arXiv:2304.01130v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Apr 2023

关于两个非遍历可逆元胞自动机：一个经典，一个量子

Tomaˇz Prosen

数学与物理学院，卢布尔雅那大学，Jadranska 19，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚

电子邮件：tomaz.prosen@fmf.uni-lj.si

摘要。 我们提出并讨论了两种动力学粒子模型的变体—— 1+1 维元胞自动机。它们因结构简单、性质引人入胜而颇具吸引力，值得进一步研究并探索其应用。第一个模型是一个确定性且可逆的自动机，描述两种准粒子：以速度 ±1 运动的稳定无质量物质粒子，以及不稳定的静止（零速度）场粒子。我们讨论了该模型三种守恒荷对应的两组不同连续性方程。前两种守恒荷及其对应的流支撑在三个（3）个晶格点上，代表守恒能量-动量张量的晶格类比。我们还发现了另一种支撑在九个（9）个晶格点上的守恒荷及其对应的流，这意味着该模型具有非遍历行为，并可能表明其具有可积性，且 R 矩阵结构高度嵌套。第二个模型是近期提出并研究的一种带电硬点晶格气体的量子（或随机）变形；不同二元电荷（±1）和二元速度（±1）的粒子可在弹性碰撞散射过程中发生非平凡混合。我们证明，该模型的幺正演化规则虽然不满足完整的 Yang-Baxter 方程，却满足一个引人入胜的相关恒等式，由此产生一组无限的局域守恒算符，即所谓的滑翔子算符。

谨以此文献给 Giulio Casati 教授，值此他 80 岁寿辰之际

1. 引言

本文谨献给我的朋友兼导师 Giulio Casati。因此，我也斗胆以非常个人化的视角来撰写这篇论文。Giulio 教会我的最重要的事情之一，就是热情地欣赏极其简单的动力学模型。因此，在我的整个职业生涯中，构建并求解具有精心挑选的物理性质的简单动力学模型（近来最常见的是多体动力学模型），已成为我个人的执念。我从 Giulio 那里学到的另一件事，是以务实而深刻的态度欣赏遍历理论。我们曾共同投身于一些实验数学探索，有时还引起了专家的关注。例如，我们指出了经典和量子多边形台球以及相关的非双曲、非可积动力系统中耐人寻味的遍历性质 [CP99, CP00, WCP14, LCP22]。

粗略地说，遍历理论 [CFS82] 将动力系统分为遍历系统和非遍历系统。前者的特征是，对于（相关的）可观测量，其时间平均可以通过对整个状态空间（相空间）进行系综平均来计算；而后者则会在典型的（例如具有物理相关性的）可观测量中表现出对初始条件的记忆。此外，遍历动力学可以具有不同程度的动力学复杂性或混沌，而非遍历动力学则可能符合某些代数工具所描述的精确可解性或可积性。然而，遍历性破缺在多大程度上与任何形式的可积性相关，目前尚不清楚；可积性可以通过 Lax 对（在经典的确定性系统中）或 Yang-Baxter 方程（在量子或随机情形下）来精确定义。近年来，物理学文献在多体动力学的背景下广泛讨论了这些问题；在这一领域，遍历理论的数学发展远不充分，例如在具有局域相互作用的晶格系统中，无论是经典还是量子情形（参见近期综述，如 [AKPR16, AABS19, MBR22, S23]）。除可积性之外，人们还提出了许多不同形式的遍历性破缺，例如由各种运动学约束导致的相空间或希尔伯特空间碎裂、由静态无序导致的所谓多体局域化，以及由隐藏的、弱破缺的非阿贝尔对称性导致的多体疤痕等。

本文提出了两个定义在离散 $1+1$ 时空晶格上的、非常简单的多体局域相互作用动力系统。第一个模型被我们称为物质-场自动机，原因希望读者能够理解。它是一个具有两种不同类型自由度（物质与场）的确定性粒子运动学实例，由于一个非平凡的原因而具有非遍历性：存在一个高度非平凡但局域的守恒荷。受蛮力经验性计算机代数计算的启发，我们推测该模型可能是可积的；但如果确实如此，相应的 R 矩阵应当高度非平凡。第二个模型是此前研究过的带电硬点晶格气体 [MKP17, MPPRV19, KSPIP22]，的量子变形，它对于非阿贝尔谱参数满足一个显著的约化 Yang-Baxter 型恒等式。这再次通过存在一组无限的局域平移不变守恒算符，即所谓的滑翔子，确保了模型中明显的遍历性破缺。

2. 物质-场自动机

2.1. 自动机的定义

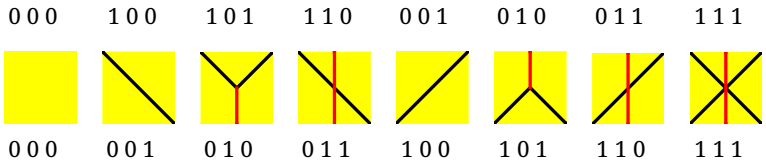
我们在$\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \ni s$ 上定义如下确定性的可逆元胞自动机。偶数晶格点对应于物质变量 $s_{2x} \in \{0,1\}$ ，而奇数晶格点对应于场变量 $s_{2x+1} \in \{0,1\}$、 $x \in \mathbb{Z}$。因此，瞬时系统构型由无限二进制序列s指定，并在其上规定确定性动力学。

该动 动力学以交错方式定义，分为偶数和奇数时间层 .

具体而言，对于所谓的偶数时间步，我们对所有 $x \in \mathbb{Z}$ 的物质-场-物质三元组（s_{4x}，s_{4x+1}，s_{4x+2}）应用确定性的可逆规则（$ss's''$） $\longrightarrow$ （$rr'r''$）；而对于奇数时间步，则使用相同规则更新三元组（s_{4x-2}，s_{4x-1}，s_{4x}）。该规则定义为

$$
\begin{aligned}
&(000) \longleftrightarrow (000),\\
&(001) \longleftrightarrow (100),\\
&(011) \longleftrightarrow (110),\\
&(101) \longleftrightarrow (010),\\
&(111) \longleftrightarrow (111),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

或者，用图示表示，也许更直观，如下图所示



这表示所有八种下方的物质-场-物质三元组都映射到相应的上方物质-场-物质三元组，反之亦然，这是由时间反演对称性所致。因此，黑线和红线分别表示物质和场粒子的世界线。图 1 展示了一段多体轨迹的示例 $\{s_x^t; x,\ t \in \mathbb{Z}\}$，其中时间 t 沿竖直方向（向上）流逝。轨迹的构造可理解为对规则中黄色方块进行棋盘格铺砌，而这种铺砌由最底下两行方块（初始条件）唯一确定。

请注意，这个动力系统具有丰富的三个相互独立的 $\mathbb{Z}^2$ 对称性，具体而言是 C、P 和 T:

（i）“电荷”共轭 C， $s \to 1-s$，即如果s_x^t 是有效轨迹，那么 $1-s_x^t$ 也是有效轨迹；（ii）宇称 P， $x \to -x$，即如果 s_x^t 是有效轨迹，那么 s_{-x}^t 也是有效轨迹；（iii）时间反演 T， $t \to -t$，即如果 s_x^t 是有效轨迹，那么 s_x^{-t}也是有效轨迹。

在图 2–6 中，我们展示了物质-场自动机的一些有趣的特征轨迹。在图 2 中，我们在大小为 L 的有限盒内设置最大熵初态，其中场和物质都在集合$\{0,1\}$ 中随机且均匀地采样，并绘制由此产生的确定性轨迹。由于初始条件在盒外为零， $s_x^{t=0} = 0$，对于 $x < 0$ 或 $x > L$，我们看到物质粒子从盒子边缘缓慢“蒸发”。图 3 展示了类似的轨迹，初始时只有物质（处于最大熵状态）而没有场；图 4 则展示了相反的情形，初始时只有处于最大熵状态的场而没有物质。这些轨迹的时空模式似乎会因初始条件而呈现出定性上的差异，尤其是场与物质的相对比例大不相同，这一事实

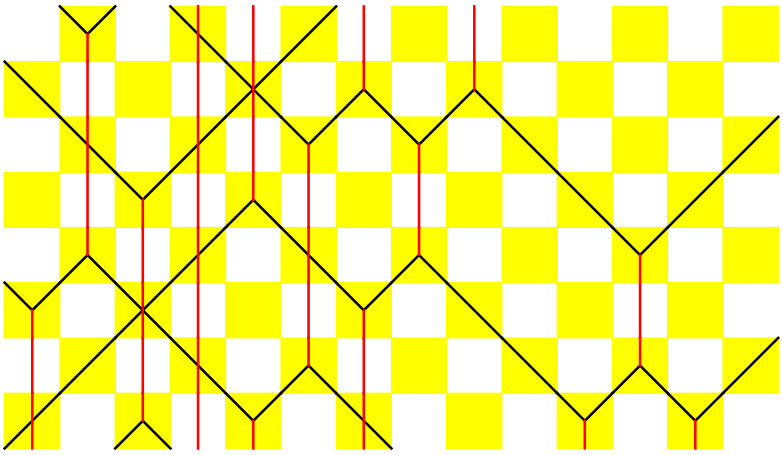


图 1. 自动机轨迹示例（时间沿垂直方向运行，例如向上）。黄色方块表示局部规则的应用，或等价地，三比特置换门 Y 的应用。黑色/红色线条分别表示物质/场准粒子的世界线。

表明动力学可能是非遍历的。我们将在下文通过构造非平凡的代数守恒律，更精确地确立这一点。此前的图展示的是平衡动力学的示意图；图 5 则展示了一条代表远离平衡动力学的典型轨迹：两股物质流迎头碰撞（初始数据中没有场），并通过形成复杂的场模式经历非平凡的散射过程，最终形成两股方向相反、彼此散开的物质流。

最后，我们证明，物质-场系统可以理解为一种非常一般的自动机；对于初始构型的一个动力学封闭（不变）子集，它也能模拟广受关注的规则54可逆元胞自动机 [BKP21] 的动力学。更一般地，我们可以证明，它能够模拟具有可公度初始数据的若干类负长度硬杆系统的动力学。例如，若我们取初始条件 s ，使得只有每隔六个位置才可能被占据，即 $s_x \equiv 0$满足 $x \neq 0$ （模6），那么可以证明，没有任何场的世界线会被另一个物质粒子穿过，因此每个场粒子都会在紧接着的下一时间步衰变（场的寿命最短）。这意味着物质粒子的散射总是经历固定的相移，因此其动力学在定性上类似于（但并不完全等同于）某个约化晶格上的规则54（演示见图6）。例如，在规则54动力学中，运动粒子/孤子（=2）之间的最小距离是孤子散射中时间标记（=1）的两倍；而在此情形下，左右运动粒子（=6）之间的最小距离是散射时间延迟（=2），即自由场寿命的三倍。对于形式为 $s_{x'} = 0$、满足 $x' \neq 0$ （模 2(2k+1）的初始数据子集 $\{s\}$ ，任意 $k = 1$，2 ...，也可得到类似的可公度负长度硬杆动力学，其中平行孤子之间的最小距离与散射延迟之比为 $2k + 1$。

2.2. 局域可观测量的交换代数上的时间演化

现在，让我们用阿贝尔 C^*- 代数动力系统的观点重新诠释物质-场自动机的动力学，然后研究其守恒律。我们首先定义一个可拟局域的可观测量代数，即构型空间上的实值函数$\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$。关于相关模型中完全类似但更精确的构造，可参见规则54可逆元胞自动机的参考文献 [KMPV19]。令 $[0]_{2x}$、 $[1]_{2x}$ 定义一个局域可观测量基底，用于检验物质自由度是否为 $s_{2x}=0$ （或1），场的自由度则相应地由 $[0]_{2x+1}$， $[1]_{2x+1}$ 表示:

$$[r]_x(\underline{s})=\delta_{r,s_x}. \tag{2}$$

我们有 $[0]_x+[1]_x=\mathbb{1}$ （可观测量代数中的单位元），并记作$[\bullet]_x=[1]_x-[0]_x$，其中 x或为偶数或为奇数。我们注意到， $[0]_x$， $[1]_x$ （或 $\mathbb{1}$， $[\bullet]_x$）在乘法、加法（以及闭包）下生成整个（拟）局域代数。我们将具有更大支集的局域可观测量记作

$[s_0,s_1,\ldots,s_r]_x=[s_0]_x[s_1]_{x+1}\cdots[s_r]_{x+r}$。

代数中实现这些规则的基本三位点算子——局域传播子——

$$\begin{aligned}
&[000]_{2x}\longleftrightarrow[000]_{2x},\\
&[001]_{2x}\longleftrightarrow[100]_{2x},\\
&[011]_{2x}\longleftrightarrow[110]_{2x},\\
&[101]_{2x}\longleftrightarrow[010]_{2x},\\
&[111]_{2x}\longleftrightarrow[111]_{2x},
\end{aligned} \tag{3}$$

用 8×8 置换矩阵表示

$$Y=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}. \tag{4}$$

可观测量代数上的动力学自同构的完整时间步 $a^t(s)=a(s^{-t})$,

$$a^{2(t+1)}=Ua^{2t},\qquad a^{2t+1}=U_{\mathrm{e}}a^{2t},\quad a^{2t+2}=U_{\mathrm{o}}a^{2t+1}, \tag{5}$$

构造如下

$$U=U_{\mathrm{o}}U_{\mathrm{e}}\,, \tag{6}$$

其中，偶数和奇数时间步分别由下式生成

$$U_{\mathrm{e}}=\prod_x Y_{4x,4x+1,4x+2},\quad U_{\mathrm{o}}=\prod_x Y_{4x-2,4x-1,4x}\,, \tag{7}$$

其中，三个指标表示字符串中的位置，或局部代数的张量积中的位置（$\bigotimes_x$ span $\{[0]_x,[1]_x\}$），三位点算符 (4) 在这些位置上非平凡作用。

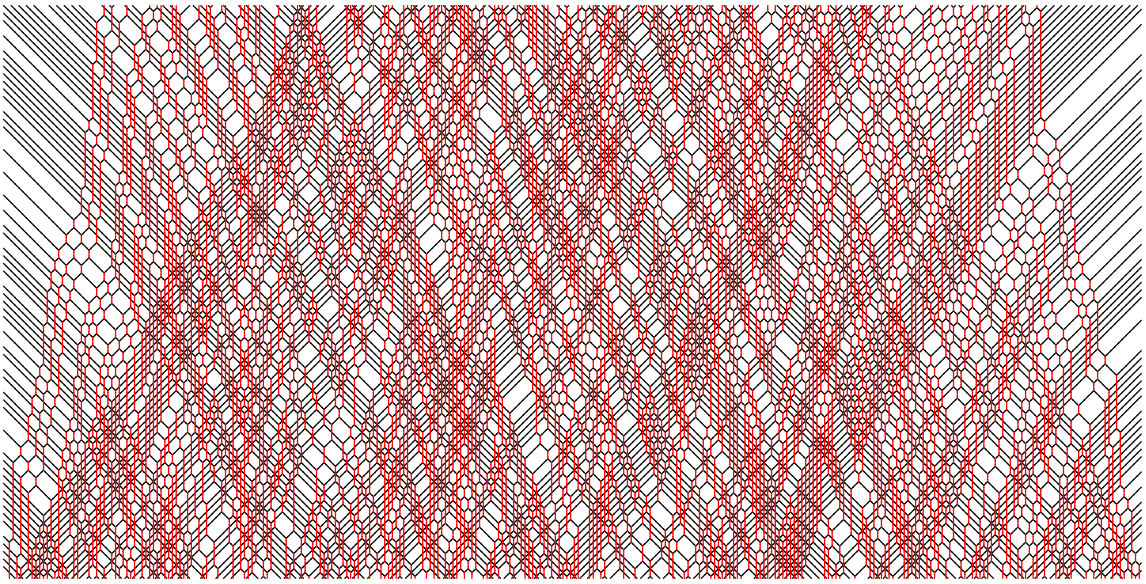


图2. 最大熵初态中的典型轨迹示例，其中$s_x^{t=0}$在 $\{0,1\}$中随机且均匀地采样，取 $0 \le x \le 600$ 的一段区间，持续时间为 $t_{\max} = 150$, $0 \le t \le t_{\max}$。请注意，物质粒子从两侧蒸发，场强随之降低，这是由于补区域 $s_{x'}^{t=0} = 0$, $x' < 0$ 或 $x' > 600$中的初始真空所致。

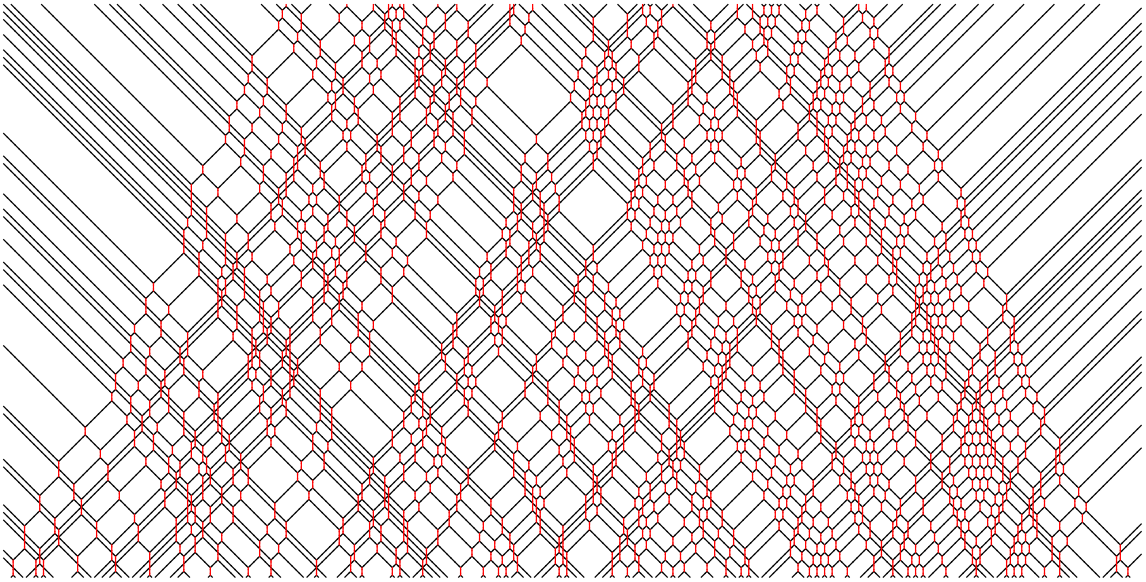


图3. 初始状态中物质处于最大熵态时的典型轨迹示例，即 s_{2x} 在 $0 \le 2x \le 600$中随机且均匀地采样，且没有 场，即 $s_{2x+1} \equiv 0$，持续时间为 $t_{\max} = 150$, $0 \le t \le t_{\max}$。

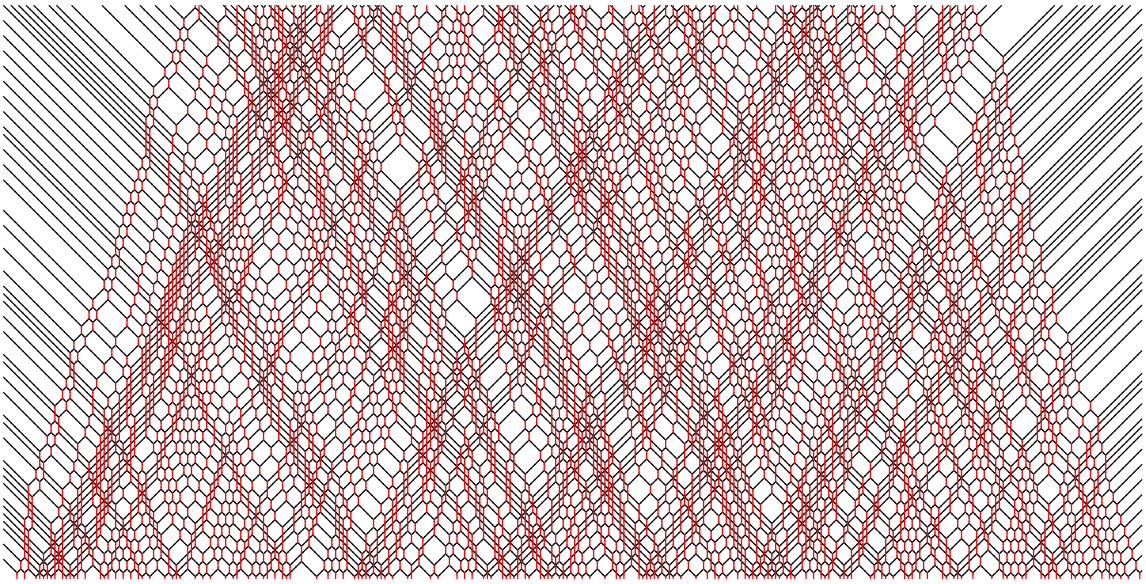


图4. 从初始状态出发的典型轨迹示例：场处于最大熵态，即 s_{2x+1} 在 $0 \le 2x+1 \le$600 内随机且均匀地取样，并且不存在物质，即 $s_{2x} \equiv 0$，持续时间为 $t_{\max} = 150$, $0 \le t \le t_{\max}$。

2.3. 守恒律

令 $a_{[x,y]}$ 为支撑在格点区间 $[x, y] \subset \mathbb{Z}$上的任意局域可观测量。我们定义一个平移自同构 Π

$$\Pi a_{[x,y]} = a_{[x+2,y+2]}\,, \tag{8}$$

它将可观测量平移“一个晶格单位”，从而保持物质/场格点的身份不变。注意，

$$\Pi U^{\mathrm{e}} = U^{\mathrm{o}}\Pi, \quad \Pi U^{\mathrm{o}} = U^{\mathrm{e}}\Pi, \quad [\Pi^2, U^{\mathrm{e}}] = 0, \quad [\Pi^2, U^{\mathrm{o}}] = 0. \tag{9}$$

如果某个局域可观测量 q 与适当的守恒流 p共同满足守恒律（时空离散连续性方程），则称其为守恒荷：

$$U_{\mathrm{e}}q - U_{\mathrm{o}}q + \Pi p - \Pi^{-1}p = 0. \tag{10}$$

因此，广延局域可观测量在全局上守恒

$$Q = \sum_{x\in\mathbb{Z}} q_x, \quad q_x := \Pi^{2x} q, \qquad UQ = Q. \tag{11}$$

将局域可观测量限制在由五个格点组成的簇上（以物质格点开始和结束），覆盖自动机的一个“元胞”（由 4 个格点组成的周期块），我们通过精确的计算机代数求得恰好两条守恒律

$$q_x^{(1)} = [\bullet]_{4x} - [\bullet]_{4x+2}, \tag{12}$$

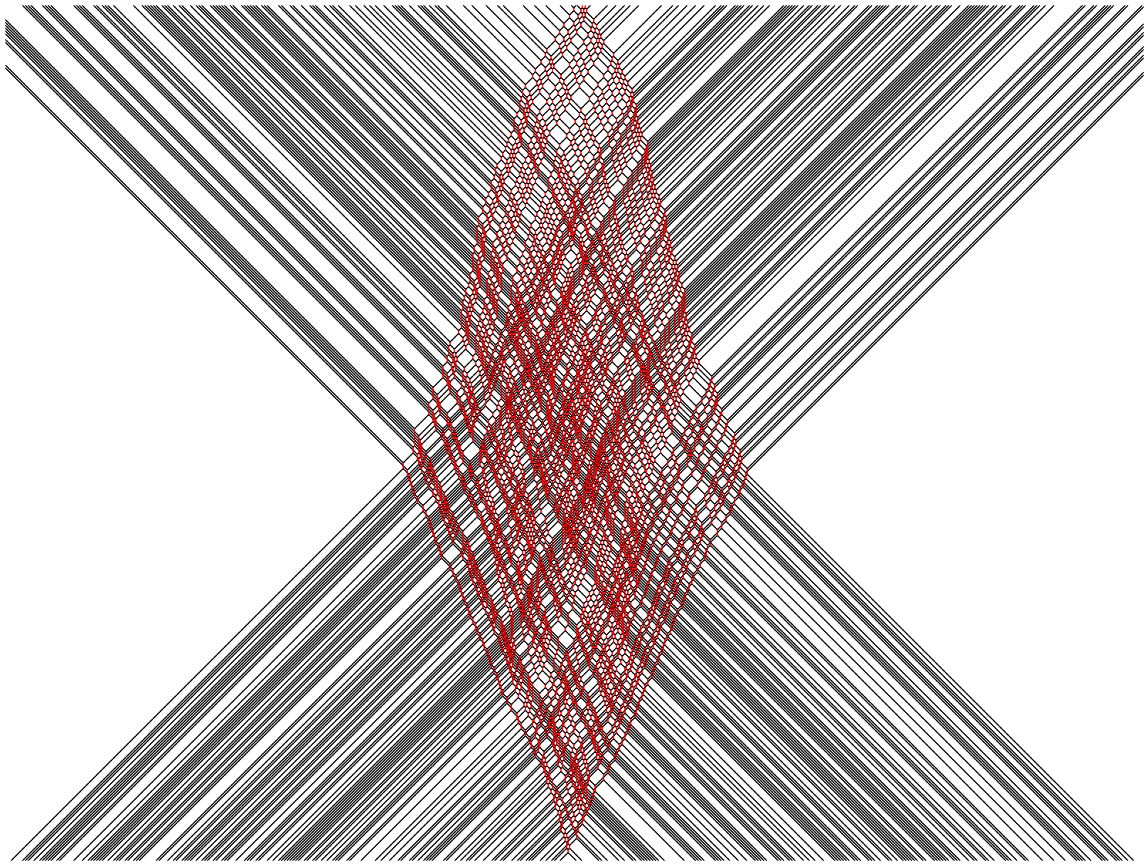


图 5. 随机（最大熵）左向运动粒子样本与随机右向运动粒子样本的正面碰撞。每束初始左/右运动粒子的总宽度为 800，持续时间为 $t_{\max} = 600$。

$$p_x^{(1)} = \frac{1}{2}[\bullet]_{4x} + \frac{1}{2}[\bullet]_{4x+1} + \frac{1}{2}[\bullet]_{4x+2} + \frac{1}{2}[\bullet]_{4x}[\bullet]_{4x+1}[\bullet]_{4x+2}, \tag{13}$$

$$q_x^{(2)} = [\bullet]_{4x+1} + [\bullet]_{4x+2} + [\bullet]_{4x+3}, \tag{14}$$

$$p_x^{(2)} = -[\bullet]_{4x+2}, \tag{15}$$

其局部密度和流最多支撑于三个（3 个）连续格点上。 $q_x^{(1)}$可解释为动量密度，而 $q_x^{(2)}$则是能量密度的对应物。事实上，记作 $P = \sum_x q_x^{(1)}$、 $E = \sum_x q_x^{(2)}$时，我们可以为构型的总动量和总能量写出直观的表达式：

$$P(\underline{s}) = \sum_x (-1)^x s_{2x}\,, \quad E(\underline{s}) = \sum_x (s_{2x} + 2s_{2x+1})\,, \tag{16}$$

这意味着场粒子不携带动量，其能量含量（静能）等于两个物质粒子的能量。

如果随后将支撑大小增加到由九 $(2 \times 4 + 1)$个连续格点构成的簇，我们恰好会得到一条新的额外守恒律：
（使用紧凑记号： $[\circ] \equiv \mathbb{1}$, $[r_0 r_1 r_2 \ldots]_{4x} \equiv [r_0 r_1 r_2 \ldots]$）

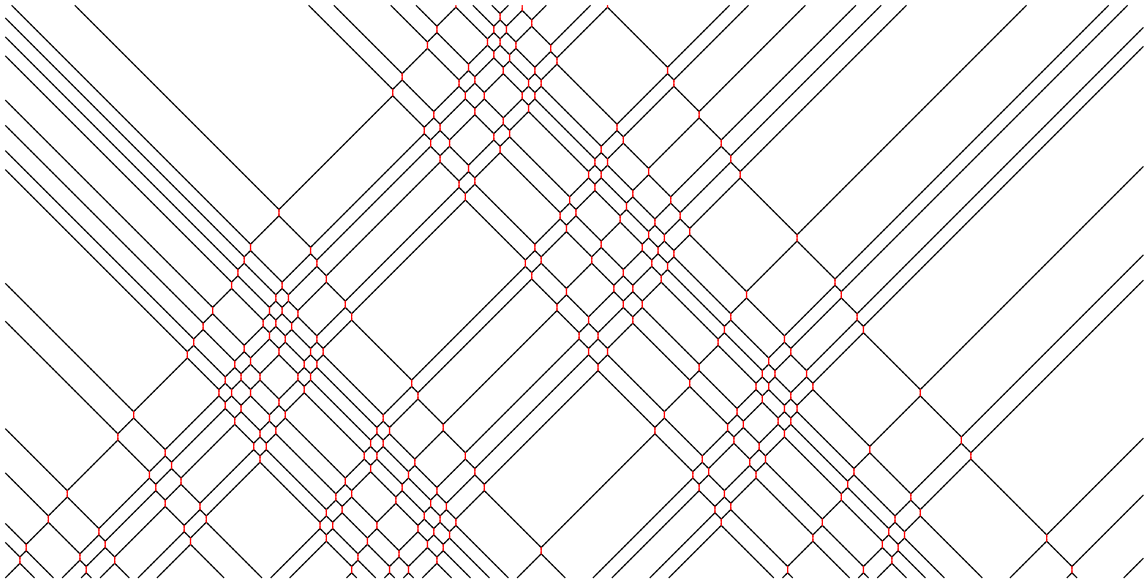


图6. 从随机初始条件出发的轨迹，其中仅 $s_{6x}(0 \le x \le 180)$是从 $\{0,1\}$中均匀随机选取的，而所有其他 $s_{x'} = 0$均如此。此类轨迹仅包含寿命最短的场粒子；这些粒子在散射时会为左/右运动粒子提供“单位”相移，对应于负长度硬棒的动力学，例如 Rule 54 系统 [BKP21]。

$$
\begin{aligned}
q^{(3)} = {} & 2[\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet] - 2[\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ] - 4[\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet] - 2[\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ] \\
& + 2[\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] - 8[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet] - 4[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ] + 2[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ] \\
& - 2[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] + 4[\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet] - 2[\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet] + 2[\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\circ] \\
& - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet] - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ] + 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ] - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet] \\
& - 4[\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ\circ] + 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ] - 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ] \\
& + 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] + [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] + [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] - [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ\circ] \\
& + [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] + 2[\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ] - [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] - [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] \\
& + [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ] - [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] \\
& - [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] - [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] - [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] \\
& + [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ] - [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] - 2[\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ] - [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
& - [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] + [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ] - [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] - 2[\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ] \\
& + [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] - [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ] + [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
& - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] + [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ] - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
& + [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] - [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ] + [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] \\
& + 2[\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ] - [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] - [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] + [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ] \\
& - [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] - 2[\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ] + [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ]
\end{aligned}
$$

关于两个非 遍历可逆元胞自动机，一个是经典的，另一个是量子的 1 0

$$
\begin{aligned}
&- [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ] + [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] \\
&+ [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] + [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] \\
&- [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ] + [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] + 2[\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ] - [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
&- [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] + [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ\circ] - [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] - 2[\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ\circ\circ] \\
&+ [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] - [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ] + [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&- [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] + [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&+ [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ] + [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] \\
&+ 2[\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ] \qquad (17)
\end{aligned}
$$

带有流

$$
\begin{aligned}
p^{(3)} = {} & 2[\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ] - 4[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet] - 4[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ] + 2[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ] \\
&- 4[\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet] - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\circ] - 2[\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet] \\
&+ 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ] + 2[\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] + [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
&+ [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] + [\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] - [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] - [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] \\
&- [\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] + [\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&- [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] - [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] - [\circ\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] - [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
&- [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] - [\circ\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] + [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] \\
&+ [\circ\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] - [\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&+ [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] + [\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] - [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
&- [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] - [\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] + [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] \\
&+ [\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] - [\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&+ [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] + [\bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet] - [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet] \\
&- [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\bullet\circ] - [\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet] + [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet] + [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ] \\
&+ [\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\circ\bullet] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ] - [\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet] \\
&+ [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet] + [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\circ] + [\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet]. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

如果我们进一步将其增加到由 $13 = 3\times 4+1$ 连续格点组成的 3 格点簇，则只会得到一个额外的守恒律，但它与前一个守恒律存在平凡的关联:

$$q_x^{(4)} = \Pi q_x^{(3)} = q_{x+2}^{(3)}, \qquad p_x^{(4)} = -\Pi p_x^{(3)} = -p_{x+2}^{(3)}. \tag{19}$$

当然，一般来说，如果 $(q,\ p)$ 是一个局部守恒律，那么 $(\Pi q,\ -\Pi p)$ 也同样是一个守恒律。使用蛮力计算机代数扫描密度支撑在四个或更多元胞上的更高阶守恒律是否存在，似乎是不可能的。

还需注意，守恒律性质 (10) 在局域时空离散规范变换下保持不变，即取任意局域可观测量 a

$$q \longrightarrow q + \Pi a - \Pi^{-1} a, \tag{20}$$

$$p \longrightarrow p - U_{\mathrm{e}} a + U_{\mathrm{o}} a. \tag{21}$$

在上面列出的显式表达式中，通过将密度右对齐，规范已被固定。

人们或许会预期，物质-场自动机存在一系列支撑大小不断增加的局域守恒量，但这些量在经验上可能极难发现。这一假设还意味着，物质-场自动机可能是一个完全可积系统，其精神与规则 54 [GP22b]，相似，因为对于一类初始数据，它们也呈现出类似的负长度硬杆动力学；然而，寻找杨-巴克斯特结构或 Lax结构的初步尝试均未成功。另一种可能是，物质-场系统仅有少数、或许有限个（或不完备的一组）局域守恒荷，因而代表一种介于可积动力学与遍历动力学之间的典型理论。

离散相空间（构型空间）上的确定性元胞自动机，通常允许进行连续的、由单个（或少数几个）参数控制的修改，从而使模型变为量子或随机的（这取决于变形的类型，即它将确定性演化转变为幺正映射还是马尔可夫映射）。例如，在物质-场自动机的定义中，每一步都可以允许三元组 (010) 以概率 α 保持为 (010)，并以概率 $1-\alpha$ 映射为 (101)。类似地，(101) 以概率 β 保持为 (101)，并以概率 $1-\beta$ 映射为 (010)。上一节中的所有定义仍然有效，只是置换矩阵 Y现在被随机（马尔可夫）矩阵取代：

$$Y_{\text{stoch}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

有趣的是，前两个守恒律——动量和能量 (16)，另见 (12,13)——在随机变形后依然成立；而计算机代数的结果表明，第三个守恒律 ($q^{(3)}$，$p^{(3)}$) 已被破坏。因此，物质-场自动机的变形可能不再具有非平凡的遍历性破缺。

3. 变形（量子化）硬点晶格气体

不过，本节将简要展示，对其他一些可逆确定性元胞自动机进行连续变形，如何产生有趣的非遍历动力学。为此，我们采用所谓的带电硬点晶格气体 [MKP17]（自 [GP22a] 起也称为XXC模型，因为它是Maassarani提出并研究的模型 [M98] 的确定性极限）。

与物质-场自动机相比，该模型的局域构型空间更丰富，即每个格点有三种状态；而局域相互作用映射则更简单，仅作用于

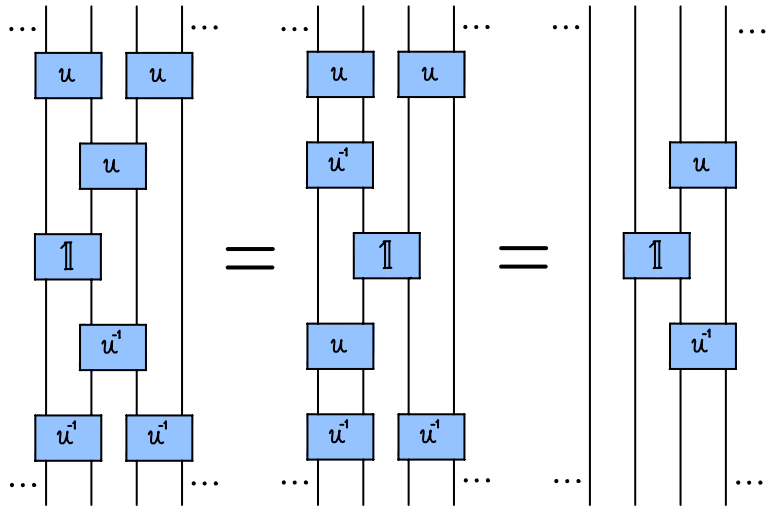


图 7. 利用量子电路等价性对滑翔子性质 (31) 的图解证明，其中门 $U[u], U[\mathbb{1}], U[u^{-1}]$ 以蓝色方框表示。(32) 的证明与此类似（通过对上述图示作左右反射得到）。

一对相邻格点，而非三个。从物理角度看，该模型描述自由点粒子的动力学：粒子以速度 ± 1 运动，初始位置位于彼此相容的（整数倍）坐标上，但可能携带一种内部自由度（例如二值电荷）。将三种局域态记为 $s \in \{0, +, -\}$、0（其中 0 表示空位），依次作用于格点对 $(2x,\ 2x+1)$ 和 $(2x+1,\ 2x)$ 的局域可逆确定性规则为

$$(00) \longleftrightarrow (00)\,, \quad (0\alpha) \longleftrightarrow (\alpha 0)\,, \quad (\alpha\beta) \longleftrightarrow (\alpha\beta)\,, \quad \alpha, \beta \in \{+, -\}. \tag{23}$$

该模型在平衡态和非平衡动力学方面允许得到一系列显著的精确结果，涵盖平衡态中的动力学关联和输运系数 [MKP17]，、含时淬火及边界驱动系统 [MPPRV19]，中非平衡稳态的矩阵乘积态解析描述，以及近期对全计数统计的精确求解 [KSPIP22]。我们不禁会想，如果将硬核碰撞推广为一般的随机或幺正散射，该模型是否仍具有某种程度的可解性?

$$(+-) \longrightarrow u_{11}(+-) + u_{12}(-+), \qquad (-+) \longrightarrow u_{21}(+-) + u_{22}(-+), \tag{24}$$

其中 u 可以是 2×2 随机矩阵或幺正矩阵。后一种情况下，我们讨论量子格气模型和量子叠加态，具体内容将在下文详述。我们注意到，该系统与近期研究的一种半经典量子化正弦-戈登模型密切相关 [KVZ22]。

考虑一个局域希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^3$，其状态为 $|s\rangle_{s=0、+、-}$。我们将状态 $|\pm\rangle$ 称为带电粒子，并用希腊字母索引 $|\alpha\rangle_{\alpha=\pm}$ 表示；将状态 $|0\rangle$ 称为空位。定义作用于 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ 上的局域传播子为

$$U[u] = |00\rangle\langle 00| + \sum_{\alpha\in\{\pm\}} \left(|0\alpha\rangle\langle\alpha 0| + |\alpha 0\rangle\langle 0\alpha| + |\alpha\alpha\rangle\langle\alpha\alpha|\right) + \tag{25}$$

$$+ u_{11}|+-\rangle\langle+-|+u_{12}|+-\rangle\langle-+|+u_{21}|-+\rangle\langle+-|+u_{22}|-+\rangle\langle-+|,$$

其中， u 原则上可以是任意可逆矩阵；对于下文将要讨论的性质， $u \in GL$（2），而在量子物理应用中，我们将 u 视为酉混合矩阵。这样的 $U[u]$ 满足两个显著的恒等式，这些恒等式对任意 u均成立：

$$U_{12}[u]U_{23}[\mathbb{1}]U_{12}[u^{-1}] = U_{23}[u^{-1}]U_{12}[\mathbb{1}]U_{23}[u], \tag{26}$$

$$U[u]U[u^{-1}] = \mathbb{1}, \tag{27}$$

这可以通过直接计算验证。注意，若将 u 视为非阿贝尔谱参数，则恒等式 (26) 与 Yang-Baxter 方程的辫群形式有些相似。具体而言， $U[\mathbb{1}]$ 满足辫关系——它构成所谓的杨–巴克斯特映射——并为带电硬点晶格气体提供确定性的更新规则。然而， $U[u]$ 并不具备完整的杨-巴克斯特性质，但足以产生如下所示的无穷多个守恒局部算符。

为简单起见，现在假设一个具有偶数个格点 L 的有限系统，并将其多体希尔伯特空间定义为张量积 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\otimes L}$。然后，我们用砖墙电路在其上定义一个保持局域性的离散时间动力系统（量子元胞自动机），即

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\rm o}\mathcal{U}_{\rm e}, \quad \mathcal{U}_{\rm e} = \prod_{x=1}^{L/2} U_{2x-1,2x}[u], \quad \mathcal{U}_{\rm o} = \prod_{x=1}^{L/2} U_{2x,2x+1}[u], \quad L+1 \equiv 1, \tag{28}$$

并将可观测量的演化写作

$$a^{2t} = \mathcal{U}_{\rm e} a^{2t-1} \mathcal{U}_{\rm e}^{-1}, \quad a^{2t+1} = \mathcal{U}_{\rm o} a^{2t} \mathcal{U}_{\rm o}^{-1}. \tag{29}$$

定义以下一对局部算符（如有需要，请注意周期性边界条件）：

$$g_x^{(+)} = U_{x,x+1}[u]U_{x-1,x}U[\mathbb{1}]U_{x,x+1}[u^{-1}], \tag{30}$$

$$g_x^{(-)} = U_{x-1,x}[u]U_{x,x+1}U[\mathbb{1}]U_{x-1,x}[u^{-1}].$$

观察恒等式 (26,27)，我们可以直接得出这些算符的若干显著性质：

$$\mathcal{U}_{\rm e} g_{2x}^{(+)} \mathcal{U}_{\rm e}^{-1} = g_{2x+1}^{(+)}, \qquad \mathcal{U}_{\rm o} g_{2x-1}^{(+)} \mathcal{U}_{\rm o}^{-1} = g_{2x}^{(+)}, \tag{31}$$

$$\mathcal{U}_{\rm e} g_{2x}^{(-)} \mathcal{U}_{\rm e}^{-1} = g_{2x-1}^{(-)}, \qquad \mathcal{U}_{\rm o} g_{2x+1}^{(-)} \mathcal{U}_{\rm o}^{-1} = g_{2x}^{(-)}, \tag{32}$$

这说明将其称为滑翔子算符 [GUWZ10] 是合理的（关于性质 (31,32) 的量子电路表示的简明图示证明，见图 7）。值得注意的是，对于可积 *Trotter* 化 [VZP18] ，其中U (𝟙) $= \mathbb{1}$，我们的滑翔子将是平凡的 $g_x^{(\pm)} = \mathbb{1}$ 。

滑翔子是一类特殊的量子守恒定律，其形式上的电荷密度与流密度相同。因此，我们可以构造这类算符的乘积，只要它们之间至少间隔两对格点，这些乘积就会以相同的方式演化

$$g_{x_1,x_2\ldots x_m}^{(\pm)} = \prod_{n=1}^{m} g_{2x_n}^{(\pm)}, \quad \mathcal{U} g_{x_1,x_2\ldots x_m}^{(\pm)} \mathcal{U}^{-1} = g_{x_1\pm1,x_2\pm1\ldots x_m\pm1}^{(\pm)} \tag{33}$$

under 约束 $x_{j+1} - x_j \geq 2$。因此，我们拥有大量广延守恒荷

$$Q^{(\pm)}_{r_1,r_2\ldots r_m} = \sum_{x=1}^{L/2} g^{(\pm)}_{x,x+r_1\ldots x+r_m}, \quad r_1 \geq 2,\ r_{m+1} - r_m \geq 2,$$
$$Q^{(\pm)}_{\underline{r}} \equiv \mathcal{U} Q^{(\pm)}_{\underline{r}} \mathcal{U}^{-1}. \tag{34}$$

这些守恒算符简洁地概括了变形硬点晶格气体的非遍历性质。由于左行和右行粒子的模式按照弹道（自由）动力学规律演化，因此这种非遍历性并不令人意外。然而，内部（电荷）自由度会经历相互作用动力学，而这种动力学受到守恒 $Q^{\pm}_r$ 的非平凡约束。

不同滑翔子守恒荷 $Q^{(\pm)}_r$ 的数量会随其支撑集大小呈指数增长，例如 ℓ ，使得所有 $r_j \leq \ell$；这一事实让人联想到超可积量子元胞自动机 [BKP21, GP22b, GP22a], 。然而，缺少精确的杨–巴克斯特性质，表明该动力系统并非完全可积（也就是说，应该不存在贝特假设！？ ）。因此，我们提出了一类新的非遍历多体量子动力学。值得探究的是，这是否与一类不具备任何（甚至部分）杨–巴克斯特性质、却拥有滑翔子算符的非遍历对偶幺正电路存在联系（定义和基本性质见 [BKP19]；相关性质由文献 [BP22]引入并研究）。

4. 结论

本文简短论述中介绍和讨论的动力系统，纯粹是作者出于消遣而构建的。不过，我们希望这些构造有朝一日能在非平衡统计力学领域找到一些有意义的应用。具体而言，该领域长期以来的一项关键目标，是从微观可逆运动方程推导出不可逆宏观输运定律，例如菲克扩散定律或傅里叶热传导定律。这个问题也是 Giulio Casati [CFVV84] 的主要研究重点之一，同时也激发了我研究生涯的开端 [PR92], ；我们的一些合作研究考察了与此处所研究模型非常相似的系统中的傅里叶定律：一维硬点碰撞质量粒子 [CP03]。

扩散输运与弹道输运共存的现象，已在规则54自动机中得到严格证明（综述见参考文献 [BKP21], ，另见参考文献 [GHKV18]）；人们或许可以期待将这类结果推广至物质-场自动机，后者似乎更丰富，也可能更具普遍性（例如，规则54的动力学超可积，局域守恒荷的数量呈指数增长；而物质-场自动机至多可能是可积的，因为其非平凡局域守恒荷要罕见得多）。

我很高兴曾与 Balazs Pozsgay 就相关问题进行过多次讨论。本研究得到了斯洛文尼亚研究局（ARRS）的资助

在计划 P1-0402以及 N1-0233和 N1-0219资助下。

参考文献

[CP99] Casati, G.; Prosen, T. 三角形台球的混合性质，《物理评论快报》1999, 83, 4729– 4732.[CP00] Casati, G.; Prosen, T. 三角映射：量子混沌模型，《物理评论快报》2000, 85, 4261-4264.[WCP14] Casati, G.; Prosen, T. 两个碰撞质点的不遍历性与不变测度局域化，《物理评论 E》2014, 89, 042918.[LCP22] Lozej, ˇC.; Casati, G.; Prosen, T. 三角形台球中的量子混沌，《物理评论研究》2022, 4, 013138.[CFS82] Cornfeld, I. P.; Fomin, S. V.; Sinai, Ya. G. 遍历理论，Springer-Verlag New York，美国，1982.[AKPR16] D'Alessio, L.; Kafri, Y.; Polkovnikov, A.; Rigol. 从量子混沌和本征态热化到统计力学与热力学，Adv. Phys. 2016, 65, 239-362.[AABS19] Abanin, D. A.; Altman E.; Bloch, I.; Serbyn. 多体局域化、热化与纠缠，Rev. Mod. Phys. 2019, 91, 021001.[MBR22] Moudgalya, S.; Bernevig, B. A.; Regnault, N. 量子多体疤痕与希尔伯特空间碎裂：精确结果综述，Rep. Prog. Phys. 2022, 85, 086501.[S23]Spohn, H. 可积多粒子系统的流体动力学尺度，预印本 2023, arXiv:2301.08504.[MKP17] Medenjak, M.; Klobas, K.; Prosen, T. 确定性交互晶格系统中的扩散，《物理评论快报》2017, 119, 110603.[MPPRV19] Medenjak, M.; Popkov, V.; Prosen, T.; Ragoucy, R.; Vanicat, M. 双组分硬核可逆元胞自动机：动力学与非平衡稳态的矩阵拟设，SciPost Phys. 2019, 6, 074.[KSPIP22] Krajnik, ˇZ.; Schmidt, J.; Pasquier, V.; Ilievski, I.; Prosen, T. 确定性交互模型中的精确反常电流涨落，《物理评论快报》2022, 128, 160601.[GP22a] Gombor, T.; Pozsgay, B. 杨-巴克斯特映射导出的超可积元胞自动机与双幺正门，SciPost Phys. 2022, 12, 102.[M98] Maassarani, Z. XXC 模型，Phys. Lett. A 1998, 244, 160–164.[KVZ22] Kormos, M.; V¨or¨os, D.; Zar´and, G. 正弦-戈登模型族有能隙一维模型的有限温度动力学，《物理评论 B》2022, 106, 205151.[KMPV19]Klobas, K.; Medenjak, M.; Prosen, T.; Vanicat, M. 交互可逆动力学的含时矩阵乘积拟设，Commun. Math. Phys. 2019, 371, 651–688.[BKP21] Bu˘ca, B.; Klobas, K.; Prosen, T. 规则 54：非平衡统计力学的精确可解模型，J. Stat. Mech. 2021, 074001.[GP22b] Gombor, T.; Pozsgay, B. 超可积量子电路的可积变形，预印本 2022, arXiv:2205.02038 .[GUWZ10] G¨utschow, J.; Uphoff, S.; Werner, R. F.; Zimbor´as, Z. Clifford 量子元胞自动机的时间渐近行为与纠缠生成，J. Math. Phys. 2010, 51, 015203.[VZP18] Vanicat, M.; Zadnik, L.; Prosen, T. 可积 Trotter 化：局域守恒律与边界驱动，《物理评论快报》2018, 121, 030606.[BKP19] Bertini, B.; Kos, P.; Prosen, T. $1+1$ 维双幺正晶格模型的精确关联函数，《物理评论快报》2019, 123, 210601.[BP22] Borsi, M.; Pozsgay, B. 双幺正量子电路的构造与遍历性，《物理评论 B》2022, 106, 014302.[CFVV84] Casati, G.; Ford, J.; Vivaldi, F.; Visscher, W. M. 具有正常热导率的一维经典多体系统，《物理评论快报》1984, 52, 1861.

关于两个非遍历可逆元胞自动机：一个是经典的，另一个是量子的 16[PR92] Prosen, T.; Robnik, M. 碰撞谐振子链中的能量输运及傅里叶热定律的详细验证，*J. Phys. A: Math. Gen.* **1992年**, *25*, 3449.[CP03] Casati, G.; Prosen, T. 一维理想气体中的反常热传导，*Phys. Rev.E* **2003年**, *67*, 015203(R).[GHKV18] Gopalakrishnan, S.; Huse, D. A.; Khemani, V.; Vasseur, R. 相互作用可积系统中算符扩展与准粒子扩散的流体力学，*Phys. Rev. B***2018年**, *98*, 220303(R).