正则对数连接

PIOTR ACHINGER

摘要。我们引入复数域上的光滑对数概形上的正则可积联络的概念，并构造此类联络范畴与其解析化上的可积联络范畴之间的等价，且该等价与德拉姆上同调相容。这扩展了 Deligne 的工作（当对数结构平凡时），并结合 Ogus 的工作，从而以 Kato–Nakayama 空间上的某些可构造层来描述正则联络范畴的拓扑结构。其关键要素是在此背景下典范延拓的概念，以及近期由 Włodarczyk 获得的对数概形良好紧化的存在性。

arXiv:2304.01135v1 [math.AG] 3 Apr 2023

目录

1 引言.2
2 预备知识.4
2.1 理想化光滑对数概形 4 2.2 对数概形的紧化 6 2.3 对数结构的分裂 6 2.4 代数截面与解析截面 11 3 对数联络与典范延拓.13

3.1 具有常值对数结构的概形上的连接 13 3.2 Ogus 的黎曼–希尔伯特对应 18 3.3 典范延拓 21 4 正则联络与黎曼 – 希尔伯特对应 .22

4.1 正则联络 22 4.2 存在定理 28 4.3 比较定理 29 4.4 正则性定理 30 5 联络与局部系统. 33

日期：2023年4月4日。

1. 引言

正则联络的概念由 Deligne 引入 [6]，旨在以代数方式描述光滑概形的拓扑基本群的复表示范畴X 上的复数域。记 MIC$(X/$复数域$)$ 为相干 $\mathcal{O}_X$-模E所构成的范畴，其中每个对象都带有一个可积联络 $\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}$(这样的$E$是局部自由的）。若$E$是正则的，则其（多值）全纯水平截面在无穷远处具有中等增长。Deligne 给出了正则联络的若干有用刻画，将其与微分方程的经典福克斯奇点概念联系起来，并证明将E 映为其解析化E_{an} 的函子诱导出范畴等价

$$\mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MIC}(X_{\mathrm{an}}/\mathbf{C}) \qquad \textit{(Existence Theorem [6, II 5.9])}$$

X 上正则联络的范畴与 X_{an} 的解析化上的可积联络范畴之间的等价；后者又通过将 E 映到其水平截面层 E^{∇} 的函子，与复局部系统范畴 LocSysc(X_{an}) 等价，该范畴由 X_{an} 上的复局部系统构成。此对应与上同调相容，具体而言，

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X,E) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}},E_{\mathrm{an}}) \simeq H^*(X_{\mathrm{an}},E^{\nabla}_{\mathrm{an}}) \qquad (\textit{Comparison Theorem [6, II 6.2]})$$

这一等价通常称为黎曼–希尔伯特对应。后来，Kashiwara [11] 和 Mebkhout [20] 将其扩展为 X 上正则全纯 D-模与 X_{an} 上反常层之间的等价。正则联络最重要的例子来自几何，即 Gauss–Manin 联络或皮卡–福克斯方程。Deligne 证明，对于态射 $f\colon Y \to X$（其在 X 上局部具有相对简单正规交叉紧化）以及 Y 上的正则联络 E，带有 Gauss–Manin 联络的高阶直接像 $R^n f_*(E \otimes \Omega^{\bullet}_{Y/X})$ 是正则的（正则性定理 [6,II 7.9]）。

上述结果的证明中，对数联络的概念发挥着关键作用。简单正规交叉对 (X , D) 由复数域 C 上的光滑概形 X 和一个简单正规交叉除子 $D \subseteq X$ 构成。(可积)对数联络是指一个相干的 $\mathcal{O}_X$-模 E，以及一个可积联络 $E \to E \otimes \Omega_{X/\mathbf{C}}(\log D)$，其中 $\Omega_{X/\mathbf{C}}(\log D)$ 是沿 D 具有对数极点的微分层。一般而言，这样的 E 未必是局部自由的。事实证明，正则性的概念可以用对数联络来表述：对于复数域 C 上的光滑概形 X，MIC(X/C) 中的对象 E 是正则的，当且仅当对于每个开集 $U \subseteq X$ 以及每个紧化 $U \hookrightarrow \overline{U}$，使得 $(\overline{U}, D = \overline{U} \setminus U)$ 是简单正规交叉对，限制 $E|_U$ 都能延拓为 $(\overline{U}, D)$ 上的对数联络。这样的延拓并不唯一，但可以对它们进行枚举。Deligne 的工作（[6, 第二章, 命题 5.4],受 Manin 启发 [19]）中的一个关键思想是，可以选出一个局部自由的典范延拓 $\overline{E}$；它是唯一一个使得沿 D 的各不可约分支的留数映射的特征值（粗略地说，即绕 $\overline{D}$ 的局部单值变换的选定对数）属于集合 $\{0 \leq \mathrm{Re}(z) < 1\}$ 的延拓。

对数联络与对数几何的框架十分契合 [12]。简单正规交叉对 (X , D) 对应于对数概形 $\underline{X} = (X, \mathcal{M}_X)$，其中 $\mathcal{M}_X$ 是 X 上的正则函数层，且在 D 之外可逆；$\underline{X}$ 是 X 的“底层概形”。每个对数概形 $\underline{X}$ 都有一个微分层 $\Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$，并且可以定义范畴 MIC$(\underline{X}/\mathbf{C})$，其对象为配备对数联络的相干 $\mathcal{O}_X$-模。对于简单正规交叉对 (X, D)，相应的对数概形 $\underline{X}$ 在对数几何意义下是光滑的，并且有 $\Omega^1_{X/\mathbf{C}} \simeq \Omega^1_{\underline{X}}(\log D)$；X 上的可积联络恰好就是上一段所定义的 (X , D) 上的可积对数联络。

本文的目标是将 Deligne 的结果推广到复数域上的光滑对数概形。由于对数连接与正则性的概念密切相关，自然应将其与无极点连接同等对待。鉴于人们对解析对数连接的兴趣，

[13, 10, 24], 这样一种理论竟然至今尚未发展起来，多少令人惊讶。尽管如此，我这样做的主要原因是即将发表的工作 [1], , 其中我旨在为“复刚性解析空间”给出类似的结果，并着眼于其在霍奇理论中的应用。在此背景下，一个典型的相关空间是复数域上半稳定形式概形的特殊纤维$[\![t]\!]$, , 并赋予其诱导的对数结构。由于这类对数概形并非来自简单正规交叉对 (X, D)，因此经典理论无法涵盖它们。

在深入讨论对数几何的细节之前，我们先说明，对于简单正规交叉对 (X, D)，我们的正则对数联络定义如何发挥作用。要使 (X, D) 上的可积对数联络 (E ∇) 正则，仅要求其在 X \D 上的限制正则（按 Deligne 的定义）是不够的，因为 E 可能支撑在 D 上。为了沿 D 也施加条件，我们按如下方式进行。对于由 D 的不可约分支诱导的 X 的分层中的每个层 Z，联络 ∇诱导一个映射$\nabla|_Z\colon \mathrm{E}|_Z \to \mathrm{E}|_Z \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}(\log \mathrm{D})|_Z$。沿 Z 选取 D 的局部方程，会诱导一个同构

$$\Omega^1_{X/\mathbf{C}}(\log D)|_Z \simeq \Omega^1_{Z/\mathbf{C}} \oplus \mathcal{O}_Z^{\operatorname{codim} Z},$$

由此我们可以从 $\nabla|_Z$ 得到一个可积联络 $\mathrm{E}|_Z \to \mathrm{E}|_Z \otimes \Omega^1_{Z/\mathbf{C}}$。虽然这个联络取决于所作的选择，但它是否正则并不取决于此；如果对于所有 Z，这些联络都是正则的，我们就称 E 是正则的。

现在我们转而陈述一般性结果。为了获得一些额外的灵活性，我们研究定义在复数域上的“理想化光滑”对数概形；它们在局部看起来像环面簇中某个单项式理想的零点集（定义 2.1）。这一类包含来自 snc 的对数概形，以及半稳定形式概形的特殊纤维。在 §2.3中，对于这样的对数概形 X，我们构造一个态射

$$\pi\colon X^{\#} \longrightarrow X$$

从一个光滑概形 X #（由 X 的对数分层上的环面主齐性空间组成的不交并）出发，并给出从 X 拉回的对数结构的典范“分裂”。该分裂 $\varepsilon_{\mathrm{univ}}$ 的行为仿佛是从 X # 到其底层概形 $\mathrm{X}^{\#}$ 的映射的一个截面，尽管这样的截面并不存在；特别地，它允许我们通过一个“拉回”函子将对数联络转化为经典联络

$$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}\colon \mathrm{MIC}(X^{\#}/\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\underline{X}^{\#}/\mathbf{C}).$$

定义 1.1（参见定义 4.1）。若 MIC(X /复数域) 中的对象 E 满足 MIC($\mathrm{X}^{\#}$/复数域) 中的对象 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*$ E) 正则（按 Deligne 的意义），则称 E 正则。我们用 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}$(X /复数域) 表示 MIC(X /复数域) 中由正则对象组成的全子范畴。

我们对正则性的定义依赖于 Deligne 的定义，这使许多证明更加容易。我们给出了一些熟悉的正则性刻画，其中包括一个“由曲线切割”的判别准则。不过，在建立理论时，还必须克服一些额外困难：例如，由于函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*(-))$ 并非正合，而且对数联络可能不是局部自由的，因此正则对象的子对象是否正则并不显而易见。此外，要证明真概形 X 上的每个联络都是正则的，也并非完全不费力，因为 $\mathrm{X}^{\#}$ 通常并不是真概形。

本文的主要结果可概述如下。

定理 1.2. 设 X 是复数域 C 上的理想化光滑对数概形。

(a)（存在 等价定理 4.14) 解析化函子 E $\mapsto E_{\mathrm{an}}$ 诱导出范畴的等价 *es*

$$\mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MIC}(X_{\mathrm{an}}/\mathbf{C})$$

(b) (比较定理 4.17) 设 E 是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域})$的一个对象。那么

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X,E) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}},E_{\mathrm{an}}).$$

(c) （正则性定理 4.22）设 f: $Y \to\!\!\to$ X 是一个真、光滑且正合的态射，E 是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(Y/\text{复数域})$中的一个对象。假设猜想 *4.21* （半稳定约化的一种形式）成立。那么，对所有 n，$\mathrm{R}^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 都是正则的 ≥ 0。

在 [24], Ogus 以拓扑数据描述了范畴 $\mathrm{MIC}(X_{\mathrm{an}}/\text{复数域})$中的解析对数可积联络范畴，推广了此前关于（准）幺幂局部单值变换的研究 [10, 13] 。更确切地说，他在理想化光滑对数复解析空间 $(X/\text{复数域})$ 上的可积联络范畴与 X 上的某类可构造层范畴 $L(X)$ 之间构造了一个等价；后者定义在 Kato–Nakayama 空间 $X^{\log}$上，并且与上同调相容（见定义 3.11 和定理 3.12）。结合 Ogus 的结果，定理 1.2表明我们得到一个范畴等价

$$\mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) \simeq L(X_{\mathrm{an}})$$

与上同调相容。在 §5中，我们利用它根据 $\mathbf{c}(X^{\log})$ 上的正则联络来描述 $X^{\log}$ 上的复局部系统范畴 $\mathrm{LocSys}X$，假设层 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 的茎是自由的。

与[6], 一样，存在定理的证明依赖于将解析联络延拓到紧化的能力。换句话说，我们需要在对数情形中构造“典范延拓”。直到最近，Włodarczyk [27]才构造出合适的对数概形紧化。我们称对数概形之间的开浸入 $j\colon X \hookrightarrow X$ 是一个良好紧化(定义 2.3)，如果 X 是真概形，且 在 étale 局部意义下，映射 j 看起来像包含映射

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[P \times \mathbf{Z}^r]/(K)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[P \times \mathbf{N}^r]/(K))$$

对某个 $\mathrm{r} \geq 0$、幺半群 P 和理想 K $\subset$P。于是局部地，C 上每个理想化光滑对数概形都存在良好紧化（定理 2.4）。这种嵌入的上述特殊形式（即“无穷远处的额外幺半群”是自由的这一事实），使我们能够定义 MIC(X/C) 中对象 E 的无穷远处指数（即留数映射特征值的相反数的类似物）。接着我们证明（定理 3.17），$\mathrm{MIC}(\mathrm{X}_{\mathrm{an}}/\mathrm{C})$ 中的每个对象都存在唯一的延拓，使其成为 MIC(X/C) 中的对象，且其无穷远处指数属于 $\{-1 < \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$。证明依赖于 Ogus 在 $\mathrm{MIC}(\mathrm{X}_{\mathrm{an}}/\mathrm{C})$ 与 $\mathrm{L}(\mathrm{X}_{\mathrm{an}})$ 之间建立的等价，这使我们可以将问题归结为幺半群代数上的分次模。

正则对数联络的定义自然地延伸至 Koppensteiner–Talpo 意义下的全纯对数 D-模 [15, 14], 见注 4.13。这一方向或许值得进一步研究。

♡ 致谢。作者感谢 Adrian Langer、Katharina H¨ubner、Arthur Ogus、Mattia Talpo、Michael Temkin 和 Alex Youcis 提供宝贵的意见并参与讨论。本研究是 KAPIBARA 项目的一部分，该项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号 802787）下欧洲研究理事会（ERC）的资助。

2. 预备知识

2.1. 理想化光滑对数概形

我们回顾一些关于（交换）幺半群和对数概形的术语。对于幺半群 P（用加法记号表示），我们用 $\mathrm{P} \to \mathrm{P}^{\mathrm{gp}}$ 表示它到一个群的初始同态，用 $\mathrm{P}^\times \subseteq \mathrm{P}$ 表示 P 的最大子群。若 $\mathrm{P} \to \mathrm{P}^{\mathrm{gp}}$ 是单射，我们称 P 是整的。若 $\mathrm{P}^\times = 0$，则称 P 是尖的，并记作 $\mathrm{P} = \mathrm{P}/\mathrm{P}^\times$ （$\mathrm{P}^\times$群作用的商）。若 P 是饱和的，则它是整的，并且对于

每个 $x \in P^{gp}$ 和 $n \geq 1$，只要 $nx \in$ 属于 $\mathrm{im}(P \to P^{gp})$，就有 $x \in$ 属于 $\mathrm{im}(P \to P^{gp})$。若幺半群 P 是有限且饱和（fine and saturated，简称 fs）的，则称 P 为 fs 幺半群。注意，若 P 是 fs 的，则 P^{gp} 是自由阿贝尔群。幺半群 P 的一个理想是子集 $K \subseteq P$，满足 $P+K = K$；若 $x+y \in K$ 蕴含 $x \in K$ 或 $y \in K$，则称它为素理想。对于 P 的理想 K，我们用 $\sqrt{K}$ 表示由满足以下条件的元素 x 构成的理想：$x \in P$，且对某个 $n \geq 1$，$nx \in K$。P 的一个面是子幺半群 $F \subseteq P$，满足若 $x+y \in F$，则 x、$y \in F$（等价地，$P \setminus F$ 是素理想）。对于 P 的一个面 F，我们用 $P_F = P + F^{gp} \subseteq P$ 表示 P 在 F 处的局部化，并用 P/F 表示商 P_F/F^{gp}。

对于对数概形 X，我们用 $\underline{X}$ 表示其底层概形，用 $\alpha\colon \mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X$ 表示其对数结构，其中 $\mathcal{M}_X$ 采用加法记法。对数概形的态射 $f\colon X \to Y$ 称为严格的，如果对数结构的映射 $f^*\mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ 是同构。给定环 R、幺半群 P 和同态 $P \to R$（P 上采用加法，R 上采用乘法），我们用 $\mathrm{Spec}(P \to R)$ 表示赋有由映射 $P \to R$ 关联得到的对数结构的概形 $\mathrm{Spec}(R)$。令 $\mathbf{A}_P = \mathrm{Spec}(P \to \mathbf{Z}[P])$；稍后在复数域 C 上工作时，我们将用 $\mathbf{A}_P$ 表示 $\mathrm{Spec}(P \to \mathbf{C}[P])$。如果 ´在 X 上存在 étale 局部的 fs 幺半群 P 以及严格态射 $X \to \mathbf{A}_P$，则称对数概形 X 为 fs。对数概形的态射 $Y \to \overline{X}$ 称为严格 ´étale，如果它既严格又 ´étale；等价地说，如果它严格，且底层概形的态射 $\underline{Y} \to \underline{X}$ 为 ´étale。

定义 2.1. (a) 设 P 为一个 fs 幺半群，$K \subseteq P$ 为一个理想。令

$$\mathbf{A}_{P,K} = \mathrm{Spec}(P \to \mathbf{C}[P]/(K))$$

表示在赋有诱导对数结构的 $\mathbf{A}_P =$ 谱$(P \to \mathbf{C}[P])$ 中由 K 定义的概形。

(b) 设 X 为一个在 C 上的 fs 对数概形。若在 X 上严格地 ´étale 局部存在一个 fs 幺半群 P、一个理想 $K \subseteq P$，以及一个严格的 ´étale 态射 $X \to \mathbf{A}_{P,K}$，则称 X 为理想化光滑的。

对于 fs 对数复解析空间，我们作类似定义，只用“局部”代替“´étale 局部”。于是，若 X 是 C 上的理想化光滑对数概形，则其解析化 X^{an} 是一个理想化光滑对数复解析空间。

下面的引理常常使我们能够将问题归约到理想 K 平凡的情形。

引理 2.2. 设 X 为 C 上的理想化光滑对数概形。则在 X 上严格地 ´étale 局部存在一个 fs 幺半群 P、一个理想 $K \subseteq P$，以及一个笛卡尔交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_{P,K} & \longrightarrow & \mathbf{A}_P \end{array}$$

其中 $\mathbf{A}_{P,K} \to \mathbf{A}_P$ 是自然严格闭浸入，且竖直映射是严格 ´étale。特别地，Y 在复数域上光滑，而 X 由 $\mathcal{M}_Y$ 中的一个凝聚理想定义。

证明。我们可以假设 X 是仿射的，并且存在一个严格的 ´etale 映射 $X \to \mathbf{A}_{P,K}$，其中 P 和 K 如陈述所示。记 $A = \mathbf{C}[P]$，$I = K \cdot A$，$A = A/I$，且 $X = \mathrm{Spec}(B)$。因此，B 是一个 ´etale A-代数。根据 Artin 逼近 [7, Th´eor`eme 3]（对于 ´etale 态射的情形，可直接通过提升 [26, Tag 03PC](3) 中的表示来证明），存在一个 ´etale A-代数 A'，满足 $A'/IA' \simeq A$，以及一个 ´etale A'-代数 B'，使得 $B \simeq B'/IB'$ 在 $\overline{A}$ 上成立。令 $Y = \mathrm{Spec}(B')$，并赋予其由 ´etale 映射 $Y \to \mathrm{Spec}(A) = \mathbf{A}_P$ 诱导的对数结构。□

2.2. 对数概形的紧化

定义 2.3（良嵌入）。设 X 是定义在复数域 C 上的理想化光滑对数概形，或理想化光滑对数复解析空间。

(a) 良嵌入是开浸入 $j : X \hookrightarrow \overline{X}$，它在局部同构于以下包含映射

$$\mathbf{A}_{P,K} \times \mathbf{G}_m^r \hookrightarrow \mathbf{A}_{P,K} \times \mathbf{A}^r$$

其中 $r \geq 0$，P 是某个 fs 幺半群，且 $K \subsetneq P$ 是某个理想。

(b) 对于良嵌入，我们用 $\mathcal{F}$ 表示 $\overline{\mathcal{M}}_{\overline{X}} \to j_*\overline{\mathcal{M}}_X$ 的核。它是 $\overline{\mathcal{M}}_{\overline{X}}$ 的一个面层，其茎是自由幺半群；我们称之为良嵌入 $X \hookrightarrow \overline{X}$ 的剩余面。

(c) X 的良好紧化是一个良嵌入 $j : X \hookrightarrow \overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 是真概形。

注意，若 $j : X \to \overline{X}$ 是一个良好紧化，则 $\mathcal{M}_{\overline{X}} = j_*\mathcal{M}_X$。事实上，假设 $K = \varnothing$，上述描述表明，在 X 之外，对数结构处处非平凡；也就是说，我们有 $X^\circ = \overline{X}^\circ$，其中 X° 表示对数结构平凡的最大开子集。因此

$$\mathcal{M}_{\overline{X}} = \bar{u}_*\mathcal{O}_{\overline{X}^\circ}^\times = \bar{u}_*\mathcal{O}_{X^\circ}^\times = j_*u_*\mathcal{O}_{X^\circ}^\times = j_*\mathcal{M}_X,$$

其中 $u : X^\circ \to X$ 和 $\bar{u} : \overline{X}^\circ \to \overline{X}$ 是包含映射。

定理 2.4. 设 X 是复数域 C 上的理想化光滑对数概形。那么存在一个严格的 étale 覆盖 $\{X_i \to X\}_{i\in I}$，以及良好紧化 $X_i \hookrightarrow \overline{X}_i$。

证明。先假设 X 光滑。我们用 [27] 中所采用的环面嵌入语言来表述证明：令 $D \subsetneq X$ 为 X 的对数结构非平凡处构成的除子。由于这个问题是 étale 局部的，我们可以假设 X 是仿射的，环面嵌入 (X , D) 是严格的（即，对数结构 Zariski 局部存在图表），并且 D 只有一个闭分层。由[27, 例 2.2.7],可知，这样的环面嵌入是可延拓的（[27, 定义 2.2.2]）。由 [27,定理 2.2.14], 可知，存在一个紧化 $j : X \to \overline{X}$，使得 (X , D) 仍是严格的环面嵌入，其中 D 表示 D 在 X 中的闭包，并且除子 $E = \overline{X} \setminus X$ 与 $\overline{D}$ 有简单正规交叉（[27,定义 2.1.13 和 2.1.15]）。后者恰好意味着 $(\overline{X}, \overline{D} + E)$ 是一个严格的环面嵌入，且局部具有如下形式

$$(\mathbf{A}_P \times \mathbf{A}^r, (\partial \mathbf{A}_P) \times \mathbf{A}^r + \mathbf{A}_P \times (\partial \mathbf{A}^r)),$$

其中，∂A_P （分别为 ∂A^r）表示 A_P 的（分别为 G_m^r）的补集。这意味着，与环面嵌入（X, D + E）对应的对数概形是 X 的良好紧化。

在一般情形下，根据引理 2.2 ，我们可以假设 X 存在一个精确闭浸入 $X \hookrightarrow Y$，其中 Y 光滑，且 X 由 $\mathcal{M}_Y$ 中的一个凝聚理想定义。进一步局部化后，我们可以假设 Y 存在一个良好紧化 $Y \hookrightarrow \overline{Y}$。令 X 为 X 在 $\overline{Y}$ 中的概形论闭包，并赋予从 $\overline{Y}$ 诱导的对数结构。那么，$X \hookrightarrow \overline{X}$ 也是一个良好紧化。为证明这一点，只需注意，$A_{P,K} \times G_m^r$ 在 $A_P \times A^r$ 中的概形论闭包等于 $A_{P,K} \times A^r$。□

2.3. 对数结构的分裂

概形 X 上 fs 对数结构 $\mathcal{M}_X$ 的基本不变量是幺半群的可构造层 $\overline{\mathcal{M}}_X = \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X^\times$，它给出了 X 的对数分层，在这些分层上该层局部常值。本节讨论 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 局部常值的情形；此时 X 上的对数结构是“局部分裂的”。

本文其余部分的核心结论是：对于复数域 C 上的理想化光滑对数概形 X，存在一个严格态射 $X^{\#} \to X$，使得 $X^{\#}$ 具有对数结构的分裂，并且它对所有底层约化的严格映射 $Y \to X$ 都是泛的。此外，$X^{\#}$ 的底层概形在 C 上光滑。

我们讨论 fs 对数概形的情形，但这些断言同样适用于 fs 对数复解析空间、形式概形、代数空间等；相应地调整“局部”一词的含义即可。

定义 2.5. 设 X 为一个 fs 对数概形。

(a) 若层 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 局部常值，我们称 X 具有局部常值对数结构。

(b) 若 X 是 空心的 [23, §2，定义 4] 若 $\alpha(\mathcal{M}_{X,x} \setminus \mathcal{O}_{X,x}^{\times}) = 0$ 对每个几何点 x 均成立。

(c) 对数结构 $\mathcal{M}_X$ 的一个分裂是幺半群层同态 $\varepsilon\colon \overline{\mathcal{M}}_X \to \mathcal{M}_X$，使得复合 $\overline{\mathcal{M}}_X \to \mathcal{M}_X \to \overline{\mathcal{M}}_X$ 为恒等映射。

对于一个整幺半群 P，投影 $P \to \overline{P} = P/P^*$ 的分裂与相应群映射 $P^{\mathrm{gp}} \to \overline{P}^{\mathrm{gp}}$ 的分裂一一对应。因此，若 X 是一个 fs 对数概形，它局部存在分裂，且 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 局部常值（我们很快就会看到，这两个假设实际上等价），则 X 上的分裂与下列局部分裂的层的正合序列的分裂相对应

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\times} \longrightarrow \mathcal{M}_X^{\mathrm{gp}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_X^{\mathrm{gp}} \longrightarrow 0$$

因此构成一个在 $T_X = \mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_x, \mathcal{O}_X^{\times})$ 下的主齐性空间。层 T_X 是 X 上环面的截面层，其特征层为 $\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_x$（见《Exposé X》第 5–7 节）。

引理 2.6. 设 X 是一个 fs 对数概形。

(a) 设 ε 是 X 上的一个分裂，且 m 是 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 的一个局部截面。那么 $\alpha(\varepsilon(m))$ 在 X 上局部要么是单位元，要么是幂零元。[1]

(b) X 具有局部常值对数结构，当且仅当 $\mathcal{M}_X$ 局部存在分裂。

(c) 若 X 为空心，则 X 具有局部常值对数结构。反之，若 X 是约化的且具有局部常值对数结构，则 X 为空心。

(d) 设 P 是一个 fs 幺半群，且 $K \subsetneq P$ 是一个理想。那么 $A_{P,K}$ 具有局部常值对数结构，当且仅当 $\sqrt{K} = P \setminus P^{\times}$，也就是说，$\overline{P}$ 的每个元素 x 要么可逆，要么满足对某个 $n \geq 1$ 有 $nx \in K$。它为空心，当且仅当 $K = P \setminus P^{\times}$；在此情形下，我们可以写成 $P = Q \oplus M$，其中 M 是一个群，Q 是一个幺半群，并且 $A_{P,K} \simeq \mathrm{Spec}(Q \to \mathbb{C}[M])$，其中该映射将 $Q^{\times}$ 映为 1，并将 $Q \setminus Q^{\times}$ 映为 0。

证明。(a) 我们可以假设 $X = \mathrm{Spec}(R)$，其中 R 是严格亨泽尔局部环，闭点为 x。令 $s \in \mathcal{M}_{X,x}$ 并令 $f = \alpha(s) \in \mathcal{O}_{X,x} = R$。由于幂零元是所有素理想的交集，我们需要证明：若 $f \notin \mathfrak{p}$ 属于某个素理想 $\mathfrak{p} \subsetneq R$，则 f 是单位元。令 $y \in X$ 为对应于该 $\mathfrak{p}$ 的点。我们考察交换方形

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{X,x} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{X,y} \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ \mathcal{M}_{X,x} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{X,y}. \end{array}$$

[1] 对于形式概形，将“幂零元”替换为“拓扑幂零元”。事实上，在一个阿迪克环中，所有开素理想的交集就是拓扑幂零元的集合。

令 $s\in\overline{\mathcal{M}}_{X,x}$ 为 s 的像。我们有 $\varepsilon(s)=us$，其中某个 $u\in\mathcal{O}_{X,x}^{\times}=R^{\times}$。由于 $\alpha(s)=f\notin\mathfrak{p}$，也就是说，$\alpha(s)$ 在 $\mathcal{O}_{X,y}$ 中的像是单位元，因此 s 在 $\mathcal{M}_{X,y}$ 中的像属于 $\mathcal{O}_{X,y}^{\times}$，所以 s 映到 $\overline{\mathcal{M}}_{X,y}$中的 0。因此，$\varepsilon(s)=us$ 映到 $\mathcal{M}_{X,y}$中的 1，且 uf 映到 $\mathcal{O}_{X,y}$中的 1。但这样一来，$uf-1$ 映到 $\mathcal{O}_{X,y}$中的 0，因此在 $\mathcal{O}_{X,x}$中不可逆，所以 f 可逆。

(b) 假设 X 局部分裂。由 (a) 的证明可知，若 x 特化到 y，则 $\overline{\mathcal{M}}_{X,x}\to\overline{\mathcal{M}}_{X,y}$ 是双射。根据 [23, §2, 引理 5]，$\overline{\mathcal{M}}_X$ 是局部常值。反过来，假设 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 局部常值，我们要在 X 上局部构造一个分裂。为此，我们取一点 x，并可假设 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 取常值 P，且 X 在 x 处有一个整齐图表 [25, 第 II 章, 定义 2.3。1]，即一个图表 $P\to\Gamma(X,\mathcal{M}_X)$。这个图表定义了一个分裂 $\overline{\mathcal{M}}_X\to\mathcal{M}_X$。

(c) 由 (a) 和 (b) 得出。

(d) 略。 □

注意，对数结构的分裂可以沿严格态射拉回。也就是说，若 $f:Y\to X$ 是 fs 对数概形的严格态射，且 ε 是 $\mathcal{M}_X$ 的一个分裂，则我们有一个自然映射

$$f^*(\varepsilon):\overline{\mathcal{M}}_Y=f^*\overline{\mathcal{M}}_X\longrightarrow(\text{pullback under } f \text{ of } \mathcal{M}_X \text{ as a sheaf})\longrightarrow f^*\mathcal{M}_X=\mathcal{M}_Y$$

这是 $\mathcal{M}_Y=f^*\mathcal{M}_X$ 的一个分裂。该构造导出以下函子 $\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}_X\to\mathrm{Sets}$：

$$\widehat{X}^{\#}(Y\xrightarrow{f}X)=\{\text{splittings of } f^*\mathcal{M}_X\},$$

$$\widehat{X}^{\flat}(Y\xrightarrow{f}X)=\begin{cases}\{*\} & \text{if } f^*\mathcal{M}_X \text{ is locally constant}\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$X^{\#}(Y\xrightarrow{f}X)=\begin{cases}\{\text{splittings of } f^*\mathcal{M}_X\} & \text{if } (Y,f^*\mathcal{M}_X) \text{ is hollow}\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$X^{\flat}(Y\xrightarrow{f}X)=\begin{cases}\{*\} & \text{if } (Y,f^*\mathcal{M}_X) \text{ is hollow}\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases}$$

我们有自然变换，构成函子的一个笛卡尔交换图

$$\begin{array}{ccc}X^{\#} & \longrightarrow & \widehat{X}^{\#}\\ \downarrow & & \downarrow\\ X^{\flat} & \longrightarrow & \widehat{X}^{\flat}.\end{array}$$

我们很快就会认识到，$X^{\flat}$ 是 X 的“对数分层”。空间 $X^{\#}$ 在 $X^{\flat}$ 上构成一个环面挠子，将在本文中发挥关键作用。空间 $\widehat{X}^{\#}$ 和 $\widehat{X}^{\flat}$ 在下文中不会用到。

注 2.7. 设 X 为一个概形，且 $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 是 X 上对数结构的一个态射。我们得到一个阿贝尔群层的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\times} & \longrightarrow & \mathcal{N}^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{N}}^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & 0\\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\times} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & 0.\end{array}$$

因此，右侧的交换图是一个拉回，所以对于 $\mathcal{M}$ 的每个分裂 ε，都存在唯一的 $\mathcal{N}$ 的分裂 ε'，使得该交换图

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{N}} & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}} & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathcal{M} \end{array}$$

是交换的。若 $f: Y \to X$ 是对数概形的一个映射，且 ε_X 和 ε_Y 分别是 X 和 Y 上的分裂，则称 f 与 ε_X 和 ε_Y 相容，如果由 ε_X 通过拉回诱导的 $f^*\mathcal{M}_X$ 的分裂，等于如上由 ε_Y 诱导的 $f^*\mathcal{M}_X$ 的分裂。

这一讨论表明，我们引入的四个函子具有函子性：fs 对数概形之间的映射 $Y \to X$ 诱导映射 $Y^{\#} \to X^{\#}$、$Y^{\flat} \to X^{\flat}$ 等等。此外，映射 $Y^{\#} \to X^{\#}$ 与泛分裂相容。

命题 2.8。设 X 是一个 fs 对数概形。

(a) 函子 $\widehat{X}^{\#}$ 和 $\widehat{X}^{\flat}$ 可由 X 上的形式仿射形式概形表示，且映射 $\widehat{X}^{\#} \to \widehat{X}^{\flat}$ 是光滑且仿射的。

(b) 函子 $X^{\#}$ 和 $X^{\flat}$ 可由有限表示且仿射于 X 的概形表示。映射 $X^{\#} \to X^{\flat}$ 是光滑且仿射的（是 $X^{\flat}$ 上的环面主齐性空间），而映射 $X^{\flat} \to X$ 是泛双射单态射（即 X 的一个局部有限族有限表示局部闭子概形的不交并）。

例 2.9. 令 $X = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{N} \xrightarrow{1 \mapsto t} \mathbb{C}[t])$。

$$\begin{aligned} \widehat{X}^{\flat} &\simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t,t^{-1}]) \sqcup \mathrm{Spf}(\mathbf{C}[\![t]\!]), \\ \widehat{X}^{\#} &\simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t,t^{-1}]) \sqcup \mathrm{Spf}(\mathbf{C}[\![t]\!]\langle y, y^{-1}\rangle), \\ X^{\flat} &\simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t,t^{-1}]) \sqcup \mathrm{Spec}(\mathbf{C}), \\ X^{\#} &\simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t,t^{-1}]) \sqcup \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[y,y^{-1}]). \end{aligned}$$

这里，Spec(A) 被视为赋予离散拓扑的 A 的形式谱，而 $\mathbb{C}[\![t]\!]\langle y, y^{-1}\rangle$ 是 $\mathbb{C}[t,y,y^{-1}]$ 的 t 进完备化。

例 2.10. 设 $X = \mathbb{A}_P$ 对于一个 fs 幺半群 P。对于 P 的一个面 F，我们用 $X_F \hookrightarrow X$ 表示对应于映射的严格局部闭浸入

$$\mathbf{C}[P] \longrightarrow \mathbf{C}[F^{\mathrm{gp}}], \qquad p \mapsto \begin{cases} p & \text{if } p \in F, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

因此 $\underline{X}_F \simeq \mathbb{A}_{F^{\mathrm{gp}}}$。正如我们即将证明的，我们有

$$X^{\#} \simeq \bigsqcup_F X_F \times \mathbf{A}_{(P/F)^{\mathrm{gp}}}, \tag{2.2}$$

$$X^{\flat} \simeq \bigsqcup_F X_F, \tag{2.3}$$

对所有面 $F \subseteq P$ 取余积。映射 $X^{\#} \to X^{\flat}$ 是投影 $X_F \times \mathbb{A}^{(P/F)^{\mathrm{gp}}} \to X_F$ 的不交并。注意，由于 P/F 是尖的，$(P/F)^{\mathrm{gp}}$ 是自由阿贝尔群，因此短正合列 $0 \to F^{\mathrm{gp}} \to P^{\mathrm{gp}} \to (P/F)^{\mathrm{gp}} \to 0$ 分裂。因此，$X^{\#}$ 与..... 非典范地同构

—

以幺半群 P 的各个面为指标的不交并，其中每一项都是环面 $X^* = A_{P^{gp}}$ 的一个副本。不过，各分支上的对数结构取决于 F。

注 2.11. 概形 $X^\#$ 是 X 的 Kato–Nakayama 空间 X^{log} 的一个简化模型。它在簇的 Grothendieck 环 $K_0(Var_C)$ 中的类，似乎是与对数概形 X 相关联的“正确”类。

命题的证明 2.8。 我们先处理 $X = \mathbf{A}_P = 谱(P \to \mathbf{Z}[P])$ 并在之后归结到这一情形。我们将使用例 2.10 中的记号。

我们先处理 $\widehat{X}^\flat$。对于 P 的一个面 F，令 $P_F = P - F \subseteq P^{gp}$ 为 P 在 F 处的局部化，并令 $K_F = P_F \setminus F^{gp}$，它生成了 (2.1) 的核。令 $\mathfrak{X}_F$ 表示 $\mathbf{Z}[P_F]$ 的 K_F-adic 完备化的形式谱。我们声称，$\widehat{X}^\flat$ 由 $\bigsqcup_F \mathfrak{X}_F$ 表示。由于在 $X_F \to X$ 的像上，层 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 是以 P/F 为值的常值层，因此每个 $\mathfrak{X}_F$ 上的对数结构都是局部常值的。令 $Y \to X$ 为一个映射，使得 Y 上诱导的对数结构是局部常值的。特别地，在 Y 上局部地，每个 $p \in P$ 的拉回要么是幂零元，要么是单位元（引理 2.6(a)）。由于 P 是有限生成的，在 Y 上局部工作时，我们可以假设每个 p 要么是幂零元，要么是单位元，要么是 Y。令 $F \subseteq P$ 为满足 $p \in P$ 且 p 在 Y 上是单位元的元素集合。显然，F 是 P 的一个面，映射 $P \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ 经由 P_F 分解，并将 K_F 的某个幂映为零。因此，$Y \to X$ 唯一地经由 $\mathfrak{X}_F$ 分解。

同一证明表明，若 $Y \to \mathbf{A}_P$ 使得 Y 上诱导的对数结构是空心的，那么上述幂零函数必为零，从而迫使该映射分解为经由谱 $(\mathbf{Z}[P_F]/(K_F)) = X_F$。因此，$X^\flat$ 由所有面 X_F 的不交并表示，其中遍历 F，即 P 的各个面；由此我们证明了（2.3）。

接下来讨论 $X^\#$ 和 $\widehat{X}^\#$，我们需要证明：如果 X 起初具有局部常值对数结构，那么函子 $\widehat{X}^\#$ 可由 X 上的一个光滑概形表示。不过，引理 2.6 之前的讨论表明，它是环面 $\mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}_X^{gp}, \mathbb{G}_m)$ 下的一个主齐性空间，因此是可表示的（例如，由 [21, 定理 4.3(a)] 可知）。更直接的分析表明，在例 2.10 中的情形 $X = \mathrm{Spec}(P \to \mathbf{Z}[F^{gp}])$，我们有 $\Gamma(X, \mathcal{M}_X) \simeq (P/F) \times F^{gp}$。这给出了同构（2.2）。

最后，我们处理一般情形。首先假设 $X' \to X$ 是一个严格的 étale 满射，且该结论对 X' 成立。由于四个函子 $\widehat{X}^\#$、$\widehat{X}^\flat$、$X^\#$、$X^\flat$ 的形成与严格基变换相容，我们可得它们由 X 上具有所需性质的（形式）代数空间表示；接下来只需证明它们实际上是（形式）概形。然而，$X^\flat \to X$ 是仿射的，因此由拟凝聚层的 étale 下降可知，$\flat$ 是一个概形。类似地，$\widehat{X}^\flat$ 是一个形式概形。最后，$X^\# \to X^\flat$ 和 $\widehat{X}^\# \to \widehat{X}^\flat$ 也都是仿射的，因此 $X^\#$ 是一个概形，而 $\widehat{X}^\#$ 是一个形式概形。因此，该结论对 X 成立。

根据上述结果，我们可以将问题归约到 X 存在一个严格态射 $X \to A_P$、其中 P 是某个幺半群的情形。由于该结论对 A_P 成立，且这四个函子与基变换相容，因此该结论对 X 也成立。□

虽然 $X^\#$ 和 $X^\flat$ 被定义（或描述）为 X 上的概形，但我们赋予它们从 X 拉回的对数结构。我们将 ε_{univ} 称为 $X^\#$ 上对数结构的典范分裂。

例 2.12. 设 $X = \mathrm{Spec}(P \to C)$ 为与尖锐有限生成饱和幺半群 P 相关联的对数点。则 $X^\# = \mathrm{Spec}(P \to C[P^{gp}])$，其中 $P \setminus P^\times$ 映射到零。这个图表对应于一个“显然的”分裂 ε，且 $\Gamma(X^\#, \mathcal{M}_{X^\#}) \simeq P \times P^{gp}$，其中 ε 将 p 映射为 (p, 0)。这与泛分裂 ε_{univ} 不同，后者将 p 映射为 (p, p)。

利用局部图景（例2.10），我们推得如下结论。

推论 2.13. 设 X 是复数域上的理想化光滑对数概形。那么，$X^{\#}$ 和 $X^{\flat}$ 的底层概形都是复数域上的光滑概形。

下述定义将在 §4.4 中使用。

定义 2.14. fs 对数概形之间的拟紧态射 $f: Y \to X$ 称为对数支配的，若满足以下条件：

(1) f 是对数单射，即对于所有几何点 $y \to Y$，映射 $\overline{\mathcal{M}}_{X,\,f(y)} \to \overline{\mathcal{M}}_{Y,\,y}$ 均为单射，

(2) f 在 X 的每个对数分层上的限制都是支配的，或者等价地，映射 $Y^{\flat} \to X^{\flat}$ 是支配的。

注意，对于对数支配态射 $Y \to X$，诱导出的态射 $Y^{\#} \to X^{\#}$ 是概形之间的支配态射。

2.4. 代数截面与解析截面

设 X 是复数域 C 上的局部有限型概形，令 X_{an} 为其对应的复解析空间，并令 $u: X_{an} \to X$ 为局部赋环空间的典范映射。对于拟凝聚的 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$，我们将其沿 $u^*\mathcal{F}$ 拉回到 X_{an} 记作 $\mathcal{F}_{an}$。函子 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{an}$ 是正合的；若 $\mathcal{F}$ 是凝聚的，则 $\mathcal{F}_{an}$ 是一个凝聚解析层。若解析截面 $s \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an})$ 属于（单射）映射的像，我们称其为代数的（见 [6, II.2]）

$$u^*: \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an}).$$

以下 结果给出了判定凝聚层的解析截面是否代数的一个有用判别准则 s.

命题 2.15. 设 X 是复数域 C 上的局部有限型概形，且 $\mathcal{F}$ 是一个凝聚的 $\mathcal{O}_X$-模。设 $\{Z_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个局部有限族局部闭子概形，且 $|Z_i|$ 的并等于 $|X|$。对于 $n \geq 0$，我们将 $Z_i^{(n)}$ 在 X 中的 n 阶加厚记为 Z_i。设 $s \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an})$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个解析截面。若对每个 $i \in I$ 和每个 $n \geq 0$，s 在 $Z_i^{(n)}$ 上的限制都是代数的，则 s 也是代数的。

换言之，如果我们令

$$\pi: X' = \coprod_{i\in I} \coprod_{n\geq 0} Z_i^{(n)} \longrightarrow X,$$

该命题断言，下列交换图是笛卡尔的。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{u^*} & \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{an}^*} \\ \Gamma(X', \pi^*\mathcal{F}) & \xrightarrow[u^*]{} & \Gamma(X'_{an}, (\pi^*\mathcal{F})_{an}). \end{array}$$

注 2.16. 例子 $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(y^2))$，$Z = V(y)$，$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$，$s = y\exp(x)$ 表明，仅考虑限制到 Z_i，而不考虑其加厚，是不够的。问题在于 $\coprod Z_i \to X$ 并非平坦（见下文推论 2.18）。当然，$X' \to X$ 也不平坦，但实际上 X' 近似于形式概形 $\mathfrak{X}'$，后者是沿 Z_i 对 X 的形式完备化 $\mathfrak{Z}_i$ 的不交并，而 $\mathfrak{X}' \to X$ 是平坦的。由于我们不希望为 $\mathfrak{X}'_{an}$（形式复解析空间）赋予意义，因此我们使用概形 X'，而不使用形式概形 $\mathfrak{X}'$。$\mathfrak{X}' \to X$ 的平坦性体现在下文证明中 Artin–Rees 引理的运用上。

引理 2.17. 设 X 是一个在复数域 C 上局部有限型的概形，并设 $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F}$ 是准凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的一个单射。截面 $s \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}'_{an})$ 是代数的，当且仅当它在 $\Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an})$ 中的像是代数的。

证明。Th 待证断言等价于下图中的左侧交换图为笛卡尔图 .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{F}') \\ & & \downarrow{\scriptstyle u^*} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}'_{an}) & \longrightarrow & \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an}) & \longrightarrow & \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an}/\mathcal{F}'_{an}) \end{array}$$

各行均为正合列，且右侧的垂直映射为单射，因此通过简单的图追逐即可得出结论。□

推论 2.18. 设 X 是一个在复数域 C 上局部有限型的概形，且 $\mathcal{F}$ 是一个相干的 $\mathcal{O}_X$-模。设 $f : X' \to X$ 是一个有限型平坦态射，其像包含 $\mathcal{F}$的关联点。那么，截面 $s \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an})$ 是代数的，当且仅当它在 $\Gamma(X'_{an}, f^{*_{an}}\mathcal{F}_{an})$ 中的像是代数的。

证明。在给定的假设下，映射 $\mathcal{F} \hookrightarrow f_* f^*\mathcal{F}$ 是单射。我们有一个映射 α: $(f_* f^*\mathcal{F})_{an} \to f_{an,*}(f^*\mathcal{F})_{an}$，它由余单位映射 $f^* f_* f^*\mathcal{F} \to f^*\mathcal{F}$的解析化经伴随得到。它出现在如下交换图中

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, f_* f^*\mathcal{F}) & = & \Gamma(X', f^*\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}_{an}) & \longrightarrow & \Gamma(X_{an}, (f_* f^*\mathcal{F})_{an}) & \xrightarrow[\alpha]{} & \Gamma(X_{an}, f_{an,*}(f^*\mathcal{F})_{an}) = \Gamma(X'_{an}, (f^*\mathcal{F})_{an}) \end{array}$$

由于上图中记作 α 的映射是单射，故 s 在 $\Gamma(X_{an}, (f_* f^*\mathcal{F})_{an})$ 中的像是代数的。接下来只需应用引理 2.17。□

命题 2.15 的证明。 问题是局部的，因此可以假设 X 是仿射的，且存在一个有限滤过

$$0 = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_m = \mathcal{F}$$

由 $\mathcal{F}$ 的相干子层构成，其分次块具有如下形式

$$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq \mathcal{O}_{Y_i}$$

其中 $Y_i \subseteq X$ [4, 第 7 章， 习题 18]。我们将对该滤过的长度 m进行归纳。

考虑 $m = 1$，即 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_Y$ 其中 $Y \subseteq X$。存在一个指标 i 使得 $Z_i \cap Y$是 Y的稠密开子集。应用推论 2.18 于开浸入$Z_i \cap Y \hookrightarrow Y$以及层 $\mathcal{O}_Y$，即可得出结论。

对于归纳步骤，只需证明：如果

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

是一个相干复数域-模的短正合列，且命题对 $\mathcal{F}'$ 和 $\mathcal{F}''$均成立，那么它对 $\mathcal{F}$也成立。令 $s'' \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}''_{an})$ 为 s 的像。则 $\pi_{an}^* s''$ 是代数的，并且根据关于 $\mathcal{F}''$ 的假设，s'' 也是代数的。由于 X 是仿射的，取整体截面后短正合列仍保持正合，因此存在一个 $s_0 \in \Gamma(X, \mathcal{F})$，其在 $\Gamma(X, \mathcal{F}'')$ 中的像等于 s''。

设 $s' = s - s_0 \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{F}'_{an})$。假设 $\pi_{an}^* s'$ 是代数的，则根据关于 $\mathcal{F}'$ 的假设，s' 也是代数的。因此，$s = s' + s_0$ 也是代数的。剩下需要证明 $\pi_{an}^* s'$ 是代数的。问题在于

$\pi^*\mathcal{F}' \to \pi^*\mathcal{F}$ 可能不是单射，见注 2.16。每次处理一个 Z_i，并用一个合适的仿射开覆盖替换 X，该开覆盖取自包含 Z_i的开集，我们便可归结到下文引理 2.19所述的情形。应用该引理即可完成证明。□

引理 2.19。设 X 是一个在复数域 C 上的有限型仿射概形，且 Z ⊆X 是由理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 切出的闭子概形。我们将由 $\mathcal{I}^{n+1}$ 切出的 X 的闭子概形记为 $Z^{(n)}$。设 $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ 是相干 $\mathcal{O}_X$-模之间的一个单射映射，且 $s \in \Gamma(X_{an}, \mathcal{N}_{an})$ 是 $\mathcal{N}$ 的解析截面。假设对所有 $n \geq 0$，s 在 $\Gamma(Z^{(n)}, \mathcal{M}_{an}|_{Z^{(n)}})$ 中的像都是代数的。那么对所有 $n \geq 0$，s 在 $\Gamma(Z^{(n)}, \mathcal{N}_{an}|_{Z^{(n)}})$ 中的像都是代数的。

证明。根据 Artin–Rees 引理，存在一个 $k \geq 0$，使得对所有 $n \geq k$，均有

$$(\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{M}) \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{I}^{n-k+1}\mathcal{N}.$$

由此得到如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{I}^{n+k+1}\mathcal{M}) \cap \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \operatorname{im}(\mathcal{N} \to \mathcal{M}|_{Z^{(n+k)}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^{n+1}\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}|_{Z^{(n)}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这意味着，s 在 $\Gamma(Z^{(n)}, \mathcal{N}_{an}|_{Z^{(n)}})$ 中的像是某个元素的像

$$\Gamma(Z^{(n+k)}, \operatorname{im}(\mathcal{N} \to \mathcal{M}|_{Z^{(n+k)}}))$$

a因此，根据引理 2.17 应用于包含映射 $\operatorname{im}(\mathcal{N} \to \mathcal{M}|_{Z^{(n+k)}}) \hookrightarrow \mathcal{M}|_{Z^{(n+k)}}$. □

3. 对数联络与典范延拓

3.1. 具有常值对数结构的对数概形上的联络

定义 3.1. 设 X 是 复数域 上的理想化光滑对数概形，或理想化光滑对数复解析空间。X 上的可积联络是由一个相干 $\mathcal{O}_X$-模 E 以及一个可积对数联络 $\nabla: E \to E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}$ 构成的数据。我们用 MIC(X /复数域) 表示可积联络及水平映射所成的范畴。

与没有对数结构的光滑概形 X 的情形一样，范畴 MIC(X /C) 是一个 C-线性阿贝尔范畴，带有对称幺半张量积 $E \otimes F$ 和内部 Hom，记作 Hom(E, F)。与经典情形不同，其中的对象并非局部自由；它不是刚性的张量范畴，且张量积并非正合。

德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X/\mathbf{C}} \otimes E$ 和德拉姆上同调 $H^*_{dR}(X, E) = H^*(X, E \otimes \Omega^\bullet_{X/\mathbf{C}})$ 按通常方式定义。我们有以下有用公式

$$\operatorname{Hom}(E, F) = H^0_{dR}(X, \underline{\operatorname{Hom}}(E, F)).$$

态射 $f: X' \to X$ 诱导一个拉回函子

$$f^*: \operatorname{MIC}(X/\mathbf{C}) \to \operatorname{MIC}(X'/\mathbf{C})$$

它与底层层上的模拉回一致，并且对 MIC(X /C) 中的每个对象 E，都有一个映射 $f^*: H^*_{dR}(X, E) \to H^*_{dR}(X', f^*E)$。对于 C 上的理想化光滑对数概形 X，我们有一个解析化函子

$$E \mapsto E_{an} \quad : \quad \operatorname{MIC}(X/\mathbf{C}) \to \operatorname{MIC}(X_{an}/\mathbf{C}),$$

以及一个自然态射 $H^*_{dR}(X, E) \to H^*_{dR}(X_{an}, E_{an})$。

引理 3.2. 设 X 是复数域 C 上的空心理想化光滑对数概形或对数复解析空间。则下列结论成立。

(a) 底层概形 X 光滑。

(b) 映射 $\mathcal{M}_X^{\mathrm{gp}} \to \Omega^1_{X/\underline{X}}$ 将局部截面 m 映至 d log(m) 的像（这是 X 相对于 X 的泛对数导子的一部分），该映射消去子层 $\mathcal{O}_X^\times$，并诱导出一个同构

$$\overline{\mathcal{M}}_X^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X/\underline{X}}.$$

(c) 以下序列正合。

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_X^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

证明。由于 X 局部存在一个严格的 étale 映射 $X \to \mathbf{A}_{P,\ K}$，其中 $K = P \setminus P^\times$，我们可以假设 $X = \mathbf{A}_{P,\ P\setminus P^\times}$，于是 $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[P^\times])$ 光滑，所讨论的短正合列具有如下形式

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}[P^\times] \otimes P^\times \longrightarrow \mathbf{C}[P^\times] \otimes P^{\mathrm{gp}} \longrightarrow \mathbf{C}[P^\times] \otimes \overline{P}^{\mathrm{gp}} \longrightarrow 0. \qquad \square$$

本小节将阐明在 X 空心且理想化光滑的情形下，范畴 MIC(X/C)。为帮助理解，我们指出，此类 X 的贝蒂实现是覆盖 X_{an} 的环面丛。更确切地说，映射 $\tau\colon X_{\log} \to X_{\mathrm{an}}$ 是实环面族 $\mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}}, S^1)$ 下的主齐性空间。$\mathcal{M}_X$ 的一个分裂 ε 为这个主齐性空间提供了一个截面（见图 3.1），并给出一个拉回函子 $\varepsilon^{\circledast}$，将 $X^{\log}$ 上的局部系统映至 X_{an} 上的局部系统。此处我们用上标 $\circledast$ 表示该函子并非由对数概形之间的映射 $X \to X$ 所诱导，尽管它的行为仿佛如此。K¨unneth 定理允许我们将 $X^{\log}$ 上的局部系统识别为 X 上配备 $\mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}_X, \mathbf{Z}(1))$ 作用的局部系统。

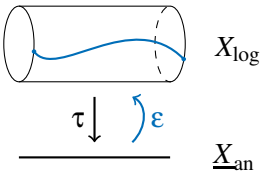


图 1. 具有分裂 ε 的对数概形 X 的 Kato–Nakayama 空间。

依此类推，我们现在将根据分裂 ε 的选择，用 X 上的可积联络来描述 X 上的可积联络。

构造 3.3. 设 X 是 k 上的空心理想化光滑对数概形，并设 ε 是 X 上的一个分裂。尽管 ε（或者更准确地说，相应的缩回 $\varepsilon'\colon \mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X^\times = \mathcal{M}_{\underline{X}}$）并非来自对数概形态射 $X \to X$，但它诱导出一个态射

$$\varepsilon^{\circledast}\colon \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$$

如下。回顾一下，给出一个从 $\Omega^1_{X/\mathbf{C}} \to \mathcal{F}$ 到 $\mathcal{O}_X$-模的映射，等价于给出一个取值于 $\mathcal{F}$ 的对数导子。根据定义，它是一对映射 $(\partial, \partial^{\log})$，其中 $\partial\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ 是一个导子，而 $\partial^{\log}\colon \mathcal{M}_X \to \mathcal{F}$ 是一个幺半群同态，并且对 $\mathcal{M}_X$ 的每个局部截面 m，都满足 $\alpha(m)\partial^{\log}(m) = \partial(\alpha(m))$。令 $\mathrm{d}^{\log}_\varepsilon\colon \mathcal{M}_X \to \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$ 为一个映射，它将局部截面 m 映为 $\mathrm{d}\log(\varepsilon'(m))$，并令

$d: \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$ 是 X 上的泛导子。我们声称，$(d, d_\varepsilon^{\log})$ 这一对构成 X/复数域上的一个对数导子。根据定义，我们需要验证公式

$$\alpha(m)d_\varepsilon(m) = d\alpha(m)$$

对于局部截面$m \ \mathcal{M}_X$。根据引理2.6，$\alpha(m)$ 在$m \notin \mathcal{O}_X^\times$时是幂零元，因此 $\alpha(m) = 0$，因为X是约化的，此时公式成立。对于$m \in \mathcal{O}_X^\times$，公式显然成立。令 $\varepsilon^\circledast$ 为通过 $\mathcal{O}_X$的泛性质与该对数导子相对应的 $\Omega^1_{X/\mathbf{C}}$-线性映射。

令$\mathcal{Q}_X = \Omega^1_{X/\underline{X}} = \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}{}_X \ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X$ （引理3.2）。映射 $\varepsilon^\circledast$ 将引理3.2中引入的短正合列分裂

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \xrightarrow{q} \mathcal{Q}_X \longrightarrow 0$$

利用所诱导的分解 $\Omega^1_{X/\mathbf{C}} \simeq \mathcal{Q}_X \oplus \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$，可知，对数联络 $E \to E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}$的数据等价于如下定义的一对映射 $(\varepsilon^\circledast(\nabla)\ \rho_\nabla)$ 的数据

$$\varepsilon^\circledast(\nabla): E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \xrightarrow{1\otimes\varepsilon^\circledast} E \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}, \qquad \rho_\nabla: E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \xrightarrow{1\otimes q} E \otimes \mathcal{Q}_X$$

其中 $\varepsilon^\circledast(\nabla)$ 是 X 上的一个联络，且 ρ_∇ 是 $\mathcal{O}_X$-线性的。

引理 3.4. 设 $\nabla: E \to E \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}$ 是一个定义在 $\mathcal{O}_X$-模 E 上的对数联络。则 ∇ 可积当且仅当满足以下条件：

i. 联络 $\varepsilon^\circledast(\nabla): E \to E \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$ 是可积的，

ii. 映射 $\rho_\nabla: E \to E \otimes \mathcal{Q}_X$ 是一个 $\mathcal{Q}_X$-希格斯场，

iii. 映射 $\rho_\nabla: E \to E \otimes \mathcal{Q}_X$ 是水平的，其中我们赋予 $\mathcal{Q}_X = \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}} X \ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X$ 满足 $\nabla(m \otimes 1) = 0$ 的典范连接，并赋予 $E \otimes \mathcal{Q}_X$ 张量积连接。

在给出（直接的）证明之前，我们先回顾一下其中所用的希格斯场概念。我们很快就会用到这种更一般的设定。

定义 3.5. 设 $(\mathcal{A}, \otimes)$ 是一个对称幺半阿贝尔范畴。

(a) 对于一个对象 F 属于 $\mathcal{A}$ 且 $r \geq 0$，r 阶外幂 $\wedge^r F$ 是反对称化映射的像 $\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}\sigma$: $F^{\otimes r} \to F^{\otimes r}$，参见 [5, §7，第 165]。对于 i，$j \geq 0$，我们用 $\wedge$ 表示映射

$$\wedge: \wedge^i F \otimes \wedge^j F \longrightarrow \wedge^{i+j} F.$$

(b) 设 F 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象。$\mathcal{A}$ 上的 F-希格斯对象是一个二元组 (Eθ)，其中 E 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，且θ: $E \to E \otimes F$ 是一个态射（称为希格斯场），满足 $\theta^1 \circ \theta = 0$，其中 θ^1 是映射

$$E \otimes F \xrightarrow{-\theta\otimes 1} E \otimes F \otimes F \xrightarrow{1\otimes\wedge} E \otimes \wedge^2 F,$$

一个态F-希格斯对象 $(E', \theta') \to (E\ \theta)$ 的态射是一个态射 $f: E' \to E$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\theta'} & E' \otimes F \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes 1} \\ E & \xrightarrow[\theta]{} & E \otimes F \end{array}$$

交换。我们用 $\mathrm{HIG}_F(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$.[2] 的 F-希格斯对象范畴

(c) 设 (E θ) 是 $\mathcal{A}$ 的一个 F-希格斯对象。(E θ) 的 Higgs 复形是复形

$$E \longrightarrow E \otimes F \longrightarrow E \otimes \wedge^2 F \longrightarrow \cdots$$

其中微分 θ^i: E $\otimes \wedge^i$F $\to$E $\otimes \wedge^{i+1}$F 是以下映射的复合

$$E \otimes \wedge^i F \xrightarrow{(-1)^i\theta\otimes 1} E \otimes F \otimes \wedge^i F \xrightarrow{1\otimes\wedge} E \otimes \wedge^{i+1} F.$$

引理的证明 3.4。 利用由 $\Omega^2_{X/\mathbf{C}} \simeq \Omega^2_{\underline{X}/\mathbf{C}} \oplus (\Omega_X \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}) \oplus \wedge^2\Omega_X$ 诱导的分解 $\varepsilon^{\circledast}$，我们可以将序列 $E \to E \otimes \Omega^1_{X/C} \to E \otimes \Omega^2_{X/\mathbf{C}}$ 描述为以下图表的全复形

$$\begin{array}{ccccc}
E \otimes \Omega^2_{\underline{X}/\mathbf{C}} & & & & \\
\uparrow{\scriptstyle \varepsilon^{\circledast}(\nabla)^1} & & & & \\
E \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} & \xrightarrow{\rho_\nabla\otimes 1} & E \otimes \Omega_X \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} & & \\
\uparrow{\scriptstyle \varepsilon^{\circledast}(\nabla)} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \\
E & \xrightarrow[\rho_\nabla]{} & E \otimes \Omega_X & \xrightarrow[\rho^1_\nabla]{} & E \otimes \wedge^2\Omega_X .
\end{array}$$

其中 δ 是 E $\otimes \Omega_X$ 上的联络，明确写作 δ(e $\otimes$ q) = s(∇(e) $\otimes$ q)，其中 e $\in$ E 且 q $\in \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_X$，其中 s: E $\otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} \otimes \Omega_X \xrightarrow{\sim}$ E $\otimes \Omega_X \otimes \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$ 是洗牌映射。因此，当且仅当 $\nabla^1 \circ \nabla = 0\,(\nabla)^1 \circ \varepsilon^{\circledast}(\nabla) = 0, \rho^1_\nabla \circ \rho_\nabla = 0$ 时， $\varepsilon^{\circledast}$，且图表中的交换图可交换。□

注 3.6. 1. 假设 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 为常值，其值为 N^r。上述结果表明，若 X 上存在一个分裂 ε，则 X 上对数可积联络的数据等价于赋有 r 个可交换水平自同态（即“留数”）的 X 上可积联络的数据。

2. 设 f : Y $\to$ X 是复数域 C 上空心理想化光滑对数概形之间的映射，且 ε_X 和 ε_Y 是与 f 相容的分裂（注 2.7）。那么，我们有函子之间的同构 $\varepsilon^{\circledast}_Y(\mathrm{f}^*(-)) \simeq \mathrm{f}^*(\varepsilon^{\circledast}_X(-))$，它将 MIC(X/C) 映到 MIC(Y/C)。

3. 以下变体在实践中颇为有用。设 (X , D) 是一个简单正规交叉对，X 是相应的对数概形。设 D1, . . . , D_r 为 D 的不可约分支。对于 I $\subseteq \{1,\dots,r\}$，设 $\mathrm{Z} = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{D}_i$ 为 D 的某个层的闭包，并设 $\partial \mathrm{Z} = \mathrm{Z} \cap \bigcup_{i\notin \mathrm{I}} \mathrm{D}_i$。那么 (Z ∂Z) 是一个简单正规交叉对，我们将对应的对数概形记为 Z′。我们有一个对数概形态射 Z $\to$Z′，它在底层概形上是恒等映射。这个映射 ′在 étale 局部有一个“分裂”，即映射 $\mathcal{M}_{Z'} \to \mathcal{M}_Z$ 的一个分裂 ε。反过来，这个分裂 ε 诱导出一个函子 $\varepsilon^{\circledast}$: MIC(Z/C) $\to$ MIC(Z′/C)，它具有与下文命题 3.7 中所列性质类似的性质。相关计算见 [18, §3.3] 。

4. 对偶映射 $(\varepsilon^{\circledast})^\vee$: $\mathrm{T}_{\underline{X}/\mathbf{C}} \to \mathrm{T}_{X/\mathbf{C}}$ 定义了李代数胚之间的一个态射；也就是说，它是 X 上 C-李代数之间的一个态射（见 [16, §2]），并且 u $\circ (\varepsilon^{\circledast})^\vee$ 是恒等映射，其中 u : $\mathrm{T}_{X/\mathbf{C}} \to \mathrm{T}_{\underline{X}/\mathbf{C}}$ 是由对数概形 X $\to$ X 的映射所诱导的映射。特别地，我们得到一个作用于这些代数胚上的模的函子，且该函子与 $\varepsilon^{\circledast}$ 一致。

[2] 如果 F 是可对偶化的，那么对象 E 上的 F-希格斯场的数据等价于 E 上一个 Sym($\mathrm{F}^\vee$)-模的结构。正如 Langer [17, §4，尤其是注 4.12], 所指出的，通常最好使用某个 $\mathcal{A}$ 对象 L 的 Sym(L)-模范畴——例如，与我们所定义的 F-希格斯对象范畴不同，它始终是一个阿贝尔范畴。幸运的是，在我们的情形中，对象 F 总是可对偶化的。

5. 函子 $\varepsilon^{\circledast}$: MIC(X /复数域) $\to$MIC(X/复数域) 可扩展为一个函子

$$\varepsilon^{\circledast}\colon \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{\underline{X}})$$

相干（对数）D-模 [15, 14]。

总结上述讨论，我们已经证明:

命题 3.7. 设 X 是 复数域 C 上的空心理想化光滑对数概形，且 ε 是 X 上的一个分裂。那么，下列断言成立。

(a) 层 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 是局部常值的，X 是 复数域 C 上光滑的，且 ε 诱导一个映射

$$\varepsilon^{\circledast}\colon \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}}$$

分裂正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\underline{X}/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{Q}_X \longrightarrow 0, \quad \mathcal{Q}_X = \overline{\mathcal{M}}_X^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X.$$

(b) 反过来，映射 $\varepsilon^{\circledast}$ 诱导出一个幺半函子

$$\varepsilon^{\circledast}\colon \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\underline{X}/\mathbf{C})$$

以及一个范畴等价

$$(E,\nabla) \mapsto (\varepsilon^{\circledast}(E,\nabla), \rho_\nabla) \quad : \quad \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HIG}_{\mathcal{Q}_X}(\mathrm{MIC}(\underline{X}/\mathbf{C})).$$

(c) (b) 中的等价与上同调以下述方式相容。对于 MIC(X /C) 中的对象 (E ∇)，E 的德拉姆复形 E $\otimes \Omega^\bullet_{X/\mathbf{C}}$ 与下述双复形的全复形之间存在一个函子性的同构

$$\begin{array}{ccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdots & E\otimes\wedge^i\mathcal{Q}_X\otimes\Omega^{j+1}_{\underline{X}/\mathbf{C}} & \longrightarrow & E\otimes\wedge^{i+1}\mathcal{Q}_X\otimes\Omega^{j+1}_{\underline{X}/\mathbf{C}} & \longrightarrow \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdots & E\otimes\wedge^i\mathcal{Q}_X\otimes\Omega^{j}_{\underline{X}/\mathbf{C}} & \longrightarrow & E\otimes\wedge^{i+1}\mathcal{Q}_X\otimes\Omega^{j}_{\underline{X}/\mathbf{C}} & \longrightarrow \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow &
\end{array}$$

其第 i 列是 E $\otimes\wedge^i\mathcal{Q}_X$ 的德拉姆复形，而第 j 行是 E 的 Higgs 复形与 Ω^j X/复数域 的张量积。

推论 3.8. 设 X 是复数域 C 上的空心理想化光滑对数概形。那么，MIC(X /C) 中的每个对象都是一个 $\mathcal{O}_X$-模的局部自由对象，并且范畴 MIC(X /C) 是一个刚性张量范畴 [5, §2]。若 X 连通，则对于每个点 x $\in$X (C) 以及 x 上的每个分裂 ε ，函子

$$\omega = \varepsilon^{\circledast} \circ x^*\colon \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\underline{x}/\mathbf{C}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}$$

是一个正合忠实C-线性张量函子，使得 (MIC(X /C) ω) 成为一个坦纳范畴。

证明。由于 X 局部存在分裂，对于 MIC(X /C) 中的每个对象 (E ∇)， $\mathcal{O}_X$-模 E 局部具有 MIC(X /C) 中对象的结构，因此是局部自由的。其余部分显然。□

下面这个直接的引理记录了 $\varepsilon^{\circledast}(E)$ 对分裂 ε 的依赖关系。

引理 3.9。设 X 是复数域 C 上的空心理想化光滑对数概形，且 ε_i（$i=0,\ 1$）是 X 上的两个分裂。我们将 $\varepsilon_0/\varepsilon_1$ 视为映射 $\overline{\mathcal{M}}_X \to \mathcal{O}_X^\times$。复合映射 $d\log(\varepsilon_0/\varepsilon_1)\colon\ \overline{\mathcal{M}}_X \to \mathcal{O}_X^\times \to \Omega^1_{\underline{X}/C}$ 是可加的，因此唯一延拓为一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $\delta(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\colon\ Q_X \to \Omega^1_{\underline{X}/C}$。设 $(E\ \nabla)$ 是 $\mathrm{MIC}(X/C)$ 中的一个对象。那么，$\mathcal{O}_X$-线性映射 $\varepsilon_0^{\circledast}(\nabla) - \varepsilon_1^{\circledast}(\nabla)$ 等于以下复合映射

$$E \xrightarrow{\rho_\nabla} E\otimes Q_X \xrightarrow{1\otimes\delta(\varepsilon_0,\varepsilon_1)} E\otimes\Omega^1_{\underline{X}/C}.$$

最后，我们给出关于一般理想化光滑（非空心）对数概形 X 的一个结果。直观地说，它表明“映射” $\varepsilon_{\mathrm{univ}}\circ\pi\colon\ X^\# \to X$ 是“非分歧的”。

引理 3.10. 设 X 是定义在 复数域 上的理想化光滑对数概形，且 $\pi\colon X^\# \to X$ 是 §2.3 中构造的态射，并赋予泛分裂 $\varepsilon_{\mathrm{univ}}$。那么，复合映射

$$\pi^*\Omega^1_{X/C} \xrightarrow{\pi^*} \Omega^1_{X^\#/C} \xrightarrow{\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}} \Omega^1_{\underline{X}^\#/C}$$

是一个同构。

证明。由于对数分层 $p : X^\flat \to X$ 满足 $p^*\Omega^1_{X/C} \simeq \Omega^1_{X^\flat/C}$，我们可以假设 X 是空心的。局部地，由引理 2.6(d)，我们可以假设 $X = \text{谱}(P \to C)\times G_m^n$，其中 P 是某个尖锐有限生成饱和幺半群，且 $P \to C$ 将 $P\setminus 0$ 映到 0。在此情形下，$X^\# = \text{谱}(P \to C[P^{\mathrm{gp}}]) \times G_m^n$，其中 $P \to C[P^{\mathrm{gp}}]$ 将 $P\setminus 0$ 映到 0，并且 $\varepsilon_{\mathrm{univ}}(p) = (p,\ p)$（见例 2.12）。其余部分可通过直接计算公式得出

$$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}\pi^*(d\log(p)) = d\log(p).$$ □

3.2. Ogus 的黎曼–希尔伯特对应

Ogus 的对应[24] 描述了理想化光滑对数复解析空间$(X/\text{复数域})$ 上的可积联络范畴 MIC，其内容以 Kato–Nakayama 空间X 上的某些可构造层来刻画$X^{\log}$。

从本质上说，这是以下基本事实的推广。在 $\mathbf{A}^{\mathrm{an}}_{\mathbf{N}}$中的开单位圆盘上，局部自由对数联络可写成 $(\mathcal{O}_X^n,\ d\ +U\ d\log z)$ 的形式，其中 $U\ \in M_{n\times n}(\text{复数域})$ 是一个常矩阵。穿孔圆盘上相应局部系统的单值化为 $T\ = \exp(-2\pi i U\ )$ [6, 第二章，命题 1.17.1]。为了从其单值化恢复对数联络，我们需要描述矩阵 T 的“对数”集合；该集合与一组 C-分次 $C^n = \bigoplus_{\lambda\in\text{复数域}} V_\lambda$ 一一对应，这组分次在 U 作用下稳定，并且对每个 $\lambda\in C$，U 在 V_λ 上的唯一特征值为 $\exp(-2\pi i\lambda)$，其由 T 在 V_λ上的唯一特征值 λ 决定。

定义 3.11（[24, 定义 3.2.4]）。设 X 是一个理想化光滑对数复解析空间。令 $K_X = \alpha^{-1}(0)$ $/\mathcal{O}_X^{\times} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_X$，并定义

$$\mathbf{C}_X^{\log} = \mathbf{C}[-\tau^*\overline{\mathcal{M}}_X]/(-\overline{K}_X), \qquad \Lambda_X = \mathbf{C}\otimes\tau^*\overline{\mathcal{M}}_X^{\mathrm{gp}}$$

其中 $\tau\colon X_{\log} \to X$ 是 X 的 Kato–Nakayama 空间。包含映射 $-\tau^*\overline{\mathcal{M}}_X \hookrightarrow \Lambda$ 使 $C^{\log}{}_X$ 成为 $X^{\log}$ 上的一个Λ_X-分次环层。我们还令 $I_x = \mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}{}_{X,x}, Z(1)) = \pi_1(\tau^{-1}(x))$，其中 $x\ \in X$。

我们将 $L(X)$ 记为满足以下条件的 Λ_X-分次复数域$_X$-模 V 所成的范畴（在 [24] 中记作 $L^{\Lambda}_{\mathrm{coh}}$(复数域$^{\log}{}_X$)）：

(1) V 是对数可构造的 [24,定义 3.2.3],

(2) 对每个 $x \in X^{\log}$，茎 V_x 在 $C^{\log}{}_{X,x} = C[-\overline{M}_{X,\tau(x)}]/(-K_{X,\tau(x)})$ 上有限生成，

(3) 对于 $X^{\log}$ 中从 x 到 y 的每条对数路径 [24, p. 704]，余特化映射

$$\gamma_{x,y}^{*}\colon V_x \otimes_{\mathbf{C}_{X,x}^{\log}} \mathbf{C}_{X,y}^{\log} \longrightarrow V_y$$

是同构，

(4) 对每个 $x \in X^{\log}$、每个 $\gamma \in I_{\tau(x)}$ 以及每个 $\lambda \in \Lambda_{X,x}$，数 $\exp\langle\lambda,\gamma\rangle$ 是 $\gamma\colon V_{x,\lambda} \to V_{x,\lambda}$ 的唯一特征值。

定理 3.12 ([24, 定理 3.4。2])。 设 X 是一个理想化光滑对数复解析空间。[3] 存在一个张量范畴等价

$$\mathcal{V}\colon \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} L(X),$$

关于理想化光滑对数复解析空间之间的映射 $Y \to X$，具有函子性。此外，存在一个函子性（关于 E 和 X 两者）的拟同构

$$E \otimes \Omega_{X/\mathbf{C}}^{\bullet} \longrightarrow R\tau_{*}(\mathcal{V}(E))_0$$

其中下标 0 表示零次分次分量。

注 3.13（$\mathcal{V}$ 的函子性）。等价 $\mathcal{V}$ 关于 X 的函子性意味着如下内容。设 $f\colon Y \to X$ 是理想化光滑对数复解析空间之间的映射。拉回函子

$$f^{*}\colon L(X) \longrightarrow L(Y)$$

由环化空间映射

$$(Y_{\log}, \mathbf{C}_{Y}^{\log}) \to (X_{\log}, \mathbf{C}_{X}^{\log}),$$

所对应的模拉回函子诱导，其中 Λ_Y-分次由经映射 $f^{*}\Lambda_X \to \Lambda_Y$ 的 Λ_X 分次诱导。于是，函子性意味着下面交换图中的两个复合函子之间存在自然同构。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{V}_Y} & L(X) \\ {\scriptstyle f^{*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{*}} \\ \mathrm{MIC}(Y/\mathbf{C}) & \xrightarrow[\mathcal{V}_X]{\sim} & L(Y). \end{array} \tag{3.1}$$

例 3.14. 设 P 为一个尖锐有限生成饱和幺半群，且 $K \subseteq P$ 是一个理想。设 $L(P, K)$ 为有限生成的 $P^{\mathrm{gp}} \otimes$ 复数域-分次复数域$[P]/(K)$-模 $V = \bigoplus_{\lambda \in P^{\mathrm{gp}} \otimes \text{复数域}} V_\lambda$，并赋予齐次作用 $\pi_1(P) = \mathrm{Hom}(P^{\mathrm{gp}}, Z(1))$，使得对于每个 $\gamma \in \pi_1(P)$ 和每个 $\lambda \in P^{\mathrm{gp}} \otimes$ 复数域，数 $\exp\langle\lambda,\gamma\rangle$ 是 $\gamma\colon V_\lambda \to V_\lambda$ 的唯一特征值。设 $X = A_{P,K}^{\mathrm{an}}$。那么根据 [24, 命题 3.2.5]，存在一个张量等价

$$L(X_{\mathrm{an}}) \simeq L(-P, -K).$$

[3] 在 [24] 本定理针对复数域 C 上理想化光滑对数概形的解析化来表述，但证明并未用到这一假设。

引理 3.15. 设 P 为一个尖锐有限生成饱和幺半群，且 $K \subseteq P$ 是一个理想。设 $F \subseteq P$ 是一个与 K 不相交的面，且 $P' = P_F$, $K' = K + P'$。设 $X = \mathbf{A}^{an}_{P,K} \subseteq \mathrm{Hom}(P, \text{复数域})$ 且 $X' = \mathbf{A}^{an}_{P',K'} \subseteq X$。对于 P 的一个生成集 S 和一个实数 $\delta > 0$，考虑以下开子集：

$$U_\delta = \{x \in X : |x(p)| < \delta \text{ for } p \in S\},$$
$$U'_\delta = U_\delta \cap X'$$

那么，存在张量等价 $L(U_\delta) \simeq L(-P - K)$ 和 $L(U'_\delta) \simeq L(-P', K')$，使其构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} L(U_\delta) & \longrightarrow & L(U'_\delta) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ L(-P - K) & \longrightarrow & L(-P', -K'). \end{array}$$

证明。我们首先证明，对于 P 中每个与 K 不相交的面 F，$U_\delta \cap X_F \hookrightarrow X_F$ 的包含是一个同伦等价。这里，$X_F = \mathbf{A}_{F^{gp}}$ 是对应于 F 的层。为证明这一点，我们可以忽略理想 K。我们还注意到，$S \cap F$ 是 F 的一个生成集。将 X 识别为 $\mathrm{Hom}(P, \text{复数域})$，我们有

$$\begin{aligned} X_F &= \{x \colon P \to \mathbf{C} : x^{-1}(\mathbf{C}^\times) = F\} \\ &= \mathrm{Hom}(F^{gp}, \mathbf{C}^\times) = \mathrm{Hom}(F^{gp}, \mathbf{R}_{>0}) \times \mathrm{Hom}(F^{gp}, \mathbf{S}^1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_F \cap U_\delta &= \{x \colon F^{gp} \to \mathbf{C}^\times : |x(p)| < \delta \text{ for } p \in S \cap F\} \\ &= \{x \colon F^{gp} \to \mathbf{R}_{>0} : x(p) < \delta \text{ for } p \in S \cap F\} \times \mathrm{Hom}(F^{gp}, \mathbf{S}^1). \end{aligned}$$

还需注意，由方程 $x(p) < \delta$ 确定的 $\mathrm{Hom}(F^{gp}, R_{>0})$ 凸锥中的集合是凸的，且包含零点的一个邻域，因此是可缩的；所以它到 $\mathrm{Hom}(F^{gp}, R_{>0})$ 的包含是一个同伦等价。

关于 $X^{\log}$（其中 $X = \mathbf{A}_{P,K}$）的对数可构造层的如下描述见 [24, §32]。这样的层对应于一个函子的如下数据

$$\mathcal{F} \colon \{\text{faces of } P\} \longrightarrow \pi_1(P)\text{-sets}$$

其中 $\mathcal{F}(F)$ 是相应层在 $X \log F$ 中某个指定点处的茎，而映射 $\mathcal{F}(F') \to \mathcal{F}(F)$ 对于 $F' \subseteq F$ 对应于余特化映射。用这些术语来说，层 $C^{\log} X$ 对应于代数族 $C[-P/F]/(-K)$，分次层 Λ_X 对应于群族 $(P/F)^{gp} \otimes C$，而 $L(X)$ 中的对象 V 对应于有限生成的 $(P/F)^{gp} \otimes C$-分次 $C[-P/F]/(-K)$-模 V_F，它带有 $\pi_1(P)$ 的一个作用，满足关于特征值的适当条件，并且对于包含 $0 \subseteq F$ 所诱导的余特化映射给出一个同构 $V_F = V^0 \otimes_{C[-P]/(-K)} C[-P/F]/(-K)$。因此，它由对象 $V_0 \in L(-P - K)$ 确定（见 [24, 定义 3.2.4] 之后的讨论），所以 $L(X)$ 等价于范畴 $L(-P - K)$。我们刚刚说明了上文例 3.14 中提到的 [24, 命题 3.2.5] 的证明。

探究 Ogus 的证明，目的在于：他利用 X 的对数空间的普遍覆盖来证明这一描述的论证，同样适用于任意开子集 $U \subseteq X^{an}$，只要对于每个与 F 不相交的面 F，$U \cap X_F$ 在 X 的对数空间的普遍覆盖中的原像都是可缩的。特别是，根据第一段的结果，该论证适用于集合 U_δ 和 U'_δ，由此便得到我们的断言。□

3.3. 典范延拓

本节中，我们固定一个良嵌入 $j\colon X \hookrightarrow \overline{X}$，其中的对象是对数复解析空间（定义 2.3）。对于 $x \in X$，我们有一个典范同构

$$\overline{\mathcal{M}}_{\overline{X},x} \simeq \mathcal{F}_x \oplus (j_*\overline{\mathcal{M}}_X)_x$$

其中 $\mathcal{F}_x \simeq \mathbb{N}^s$ 对某个 s 成立，≥ 0 取决于 x。对于 MIC(X/复数域) 中的对象 E，生成元 $e1, \ldots, e_s$（在置换意义下良定义）$\mathcal{F}_x$ 诱导出线性自同态（“留数”）

$$\rho_i\colon E_x \longrightarrow E_x, \qquad E_x = E \otimes \kappa(x).$$

我们将 $R_x \subseteq C$ 记为 $\rho_1, \ldots, \rho_s$ 的特征值的相反数所组成的集合，并称之为 E 在 x 处的无穷远处指数集合。

定义 3.16. 设 τ: C/Z $\to$ C 是投影 C $\to$ C/Z 的一个截面，且 j : X $\to$ X 是一个良嵌入。若对象 E $\in$ MIC(X/复数域) 满足以下条件，则称其为 τ-适配的：

(1) 对每个 x $\in \overline{X}$，E 在 x 处的无穷远处指数集合 R_x 均包含于 im(τ)，

(2) 映射 E $\to j_*j^*$E 是单射。

我们用 MIC$^\tau$(X , X /复数域) 表示由 τ-适配对象组成的 MIC(X/复数域) 的全子范畴。

定理 3.17. 设 τ: 复数域/Z $\to$复数域是投影 复数域 $\to$复数域/Z 的一个截面。

(a) 限制函子诱导一个等价

$$\mathrm{MIC}^\tau(\overline{X}, X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}).$$

(b) 若 $\tau(0) = 0$，则对 MIC$^\tau$(X, X /复数域) 中的每个对象 E，映射

$$j^*\colon H^*_{\mathrm{dR}}(\overline{X}, E) \longrightarrow H^*_{\mathrm{dR}}(X, j^*E)$$

是一个同构。

(c) MIC$^\tau$(X, X/C) 中的对象 E 是局部自由的（作为一个 $\mathcal{O}_X$-模），当且仅当其在 X 上的限制是局部自由的。

在证明该结果之前，我们先给出一个关于幺半群的辅助陈述。

引理 3.18。 设 P 是一个尖锐有限生成饱和幺半群，且 Q $= P \times \mathbf{N}^r$，且 Q′ $= P \times \mathbf{Z}^r$。设 K $\subseteq$ P 是一个理想，并仍以 K 表示它在 Q 和 Q′中生成的理想。记 $L^\tau(Q,K)$ 为 $L(Q,K)$ 的全子范畴（见例 3.14），其对象 V 满足

(1) V is generated as a $\mathbf{C}[Q]$*-module by* $\bigoplus_{\lambda \in (P^{\mathrm{gp}} \otimes \mathbf{C}) \times \mathrm{im}(\tau)^r} V_\lambda$，

(2) 映射 V $\to$ V′ = V $\otimes_{\mathbf{C}[Q]}$ C[Q′] 是单射。

Then

(a) 函子 V $\mapsto$ V′ = V $\otimes_{\mathbf{C}[Q]}$ C[Q′] 诱导出一个范畴等价

$$L^\tau(Q,K) \xrightarrow{\sim} L(Q',K),$$

(b) L^τ(Q) 的一个对象 V 是自由 C[Q]/(K)-模，当且仅当 V′ 是自由 C[Q′]/(K)-模。

证明。令 $\Sigma = \{z \in C : z - \tau(z) \in N\}$。对于 L(Q′,K) 的一个对象 V′，我们定义

$$V = \bigoplus_{\lambda \in (P^{gp} \otimes \mathbf{C}) \times \Sigma^r} V'_\lambda.$$

这是一个 $Q^{gp} \otimes$复数域-分次的复数域[Q]-模，带有 $\pi_1(Q) = \pi_1(Q')$ 的作用，并满足关于特征值的所需条件。我们验证它由位于以下次数中的齐次元素有限生成

$$(P^{gp} \otimes \mathbf{C}) \times \mathrm{im}(\tau)^r.$$

设 $v'_1, \dots, v'_r$ 是 V′ 的齐次生成元，它们分别位于次数 $\lambda'_i = (\eta_i, \lambda'_{i,1}, \dots, \lambda'_{i,r})$。令

$$v_i = x_1^{\tau(\lambda'_{i,1}) - \lambda'_{i,1}} \cdots x_r^{\tau(\lambda'_{i,r}) - \lambda'_{i,r}} v'_i \in V'_{\lambda_i}, \quad \lambda_i = (\eta_i, \tau(\lambda'_{i,1}), \dots, \tau(\lambda'_{i,r})) \in (P^{gp} \otimes \mathbf{C}) \times \mathrm{im}(\tau)^r,$$

这些元素生成 V。最后，我们有 $V' = V \otimes_{\mathbf{C}[Q]}$复数域[Q′]，因此 $V \to V \otimes_{\mathbf{C}[Q]}$复数域[Q′] 是单射。构造 $V' \mapsto V$ 关于 V′ 是函子性的，并给出所给函子的一个拟逆，从而证明 (a)。

为证明 (b)，假设 V′ 由齐次元素 $v'_i \in V'_{\lambda'_i}$ 自由生成。那么 V 由元素 v_i 自由生成。□

定理 3.17 的证明。(a) $\mathrm{MIC}^\tau(X, \overline{X}/C)$ 是 $\mathrm{MIC}(\overline{X}/C)$ 的子范畴，由逐点条件定义，因此在 X 上具有局部性质。在点 $x \in X$ 附近取局部化，并利用良嵌入的局部形式，我们可以假设 X 是形如 U_δ of $A_{P \times \mathbf{N}^r, K}$ 的开子集，其中 $U = X'_\delta$，且该形式出现在引理 3.15 中。结合该引理、定理 3.12 以及 [24, 注 2.1.3]，我们得到一个由范畴和函子组成的交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MIC}^\tau(\overline{X}, X/\mathbf{C}) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ L^\tau(P \times \mathbf{N}^r, K) & \longrightarrow & L(P \times \mathbf{Z}^r, K) \end{array}$$

其中 $L^\tau(P \times \mathbf{N}^r, K)$ 如引理 3.18所述。根据该引理的 (a)，底部箭头是一个等价，因此结论成立。

(b) 利用 (a) 中的论证，这由引理 3.18(b) 得出。 □

4. 正则联络与黎曼–希尔伯特对应

4.1. 正则联络

设 X 是一个在 复数域 上的理想化光滑对数概形，设 $\pi\colon X^\# \to X$ 是命题 2.8 中构造的态射，并设 $\varepsilon_{\mathrm{univ}}$ 是对数结构 $\mathcal{M}_{X^\#} = \pi^* \mathcal{M}_X$ 的泛分裂。对数概形 $X^\#$是理想化光滑且空心的，因此其底层概形是光滑的（引理 3.2(a)）。如 §3.1 中所述，我们有一个函子

$$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}} : \mathrm{MIC}(X^\#/\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\underline{X}^\#/\mathbf{C}).$$

定义 4.1. 采用上述记号，我们称 MIC(X/C) 中的对象 E 为正则对象，如果对象$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^* E)$ 在 $\mathrm{MIC}(X^\#/C)$ 中按经典意义是正则的 [6, 第二章，D´efinition 4.2]。我们用 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/C)$ 表示 MIC(X/C) 中由正则对象构成的全子范畴。

我们马上注意到，如果 X 带有平凡对数结构，那么 $X = X^\# = \underline{X}$，且 $\mathrm{MIC}(X/C) = \mathrm{MIC}(X/C)$ 中的对象 E 按上述意义是正则的，当且仅当它按经典意义是正则的。

在 X 上使用泛分裂 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}{}^{\#}$ 是典范的。不过，任意一种分裂都可以：

引理 4.2. 设 X 是复数域 C 上的空心理想化光滑对数概形，且 ε_i (i $=0,1$) 是 X 上的两个分裂。设 E 是 MIC(X /C) 的一个对象。那么 $\varepsilon_0^{\circledast}$(E) 正则，当且仅当 $\varepsilon_1^{\circledast}$(E) 正则。

证明。我们可以假设$\overline{\mathcal{M}}_Y$ 是取值为 P 的常值，并且 Y 允许一个良好紧化 Y $\hookrightarrow$Y（此处即通常的简单正规交叉紧化）。记 $\nabla_i = \varepsilon_i^{\circledast}(\nabla)$为$\varepsilon_i^{\circledast}$(E)上的连接，并假设 $\varepsilon_0^{\circledast}$(E) $=$(E ∇_0)是正则的。令 E 为(E ∇_0)的典范延拓，即 Y 上沿 D $=$Y $\setminus$Y 具有对数极点的连接。我们断言 ∇_1 也延拓为 E 上的对数连接，由此可知 $\varepsilon_1^{\circledast}$(E) $=$(E ∇_1)是正则的。 $-$

由引理3.9，我们有 $\nabla_1 = \nabla_0 - (1 \otimes \delta(\varepsilon_0, \varepsilon_1)) \circ \rho_\nabla$。取 P^{gp}的一组基 p1,. .. , p_r，并将 $f_i = \varepsilon_0(p_i)/\varepsilon_1(p_i) \in \Gamma(Y\mathcal{O}_Y^{\times})$记作 Then d log(f_i)是 $\Omega^1_{Y/\text{复数域}}$(log D)的一个截面。我们将 ∇_1 明确写为

$$\nabla_1 = \nabla_0 - \sum_i \rho_i \otimes d\log(f_i)$$

其中 ρ_i: E $\to$ E 是由 p_i 诱导的留数映射。由典范延拓的函子性可知，由于映射 ρ_i: E $\to$ E 相对于 ∇_0 是水平的，它们可唯一延拓为态射 $\overline{\rho}_i$: E $\to$ E。因此 ∇_1 将 E 映入 E $\otimes \Omega^1_{Y/\text{复数域}}$(log D)。□

引理 4.3. 设 X 是复数域 C 上的理想化光滑对数概形，且 E 是 MIC(X /C) 中的一个对象。以下条件等价。

(a) E 是正则的，

(b) 对每个理想化光滑且空心的 Y，若存在严格映射 f : Y $\to$X，并且对 f $^*\mathcal{M}_X$ 的每个分裂 ε，则 MIC(Y /C) 中的对象 $\varepsilon^{\circledast}$(f *E)（经典意义下）都是正则的，

(c) 存在一个对数支配（定义 2.14）态射 $f : Y \to X$，其中 Y 是理想化光滑且空心的，并且存在一个分裂 ε 于 Y 上，使得 $\varepsilon^{\circledast}(f^*E)$（经典意义下）是正则的。

证明。对于 (b) 中的每个 f : Y $\to$X，都存在唯一的映射 $\tilde{f}$: Y $\to$ X$^{\#}$ 使之经由该映射分解，并且分裂 ε 是泛分裂 $\varepsilon_{\text{univ}}$的原像。于是

$$\varepsilon^{\circledast}(f^*E) = \varepsilon^{\circledast}(\tilde{f}^*\pi^*E) = \tilde{f}^*\varepsilon^{\circledast}_{\text{univ}}(\pi^*E)$$

这表明 (a) 推出 (b)。此外，(b) 推出 (c)。

剩下要证明的是 (c) 推出 (a)。我们有一个交换方形（见注 2.7）

$$\begin{array}{ccc} Y^{\#} & \xrightarrow{g} & X^{\#} \\ {\scriptstyle \pi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

其中顶端映射 g 作为概形之间的映射是支配的。记 ε_0 和 ε_1 分别为由 $Y^{\#}$ 以及 ε和 $\varepsilon_{\text{univ}}$诱导的分裂。由引理 4.2，有

$$\varepsilon_0^{\circledast}(g^*\pi^*E) \text{ is regular} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1^{\circledast}(g^*\pi^*E) \text{ is regular.}$$

But $\varepsilon_0^{\circledast}$(g$^*\pi^*$E) $\simeq \varepsilon_0^{\circledast}(\pi_Y^*$f *E) $= \pi_Y^*(\varepsilon^{\circledast}$(f *E)), 它是正则的，因为 $\varepsilon^{\circledast}$(f *E) 是正则的。因此

$$\varepsilon_1^{\circledast}(g^*\pi^*E) \simeq g^*(\varepsilon^{\circledast}_{\text{univ}}(\pi^*E))$$

是正则的，因此 $\varepsilon^{\circledast}_{\text{univ}}(\pi^*E)$根据 [6, 第二章，命题 4.6(iii)]，也是正则的。 □

推论 4.4. 设 X 是定义在复数域上的理想化光滑对数概形。那么以下结论成立。

(a) 对于每个态射 f : Y → X，其中 Y 是理想化光滑的，拉回函子

$$f^*\colon \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \to \mathrm{MIC}(Y/\mathbf{C})$$

将 MIC^{reg}(X /复数域) 映射到 MIC^{reg}(Y /复数域)。

(b) 若 f : Y →X 是复数域上的理想化光滑对数概形之间的一个对数支配（定义 2.14）态射，且 E 是 复数域上 MIC(X/**C**) 中的一个对象，使得 f *E 正则，那么 E 也正则。

证明。 第一个断言由引理中的刻画 (b) 得出4.3，第二个断言则由刻画 (c) 得出。 □

命题 4.5。设 X 是复数域上的理想化光滑对数概形。那么，范畴 MIC^{reg}(X /复数域) 是 MIC(X /复数域) 的一个阿贝尔子范畴，并且在直和、张量积、外幂和对称幂、对偶、内部 Hom 、子对象、商对象及扩张下封闭。

证明。 我们将使用关于 MIC 的相应断言^{reg}($X^{\#}$/**C**)，参见 [6, 第二章，命题 4。6]。

张量运算。设 E 和 F 均为正则。由于函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}\pi^*$ 是幺半群的，即

$$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*(E\otimes F)) \simeq \varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E)\otimes\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*F),$$

结论可由关于 MIC^{reg}(X$^{\#}$/C) 的相应结论推出。由于外幂和对称幂是张量幂的自然直和项，因此我们也得到 $\wedge^p$(E) 和 Sym^p(E) 的正则性。

商对象。由于函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}\pi^*$ 是右正合的（它是右正合函子 π^* 与正合函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$的复合），结论可由关于 MIC^{reg}(X$^{\#}$/C) 的相应结论推出。

扩张。设 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ 是 MIC(X /C) 中的一个短正合列，其中 E′ 和 E″均为正则。应用函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}\pi^*$，得到 MIC^{reg}(X$^{\#}$/C) 中的一个右正合序列

$$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E') \longrightarrow \varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E) \longrightarrow \varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E'') \longrightarrow 0.$$

因此，$\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$(π*E)是正则对象 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$(π*E″) 的一个扩张，且其子对象是正则对象 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$(π*E′) 的商对象，故它是正则的。

子对象。设 E′ → E 是 MIC(X /复数域) 中的一个单态射，其中 E 是正则的。我们要证明 E′ 也正则。微妙之处在于，π: X$^{\#}$ → X 不是平坦的，因此 π*(E′) → π*(E) 可能不是单射。

首先假设 X 是空心的。在这种情况下，X$^{\#}$ →X $^{\flat}$ =X 是光滑的，由于 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$(π*E′)→ $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}$(π*E′) 是单射，该断言由经典情形即可得出。

问题是严格的 ´étale 局部的，因此我们可以假设 X 是仿射的，并且存在一个严格的 ´étale 映射 X →$\mathbf{A}_{P,K}$。事实上，根据引理 2.2 我们可以将问题归约到 $K = \varnothing$ 这一情形。对于 P 的一个面 P，令 U_F 为 $\mathbf{A}_{P_F}$在 X 中的原像，并令 X_F 为 $\mathbf{A}_{F^{\mathrm{gp}}}$ 按 (2.1) 中的方式嵌入后的原像，因此

$$X^{\flat} = \mathbf{A}_P^{\flat} \times_{\mathbf{A}_P} X \simeq \bigsqcup_F X_F.$$

我们需要证明，对每个 X$_F$，E′ 的拉回都是正则的。取一个面 F ⊆P，并令 Z = X$_F$ 为相应的层。由于 X$_F$ ⊆U$_F$，我们可以用 U$_F$替换 X，因此不妨假设 Z 是 X 的闭子概形，由一个理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$定义。对于 n ≥0，令 Z$^{(n)}$ 为由理想 $\mathcal{I}^{n+1}$定义的闭子概形。

如命题 2.15的证明中所述，根据 Artin–Rees 引理，存在一个 $k \geq 0$ 以及一个满射

$$\mathrm{im}(E' \to E|_{Z^{(k)}}) \longrightarrow E'|_Z.$$

于是，我们可以将 X 替换为 $Z^{(k)}$，并将 E′ 替换为 $\mathrm{im}(E' \to E|_{Z^{(k)}})$。这样，我们就将问题归结为 X 具有常值对数结构的情形。

利用蛇引理应用于下图，我们可以将问题归结为 $E' = \mathcal{I}E$ 的情形。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}E' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E'/\mathcal{I}E' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E/\mathcal{I}E & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

然而，$\mathcal{I}E$ 本身是 $\mathcal{I} \otimes E$ 的一个商。由于正则对象的张量积仍是正则的，最终只需证明 $\mathcal{I}$ 作为 MIC(X/复数域) 中的一个对象是正则的。

为证明 $\mathcal{I}$ 是正则的，我们不妨假设 X 存在一个严格的 étale 映射 $X \to \mathbb{A}_{P,K}$，且 $\mathcal{I}$ 由 $\sqrt{K} = P \setminus P^\times$ 生成。因此，$\mathcal{I}$ 是 $\sqrt{K} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{P,K}}$ 的拉回，只需处理 $X = \mathbb{A}_{P,K}$ 和 $\mathcal{I} = \sqrt{K} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{P,K}}$。由于 P^{gp} 是自由的，我们可以写成 $P = P^\times \times P^\times$。于是，$\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{A}_{P,K}$ 中由 $P \setminus \{0\}$ 生成的理想的拉回，其中 K 是 K 在 P 中的像。这进一步归结为 $X = \mathrm{Spec}(P \to \text{复数域}[P]/(K))$ 的情形；但此时 X 是一个点，故由引理 4.3(c) 得证。

内部 HOM。与上面的证明一样，我们只需证明：若 E 和 F 是 MIC(X/复数域) 中的正则对象，且 $Z \subsetneq X$ 是一个闭对数分层，则 $\mathrm{Hom}(E,F)|_Z$ 是正则的。若 $X = Z$（即 X 是空心的），结论显然，因为 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^* \mathrm{Hom}(E,F)) \simeq \mathrm{Hom}(\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^* E), \varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^* F))$，这是由 π的平坦性得到的。一般情形下，由 Mittag–Leffler 性质（下文引理 4.6 取 $e = 0$），存在一个 $k \geq 0$，使得自然映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)|_Z \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E|_{Z^{(k)}}, F|_{Z^{(k)}})|_Z$$

是单射。因此，我们可以用 $Z^{(k)}$ 替换 X。在这种情况下，短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{j+1}F \longrightarrow \mathcal{I}^j F \longrightarrow \mathcal{I}^j F/\mathcal{I}^{j+1}F \longrightarrow 0$$

诱导出正合列

$$\mathrm{Hom}(E, \mathcal{I}^{j+1}F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, \mathcal{I}^j F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, \mathcal{I}^j F/\mathcal{I}^{j+1}F)$$

并通过对 j 进行归纳，将问题归结为 $\mathcal{I}F = 0$ 的情形。在这种情况下，$\mathrm{Hom}(E, F) = \mathrm{Hom}(E/\mathcal{I}E, F) = \mathrm{Hom}(E|_Z, F|_Z)$，于是问题归结为此前已处理过的 $X = Z$ 的情形。□

上述证明用到了交换代数中的以下引理。

引理 4.6. 设 A 是一个诺特环，$I \subsetneq A$ 是一个理想，E 和 F 是有限生成的 A-模。对于 $n \geq 0$，令 $A_n = A/I^{n+1}$，对于一个 A-模 M，令 $M_n = M \otimes_A A_n$。那么，对于每个 $e \geq 0$，存在一个 $k_e \geq e$，使得对于每个 $k \geq k_e$，态射

$$\mathrm{Hom}(E,F)_e \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_k, F_k)_e$$

（由限制映射 $\pi\colon \mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}(E_k,F_k)$ 诱导）是单射。

P屋顶。固定一个表示 $A^m \to A^n \to E \to 0$，使得 Hom(E,F) 是上同调模 of

$$0 \longrightarrow F^n \longrightarrow F^m$$

其中 $F^n \to F^m$ 由 $A^m \to A^n$ 的转置诱导（见 [26, Tag 09BB]），类似地，$\mathrm{Hom}(E_k, F_k)$ 是 $0 \to F_k^n \to F_k^m$ 的上同调模。根据 Mittag–Leffler 性质 [26, Tag 0EGU], , 存在一个 $k_e \geq e$，使得对于 $k \geq k_e$，存在一个 ψ_k，使下方的三角形交换

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Hom}(E_k, F_k) \\ & \overset{\pi}{\nearrow} & \downarrow \psi_k \\ \mathrm{Hom}(E, F)_k & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E, F)_e. \end{array}$$

将上述图与 A_e 张量化，表明 $\mathrm{Hom}(E, F)_e \to \mathrm{Hom}(E_k, F_k)_e$ 是一个分裂单射。 □

注4.7. 设 X 是 复数域 上的理想化光滑对数概形，E 是 MIC(X/复数域) 中的一个对象，U $\subseteq$X 是一个包含 E 的关联点的开子集。假设 $E|_U$ 是正则的。E 是否也必为正则?

以下给出了一个利用形式曲线芽检验正则性的实用判别准则。对于形如 T =谱(P $\xrightarrow{\varepsilon}$ 复数域((t))) 的空间，其中 P 为尖锐有限生成饱和幺半群，且 $\varepsilon(P \setminus \{0\}) = 0$，我们定义

$$\Omega^1_{T/\mathbf{C}} = \mathbf{C}((t))d\log(t) \oplus (P^{\mathrm{gp}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}((t))).$$

We 以显然的方式定义 MIC(T/复数域)，而“投影到复数域((t))d log(t)”定义了一个函子

$$\varepsilon^{\circledast}\colon \mathrm{MIC}(T/\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\mathbf{C}((t))/\mathbf{C})$$

，其目标为定义在复数域$((t))$ 上并配备了如下算子作用的有限维向量空间所组成的范畴:$-t\,d\,dt$，该作用满足莱布尼茨法则。如同 [6, 第二章，定´义 1.11], , 若 MIC(复数域((t))/复数域) 的对象 E 具有一个在 $t\,d\,dt$ 的作用下稳定的复数域$[\![t]\!]$-格，则称 E 为正则的。对于复数域上的理想化光滑对数概形 X，映射 γ: T $\to$X 诱导一个函子 γ^*: MIC(X/复数域) $\to$MIC(T /复数域)。

对于如上的 T =谱(P $\xrightarrow{\varepsilon}$ 复数域((t))) 以及复数域上的理想化光滑对数概形 X，若映射γ: T $\to$X 可分解为 T $\to$复数域 $\to$X，则称其为代数的，其中复数域 $\hookrightarrow$ $\overline{\text{复数域}}$ 是复数域上一维理想化光滑对数概形的良嵌入，且复数域 = 复数域 $\setminus$ {y}，其中 $\overline{t}$ 是 $\mathcal{O}_{\overline{C},\,y}$ 的局部参数（将 $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{C},\,y}$ 的分式域与复数域((t)) 等同），并且 $P \oplus \mathbf{N} \to \mathcal{O}_{\overline{C},\,y}$ 在 $p \neq 0$ 时将 (p, n) 映为 0，将 (0, n) 映为 t^n，是复数域处的一个局部图表，而 T $\to$复数域 由这些数据诱导。

命题 4.8. 设 X 是 复数域 C 上的理想化光滑对数概形。MIC(X/C) 中的对象 E 是正则的，当且仅当对于每个尖锐有限生成饱和幺半群 P 以及每个严格态射

$$f\colon \mathrm{Spec}(P \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{C}((t))) \longrightarrow X,$$

对象 $\varepsilon^{\circledast}$(f*E) 在 MIC(C((t))/C) 中是正则的。此外，只需对代数映射 f 检验此条件即可。

证明. 设 E $\in$MIC(X /C)。根据定义，E 正则，当且仅当 $X^{\#}$ 上的联络 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E)$ 正则。根据 [6, 第二章，Th´eor`eme 4.1], , 这当且仅当对于每个态射

$$g\colon \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}((s)) \longrightarrow \underline{X}^{\#},$$

拉回 $g^*(\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E))$ 是正则的，并且只需考虑按我们定义的“代数的”这类芽。根据 $X^{\#}$ 的定义，这样的映射对应于一个态射 f : 谱 C((s)) $\to$X 和一个 f $^*\mathcal{M}_X$ 的分裂 ε 。此外，我们有

$$g^*(\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*E)) \simeq \varepsilon^{\circledast}(f^*E).$$

设 h : 谱 复数域((t)) $\to$谱 复数域((s)) 是一个有限扩张，且 $h^*f^*\overline{\mathcal{M}}_X$为常值，因此 $h^*f^*\overline{\mathcal{M}}_X$有一个全局图表。那么 $\varepsilon^{\circledast}$(f*E) 是正则的，当且仅当 $h^*(\varepsilon^{\circledast}(f^*E))$ 也是正则的。□

命题 4.9. 设 X 是复数域上的理想化光滑对数概形，并设

$$f\colon \operatorname{Spec}(P \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{C}((t))) \longrightarrow X,$$

设其为严格态射，其中 P 是一个尖锐有限生成饱和幺半群。若底层的概形之间的映射可延拓至 Spec C[[t]],，则对于每个 E ∈MIC(X/C)，对象 $\varepsilon^{\circledast}(f^{*}E)$ 属于 MIC(C((t))/C)，且为正则。

证明。设 $\Delta = \operatorname{Spec} C[[t]]$ 和 $\Delta^{*} = \operatorname{Spec} C((t))$，并令 $j\colon \Delta^{*} \hookrightarrow \Delta$ 为包含映射。令 $\bar{f}\colon \Delta \to X$ 为 f 的一个延拓。经过 $x = \bar{f}(0)$ 的一个 ´étale 邻域后，我们可以假设 X 存在一个全局图表 $Q \to \mathcal{M}_X$。

令 $\mathcal{M}_{\Delta^{*}} = f^{*}\mathcal{M}_X$，其给定图表为 $P \to C((t))$；再令 $\mathcal{M}_{\Delta} = \bar{f}^{*}\mathcal{M}_X$，其自然图表为 $Q \to C[[t]]$。最后，令 $\mathcal{M}'_{\Delta} = j_{*}\mathcal{M}_{\Delta^{*}}$ 为推前对数结构。由于 $\mathcal{M}_{\Delta^{*}} = j^{*}\mathcal{M}_{\Delta}$，我们有单位映射

$$\mathcal{M}_{\Delta} \longrightarrow \mathcal{M}'_{\Delta},$$

因此，得到对数概形之间的映射

$$\bar{f}\colon (\Delta, \mathcal{M}'_{\Delta}) \longrightarrow (\Delta, \mathcal{M}_{\Delta}) \longrightarrow X,$$

其中第二个映射是严格的，第一个映射在 Δ^{*} 上是一个同构。因此，$\mathrm{MIC}(\Delta^{*}, \mathcal{M}_{\Delta})$ 中的对象 $f^{*}E$ 可扩张为 $\mathrm{MIC}(\Delta, \mathcal{M}'_{\Delta})$ 中的对象 $\bar{f}^{*}(E)$。

推前对数结构 $\mathcal{M}'_{\Delta} = j_{*}\mathcal{M}_{\Delta^{*}}$ 有图表 $\bar{\varepsilon}\colon P \oplus N \to C[[t]]$，它将 $(0,n) \mapsto t^{n}$ 映为自身，并将其他所有元素映为 0。这诱导出短正合列的一个分裂

$$0 \longrightarrow \Omega^{1}_{\Delta^{*}/\mathbf{C}}(\log 0) \longrightarrow \Omega^{1}_{(\Delta, \mathcal{M}'_{\Delta})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \otimes_{\mathbf{Z}} P^{\mathrm{gp}} \longrightarrow 0,$$

并且，和之前一样，得到一个函子

$$\overline{\varepsilon}^{\circledast}\colon \mathrm{MIC}(\Delta, \mathcal{M}'_{\Delta}) \longrightarrow \mathrm{MIC}(\Delta, j_{*}\mathcal{O}^{*}_{\Delta^{*}}).$$

此外，我们有

$$j^{*}(\overline{\varepsilon}^{\circledast}(\bar{f}^{*}E)) \simeq \varepsilon^{\circledast}(f^{*}E),$$

由此可知，$\varepsilon^{\circledast}(f^{*}E)$ 可扩张为形式圆盘上的一个对数联络。因此它是正则的。□

命题 4.8和 4.9 共同推出：

推论 4.10. 设 X 是复数域上的理想化光滑对数概形，其底层概形 X 在复数域上是真概形。那么 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域}) = \mathrm{MIC}(X/\text{复数域})$。

最后，我们转向讨论 X 具有局部常值对数结构时的一些基本上同调比较结果。

引理 4.11. 设 X 是复数域上的空心理想化光滑对数概形，E 是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域})$ 中的一个对象。那么，$H^{*}_{\mathrm{dR}}(X, E) \simeq H^{*}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}, E_{\mathrm{an}})$。

证明。 我们可以假设 $\overline{\mathcal{M}_X}$ 是常值，并且 X 有一个分裂 ε。根据命题 3.7，我们得到一个谱序列之间的映射

$$\begin{array}{ccc} H^{i}_{\mathrm{dR}}(\underline{X}, \varepsilon^{\circledast}E \otimes \wedge^{j}\Omega_X) & \Rightarrow & H^{i+j}_{\mathrm{dR}}(X, E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{ij}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ H^{i}_{\mathrm{dR}}(\underline{X}_{\mathrm{an}}, \varepsilon^{\circledast}E_{\mathrm{an}} \otimes \wedge^{j}\Omega_X) & \Rightarrow & H^{i+j}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}, E_{\mathrm{an}}). \end{array}$$

由于 $\wedge^i\Omega_X$是常值，每个 $\varepsilon^{\circledast}E \otimes \wedge^i\Omega_X$都是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C})$中的一个对象。因此，根据经典比较定理 [6, 第二章，第 ´定理 `6.2], ，这些映射 α_{ij} 都是同构，因此 α也是同构。 □

推论 4.12. 对于具有常值对数结构且 E 为正则的 X，有 $H^*_{dR}(X, E) \simeq H^*_{dR}(X_{an}, E_{an})$.

证明。 使用五引理以及扩张 $0 \to \mathcal{I}E \to E \to E/\mathcal{I}E \to 0$ 其中 $\mathcal{I}$ 是 X_{red} 在X 中的理想，并归纳地应用引理 4.11。 □

注 4.13. 使用 X # 以及函子 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*(-))$ 来研究 MIC(X/C) 的策略，同样适用于 X 上的相干对数 D- 模范畴（见注 3.6.5 ）。例如，如果 Z $\subsetneq$X 是一个闭子集，那么其在 [15] 中引入的对数维数 logdim(Z)等于 $\pi^{-1}(Z) \subsetneq X^{\#}$ 的维数。此外，利用引理 3.10 可以证明，$\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ 中的一个对象 M 是全纯的，当且仅当 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{X^{\#}})$ 中的对象 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*(M))$ 在经典意义下是全纯的。若 $\varepsilon^{\circledast}_{\mathrm{univ}}(\pi^*(M))$ 是正则全纯的，则称一个相干 $\mathcal{D}_X$-模 M 为正则全纯。话虽如此，除 $\mathcal{O}_X$-相干 $\mathcal{D}_X$-模（即 MIC(X/C) 中的对象）这一情形外，我们并未研究这一概念。

4.2. 存在定理

定理 4.14（存在定理）。设 X 是定义在复数域 C 上的理想化光滑对数概形。那么复合函子

$$\mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{E \mapsto E_{\mathrm{an}}} \mathrm{MIC}(X_{\mathrm{an}}/\mathbf{C})$$

是范畴等价。

证明。我们先证明该函子是全忠实的。对于 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}$(X/C) 中的对象 E 和 F，考虑对象 H $=$Hom(E, F)。由命题 4.5 可知它仍是正则的，并且有 Hom(E, F) $=H^0_{dR}$(X , H) 以及 Hom(E_{an}, F_{an}) $=H^0_{dR}$(X_{an}, H_{an})。因此，我们需要证明对于正则对象 H，有 H^0_{dR}(X , H) $\simeq H^0_{dR}$(X_{an}, H_{an})。为此，将命题 2.15 应用于 X 的对数分层，可将问题化归为 X 上的对数结构局部常值的情形。在这种情况下，应用推论 4.12 即可得出结论。

还需证明本质满射性。根据推论 4.4(b)，该断言在 ´上是关于 X 的严格 étale 局部性质。因此，根据定理 2.4 ，我们可以假设存在一个良好紧化 $X \hookrightarrow \overline{X}$。考虑以下范畴和函子的交换方形：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(\overline{X}/\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{MIC}(\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{MIC}(X_{\mathrm{an}}/\mathbf{C}) \end{array}$$

根据引理 4.10 和 GAGA，顶部函子是一个等价。根据命题 3.17，右侧函子是本质满射。因此，底部函子是本质满射。 □

作为证明的推论, 我们得到正则联络的另一个熟悉形式的刻画 s.

推论 4.15（正则性与 =对数可延拓性）。设 X 是一个定义在复数域 C 上的理想化光滑对数概形，E 是 MIC(X/C) 中的一个对象。以下条件等价：

（a）E 是正则的,

(b) 对于每个严格 ´étale 态射 f : U $\to$X 以及每个良好紧化 j : U $\hookrightarrow$U, ¯都存在一个 MIC(U/ ¯ C) 的对象 E, ¯ 使得 $j^*E \simeq f^*\overline{E}$,

(c) 存在一个严格 étale 覆盖 $\{f_i: U_i \to X\}_{i\in I}$、良好紧化 $j_i: U_i \to \overline{U}_i$，以及 $\overline{\mathrm{MIC}}(U_i/C)$ 的对象 $\overline{E}_i$，使得对于每个 $i \in I$，都有 $j_i^* \overline{E}_i \simeq f_i^* E$。

注 4.16. 是否可以用类似于 [6,第二章，定理 4.1(iii)] 的增长条件来刻画正则对数连接?

4.3. 比较定理

定理 4.17（比较定理）。设 X 是 复数域 上的理想化光滑对数概形，E 是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域})$ 中的一个对象。那么 $H^*_{\mathrm{dR}}(X, E) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}, E^{\mathrm{an}})$。

证明将依赖 Ogus 的两个结果的略微变体，并将其调整为适用于我们的良紧化概念。

定理 4.18（[24, 定理 3.4.9] 的变体）。设 $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ 是理想化光滑对数复解析空间的一个良嵌入。设 E 是 $\mathrm{MIC}(X/\text{复数域})$ 中的一个对象，并假设满足以下两个条件

(1) 对每个 $x \in \overline{X}$，指数集合 R_x（§3.3）中 E 在 x 处的无穷远处指数满足 $R_x \cap \mathcal{F}_x^{\mathrm{gp}} \subseteq \mathcal{F}_x$。

(2) $E \to j_* j^* E$ 是单射。

那么 $H^*_{\mathrm{dR}}(\overline{X}, E) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X, j^* E)$。

证明。与 [24], 中一样，我们可以化归为关于幺半群的类似命题。设 P 为一个尖锐有限生成饱和幺半群，且 $P \to P'$ 是关于面 $F \subseteq P$ 的局部化。设 V 为 L(P) 中的一个对象（例 3.14），并设 $V' = V \otimes_{\mathbf{C}[P]} \mathbf{C}[P']$。假设 (1) $V \to V'$ 是单射（即 V 是 F-挠无），且 (2) F^{gp}-分次的 $\mathbf{C}[F]$-子模 $\tilde{V} = \bigoplus_{\lambda \in F^{\mathrm{gp}}} V_\lambda$ 由分次位于 $-F \subseteq F^{\mathrm{gp}}$ 中的元素生成。我们需要的命题（它本身是 [24, 推论 1.4.6] 的一个变体）是关于群上同调的映射

$$H^*(\pi_1(P), V_0) \longrightarrow H^*(\pi_1(P), V_0')$$

是一个同构。正如 [24, 推论 1.4.6], 的证明所示，只需注意到实际上 $V_0 = V_0'$（[24, 推论 1.1.3] 的一个变体）。由假设 (1)，映射 $V_0 \to V_0'$ 是单射，因此我们需要证明其满射性。设 f 是 F 的一个面生成元，因此对每个 $x \in F$，都存在 $y \in F$ 和整数 $n \geq 0$，使得 $x + y = n f$。于是 $V' = V[1/f]$，将局部化写成余极限后，我们得到

$$V_0' = \varinjlim_n V_{nf}.$$

设 $v' \in V_0'$，并用某个 $n \geq 0$ 对应的元素 $v' \in V_{nf}$ 表示它。由假设 (2)，存在 $\tilde{V}$ 的齐次生成元 $v_1, \ldots, v_s$，使得 $v_i \in V_{-f_i}$，其中某个 $f_i \in F$。因此，我们可以写成 $v' = \sum g_i v_i$，其中 $g_i \in \mathbf{C}[F]_{nf+f_i}$。我们可以将 $g_i = \alpha_i$ 写成 $f^n f_i$，其中 $\alpha_i \in \mathbf{C}$，并令 $v = \sum \alpha_i f_i v_i \in V_0$。于是 $v' = f^n v$，因此 v' 和 v 在 V_0' 中的像相同。□

定理 4.19（[24, 定理 3.4.10]的变体）。设 $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上理想化光滑对数概形的良嵌入，且 E 是 $\mathrm{MIC}(X^{\mathrm{an}}/\mathbf{C})$ 的一个对象。记 $j_* j_m^*$ 为第二章 3.12] 中所述的亚纯截面函子。则包含映射

$$j_* j_m^* (E \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbf{C}}) \longrightarrow j_* j^* (E \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbf{C}})$$

是一个拟同构。

证明。 重复原证明，将其中使用的 [24,定理 3.4。9] 替换为定理4.18。 □

定理 4.17 的证明。由上同调下降可知，该命题在 X 上是严格 ´étale 局部的，因此我们可以假设 X 存在良好紧化 j : X →X。根据存在定理的推论 4.15，E 可延拓为 MIC^{reg}(X /复数域) =MIC(X/复数域) 中的一个对象。由于 j 是仿射的且 j_{an} 是 Stein，按照[6, 第二章，第 6 节。6] 中的论证，我们得到

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X,E) \simeq H^*(\overline{X}_{\mathrm{an}}, j_* j_m^*(E \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbf{C}})) \quad \text{and} \quad H^*_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}},E_{\mathrm{an}}) \simeq H^*(\overline{X}_{\mathrm{an}}, j_* j^*(E \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbf{C}})).$$

由此可应用定理 4.19得出结论。 □

4.4. 正则性定理

我们回顾相关背景下 Gauss–Manin 联络的 Katz–Oda 构造（例如参见[10]）。设 $f\colon Y \to X$ 是复数域$\mathbf{C}$上的理想化光滑对数概形之间的真光滑态射。我们有短正合列

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{X/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{Y/\mathbf{C}} \longrightarrow \Omega^1_{Y/X} \longrightarrow 0$$

由此我们在 $\Omega^q{}_{Y/\mathrm{C}} = \wedge^q \Omega^1_{Y/\mathbf{C}}$上得到一个递减滤过

$$K^r\Omega^q_{Y/\mathbf{C}} = \mathrm{im}\left(f^*\Omega^r_{X/\mathbf{C}} \otimes \Omega^{q-r}_{Y/\mathbf{C}} \to \Omega^q_{Y/\mathbf{C}}\right)$$

满足

$$\mathrm{gr}^r\Omega^q_{Y/\mathbf{C}} = K^r\Omega^q_{Y/\mathbf{C}}/K^{r+1}\Omega^q_{Y/\mathbf{C}} \simeq f^*\Omega^r_{X/\mathbf{C}} \otimes \Omega^{q-r}_{Y/X}.$$

设 E 是 MIC(Y /复数域) 中的一个对象。那么对每个 r ≥0，E ⊗K$_r\Omega^\bullet_{Y/\mathbf{C}}$是 E ⊗$\Omega^\bullet_{Y/\mathbf{C}}$ 的子复形，并且

$$\mathrm{gr}^r(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/\mathbf{C}}) \simeq f^*\Omega^r_{X/\mathbf{C}} \otimes (E \otimes \Omega^{\bullet-r}_{Y/X}).$$

特别地，我们有一个复形的短正合列

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{X/\mathbf{C}} \otimes (E \otimes \Omega^{\bullet-1}_{Y/X}) \longrightarrow \frac{E \otimes \Omega^\bullet_{Y/\mathbf{C}}}{E \otimes K_2\Omega^\bullet_{Y/\mathbf{C}}} \longrightarrow E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X} \longrightarrow 0.$$

应用 R f$_*$ 和投影公式，我们得到作为连接同态的

$$\nabla_{\mathrm{GM}}\colon R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}) \longrightarrow R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}) \otimes \Omega^1_{X/\mathbf{C}}.$$

与经典情形一样，可以证明这个联络是可积的，从而使 R^n f$_*$(E ⊗$\Omega^\bullet_{Y/X}$) 成为 MIC(X /复数域) 中的一个对象。

类似的构造适用于理想化光滑对数复解析空间之间的光滑真态射，特别是 f$_{\mathrm{an}}$。由此，我们得到 MIC(X$_{\mathrm{an}}$/ 复数域) 中的一个对象 R^n f$_{\mathrm{an},\ *}$(E^{an} ⊗ $\Omega^\bullet_{Y_{\mathrm{an}}/X_{\mathrm{an}}}$)。我们有一个比较态射

$$(R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}))_{\mathrm{an}} \longrightarrow R^n f_{\mathrm{an},*}(E_{\mathrm{an}} \otimes \Omega^\bullet_{Y_{\mathrm{an}}/X_{\mathrm{an}}}) \tag{4.1}$$

由于 f 是真态射，该态射是一个同构。

注 4.20。 Aaron Gray 学位论文的主要结果 [8] （未发表）断言，在某些假设下，高阶直接像的构造与 Ogus 的黎曼–希尔伯特对应相容 $\mathcal{V}$（定理 3.12）。更确切地说，对于光滑对数复解析空间之间的真且光滑态射

$f: Y \to X$，使得映射 $f^*\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_Y \to \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_X$ 是单射且其余核无挠，则交换图中的两个复合映射之间存在自然同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MIC}(Y/\mathbf{C}) & \xrightarrow[\sim]{\nu_Y} & L(Y) \\ {\scriptstyle R^n f_*((-)\otimes\Omega^\bullet_{Y/X})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^n f_*^{\Lambda}} \\ \mathrm{MIC}(X/\mathbf{C}) & \xrightarrow[\nu_X]{\sim} & L(X). \end{array} \tag{4.2}$$

其中函子 $R^n f_*^{\Lambda}$ 按如下方式构造。回顾（定义 3.11），$L(Y)$ 中的对象 V 是一个 Λ_Y-分次复数域 ${}^{\log}Y$-模，满足某些条件。通过复数域 ${}^{\log}X \to f\log_* $ 复数域 ${}^{\log}Y$，层 $R^n f\log_* V$ 是一个 $f_*\Lambda_Y$-分次复数域 ${}^{\log}X$-模。利用映射 $\iota\colon \Lambda_X \to f\log_* \Lambda_Y$，我们定义 Λ_X-分次复数域 ${}^{\log}X$-模 $R^n f_*^{\Lambda} V$，使得 $(R^n f_*^{\Lambda} V)_\lambda = (R^n f\log_* V)_{\iota(\lambda)}$，其中 Λ_X 的局部截面为 λ。于是 $R^n f_*^{\Lambda} V$ 是 $L(X)$ 中的一个对象。

最近，Gray 的结果已推广到对数 D-模，见 Koppensteiner [14, 命题 6。4]。

下文陈述的正则性定理断言，在 E 正则的假设下，$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 具有正则性。该定理以如下半稳定约化的对数版本为前提。我们希望当前的方法 [22, 2, 27] 足以解决这一问题。

猜想 4.21（空心曲线上的对数半稳定约化）。设 X 是复数域 $\mathbf{C}$ 上维数为 ≤ 1 的空心理想化光滑对数概形，且 $Y \to X$ 是光滑、真且正合的态射。那么，可能需要先将 X 换成一个 Kummer étale 覆盖，之后存在一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & \overline{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & \overline{X} \end{array}$$

其中 $X \hookrightarrow \overline{X}$ 和 $Y \hookrightarrow \overline{Y}$ 是良好紧化（定义 2.3），且 $Y \to X$ 光滑。

定理 4.22（正则性定理）。设 $f: Y \to X$ 是定义在复数域上的理想化光滑对数概形之间的真、光滑且正合的态射，复数域并设 E 是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(Y/\text{复数域})$ 中的一个对象。假设猜想 4.21 成立。则对所有 n，$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 都是 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域})$ 中的对象。≥ 0。

证明。步骤 1——将问题约化为对数结构为常值的 X。令 $V^n = R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$。我们需要证明，对于每个对数分层 $Z \subseteq X$（即 $X^\flat$ 的一个连通分支），限制 $V^n|_Z$ 都是正则的。由于 Z 在 X 中是局部闭的，我们可以将 X 替换为一个仿射开子集，使得 $Z \cap X$ 是闭的。令 $\mathcal{I}$ 为闭浸入 $Z \hookrightarrow X$ 的理想，并令 $Z^{(k)} = V(\mathcal{I}^{k+1})$ 为 Z 的 k 阶加厚，并令

$$V^{n,k} = R^n (f|_{Z^{(k)}})_* (E|_{f^{-1}(Z^{(k)})} \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}).$$

与 [9, §4.1], 一样，相于 $\mathcal{O}_X$-模 V^n 的逆系统满足 Mittag–Leffler 性质。若令 $R_k = \ker(V^n \to V^{n,k})$，则子模 $\{R_k\}$ 定义了 V^n 上的 $\mathcal{I}$-进拓扑。特别地，当 k 足够大时，有 $\mathcal{I}V^n \supseteq R_k$，因此存在一个分解

$$\begin{array}{ccccc} V^n & \twoheadrightarrow & V^n/R_k & \hookrightarrow & V^{n,k} \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & V^n/\mathcal{I}V^n & = & V^n|_Z. \end{array}$$

因此 $V^n|_Z$ 是 $V^{n,k}$ 的子商，根据命题 4.5，只需证明 $V^{n,k}$ 是正则的。因此我们可以用 $Z^{(k)}$ 替换 X。

步骤 2 — 化归到 X 为空心。设 X 具有局部常值对数结构，且 Z $=X_{\mathrm{red}}$ 是 X 的最大空心子概形，由理想 $\mathcal{I}$ 切出。假设断言对 X $=$ Z 成立。我们对 m ≥ 0 使用归纳法来证明：若 E 被 $\mathcal{I}^{m+1}$ 消去，则对所有 n ≥ 0，高阶直接像 $R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 都是正则的。基础情形 n $= 0$ 对应于支集在 Z 上的 E，这由 X $=$ Z 的情形推出。对于归纳步骤，将 $R^n f_*((-) \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 作用于 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(Y/C)$ 中的短正合列，即可得到长正合列。

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}E \longrightarrow E \longrightarrow E/\mathcal{I}E \longrightarrow 0.$$

步骤 3 — 确保基变换。假设 X 是空心的。由于 X 是约化的，存在一个稠密开子集 U $\subseteq$ X，在其上层 $R^j f_*(E \otimes \Omega^i_{Y/X})$ 对所有 i, j ≥ 0 都是局部自由的（因此其构造与基变换相容）。由谱序列

$$E_1^{ij} = R^j f_*(E \otimes \Omega^i_{Y/X}) \quad \Rightarrow \quad R^{i+j} f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}),$$

我们推得，$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 的构造与沿严格态射的基变换相容$X' \to X$满足以下条件：存在X'理想化光滑于复数域，且其像包含于$(X' \to X) \subseteq U$。回忆推论 4.4(b) 表明，为证明该断言，我们可以用一个稠密开子集替换X。因此，我们可以假设基变换性质对$U = X$成立。

步骤 4 — 化归到 X 为曲线的情形。假设X 是空心的，且$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 的构造如上所述与基变换相容。根据命题 4.8 的判别准则，只需证明：若 γ: 复数域 $\to X$ 是一个严格映射，其中C 是光滑曲线，则$\gamma^*(R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}))$ 对所有 $n \geq 0$都是正则的。由基变换性质可得

$$\gamma^*(R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})) \simeq R^n (f_C)_*(E_{Y_C} \otimes \Omega^\bullet_{Y_C/C}).$$

因此，如果该断言对所有这样的复数域 $\to$ X 都成立，那么它对 X 也成立。

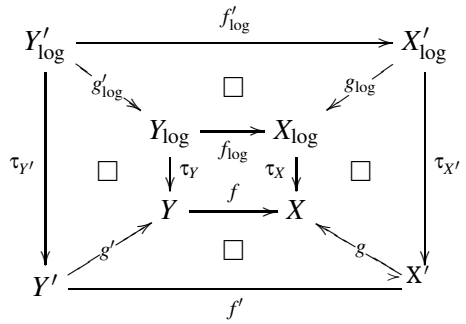
步骤 5 — 半稳定约化。假设 X 是一条空心曲线。根据猜想 4.21，经过一个 Kummer ´etale 覆盖后，映射 Y $\to$X 可延拓为良好紧化之间的光滑态射 f : Y $\to$X。根据推论 4.15，E 可延拓为 $\mathrm{MIC}^{\mathrm{reg}}(Y/C)$ 中的一个对象 E。由于 Y $=$Y $\times_{\overline{X}}$X，我们有 $R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X}) \simeq (R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{\overline{Y}/X}))|_X$。因此，$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 可延拓到紧化 X，故为正则（再次应用推论 4.15）。□

注 4.23. 在经典正则性定理的情形下，$R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 的构造也与基变换 [6, 第二章，命题 6。14]相交换。对于复数域上的真光滑态射（其源和目标是光滑对数概形），一般而言这并不成立，以下例子便说明了这一点。

设 X $= \mathbb{A}^2_N$，令 f : Y $\to$X 为原点 P 的爆破。令 D $\subset$Y 为例外除子，并设 E $= \mathcal{O}_Y$(D)。它继承了一个对数联络，因为其对偶对象 $\mathcal{I}_D$ 是 MIC(Y /复数域) 中 $\mathcal{O}_Y$的子对象。由于 f 是 ´etale，我们有 $\Omega^\bullet_{Y/X} = \mathcal{O}_Y$，且 $R^0 f_*(E \otimes \Omega^1_{Y/X}) = f_* \mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X$。然而，我们有 $H^0(f^{-1}(P), E) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$, 这与沿严格包含 P $\hookrightarrow$X 的基变换相矛盾。

然而，假设映射 $f^*\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_X \to \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_Y$ 是单射且其余核无挠，我们可以利用 Gray 的结果 [8] （注 4.20）以及拓扑空间映射的适当基变换，沿严格映射 g : X′ $\to$X 证明 $R^n f_*(E \otimes \Omega^\bullet_{Y/X})$ 的基变换性质，如下所示。由于（4.1）是同构，只需在解析情形下证明基变换性质，因此从现在起改变记号，设 Y $\to$X 是满足关于 f $^*\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_X \to \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_Y$的假设的理想化光滑复解析空间之间的光滑真态射，且 g : X′ $\to$X 是理想化光滑对数复解析空间之间的严格映射

。我们令 $Y' = Y \times_X X'$。由于 g 是严格映射，下图中标记为 □的四个方块是拓扑空间之间的笛卡尔方块。



此外，我们有复数域$^{\log}{}_{Y'} = g^*_{\log}$复数域$^{\log}{}_{Y}$，并且复数域$^{\log}{}_{X'} = g^*_{\log}$复数域$^{\log}{}_{X}$（因为 X 和 X′ 是空心的）。因此，函子 $g^*\colon L(Y) \to L(Y')$ 和 $g^*\colon L(X) \to L(X')$ 就是层论拉回。由适当基变换应用于 $\tau_X f_{\log}$，对于 L(Y) 中的对象 V，我们有

$$g^*_{\log}(Rf^{\Lambda}_* V) \xrightarrow{\sim} Rf'^{\Lambda}_*(g'^*_{\log} V). \tag{4.3}$$

因此，对于 MIC(Y /复数域) 中的对象 E，基变换映射可分解为一串同构

$$\begin{array}{ccccccc}
g^* R^n f_*(E \otimes \Omega^{\bullet}_{Y/X}) & \xrightarrow[\sim]{(4.2)} & g^* \mathcal{V}_X^{-1} R^n f^{\Lambda}_* \mathcal{V}_Y(E) & \xrightarrow[\sim]{(3.1)} & \mathcal{V}_{X'}^{-1} g^*_{\log} R^n f^{\Lambda}_* \mathcal{V}_Y(E) \\
\downarrow & & & & \wr \downarrow (4.3) \\
R^n f'_*(g'^* E \otimes \Omega^{\bullet}_{Y'/X'}) & \xleftarrow[\sim]{(4.2)} & \mathcal{V}_{X'}^{-1} R f'^{\Lambda}_* \mathcal{V}_{Y'} g'^* E & \xleftarrow[\sim]{(3.1)} & \mathcal{V}_{X'}^{-1} R f'^{\Lambda}_* g'^*_{\log}
\end{array}$$

5. 连接与局部系统

定义 5.1. 复数域上的理想化光滑对数概形或对数复解析空间 X 若为 nc（正规交叉）类型，则其 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 的茎是自由幺半群。

设 X 是正规交叉类型的对数复解析空间。对于 L中的一个对象 V(X) 以及 $x \in X$，记$R_x \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{X,\,x} \otimes \mathbf{C}$ 为 V 在 x [24, 定义 2.1.1]处的指数集合。选取一个同构 $\overline{\mathcal{M}}_{X,\,x} \simeq \mathbf{N}^{r_x}$后，我们可以将 R_x 视为 $\mathbf{C}^{r_x}$的子集，该子集在坐标置换意义下确定。

定义 5.2. 设 X 是正规交叉类型的对数复解析空间，且设 $\tau\colon C/Z \to C$ 是投影 $C \to C/Z$ 的一个截面。若 L(X) 中的对象 V 满足 τ，则称其为适配的

(1) 对每个 $x \in X$，V 在 x 处的指数集合 R_x 包含于 $\mathrm{im}(\tau)^{r_x}$，并且

(2) V 是作为 $\mathbf{C}^{\log}{}_X$ 上的模的局部自由模。

记 $L^{\tau}(X)$ 为 L(X) 中由适配对象构成的全子范畴。

在空间 $X^{\log}$ 上，我们有一个环层满射

$$\mathbf{C}^{\log}_X = \mathbf{C}[-\tau^* \overline{\mathcal{M}}_X]/(-K_X) \longrightarrow \mathbf{C}$$

它将 $\overline{\mathcal{M}}_X$ 的非零元素映射为零。这定义了一个函子

$$V \mapsto \underline{V} = V \otimes_{\mathbf{C}^{\log}_X} \mathbf{C}$$

从范畴 L(X) 到 $X^{\log}$ 上取值于复数域向量空间的对数可构造层范畴，并将局部自由对象映为局部常值层。

定理 5.3. 设 X 是正规交叉类型的对数复解析空间，且 τ: C/Z → C 是投影 C →C/Z 的一个截面。

(a) 函子 V ↦V 诱导出范畴等价

$$L^{\tau}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LocSys}_{\mathbf{C}}(X_{\log}).$$

(b) 若 τ(0) = 0，则对于 L^τ(X) 中的每个对象 V，映射 $V_0 \hookrightarrow V \to V$ 诱导一个同构。

$$H^*(X_{\log}, V_0) \xrightarrow{\sim} H^*(X_{\log}, \underline{V}).$$

证明。 我们描述逆函子。设 W 是 $X^{\log}$ 上的一个复局部系统。我们令 $V = W \otimes_{\mathbf{C}}$ 复数域$^{\log} X$。这是一个局部自由的 复数域$^{\log} X$ -模，满足定义 3.11 中的条件 (1)、(2) 和 (3)。为了使其成为 L^τ(X) 的一个对象，我们需要赋予它一个满足定义 3.11 中的条件 (4) 以及定义 5.2 中条件 (2) 的 Λ_X-分次。设 x ∈ X^log，并选取一个同构 $\overline{\mathcal{M}}_{X,\tau(x)} \simeq \mathbf{N}^{r_x}$。茎 W_x 是一个表示，得自</final

$$\pi_1(\tau^{-1}(\tau(x)), x) = \mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{gp}}_{X,\tau(x)}, \mathbf{Z}(1)) = \mathbf{Z}(1)^{r_x}.$$

令 $W_x = \bigoplus W_{x,\chi}$ 为 W_x 按广义特征空间的分解，直和取遍

$$\chi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\tau^{-1}(\tau(x)), x), \mathbf{C}^{\times}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(1)^{r_x}, \mathbf{C}^{\times}) = (\mathbf{C}/\mathbf{Z})^{r_x}.$$

因此 $V = \bigoplus_{\chi} V\chi$，其中 $V\chi = W_{\chi} \otimes_{\mathbf{C}} C^{\log} X$。我们有 $\Lambda_{X,x} = C^{r_x}$，并在 Vχ 上赋予 C^{r_x}-分次，其中 $w \otimes 1$ 的次数为 τ(χ)，这里 τ: $(C/Z)^{r_x} \to C^{r_x}$ 是由 τ 诱导的映射。显然，此分次与 $\overline{\mathcal{M}}_{X,\tau x}$ 的生成元选择无关，满足所需的两个条件，并且对所有 x ∈X^log，V_x 上的 $\Lambda_{X,x}$-分次会给出 V 上的一个 Λ_X-分次。显然，V = W。此外，与 W = V 相关联的对象是 V，因为 V 由 $\bigoplus_{\lambda \in \underline{\mathrm{im}}(\tau)^{r_x}} V_{\lambda} = W$ 自由生成（参见引理 3.18 的证明）。

对于第二个断言，只需验证映射 $R\tau_{X,*}V_0 \to R\tau_{X,*}V$ 是一个拟同构。根据适当基变换，只需证明对每个 x ∈X，都有

$$H^*(\tau^{-1}(x), V_0) \xrightarrow{\sim} H^*(\tau^{-1}(x), \underline{V}).$$

选取一个同构 $\mathcal{M}_{X,\ x} \simeq \mathbf{N}^{r_x}$，并按照上一段将 $V = \bigoplus_{\chi} V\chi$ 写出。于是，对于一个基点 x′ ∈ τ^{-1}(x)

$$H^*(\tau^{-1}(x), \underline{V}_{\chi}) = H^*(\mathbf{Z}(1)^{r_x}, V_{\tau(\chi),x'}) = 0 \quad \text{for } \chi \neq 0$$

（参见[24,命题 1.4 的最后一条断言。3]）。因此

$$H^*(\tau^{-1}(x), \underline{V}) = H^*(\tau^{-1}(x), \underline{V}_0) = H^*(\tau^{-1}(x), V_{\tau(0)}) = H^*(\tau^{-1}(x), V_0). \qquad \square$$

推论 5.4. 设 X 是 复数域 C 上的正规交叉类型对数概形，且 τ: C/Z → C 是投影 C →C/Z 的一个截面。记 $\mathrm{MIC}^{\tau}_{\mathrm{reg}}(X/C)$ 为 $\mathrm{MIC}_{\mathrm{reg}}(X/C)$ 的全子范畴，它由作为 $\mathcal{O}_X$-模局部自由且其指数 [24, 定义 2.1.1] 属于 τ 的像的对象组成。

(a) 那么存在一个范畴等价

$$E \mapsto \underline{\mathcal{V}}(E) \quad : \quad \mathrm{MIC}^{\tau}_{\mathrm{reg}}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LocSys}_{\mathbf{C}}(X_{\log}).$$

(b) 若 τ(0) = 0，则对于 $\mathrm{MIC}^{\tau}_{\mathrm{reg}}$(X/复数域) 的每个对象 E，我们有

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X, E) \simeq H^*(X_{\log}, \underline{\mathcal{V}}(E)).$$

提醒读者，定理 5.3 和推论 5.4 中描述的两个函子均不与张量积相容（事实上，子范畴 $L^{\tau}(X)$ 和 $\mathrm{MIC}^{\tau}_{\mathrm{reg}}(X/\text{复数域})$ 在张量积下并不封闭）。

参考文献

[1] Piotr Achinger。《刚性解析簇上的黎曼–希尔伯特对应与霍奇结构变分》。编写中，2023年。[2] Karim Adiprasito、Gaku Liu 和 Michael Temkin。《特征零下的半稳定约化》。arXiv:1810:03131，2018年。[3] Michael Artin、Alexander Grothendieck 和 Michel Raynaud。《群概形》。II：乘法型群及一般群概形的结构。《数学讲义》，第152卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1970年。由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主编的《玛丽·诺埃尔·博伊斯代数几何研讨班 1962/64》（SGA 3）。[4] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley Publishing Co.，马萨诸塞州雷丁—伦敦—安大略省唐米尔斯，1969年。[5] P. Deligne。《坦纳基范畴》。载于《格罗滕迪克纪念文集》第II卷，《数学进展》第87卷，第111–195页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，1990年。[6] Pierre Deligne。《正则奇点处的微分方程》。《数学讲义》，第163卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1970年。[7] Renée Elkik。《亨泽尔环上系数方程的解》。《法国高等师范学校科学年刊》（第4辑），6:553–603（1974），1973年。[8] Aaron Paul Gray。《对数黎曼–希尔伯特对应的函子性》。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2007年。学位论文（哲学博士）——加州大学伯克利分校。[9] A. Grothendieck。《代数几何基础》。III.《凝聚层的上同调研究》。I。《高等科学研究所数学出版物》，（11）：167，1961年。[10] Luc Illusie、Kazuya Kato 和 Chikara Nakayama。《拟幺幂对数黎曼–希尔伯特对应》。《东京大学数学科学杂志》，12(1):1–66，2005年。[11] Masaki Kashiwara。《全纯系统的黎曼–希尔伯特问题》。《数学科学研究所刊物》，20(2):319–365，1984年。[12] Kazuya Kato。《Fontaine-Illusie 对数结构》。载于《代数分析、几何与数论》（马里兰州巴尔的摩，1988年），第191–224页。约翰斯·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，1989年。[13] Kazuya Kato 和 Chikara Nakayama。《复数域上对数概形的对数贝蒂上同调、对数étale 上同调和对数德拉姆上同调》。《古代数学杂志》，22(2):161–186，1999年。[14] Clemens Koppensteiner。《对数 D-模的德拉姆函子》。《精选数学》（新辑），26(3)，2020年。[15] Clemens Koppensteiner 和 Mattia Talpo。《全纯与每循环对数 D-模》。《数学进展》，346:510–545，2019年。[16] Adrian Langer。《正特征下李代数胚上的半稳定模》。《数学文献》，19:509–540，2014年。[17]Adrian Langer。《正特征下正规簇上的 Bogomolov 不等式与希格斯层》。arXiv:2210.08767，2022年。[18] Adrian Langer。《正特征下的邻近循环与半正性》。《欧洲数学会杂志》（JEMS），24(11):3829–3872，2022年。[19] Juri I. Manin。《福克斯模空间》。《比萨高等师范学校年刊》C类科学（第3辑），19:113–126，1965年。[20] Z. Mebkhout。《另一种范畴等价》。《组合数学》，51(1):63–88，1984年。[21] James S. Milne。《étale 上同调》。《普林斯顿数学丛书》，第33卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1980年。[22] Alexander E. Motzkin 和 Michael Temkin。《厚对数点上的半稳定约化》。arXiv:2204.09318，2022年。[23] Arthur Ogus。《具有常值对数结构的概形上的 F-晶体》。《组合数学》，97(1-2):187–225，1995年。纪念 Frans Oort 的专刊。[24] Arthur Ogus。《论对数黎曼–希尔伯特对应》。《数学文献》（特刊）：655–724，2003年。纪念 Kazuya Kato 五十寿辰。[25] Arthur Ogus。《对数代数几何讲义》，剑桥高等数学研究丛书第178卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[26] Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu。[27] Jarosław Włodarczyk。《除环面化轨迹外的函子性消解》。环面紧化。arXiv:2007.13846，2020年。

波兰科学院数学研究所，波兰华沙 Śniadeckich 街8号，邮编00-656

电子邮箱地址：pachinger@impan.pl