arXiv:2304.01136v1 [physics.flu-dyn] 3 Apr 2023

通过狭窄水平鳍片抑制快速旋转瑞利–B´énard对流中的壁面模态

Louise Terrien* 和 Benjamin Favier†*Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille, France*

Edgar Knobloch‡*Department of Physics, University of California at Berkeley, Berkeley, California 94720, USA*（日期：2023年4月4日）

快速旋转瑞利–B´énard对流的热输运对许多地球物理流动具有根本重要性。沿垂直壁面发展的强韧壁面模态会显著扰动热通量，妨碍实验室测量。我们表明，沿垂直壁面设置狭窄水平鳍片可有效抑制壁面模态，确保在地转态下，其对整体热通量的贡献与主体对流相比可忽略不计，从而为旋转对流中与地球物理相关状态的新实验研究铺平道路。

地转湍流对满足地转平衡的快速旋转流动具有根本重要性。这种状态可在实验室实验中实现，实验通常在高而细的圆柱体中进行：圆柱体较高是为了达到较高的瑞利数，较细则是为了降低用于衡量离心效应的弗劳德数 [1–5]。这些实验深受局限于垂直边界处的强韧壁面模态困扰 [6–9]。在细圆柱体中，这些模态会污染主体热通量测量 [10–15] ，从而削弱实验室研究地转湍流的能力。

在流体力学中，常利用固体边界的形状和粗糙度 [16] 来控制或延迟不理想的分岔（或促进理想的分岔），例如泰勒-库埃特流 [17–19] 或瑞利-贝纳德对流 [20–23]。遗憾的是，在流动中插入垂直隔板 [9],无法消除壁面模态，这一特性令人联想到拓扑保护边缘态 [24–27]。在本研究中，我们表明，水平障碍物则不然。我们的详细结果表明，沿侧向边界插入狭窄的水平鳍片可以有效抑制壁模态，从而使实验室研究一项关键的地球物理过程成为可能。

我们考虑一个置于矩形箱体内的不可压缩流体，其运动黏度 ν 和热扩散率 κ 均为常数，箱体尺寸为 $L_x \times L_y \times H$，底部加热、顶部冷却。两端的温度底部和顶部固定，垂直于 x轴的垂直壁面为绝热边界；所有壁面均不可穿透且满足无滑移条件。区域在y （或方位角）方向上周期延拓，系统以恒定角速度围绕 z轴旋转，$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e_z}$。重力方向向下， $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e_z}$。采用液体的实验室实验通常可由 Boussinesq 近似很好地描述，该近似假设除浮力项外密度恒定。

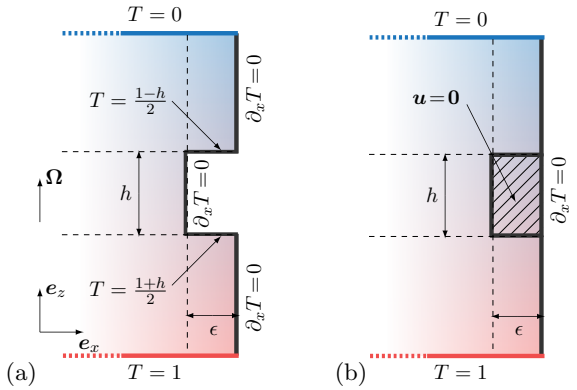


图 1. 区域在 (x, z) 平面上的横截面，聚焦于区域的一侧。所有边界均为无滑移边界，并在 y 方向上采用周期性边界条件。(a) 施加温度的屏障：所有垂直边界均为绝热边界，两个水平边界上的温度设为与平衡背景中的温度相同。(b) 导热屏障：外侧垂直边界为绝热边界，但热量可以通过屏障扩散，其扩散率与液体中的扩散率相同。

以 $1/(2\Omega)$为时间单位、以深度 H 为长度单位，无量纲方程为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p - \boldsymbol{e_z}\times\boldsymbol{u} + \frac{RaE^2}{Pr}T\boldsymbol{e_z} + E\nabla^2\boldsymbol{u} \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \frac{E}{Pr}\nabla^2 T, \quad (3)$$

其中， $\boldsymbol{u}$ 为速度， T为温度， p 为压力。忽略离心效应 [28]。该系统由三个无量纲参数表征：瑞利数 $Ra = \alpha g \Delta T H^3/(\nu\kappa)$、埃克曼数 $E = \nu/(2\Omega H^2)$和普朗特数 $Pr = \nu/\kappa$。其中， α 为热膨胀系数， ΔT 为流体层两侧施加的温差。下文中设定 $Pr = 1$。

我们通过沿两侧垂直

* louise.terrien@ens-paris-saclay.fr
† benjamin.favier@cnrs.fr
‡ knobloch@berkeley.edu

壁面设置相同的水平屏障或翅片，丰富了这一原本经典的问题。这些障碍物沿 y 方向保持不变，具有矩形横截面，水平宽度为 ϵ，垂直范围为 h，并以中高处 $z=1/2$ 为中心。见图 1。

我们考虑障碍物上的两种边界条件。第一种情况下，垂直侧面为绝热边界，水平侧面则保持在与局部平衡剖面$T(z)=1-z$相同的固定温度。对于一个高度为 h、以 $z=1/2$为中心的障碍物，上表面的指定温度为 $T=(1-h)/2$，下表面的指定温度为 $T=(1+h)/2$ [图1(a)]。虽然从实验角度来看并不现实，但这是一个适定问题，可防止侵入体周围形成斜压流（若障碍物完全绝热，则会形成斜压流），并提供一个一致的稳定平衡态，以便研究其周围的扰动。第二种障碍物会传导热量，我们在原侧壁上施加绝热边界条件 [图1(b)]。为防止斜压流出现，我们假设障碍物内部的热扩散率与其周围流体的热扩散率相同。无论哪种情况，斜压流的存在都会使分析复杂化，但不会定性地改变我们的结论 [29]。我们在此提出的简单问题是：对于给定的 E 和 Ra，哪些h 和 ϵ 取值会抑制壁模态?

我们使用谱元代码 Nek5000[30] [31] 求解方程（1）—（3）。网格最多由 17280 个六面体单元组成，多项式阶数最高取 $N=13$，并进行去混叠。为准确解析埃克曼层（水平边界附近）和壁面模态（垂直边界附近），我们对区域的水平边界（以及垂直边界）附近进行了网格加密。对于给定的单元数，通过逐步提高多项式阶数来检验结果的数值收敛性。尽管我们的一些结果涉及扰动的指数增长率，方程仍作为初值问题求解。对于像我们这样复杂的区域，这种方法是合适的，因为同一过程也能让我们研究系统的非线性乃至湍流状态。

我们首先将埃克曼数固定为 $E=10^{-4}$，该值足够小，能够清楚地区分壁面模态与常规主体对流。瑞利数取壁模起始临界值的两倍，$Ra=6.8\times10^5\approx2Ra_c^{\mathrm{wall}}$其中 Ra_c^{wall} 是壁面模态首次出现时的临界 Ra [32, 33]。周期为

y 方向选取为无障碍物情况下线性理论预测的最不稳定波长的两倍，以此权衡精度与数值计算成本。我们已确认，增大 L_x 并不会显著影响估算的增长率。两侧壁之间的距离约为壁面模态典型宽度的 20 倍 [32], ，以确保两侧的壁面模态不会相互作用。模拟参数汇总于 [29]。

对于由 h 和 ϵ定义的给定障碍物形状，我们从静止状态开始模拟，并在原本呈线性的温度背景中加入一个无穷小扰动。经过短暂的瞬态过程后，动能随时间呈指数增长，我们测量相应的增长率。我们系统地检查增长模态是否确实对应于附着在每个侧壁上的壁模态。我们针对许多不同的 h 和 ϵ 值重复模拟，以找到区分增长解与衰减解的临界曲线。两种障碍物类型的结果均见图 2。在这两种情况下，我们都发现，当 ϵ足够大时，壁模态可以得到抑制。唯一的例外是非常高的障碍物，$h\to1$；此时壁模态实际上沿障碍物壁面发展，而不是沿区域的外边界发展。有趣的是，对于两种边界条件，当 $h\to0$时，抑制壁面模态所需的临界宽度 ϵ_c 趋于一个常数。

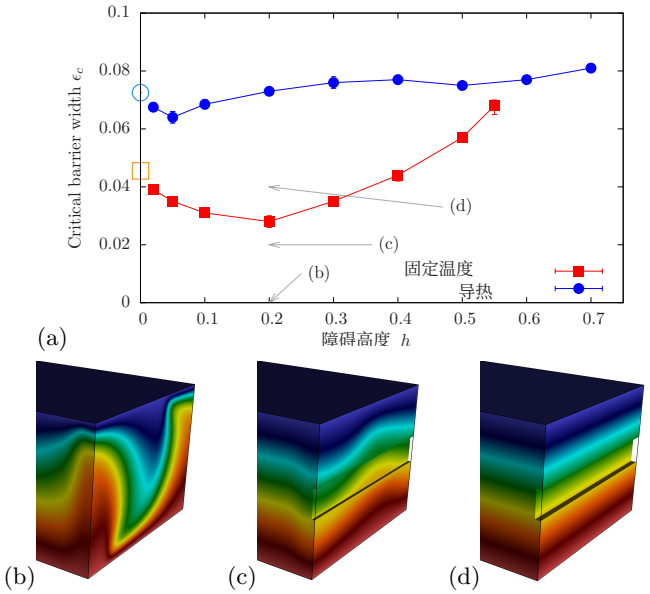


图 2. (a) 临界障碍宽度 ϵ_c 随障碍高度 h 的变化，适用于 $E=10^{-4}$ 和 $Ra=2Ra_c^{\mathrm{wall}}\approx6.8\times10^5$。底排展示了温度场的侧视图，分别对应 (b) 无障碍物情况、(c) $h=0.2$ 和 $\epsilon=0.02$，以及 (d) $h=0.2$ 和 $\epsilon=0.04$。这三种情况均在 (a) 中用箭头标出。

为进一步简化系统，我们考虑一个无限薄的障碍物 $h=0$。数值上，这是通过在流体区域内的谱元之间施加内部边界条件来实现的。在所有情况下，我们都在该内部边界上施加无滑移边界条件。对于温度，我们要求温度等于局部平衡温度 $T(z)=1-z$；或者，像处理其他内部谱元一样，要求温度及其导数连续，从而模拟导热障碍物。沿用此前的方法，我们发现，保持固定温度的障碍物的临界宽度为$\epsilon_c\approx0.047$，这一结果与有限障碍物所观察到的极限一致（图 2 中的空心方块）；而对于导热障碍物 $\epsilon_c\approx0.075$（空心圆），结果同样一致

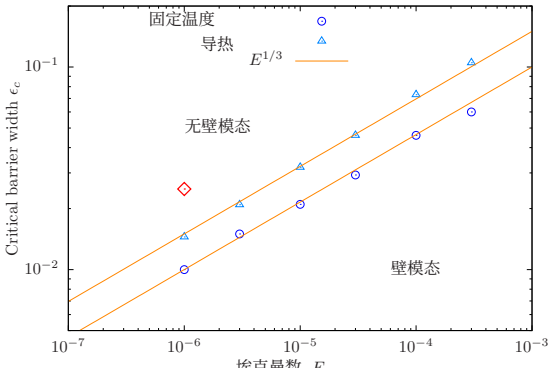


图3. 临界障碍宽度 ϵ_c 随 E 的变化，适用于无限薄的恒温或导热势垒。瑞利数固定为其起始值的两倍，而起始值本身取决于 E。红色菱形表示图6中所示、与实验相关的模拟所考察的参数范围。

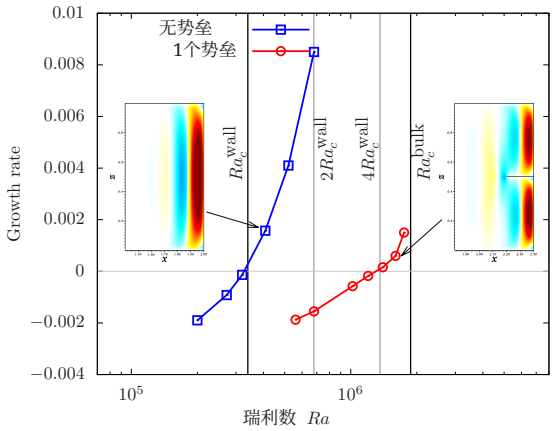


图 4. 参考情形（无势垒）和设置一个宽度为 $\epsilon = 0.2$、位于.....的势垒的情形下，增长率随 Ra 的变化关系，其中 $E = 10^{-4}$ 为.....

$z = 1/2$。插图显示了指数增长阶段 $y = 0$ 平面内速度的垂直分量。

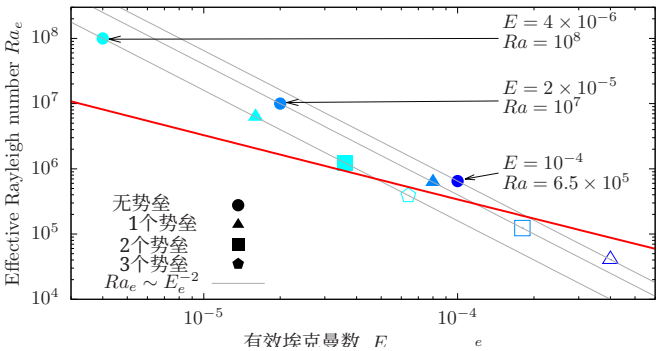


图 5. 有效瑞利数 Ra_e 随有效埃克曼数 E_e的变化。符号表示从 $N = 0$ 开始的障碍物数量，其中 $Ra_e = Ra$ 且 $E_e = E$。实心（空心）符号表示增长（衰减）的壁面模态。粗红线是线性理论 [33] 预测的壁模起始临界曲线，细灰线表示 $Ra_e \sim E_e^{-2}$ 标度关系。

于有限障碍物对应的结果。因此，障碍物高度 h 是一个次要参数，而障碍宽度 ϵ 才是抑制壁面模态的关键。

现在讨论问题的两个主要控制参数 E 和 Ra对无限薄导热势垒的影响。我们系统地改变埃克曼数，同时将瑞利数保持在其临界值的两倍（临界值本身取决于 E，从而使系统的超临界性保持不变）。对于每个埃克曼数，我们改变障碍宽度 ϵ 并测量增长率，以近似求出其临界值 ϵ_c。结果如图3所示。我们发现，对于两种温度边界条件，使壁面模态稳定所需的障碍宽度都遵循 $E^{1/3}$ 标度关系；导热势垒的前因子略大，这与 $E = 10^{-4}$中已有的发现一致。 $E^{1/3}$ 标度关系与起始时的壁面模态宽度 [32] 一致。

增大瑞利数会带来更多出人意料的结果。对于宽度为 $\epsilon = 0.2$、位于 $E = 10^{-4}$ 的导热屏障，当 $Ra = 2Ra_c^{\mathrm{wall}}$ 时，壁面模态受到抑制（图 4）。然而，增长率随 Ra 增大，因此壁面模态会在 Ra 的更大取值下开始增长，这发生在 $Ra \approx 4Ra_c^{\mathrm{wall}}$。因此，引入障碍物通过提高其临界瑞利数，改变了壁面模态的线性稳定性。请注意，为避免障碍宽度对这些结果产生任何潜在影响，我们使用了宽度为 $\epsilon = 0.2$ 的、没有必要如此宽的障碍物。一旦瑞利数超过 $Ra \approx 4Ra_c$ 处的次级转变，增长中的壁面模态便无法通过进一步增大 ϵ 来抑制。这是因为壁面模态会在障碍物的两侧发展（见图 4 中的插图），因此 ϵ 变得无关紧要。这一观察促成了一个简单模型的推导，用于解释为什么壁面模态会在瑞利数达到临界值的四倍后重新出现。障碍物上方和下方的区域由其有效参数与主体区域不同：有效高度减半，有效温差也减半。因此，有效瑞利数降低至原来的 1/16，而有效埃克曼数增至原来的 4 倍。由于壁面模态的临界瑞利数遵循 a E^{-1} 标度关系 [32, 34]，这意味着障碍物两侧发展的两个壁面模态的有效临界数现在增至原来的 4 倍，这与图 4 中的结果一致。

随着 Ra 增加，次级壁面模态出现的一种可能解决方案是增加障碍物数量。假设障碍物沿垂直壁面均匀分布，即 N 个障碍物位于$z_i = i/(N+1)$处，其中 $i = 1$、.....、 N，我们可以推导出一个简单模型，预测对于给定的（E， Ra），稳定这些模态所需的最少障碍物数量。间隙的有效埃克曼数和瑞利数

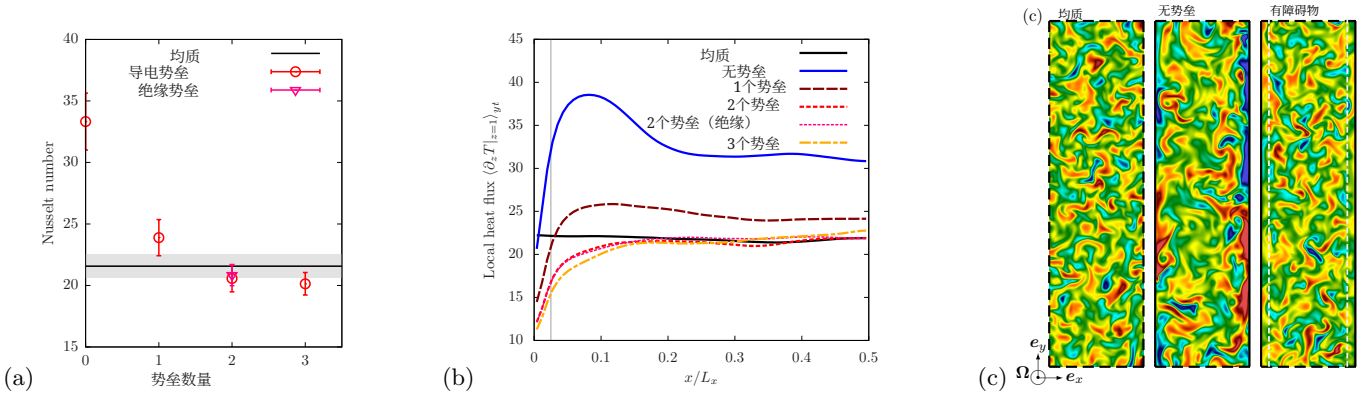


图 6. (a) 对于 $Ra = 3 \times 10^9$ 和 $E = 10^{-6}$，努塞尔数随障碍物数量 N 的变化。水平线表示周期情形下的努塞尔数（阴影区域表示 95% 置信区间）。(b) 在 $z = 1$ 处对 y 和时间取平均的热通量，随距壁面归一化距离的变化。垂直线表示障碍宽度。(c) 周期情形（左）、有垂直壁面但无障碍物（中）以及有两个障碍物（右）时，$z = 1/2$ 处 $(x,\ y)$ 平面内的垂直速度。所有情形使用相同的色标。黑色虚线表示周期边界，黑色实线表示刚性壁面；区域内部的白色虚线表示障碍宽度。区域尺寸为 $L_x = 0.3$ 和 $L_y = 1.1$ [29]。

障碍物之间的间隙，其中 d 为相邻两个障碍物之间的距离，N 为障碍物数量，分别为

$$E_e = Ed^{-2} = E(N+1)^2,\ Ra_e = Rad^4 = Ra(N+1)^{-4}. \quad (4)$$

因此，随着引入的障碍物数量增加，$Ra_e \sim E_e^{-2}$。为了验证这一简单模型，我们考虑了多组控制参数（Ra）。对于每种情况，我们在固定 $\epsilon = 0.2$ 的条件下，使用不同数量的障碍物进行了模拟。结果如图 5 所示，其中实心（空心）符号表示增长（衰减）的壁面模态。当障碍物数量足以将有效控制参数（E_e，Ra_e）压低至临界曲线以下时，壁面模态便会消失。显然，对于$E = 10^{-4}$，$Ra = 6 \times 10^5$ 一个障碍物就足够了；而对于$E = 4 \times 10^{-6}$，$Ra = 10^8$ 则需要三个障碍物，才能使每个间隙都处于亚临界状态。

现在，我们将埃克曼数降至 $E = 10^{-6}$，同时固定$Ra = 3 \times 10^9 \approx 4Ra_c^{\mathrm{bulk}}$，以评估障碍物在充分湍流环境中抑制壁面模态的能力，其中 Ra_c^{bulk}是主体对流的临界瑞利数 [35]。这一参数范围更接近大多数实验条件所涉及的范围 [13, 14]。我们进行了三类模拟。第一类在两个横向方向上均采用周期性边界条件，以再现无壁面的地球物理构型。第二类采用具有侧壁但无障碍物的简单通道，以复现实验构型。第三类则设置了不同数量的障碍物。为确保障碍物足够宽，能够影响壁面模态，我们选择了$\epsilon = 0.025$ （图3中的红色菱形），该值远高于临界值 ϵ_c。我们将每次模拟运行至达到统计稳态，并通过对穿过顶部边界的热通量进行时间平均来计算努塞尔数；对于我们采用的参数，平均时段通常为 10^4 个旋转周期，或超过500个自由落体时间。

无障碍物的受限区域中的努塞尔数比周期区域高54%[图6(a)]，，表明壁面模态的存在具有显著影响。值得注意的是，即使在该区域的主体区域内，也未能恢复均匀通量 [参见图6(b)中平均热通量随距壁面距离的变化]。加入一个障碍物后，热通量大幅下降，但只有设置两个或更多障碍物时，努塞尔数才恢复至周期情形的水平。事实上，努塞尔数比周期情形低约7%，这可能是由于障碍物侵入流场所致，不过在距壁面足够远的位置，均匀热通量得以恢复[图6(b)]。总热通量的这一小幅降幅小于两个障碍物所占的水平表面比例（$2\epsilon/L_x \approx 17\%$），并且应随着埃克曼数降低、壁面模态变薄而减小。图6(c)的中图中，壁面模态清晰可见；而对应于设置两个导电势垒情形的右图，与展示均质参考情形的左图几乎无法区分。补充材料 [29] 提供了更多细节，其中表明，边界带状流也受到稳定化作用，同时，设置两个或更多障碍物可恢复均质情形下主体区域内的湍流脉动。值得注意的是，我们的简单估算预测，完全稳定壁模态需要8个障碍物，而恢复主体状态下的有效热通量仅需两个障碍物。这表明，两个障碍物已足以降低壁面模态的超临界性，使其对总热通量的贡献可以忽略不计，尽管此时壁面模态可能仍然存在。

我们已经证明，在旋转对流实验中，通过引入一片

或多片沿侧向边界布置、宽度约为 $E^{1/3}$ 的薄水平鳍片（远小于区域半径），即可消除壁面模态对对流热输运的主要影响。这一方案在实验上可行，并有望使现有及未来的实验即使在存在侧向约束的情况下，也能实现均质地转湍流状态。沿本文所述思路，对所提出的实验参数开展广泛建模，将有助于优化所需的障碍物数量并评估普朗特数的作用。

致谢

本工作部分得到了美国国家科学基金会 DMS-2009563 号项目（EK）的资助。Centre de Calcul Intensif d'Aix-Marseille 感谢其授予我们使用高性能计算资源的权限。本工作使用了 GENCI-IDRIS/TGCC 的高性能计算/人工智能资源（项目编号：2021-A0120407543）。

[1]R. E. Ecke 和 J. J. Niemela，《旋转瑞利–贝纳德对流地转态下的热输运》，《物理评论快报》**113**，114301（2014）。[2] J. S. Cheng、S. Stellmach、A. Ribeiro、A. Grannan、E. M. King 和 J. M. Aurnou，《行星内核中快速旋转对流的实验室–数值模型》，《地球物理学杂志：国际》**201**，1（2015）。[3] J. M. Aurnou、V. Bertin、A. M. Grannan、S. Horn 和 T. Vogt，《液态镓中的旋转热对流：多模态流动与缺失的稳态柱》，《流体力学杂志》**846**，846–876（2018）。[4] J. S. Cheng、J. M. Aurnou、K. Julien 和 R. P. J. Kunnen，《下一代地转对流湍流模型的启发式框架》，《地球物理与天体物理流体动力学》**112**，277（2018）。[5] J. S. Cheng、M. Madonia、A. J. Aguirre Guzm´an 和 R. P. J. Kunnen，《快速旋转湍流对流中热传递状态的实验室探索》，《物理评论·流体》**5**，113501（2020）。[6] F. Zhong、R. E. Ecke 和 V. Steinberg，《旋转瑞利–贝纳德对流中的非对称模态及向涡旋结构的转变》，《物理评论快报》**67**，2473（1991）。[7] H. Goldstein、E. Knobloch、I. Mercader 和 M. Net，《旋转圆柱中的对流。第一部分：中等普朗特数的线性理论》，《流体力学杂志》**248**，583（1993）。[8] S. Horn 和 P. J. Schmid，《旋转瑞利–贝纳德对流中的顺行、逆行与振荡模态》，《流体力学杂志》**831**，182（2017）。[9] B. Favier 和 E. Knobloch，《快速旋转瑞利–贝纳德对流中的稳健壁面态》，《流体力学杂志》**895**，R1（2020）。[10] X. M. de Wit、A. J. Aguirre Guzman、M. Madonia、J. S. Cheng、H. J. H. Clercx 和 R. P. J. Kunnen，《细长圆柱内受限的湍流旋转对流：侧壁环流》，《物理评论·流体》**5**，023502（2020）。[11] X. Zhang、D. P. M. van Gils、S. Horn、M. Wedi、L. Zwirner、G. Ahlers、R. E. Ecke、S. Weiss、E. Bodenschatz 和 O. Shishkina，《旋转湍流瑞利–贝纳德对流中的边界带状流》，《物理评论快报》**124**，084505（2020）。[12] R. P. J. Kunnen，《快速旋转湍流对流的地转态》，《湍流杂志》**22**，267（2021）。[13] X. Zhang、R. E. Ecke 和 O. Shishkina，《快速旋转湍流热对流中的边界带状流》，《流体力学杂志》**915**，A62（2021）。[14] R. E. Ecke、X. Zhang 和 O. Shishkina，《旋转瑞利–贝纳德对流中壁面模态与边界带状流的联系》，《物理评论·流体》**7**，L011501（2022）。[15] R. E. Ecke 和 O. Shishkina，《湍流旋转瑞利–贝纳德对流》，《流体力学年度评论》**55**，603（2023）。[16] J. Jim´énez，《粗糙壁面上的湍流》，《流体力学年度评论》**36**，173（2004）。[17] O. Cadot、Y. Couder、A. Daerr、S. Douady 和 A. Tsinober，《封闭湍流中的能量注入：边界层搅拌与惯性搅拌》，《物理评论E》**56**，427（1997）。[18] T. H. van den Berg、C. R. Doering、D. Lohse 和 D. P. Lathrop，《湍流泰勒–库埃特流中的光滑与粗糙边界》，《物理评论E》**68**，036307（2003）。[19] X. Zhu、R. Ostilla-M´onico、R. Verzicco 和 D. Lohse，《带沟槽壁面的泰勒–库埃特流的直接数值模拟：力矩标度与流动结构》，《流体力学杂志》**794**，746（2016）。[20] Y. Shen、P. Tong 和 K.-Q. Xia，《粗糙表面上的湍流对流》，《物理评论快报》**76**，908（1996）。[21] S. Ciliberto 和 C. Laroche，《边界随机粗糙度增大湍流对流的标度指数》，《物理评论快报》**82**，3998（1999）。[22] S. Wagner 和 O. Shishkina，《规则表面粗糙度增强湍流热对流中的热通量》，《流体力学杂志》**763**，109（2015）。[23] Y.-C. Xie 和 K.-Q. Xia，《不同粗糙几何形状的粗糙板上的湍流热对流》，《流体力学杂志》**825**，573–599（2017）。[24] C. Kane 和 T. Lubensky，《等静晶格中的拓扑边界模态》，《自然·物理》**10**，39（2014）。[25] L. M. Nash、D. Kleckner、A. Read、V. Vitelli、A. M. Turner 和 W. T. M. Irvine，《陀螺超材料的拓扑力学》，《美国国家科学院院刊》**112**，14495（2015）。[26] Z. Yang、F. Gao、X. Shi、X. Lin、Z. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，《拓扑声学》，《物理评论快报》**114**，114301（2015）。[27] A. Souslov、K. Dasbiswas、M. Fruchart、S. Vaikuntanathan 和 V. Vitelli，《具有奇黏度的流体中的拓扑波》，《物理评论快报》**122**，128001（2019）。[28] S. Horn 和 J. M. Aurnou，《科里奥利力–离心力对流的状态》，《物理评论快报》**120**，204502（2018）。[29] 更多详情请参见补充材料：[出版商将插入网址]，其中包括参考文献 [36]。[30] NEK5000 19.0 版。阿贡国家实验室，伊利诺伊州。网址：https://nek5000.mcs.anl.gov。

[31] P. F. Fischer, 《用于不可压缩纳维–斯托克斯方程谱元求解的重叠施瓦茨方法》，计算物理学杂志**133**，84（1997）。[32] J. Herrmann 和 F. H. Busse, 《旋转流体层中局域于壁面的对流渐近理论》，《流体力学杂志》**255**，183（1993）。[33] K. Zhang 和 X. Liao, 《具有实验边界条件的旋转圆柱体中的对流起始》，《流体力学杂志》**622**，63（2009）。[34] E. Y. Kuo 和 M. C. Cross, 《旋转瑞利–贝纳德对流中的行波壁面态》，《物理评论E》**47**，R2245（1993）。[35] G. M. Homsy 和 J. L. Hudson, 《从底部加热的有界旋转流体的渐近稳定性：导热基本态》，《流体力学杂志》**45**，353（1971）。[36] X. Liao、K. Zhang 和 Y. Chang, 《关于旋转流体层中的边界层对流》，《流体力学杂志》**549**，375（2006）。