008.10507, (2020). [72] , *Hydrodynamic limit of 3D stationary Boltzmann equation in convex domains*, 已提交, (2020). [73] , *Hydrodynamic limit of 3D evolutionary Boltzmann equation in convex domains*, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 54 (2022), pp. 2508–2569. [74] L. Wu, X. Yang, and Y. Guo, *Asymptotic analysis of transport equation in annulus*, 《统计物理学杂志》, 165 (2016), pp. 585– 644. [75] S.-H. Yu, *Hydrodynamic limits with shock waves of the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math., 58 (2005), pp. 409– 443.

(Z. Ouyang)Department of Mathematics,
University of Chicago*Email address*:
ouyangzm9386@uchicago.edu

(L. Wu)Department of Mathematics,
Lehigh University*Email address*:
lew218@lehigh.edu