arXiv:2304.01147v1 [math.AP] 3 Apr 2023

柯尔莫哥洛夫算子近期趋势的新视角

Francesca Anceschi、Mirco Piccinini 和 Annalaura Rebucci

摘要。在概述适用于研究粗糙系数柯尔莫哥洛夫算子的非欧几里得几何框架后，我们列举函数空间 W 的若干性质，这些性质与一致椭圆算子的经典 H^1 理论相呼应。随后，我们证明函数空间 W 中函数的一个新索伯列夫嵌入定理。此外，在回顾弱正则性理论的最新成果后，我们探讨其中一些成果在物理学和经济学实际问题中的近期应用。最后，我们总结了关于非线性非局部动力学 Kolmogorov-Fokker-Planck 算子研究的一些最新成果。

目录

1. 引言 12. 函数空间框架 73. De Giorgi-Nash-Moser 弱正则性理论 104. 物理学与经济学中的应用 135. 非线性非局部 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程 19参考文献

24

1. 引言

本文致力于研究如下形式的 Kolmogorov 型超抛物二阶偏微分方程

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u(x,t) := \sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x,t)\partial_{x_j}u(x,t)\right) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(x,t) - \partial_t u(x,t)\\ + \sum_{i=1}^{m_0} b_i(x,t)\partial_i u(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t),\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $z = (x,t) = (x_1,\dots,x_N,t) \in \mathrm{R}^{N+1}$ 且 $1 \le m_0 \le N$。此外，矩阵 $A_0 = (a_{ij}(x,t))_{i,\,j=1,\,\dots\dots m_0}$ 和 $B = (b_{ij})_{i,\,j=1,\,\dots\dots N}$ 满足以下结构假设。

2020 数学主题分类。 35K70, 35Q84, 35B45, 35B65, 47G20, 35R11。关键词和短语。 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程，弱正则性理论，Harnack 不等式，H¨older 正则性，超抛物型，分数阶拉普拉斯算子。致谢： 作者是意大利国家数学高等研究院（Istituto Nazionale di Alta Matematica）数学分析、概率论及其应用国家小组（GNAMPA）的成员。第一位和第三位作者部分获得 INdAM - GNAMPA 项目“ Kolmogorov 方程的变分问题：长期分析与正则性估计”（CUP E55F22000270001）的资助。

(H1) 矩阵 A_0 是对称的，且其元素为实值可测函数。此外，存在两个正常数 λ 和 Λ，使得

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

对于每个 $(x,\ t) \in \mathrm{R}^{N+1}$ 和 $\xi \in \mathrm{R}^{m_0}$。矩阵B的各项均为常数。

尽管当 $m_0 < N$ 时 $\mathscr{L}$ 会退化，但其一阶部分是一个具有强正则化作用的算子。事实上，已知在对矩阵 B施加适当的结构假设时，主部算子 $\mathscr{L}_0$ of $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}_0 u(x,t) := \sum_{i=1}^{m_0} \partial_{x_i}^2 u(x,t) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(x,t) - \partial_t u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

是亚椭圆的（即，在某个开集 $\Omega \subset \mathrm{R}^{N+1}$ 中定义的每个分布解 u to $\mathscr{L}_0 u = f$ 都属于 $C^\infty(\Omega)$，并且当 $f \in C^\infty(\Omega)$ 时是经典解）。因此，下文将采用以下假设。

(H2) 该主部算子 $\mathscr{L}_0$ 的 $\mathscr{L}$ 是亚椭圆的，并且相对于$\delta_r)_{r>0}$ 中引入的膨胀族 (1.12) 是二阶齐次的。

只要 $\mathscr{L}_0$ 是一致抛物型的，这一后一假设显然成立，这对应于取 $m_0 = N$ 且 $B \equiv \mathbb{0}$。事实上，在这种情况下，主部算子 $\mathscr{L}_0$ 与热算子一致，而热算子已知是亚椭圆的。此外，[54, 命题 2.1 和 2.2] 表明，假设 **(H2)** 等价于假设存在 $\mathbb{R}^N$ 的一组基，使得 B 具有如下形式

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ B_1 & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B_2 & \dots & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \dots & B_\kappa & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

其中每个 B_j都是一个秩为 m_j的 $m_j \times m_{j-1}$矩阵，且 $j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \kappa$,

$$m_0 \geq m_1 \geq \ldots \geq m_\kappa \geq 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=0}^{\kappa} m_j = N. \tag{1.3}$$

因此，从现在起我们假设 B 具有标准形（1.2）。此外，通过引入 R^{N+1}的空间齐次维数这一量，其定义为

$$Q = m_0 + 3m_1 + \ldots + (2\kappa+1)m_\kappa, \tag{1.4}$$

以及定义为 $Q+2$的 R^{N+1}的齐次维数之后，我们现在可以陈述关于 b、c 的可积性以及源项 f 的最后一个假设。

(H3) $c, f \in L^q_{loc}(\Omega)$, with $q > \frac{Q+2}{2}$, and $b \in (L^\infty_{loc}(\Omega))^{m_0}$.

从现在起，我们分别用 $D = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N})$、$\mathsf{h}\cdot,\cdot\mathsf{i}$ 和 div 表示 R^N 中的梯度、内积和散度。此外，$D_{m_0} = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}})$ 和 div_{m_0} 分别表示前 m_0 个分量上的偏梯度和偏散度。

若 a_{ij} 是对每个 1.1 中出现的系数，且对于 $i,j=1,\dots,m_0$，以及 $a_{ij}\equiv 0$ 只要 $i>m_0$，或 $j>m_0$，我们就引入

$$A(x,t)=(a_{ij}(x,t))_{1\le i,j\le N},\quad b(x,t):=(b_1(x,t),\dots,b_{m_0}(x,t),0,\dots,0),$$

$$Y:=\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(x,t)-\partial_t u(x,t).$$

因此，我们可以用紧凑形式重写算子 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_0$

$$\mathscr{L}u=\operatorname{div}(ADu)+Yu+\langle b,Du\rangle+cu\quad\text{and}\quad\mathscr{L}_0u=\Delta_{m_0}u+Yu,$$

并引入一个有用的例子，说明类型（1.1）的超抛物型算子。

例 1.1。属于类别 （1.1）的一个重要原型是动理学柯尔莫哥洛夫-福克-普朗克方程

$$\nabla_v\cdot(u(v,x,t)\,v+\nabla_v u(v,x,t))+v\cdot\nabla_x u(v,x,t)-\partial_t u(v,x,t)=f(v,x,t),\tag{1.5}$$

其中 $(v,x,t)\in\mathbb{R}^{2n+1}$。方程 *(1.5)* 是通过取 $N=2n$、$\kappa=1$、$m_0=m_1=n$ 和 $c\equiv n$，由 *(1.1)* 得到的。从物理角度看，像 *(1.5)* 中这样的福克-普朗克方程，为浸没在热力学平衡流体中的布朗试探粒子的分布演化提供了连续描述。更准确地说，只要试探粒子远重于流体分子，其分布函数 u 就遵循 *(1.5)* 中的线性方程演化。特别地，方程 *(1.5)* 是该随机过程的后向柯尔莫哥洛夫方程

$$\begin{cases} dV_t=\sqrt{2}dW_t-V_t dt,\\ dX_t=V_t dt,\end{cases}\tag{1.6}$$

其中 $(W_t)_{t\ge 0}$ 表示一个 $n-$维维纳过程。关于福克-普朗克方程及其应用的全面论述，请参阅[7]，以及其中的参考文献。

1.1. 几何设定。首先，我们描述研究 $\mathscr{L}$ 最适合的几何设定，它并非欧几里得设定。事实上，正如 Lanconelli 和 Polidoro 在 [54]，中首次观察到的，算子 $\mathscr{L}_0$ 在李群 $\mathbb{K}=(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$ 上关于左平移保持不变，其群运算定义如下

$$(x,t)\circ(\xi,\tau)=(\xi+E(\tau)x,t+\tau),\qquad (x,t),(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{N+1},\tag{1.7}$$

群的指数映射为

$$E(s)=\exp(-sB),\qquad s\in\mathbb{R}.\tag{1.8}$$

我们注意到，$\mathbb{K}$ 是一个非交换群，其单位元为 $(0,\dots,0,0)$，逆元为

$$(x,t)^{-1}=(-E(-t)x,-t).$$

此外，对于给定的 $\zeta\in\mathbb{R}^{N+1}$，若将 $\mathbb{K}=(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$ 上定义如下的左平移记为 ℓ_ζ

$$\ell_\zeta:\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}^{N+1},\quad \ell_\zeta(z)=\zeta\circ z,$$

那么可以证明，$\mathscr{L}_0$ 在李乘积 $\circ$ 下是左不变的，即

$$\mathscr{L}_0\circ\ell_\zeta=\ell_\zeta\circ\mathscr{L}_0\qquad\text{or, equivalently,}\qquad\mathscr{L}_0\left(u(\zeta\circ z)\right)=\left(\mathscr{L}_0u\right)(\zeta\circ z),$$

对每个 u 都足够光滑。

现在，我们来关注假设 **(H2)**。事实上， $\mathscr{L}_0$ 的亚椭圆性由 H¨ormander 的秩条件蕴含，该条件首次发表于 [42] ，其表述如下：

$$\operatorname{rank}\operatorname{Lie}\left(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{m_0}},Y\right)(x,t)=N+1,\qquad \forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.9}$$

其中，Lie $\left(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{m_0}},Y\right)$ 表示由一阶微分算子 $\left(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{m_0}},Y\right)$ 在 (x,t) 处生成的李代数。顺带一提，值得指出的是，要求

$$C(t)>0,\quad \text{for every } t>0, \tag{1.10}$$

这等价于假设 $\mathscr{L}_0$ 满足 **(H2)** 中的亚椭圆性，见 [54, 命题 A。1],其中 $E(\cdot)$ 在 (1.8) 中定义，协方差矩阵定义如下：

$$C(t)=\int_0^t E(s)\,A_0\,E^T(s)\,ds.$$

就假设（H2）的后半部分而言， $\mathscr{L}_0$ 关于膨胀族 $(\delta_r)_{r>0}$ 不变，当且仅当

$$\mathscr{L}_0\left(u\circ\delta_r\right)=r^2\delta_r\left(\mathscr{L}_0 u\right),\quad \text{for every}\quad r>0, \tag{1.11}$$

并且对于每个 u 足够光滑的函数。正如 [54, 命题 22], 所指出的，可以从 (B 1.2) 中矩阵 $\mathscr{L}_0$ 的表达式看出这种膨胀不变性。具体而言，满足 (1.11) 当且仅当 具有 (1.2) 的形式。在这种情况下，有

$$\delta_r=\operatorname{diag}\left(r\mathbb{I}_{m_0},r^3\mathbb{I}_{m_1},\dots,r^{2\kappa+1}\mathbb{I}_{m_\kappa},r^2\right),\qquad r>0. \tag{1.12}$$

考虑到这一点，我们引入一个关于$(\delta_r)_{r>0}$ 的1次齐次范数，以及一个关于群运算(1.7)的不变拟距离。

定义1.1。 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ 为正整数，满足

$$\operatorname{diag}\left(r^{\alpha_1},\dots,r^{\alpha_N},r^2\right)=\delta_r. \tag{1.13}$$

若 $\|z\|=0$，则令 $z=0$；若 $z\in\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$，则定义 $\|z\|=r$，其中 r 是方程的唯一正解

$$\frac{x_1^2}{r^{2\alpha_1}}+\frac{x_2^2}{r^{2\alpha_2}}+\ldots+\frac{x_N^2}{r^{2\alpha_N}}+\frac{t^2}{r^4}=1.$$

据此，我们定义拟距离 d 如下：

$$d(z,w)=\|z^{-1}\circ w\|,\qquad z,w\in\mathbb{R}^{N+1}. \tag{1.14}$$

我们注意到，勒贝格测度关于与 $\mathscr{L}_0$相关联的平移群是不变的，因为 $\det E(t)=e^{t\,\text{迹}\,B}=1$。此外，根据定义，半范数 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ 关于$(\delta_r)_{r>0}$是1次齐次的。事实上，

$$\|\delta_r(x,t)\|=r\|(x,t)\|\qquad \forall r>0\ \text{ and }\ (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}.$$

由于在 $\mathbb{R}^{N+1}$ 中，所有相对于 $(\delta_r)_{r>0}$ 呈 1-齐次的范数都等价，因此定义 1.1 中引入的范数与其他范数等价，例如下面这个范数

$$\|(x,t)\|_1=|t|^{\frac{1}{2}}+|x|,\quad |x|=\sum_{j=1}^N|x_j|^{\frac{1}{\alpha_j}}$$

其中指数 α_j，对于 $j = 1,...,N$ 是在 (1.13) 中引入的。不过，定义1.1 通常更受青睐，因为它的等值集是光滑曲面。关于此问题的更多信息，请参见 [59]。

注 1.1. 对于无摩擦的动力学 *Kolmogorov-Fokker-Planck* 方程 (1.5) 这一情形，即

$$\mathscr{K}_0 u(v,x,t) := \Delta_v u(v,x,t) + v \cdot \nabla_x u(v,x,t) - \partial_t u(v,x,t) = f(v,x,t), \tag{1.15}$$

其中 $(v,\ x,\ t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$，李群有着相当自然的解释。事实上，复合律 (1.7) 与伽利略变换相符

$$(v,x,t) \circ (v_0,x_0,t_0) = (v_0 + v, x_0 + x + tv_0, t_0 + t). \tag{1.16}$$

容易看出，$\mathscr{K}_0$ 在上述变量变换下保持不变。具体而言，若 $w(v,\ x,\ t) = u(v_0 + v,\ x_0 + x + tv_0,\ t_0 + t)$ 且 $g(v,\ x,\ t) = f(v_0 + v,\ x_0 + x + tv_0,\ t_0 + t)$，则

$$\mathscr{K}_0 u = f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{K}_0 w = g \quad for\ every \quad (v_0,x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}. \tag{1.17}$$

此外，$\mathscr{K}_0$ 在膨胀变换 (1.12)下保持不变；在此情形下，膨胀变换可简化为 $\delta_r(v,\ x,\ t) := (rv,\ r^3x,\ r^2t)$。请注意，该膨胀变换对变量 v 和 t的作用是通常的抛物缩放。此外，r^3 中位于 x 前的项，是因为速度 v 是位置 x 对时间 t的导数。

因此，考虑群运算“$\circ$”和膨胀族 $(\delta_r)_{r>0}$，我们现在可以从单位过去圆柱体出发，引入一族合适的圆柱体

$$\mathcal{Q}_1 := B_1 \times B_1 \times \ldots \times B_1 \times (-1,0), \qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_1 := B_1 \times B_1 \times \ldots \times B_1 \times (-1,0]$$

它们通过开球定义

$$B_1 = \{x^{(j)} \in \mathbb{R}^{m_j} : |x| \leq 1\},$$

其中 $j = 0,\ldots,\kappa$，且 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^{m_j}$ 中的欧几里得范数。于是，对于每个 $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$和 $r > 0$，我们定义

$$\mathcal{Q}_r(z_0) := z_0 \circ (\delta_r(\mathcal{Q}_1)) = \{z \in \mathbb{R}^{N+1} : z = z_0 \circ \delta_r(\zeta), \zeta \in \mathcal{Q}_1\}.$$

我们指出，这种倾斜圆柱体的定义还可等价地表示为球，见 [81, 方程 (21)]，，有时采用这种表示更为方便。更具体地说，存在一个正常数 $\overline{c}$ 使得

$$\begin{aligned} &B_{r_1}(x_0^{(0)}) \times B_{r_1^3}(x_0^{(1)}) \times \ldots \times B_{r_1^{2\kappa+1}}(x_0^{(\kappa)}) \times (t_0 - r_1^2, t_0] \\ &\qquad \subset \mathcal{Q}_r(z_0) \subset B_{r_2}(x_0^{(0)}) \times B_{r_2^3}(x_0^{(1)}) \times \ldots \times B_{r_2^{2\kappa+1}}(x_0^{(\kappa)}) \times (t_0 - r_2^2, t_0], \end{aligned}$$

其中 $r_1 = r/\overline{c}$ 且 $r_2 = \overline{c}r$。此外，由于 $\det \delta_r = r^{Q+2}$，可知

$$\mathrm{meas}\left(\mathcal{Q}_r(z_0)\right) = r^{Q+2}\mathrm{meas}\left(\mathcal{Q}_1(z_0)\right), \qquad \forall\ r > 0, z_0 \in \mathbb{R}^{N+1},$$

其中 Q 是 (1.4) 中定义的齐次维数。最后，根据 [27, 引理 6]，存在一个正常数 $\widetilde{c} \in (0,1)$ 使得

$$z \circ \mathcal{Q}_{\widetilde{c}(r-\rho)} \subseteq \mathcal{Q}_r, \qquad \text{for every } 0 < \rho < r \leq 1 \quad \text{and} \quad z \in \mathcal{Q}_\rho. \tag{1.18}$$

关于这一主题的更多信息，请参阅 [7, 18] 及其中的参考文献。

最后，我们通过回顾在这种非欧几里得情形下有用的 H¨older 连续函数概念，结束本小节。

定义 *1.2.* 设 α 为正常数，$\alpha \leq 1$，且 Ω 是 R^{N+1} 的一个开子集。若存在正常数 $C > 0$ 使得函数 $f : \Omega \longrightarrow R$ 关于群 $K = (R^{N+1}, \circ)$（定义见 *(1.7)*）在 Ω 内以 α 为指数满足 *H¨older* 连续，则称其为 *H¨older* 连续函数，指数为 α，$f \in C_K^\alpha(\Omega)$，亦简称为指数为 α 的 *H¨older* 连续函数。

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq C\, d(z,\zeta)^\alpha \qquad \text{for every } z, \zeta \in \Omega,$$

其中 d 是定义于(1.14)中的距离。

对于每个有界函数 $f \in C_K^\alpha(\Omega)$，我们定义半范数

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{\substack{z,\zeta \in \Omega \\ z \neq \zeta}} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{d(z,\zeta)^\alpha}.$$

此外，若对于每个紧子集 Ω'（其中 Ω.....），函数 f 局部 *Hölder* 连续，我们记为 $f \in C_{K,\ \mathrm{loc}}^\alpha(\Omega) f \in C_K^\alpha(\Omega')$。

1.2. 基本解。研究系数粗糙的（1.1）时，另一个有用的工具是其主部算子的基本解 $\mathscr{L}_0$。事实上，在假设**(H2)**下，H¨ormander 在 [42] 中显式构造了 $\mathscr{L}_0$的基本解，即

$$\Gamma(z,\zeta) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z, 0), \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1},\ z \neq \zeta,$$

其中

$$\Gamma((x,t),(0,0)) = \begin{cases} \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x\rangle - t\,\mathrm{tr}(B)\right), & \text{if } t > 0, \\ 0, & \text{if } t < 0. \end{cases}$$

由于假设 **(H2)** 意味着条件（1.10）成立，因此函数 Γ定义良好。此外，由于 $\mathscr{L}_0$ 关于 $(\delta_r)_{r>0}$也是膨胀不变的，Γ 也是次数为 $-Q$的齐次函数，即

$$\Gamma\left(\delta_r(z), 0\right) = r^{-Q}\, \Gamma\left(z, 0\right), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\},\ r > 0.$$

这一性质意味着牛顿势具有 L^p 估计（例如参见 [5]）。因此，通过定义函数 $\Gamma-$的势 $f \in L^1(\mathbb{R}^{N+1})$为

$$\Gamma(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z,\zeta) f(\zeta) \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.19}$$

我们能够引入函数 $\Gamma(D_{m_0} f) : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_0}$，它对任意$f \in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$均有定义，至少在分布意义下如此，参见 [27]。事实上

$$\Gamma(D_{m_0} f)(z) := -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} D_{m_0}^{(\zeta)} \Gamma(z,\zeta)\, f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta, \tag{1.20}$$

其中 $D_{m_0}^{(\zeta)}\Gamma(z,\ \zeta)$是关于 $\xi_1, \ldots, \xi_{m_0}$的梯度。因此，直接应用[27, 命题 3]，，取 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，并分别考虑 Γ-势对应于 f 和 $D_0 f$的情形，即可推导出（1.19）和（1.20）的显式势估计。

推论 **1.1.** 设 $f \in L^p(\mathcal{Q}_r)$。存在一个正常数 $c = c(T, B)$ 使得

$$\|\Gamma(f)\|_{L^{p**}(\mathcal{Q}_r)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathcal{Q}_r)}, \qquad \|\Gamma(D_{m_0} f)\|_{L^{p*}(\mathcal{Q}_r)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathcal{Q}_r)},$$

其中 $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q+2}$ 和 $\frac{1}{p**} = \frac{1}{p} - \frac{2}{Q+2}$。

1.3. 论文结构。 本文结构如下。第 2 节致力于研究函数空间 $\mathcal{W}$。具体而言，在回顾有关空间$\mathcal{W}$的所有已知结果后，我们证明了其中函数的索伯列夫嵌入定理。第 3 节概述了该框架下的 De Giorgi-Nash-Moser 弱正则性理论。第 4节将这些结果应用于研究物理学和经济学中的实际问题。最后，在第 5节中，我们讨论非线性非局部Kolmogorov型算子的最新趋势。

2. 泛函设定

从现在起，我们考虑集合 $\Omega = \Omega_{m_0} \times \Omega_{N-m_0+1}$ 属于 $\mathbb{R}^{N+1}$，其中 Ω_{m_0} 是一个有界C^1 域，属于 $\mathbb{R}^{m_0}$ 且 Ω_{N-m_0+1} 是 $\mathbb{R}^{N-m_0+1}$中的有界域。于是，根据（1.12）中引入的缩放，我们将坐标 $x \in \mathbb{R}^N$ 分解如下

$$x = \left(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}\right), \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^{m_0}, \quad x^{(j)} \in \mathbb{R}^{m_j}, \quad j \in \{1, \dots, \kappa\}, \tag{2.1}$$

其中每个 m_j 都是满足（1.3）中所述条件的正整数。

此外，我们用 $\mathrm{D}(\Omega)$ 表示 Ω 中紧支撑函数的集合，用 $\mathrm{D}'(\Omega)$ 表示 Ω 中分布的集合。从现在起， $H^1_{x^{(0)}}$ 是函数$u \in L^2(\Omega_{m_0})$构成的 Sobolev空间，其分布梯度 $D_{m_0} u$属于 $(L^2(\Omega_{m_0}))^{m_0}$，即

$$H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0}) := \left\{ u \in L^2(\Omega_{m_0}) : D_{m_0} u \in (L^2(\Omega_{m_0}))^{m_0} \right\}, \tag{2.2}$$

配备范数

$$\|u\|^2_{H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0})} := \|u\|^2_{L^2(\Omega_{m_0})} + \|D_{m_0} u\|^2_{L^2(\Omega_{m_0})}. \tag{2.3}$$

现在，令$H^1_{c,\,x^{(0)}}$表示 $C^\infty_c(\Omega_{m_0})$ 在 $H^1_{x^{(0)}}$范数下的闭包，并回顾一下$C^\infty_c(\Omega_{m_0})$ 在 $H^1_{x^{(0)}}$ 中稠密，因为根据假设，Ω_{m_0} 是一个有界 C^1 区域。 此外， $H^1_{c,\,x^{(0)}}$ 是一个自反希尔伯特空间，因此我们可以考虑它的对偶空间

$$\left(H^1_{c,x^{(0)}}\right)^* = H^{-1}_{x^{(0)}} \quad \text{and} \quad \left(H^{-1}_{x^{(0)}}\right)^* = H^1_{c,x^{(0)}},$$

这里采用的是经典记号。因此，我们用 $H^{-1}_{x^{(0)}}$ 表示H^1_c 的$x^{(0)}$ 对偶空间，它作用于 H^1_c 中的$x^{(0)}$ 函数，通过对偶配对 $\mathrm{h}\cdot|\cdot\mathrm{i} := \mathrm{h}\cdot|\cdot\mathrm{i}_{H^1_{x^{(0)}}\, H^1_{c,\,x^{(0)}}}$。
从现在起，我们用简写记号 L^2H^{-1} 表示 $L^2\left(\Omega_{N-m_0+1};\ H^{-1}_{c,\,x^{(0)}}\right)$。

接下来按照标准方式，参见[2, 10, 57], 我们将函数空间$\mathcal{W}$ 定义为 $C^\infty(\Omega)$ 在该范数下的闭包

$$\|u\|^2_{\mathcal{W}} = \|u\|^2_{L^2\left(\Omega_{N-m_0+1};H^1_{x^{(0)}}\right)} + \|Yu\|^2_{L^2\left(\Omega_{N-m_0+1};H^{-1}_{x^{(0)}}\right)}, \tag{2.4}$$

它可以显式计算为

$$\|u\|^2_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega_{N-m_0+1}} \|u(\cdot, y, t)\|^2_{H^1_{x^{(0)}}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega_{N-m_0+1}} \|Yu(\cdot, y, t)\|^2_{H^{-1}_{x^{(0)}}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t,$$

w其中 $y = (x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)})$。特别地，可以推知 W 是一个 Banach 空间 e
并且我们回顾一下， $L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^1_{c,\,x^{(0)}})$ 的对偶空间满足

$$\left(L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^1_{c,x^{(0)}})\right)^* = L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^{-1}_{c,x^{(0)}}) \quad \text{and}$$
$$\left(L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^{-1}_{c,x^{(0)}})\right)^* = L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^1_{c,x^{(0)}}).$$

这一泛函框架最初在 [2] 中提出，用于研究 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的弱正则性理论，参见例1.1。随后， [57] 将其用于研究动理学情形下狄利克雷问题的适定性结果。最后，两位作者在 [10] 中将这一框架扩展到本文所讨论的超抛物框架。

请注意，处理 W 时必须解决的主要问题，是 L^2H^1 与 L^2H^{-1}之间的对偶空间配对。通常，对于有界区域，可以通过观察到以下事实来克服这一问题：对于每个开子集 $A \subset \mathrm{R}^n$ ，以及每个函数$g \in H^{-1}(A)$，都存在两个函数 $H_0, H_1 \in L^2(A)$，使得

$$g = \mathrm{div}_{m_0} H_1 + H_0 \qquad \text{and} \qquad \|H_0\|_{L^2(A)} + \|H_1\|_{L^2(A)} \leq 2\|g\|_{H^{-1}(A)},$$

例如，参见 [51, 第 4]章。

此外，近年来，学界致力于为属于 W 的函数提供合适的泛函不等式。特别是，有必要在这一框架下证明适当的庞加莱不等式和适当的索伯列夫嵌入。就前者而言，弱庞加莱不等式的证明近期已在 [10, 39]中完成。因此，我们只回顾其陈述及证明思路。另一方面，文献中尚未给出索伯列夫嵌入，因此我们将在此为读者提供完整证明。

2.1. Poincaré 不等式。考虑属于 W 的函数时，我们可以利用的一个有用工具是弱 Poincaré 不等式。该不等式首次在 [39] 中针对动理学情形得到证明，随后在 [10] 中推广到本文所考虑的情形。我们的思路是首先推导一个局部 Poincaré 不等式，其中涉及误差函数 h ，它定义为适当柯西问题的解

$$\begin{cases} \widetilde{\mathscr{K}} h = u \widetilde{\mathscr{K}} \psi, & in\ \mathbb{R}^N \times (-\rho^2, 0) \\ h = 0, & in\ \mathbb{R}^N \times \{-\rho^2\} \end{cases}$$

其中 $\rho > 0$， ψ 是给定的截断函数，而 $\mathscr{K}$是定义如下的辅助算子

$$\widetilde{\mathscr{K}} u(x,t) := -\sum_{i=1}^{m_0} \partial_{x_i}^2 u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_j \partial_{x_i} u(x,t) + \partial_t u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

我们注意到，辅助算子 $\mathscr{K}$ 的选取与$\mathcal{W}$的定义相一致，其中仅出现偏梯度 D_{m_0} 和李导数 Y 。一方面，通过显式控制误差 h ，并利用函数 L^∞ 的范数完成证明 u ，使我们能够避免研究方程（1.1）弱解的泛函性质，并得到纯粹的泛函结果。另一方面，显然我们的不等式仅对属于$\mathcal{W}$的有界函数成立。

为了陈述这一结果，我们首先需要引入以下集合

$$\mathcal{Q}_{zero} = \{(x,t) : |x_j| \leq \eta^{\alpha_j}, j = 1, \dots, N, -1 - \eta^2 < t \leq -1\}, \tag{2.5}$$
$$\mathcal{Q}_{ext} = \{(x,t) : |x_j| \leq 2^{\alpha_j} R, j = 1, \dots, N, -1 - \eta^2 < t \leq 0\},$$

其中 $R > 1$， $\eta \in (0,\ 1)$，指数 α_j，当 $j = 1,\ \dots\dots,\ N$，定义见（1.13）；$\mathcal{Q}_{zero}$和$\mathcal{Q}_{ext}$ 通过球表示引入。

定理 2.1 (弱 Poincar´e 不等式)。 设 $\eta \in (0,1)$；设 $\mathcal{Q}_{zero}$ 和 $\mathcal{Q}_{ext}$ 如 (2.5)中所定义。则存在 $R > 1$ 和 $\vartheta_0 \in (0,1)$ 使得对任意非负函数

$u \in \mathcal{W}$满足 $u \le M$属于 $\mathcal{Q}_1 = B_1 \times B_1 \times \ldots \times B_1 \times (-1, 0)$，其中正数常量为 M，且

$$|\{u = 0\} \cap \mathcal{Q}_{zero}| \ge \frac{1}{4} |\mathcal{Q}_{zero}|,$$

我们有

$$\|(u - \vartheta_0 M)_+\|_{L^2(\mathcal{Q}_1)} \le C_P \left(\|D_{m_0} u\|_{L^2(\mathcal{Q}_{ext})} + \|Yu\|_{L^2 H^{-1}(\mathcal{Q}_{ext})} \right),$$

其中 $C > 0$ 是一个与 . 有关的常数 d Q

这里采用的记号应按照（2.4）的含义来理解。特别地，我们有 $L^2 H^{-1}$（$\mathcal{Q}_{ext}$）是以下表达式的简写

$$L^2(B_{2^3R} \times \ldots \times B_{2^{2\kappa+1}R} \times (-1 - \eta^2, 0], H^{-1}_{x^{(0)}}(B_{2R})),$$

其中我们根据（ $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots\ldots, x^{(\kappa)})$ 2.1）对其进行拆分。

2.2. 索伯列夫不等式。 这里，我们给出一个适用于 $\mathcal{W}$ 中函数的索伯列夫不等式的证明。对于动理学柯尔莫哥洛夫方程的其他索伯列夫型嵌入，感兴趣的读者可参阅 [68] ；关于柯尔莫哥洛夫方程在非欧几里得几何背景下的插值结果，可参阅 [70] 。

现在，为了证明我们所需的索伯列夫不等式，我们首先回顾属于空间 $H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0})$ 的函数所满足的经典表述；该空间及其范数（2.2）和（2.3）已在前文引入。为此，我们回顾一下，当 $2 < m_0$ 时，可以引入索伯列夫指数

$$2^* = \frac{2m_0}{m_0 - 2}, \quad \text{such that } \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m_0}, \ 2^* > 2.$$

定理 2.2 ([20]中的推论 9.14)。设 Ω_{m_0} 是 $\mathbb{R}^{m_0}$ 中的有界开子集，具有 C^1边界，且 $m_0 > 2$。若 $u \in H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0})$，则 $u \in L^q(\Omega_{m_0})$，且 $q \in [2, 2^*]$，并且满足以下估计

$$\|u\|_{L^q(\Omega_{m_0})} \le C \|D_{m_0} u\|_{L^2(\Omega_{m_0})},$$

其中， C 是仅依赖于 m_0 和 Ω_0 的常数。

接着，按照 [6], 中提出的方法，我们证明了属于 $\mathcal{W}$ 的函数满足一种新的索伯列夫嵌入。我们相信，正如 [6] 中讨论并将在第 5 节进一步研究的非线性非局部动理学框架一样，以下嵌入可能有助于改进 De Giorgi-Nash-Moser 弱正则性理论的研究，见第 3 节。

定理 2.3. 设 $\Omega = \Omega_{N-m_0+1} \times \Omega_{m_0}$ 是$\mathbb{R}^{N+1}$的有界开子集，其中Ω_{m_0} 是$\mathbb{R}^{m_0}$ 的有界 C^1 区域，而Ω_{N-m_0+1} 是$\mathbb{R}^{N-m_0+1}$的有界 *Lipschitz*区域。令$u \in \mathcal{W}$ 和 $m_0 > 2$。那么，对每个 $q \in [2, 2^*]$，以下不等式成立

$$\int_{\Omega_{m_0}} \left| \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} u(x^{(0)}, y, t) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \right|^q \mathrm{d}x^{(0)}$$
$$\le C \left(\int_{\Omega_{m_0}} \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} |D_{m_0} u(x^{(0)}, y, t)|^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x^{(0)} \right)^{\frac{q}{2}}.$$

证明。 设 $u \in L^2(\Omega_{N-m_0+1}; H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0}))$。我们将 u关于变量 y 和 t 的平均值定义为

$$(u)_{y,t}(x^{(0)}) := \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} u(x^{(0)}, y, t) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t.$$

那么，$(u)_{y,\,t} \in H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0})$。事实上，由积分的单调性和 Jensen 不等式可得

$$\int_{\Omega_{m_0}} |(u)_{y,t}(x^{(0)})|^2 \mathrm{d}x^{(0)} \leq \int_{\Omega_{m_0}} \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} |u(x^{(0)},y,t)|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^{(0)}, \quad \text{and}$$
$$\int_{\Omega_{m_0}} |D_{m_0}(u)_{y,t}(x^{(0)})|^2 \mathrm{d}x^{(0)} \leq \int_{\Omega_{m_0}} \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} |D_{m_0}u(x^{(0)},y,t)|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^{(0)}.$$

现在，令 $q \in [2, 2^*]$。那么，通过应用定理 2.2 于 $(u)_{y,\,t}$ 我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{m_0}} |(u)_{y,t}(x^{(0)})|^q \mathrm{d}x^{(0)} &\leq C \left(\int_{\Omega_{m_0}} |D_{m_0}(u)_{y,t}(x^{(0)})|^2 \mathrm{d}x^{(0)} \right)^{\frac{q}{2}} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_{m_0}} \fint_{\Omega_{N-m_0+1}} |D_{m_0}u(x^{(0)},y,t)|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^{(0)} \right)^{\frac{q}{2}}.\end{aligned}$$

□

注 2.1。我们注意到，在 $m_0 \leq 2$ 的情形下，可以证明一个与定理 2.3 类似的结果。事实上，当 $m_0 = 1$ 时，函数 $(u)_{y,\,t} \in H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0})$ 是绝对连续的；而当 $m_0 = 2$ 时，则可借助 *Rellich-Kondrachov* 嵌入处理，因为对于任意 $q \in [2, \infty)$，均有 $(u)_{y,\,t} \in H^1_{x^{(0)}}(\Omega_{m_0}) \subset L^q(\Omega_{m_0})$。

3. De Giorgi-Nash-Moser 弱正则性理论

数十年来，将 De Giorgi-Nash-Moser 弱正则性理论推广到（1.1）型散度形式超抛物方程这一类方程中一直是一个开放问题。Pascucci 和 Polidoro 在 [69]，中取得了这一方向上的首次突破，证明了针对强弱解的 Moser 迭代方案，即满足 $u \in L^2$ 使得 $D_{m_0}u$, $Yu \in L^2$的弱解。随后，这一结果又在 [8, 27] 中推广到非膨胀不变情形。

基于这些局部有界性结果，针对强弱解的局部 H¨older 连续性随后由 Wang 和 Zhang 在 [80, 81] 针对 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的特定情形（1.5中进行了研究。随后，该方法在未发表的论文[82]中被推广至超抛物框架。上述研究采用的方法结合了为强弱解构造的 Sobolev 不等式和 Poincar´e 不等式，以及适当选取的 G 函数的定性性质。随后，遵循 Kruzkhov 水平集方法，通过给出振荡估计，得到了局部 H¨older 连续性 [52]。

近年来，学界开始关注将这些正则性结果推广至属于空间 W 的弱解，其定义如下。

定义 3.1。函数 $u \in \mathcal{W}$ 是方程(1.1) 在源项 $f \in L^2(\Omega)$下的一个弱解，当且仅当对每个非负测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，都有

$$\int_\Omega -\langle ADu, \mathrm{d}\varphi\rangle - uY\varphi + \langle b, Du\rangle\varphi + cu\varphi = \int_\Omega f\varphi. \tag{3.1}$$

接下来，我们还将考虑方程 (1.1) 的弱次解，即满足下列不等式的函数 $u \in \mathcal{W}$

$$\int_\Omega -\langle ADu, \mathrm{d}\varphi\rangle - uY\varphi + \langle b, Du\rangle\varphi + cu\varphi \overset{(\leq)}{\geq} \int_\Omega f\varphi, \tag{3.2}$$

对每个非负测试函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，函数 u 是方程 (1.1) 的超解，如果它满足 (3.2)，其中 $(\leq)$。

这一方向的首次尝试体现在开创性论文 [38], 中，作者提出了一种非构造性证明，证明动理学柯尔莫哥洛夫–福克–普朗克方程的弱解满足 Harnack 不等式（1.5）。这种方法基于经典能量估计以及 [19]中证明的先验分数阶估计。为了简化并拓展 [82], 中提出的证明，近年来有多位作者针对动理学情形下的 Harnack 不等式和 H¨older 连续性提出了替代证明，参见[39, 40, 45, 74, 75, 83]。

直到最近，两位作者才在 [10] 中将弱正则性理论拓展到超抛物情形；在引入以下两个集合后，他们的主要结果可表述如下：

$$\mathcal{Q}_+ = \delta_\omega\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_1\right) = B_\omega \times B_{\omega^3} \times \ldots \times B_{\omega^{2\kappa+1}} \times (-\omega^2, 0] \quad \text{and}$$
$$\widetilde{\mathcal{Q}}_- = (0, \ldots, 0, -1+2\rho^2) \circ \delta_\rho\left(\mathcal{Q}_1\right) = B_\rho \times B_{\rho^3} \times \ldots \times B_{\rho^{2\kappa+1}} \times (-1+\rho^2, -1+2\rho^2).$$

定理 3.1 (Harnack 不等式)。设 u 是定义在 $\widetilde{\Omega} \supset \mathcal{Q}_1$ 中的 $\mathscr{L}u = f$ 非负弱解，且满足假设 ***(H1)-(H2)-(H3)***。则有

$$\sup_{\widetilde{\mathcal{Q}}_-} u \leq C\left(\inf_{\mathcal{Q}_+} u + \|f\|_{L^q(\mathcal{Q}^0)}\right),$$

其中 $0 < \omega < 1$ 由定理 *3.4* 给出，且 $0 < \rho < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$。最后，常数 C、ω、ρ 仅依赖于齐次维数 Q，其定义见 (1.4)、q 以及椭圆性常数 λ 和 Λ

定理 3.2 (H¨older 正则性)。存在 $\alpha \in (0,1)$，其仅依赖于维数 Q、λ、Λ，使得所有在 (1.1) 下满足假设 ***(H1)-(H2)-(H3)*** 的 $\Omega \supset \mathcal{Q}_1$的弱解 u 满足

$$[u]_{C^\alpha(Q_{\frac{1}{2}})} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\mathcal{Q}_1)} + \|f\|_{L^q(\mathcal{Q}_1)}\right),$$

其中常数 C 仅依赖于齐次维数 Q，其定义见 (1.4)、q 以及椭圆性常数 λ 和 Λ。

请注意，上述估计可以在任意圆柱 $\mathcal{Q}_r(z_0)$ 中陈述并进行尺度变换。此外，这些结果与 [82], 中得到的结果可相互比较，但所采用的框架和方法不同。事实上，在 [10] 中，作者采用了 Guerand 和 Imbert 在 [39], 中提出的技术；Imbert 和 Silvestre 此前已在 [45], 中针对玻尔兹曼方程运用了该技术。该方法基于对属于空间 $\mathcal{W}$的函数所满足的弱 Poincar´e 不等式（定理 2.1）、针对弱次解的 L^2-L^∞ 估计（定理 3.3）以及针对弱超解的弱 Harnack 不等式（定理 3.4 ）。为求完整起见，下面将简要讨论这两种工具。

3.1. 局部有界性估计。这一结果的证明通过扩展莫泽迭代方案得出，该方案最初在 [61] 中针对抛物情形提出，并基于 Caccioppoli 型不等式与索伯列夫不等式的迭代结合。对于我们关注的超抛物情形，扩散部分的退化性仅允许我们通过 Caccioppoli 型不等式（亦称能量估计）来估计解的偏梯度 $D_{m_0}u$。此外，根据我们对弱解的定义，

u 并不属于经典 Sobolev 空间。不过，正如 [69], 中首先观察到的，

$$\mathscr{L}_0 u = (\mathscr{L}_0 - \mathscr{L})\, u + f = \mathrm{div}_{m_0}\left((\mathbb{I}_{m_0} - A)\, D_{m_0} u\right) + f.$$

因此，正如 [69, 第 396], 页所指出的，为了证明 (1.1) 的解满足索伯列夫嵌入，用主部算子 $\mathscr{L}_0$ 的基本解来表示 (1.1) 的解，似乎是十分自然的做法。这非常便利，因为我们可以利用 $\mathscr{L}_0$的基本解的显式表达式及其势估计，参见第 1.2小节。

文献中，我们可以找到将 Moser 迭代方案推广到如下类型的柯尔莫哥洛夫算子的多种结果 $\mathscr{L}$，例如参见 [27, 69, 82]。最新的结果见 [10]，其针对泛函空间 $\mathcal{W}$，具体如下。

定理 3.3。 设 $z_0 \in \Omega$ 和 $0 < \frac{r}{2} \le \rho < r \le 1$ 满足条件：$\mathcal{Q}_r(z_0) \subseteq \Omega$。设 u 是 Ω 内满足假设 *(H1)-(H2)-(H3)* 的非负弱解。则对每个 $p \ge 1$，存在两个正常数 $C = C\left(p, \lambda, \Lambda, Q, \| b \|_{L^q(\mathcal{Q}_r(z_0))}, \| c \|_{L^q(\mathcal{Q}_r(z_0))}\right)$，使得

$$\sup_{\mathcal{Q}_\rho(z_0)} u_l^p \le \frac{C}{(r-\rho)^{\frac{Q+2}{\beta}}} \| u_l^p \|_{L^\beta(\mathcal{Q}_r(z_0))},$$

其中，$\beta = \frac{q}{q-1}$，q在 *(H3)* 中引入，且 $u_l := u + k f k_{L^q(Q_r)}$。如果 u 是 *(1.1)* 关于 $p \ge 1$的非负弱次解，同样的结论也成立；如果 u 是 *(1.1)* 关于 $0 < p < \frac{1}{2}$ 的非负弱上解，结论亦然。特别地，取 $p = 1$后，对于 *(1.1)* 的每个次解，都有

$$\sup_{\mathcal{Q}_\rho(z_0)} u \le \frac{C}{(r-\rho)^{\frac{Q+2}{\beta}}} \left(\| u \|_{L^\beta(\mathcal{Q}_r(z_0))} + \| f \|_{L^q(\mathcal{Q}_r)} \right),$$

首先，我们注意到，上述结论对弱次解和弱上解也成立，但适用的 p范围不同。这取决于证明 Caccioppoli 型不等式时所选用的方法，另见[69, 注 1。3], 这是此类局部有界性结果的一个经典特点，参见例如 [82]。

此外，在对低阶系数要求较宽松的假设下，该结果仍然成立，即 $c, f \in L^q_{loc}(\Omega)$ 和 $b \in (L^q_{loc}(\Omega))^{m_0}$，其中某个 $q > \frac{3}{4}(Q+2)$ 满足 div $b \ge 0$在 Ω 中。对散度符号的额外要求，是降低对 b的可积性要求所必须付出的代价。事实上，空间 W 的非标准结构带来了证明局部有界性结果时的若干内在困难。其中包括无法将项b 的可积性要求降低至 $\frac{Q+2}{2}$，即抛物齐次维数 $N/2$的亚椭圆对应物。

我们相信，通过在2.2 定理的证明方法中利用 $L^2 - L^\infty$ 对弱次解的估计，可以进一步改进低阶系数的可积性要求。

3.2. 弱 Harnack 不等式。 这一结果的证明方法扩展了经典方法，该方法最初用于椭圆情形和抛物情形，见 [52]，随后 Guerand 和 Imbert 将其用于 [39] 中的 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程。该方法结合了如下事实：方程（1.1）的超解会随时间扩展正性，并采用了恰当的覆盖论证。值得注意的是，这种方法非常适合研究弱正则性理论，因为它仅依赖于空间 $\mathcal{W}$的函数结构以及非欧几里得几何情形。据我们所知，对于 1.1）的解，目前唯一可用的此类弱 Harnack 不等式是针对

框架 $\mathcal{W}$。此外，我们强调，根据 c的符号，我们的结论适用于解或超解。这主要归因于 [10], 所采用的证明方法；而在不对 c 的符号作任何假设的情况下将这一结果推广到超解，仍是一个开放问题。

定理 3.4 （弱 Harnack 不等式）。设 $R_0 > 0$。令 $\mathcal{Q}^0 = B_{R_0} \times B_{R_0} \times \ldots \times B_{R_0} \times (-1, 0]$，且令 u 为满足假设 ***(H1)-(H3)*** 的 $\Omega \supset \mathcal{Q}^0$ 中 $\mathscr{L}u = f$ 的非负弱解。则有

$$\left(\int_{\mathcal{Q}_-} u^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\inf_{\mathcal{Q}_+} u + \|f\|_{L^q(\mathcal{Q}^0)} \right),$$

其中 $Q_+ = B_\omega \times B_{\omega^3} \times \ldots \times B_{\omega^{2\kappa+1}} \times (-\omega^2, 0]$，且 $Q_- = B_\omega \times B_{\omega^3} \times \ldots \times B_{\omega^{2\kappa+1}} \times (-1, -1 + \omega^2]$。此外，常数 C、 p、 ω 和 R_0 仅依赖于 ***(1.4)*** 中定义的齐次维数 Q 、 q 以及椭圆性常数 λ 和 Λ。另外，如果项 c 为正，则该结论对于 ***(1.1)*** 的非负超解也成立。

3.3. Harnack 不等式的应用。 众所周知，不变 Harnack 不等式是正则性理论中最有力的工具之一。本小节将简要讨论定理 3.1在考虑具有粗糙系数的柯尔莫哥洛夫算子时的一些重要应用。

首先，不变 Harnack 不等式可用于构造 Harnack 链。连接定义域中任意给定起点 z_0 和终点 z_k 的 Harnack 链，是由定义域中的点组成的集合 $\{z_0, z_1, \ldots\ldots, z_k\}$，其中存在 k 正常数$C_1, \ldots\ldots, C_k$，使得

$$u(z_j) \leq C_j u(z_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, k$$

对于 Ω 中方程 $\mathscr{L}u = f$ 的每个非负解。因此，Harnack 链是一组点，Harnack 不等式提供的定量信息能够沿着这些点传播。多年来，这一工具被广泛应用，尤其是结合控制理论和优化技术，用于研究方程 $\mathscr{L}u = f$经典解的定性性质；在这些研究中，系数的正则性被假定为 Hölder 连续或更高，参见例如 [54]。

自定理 3.1 得以证明以来，针对弱基本解的界，已有各种定性结果 [11, 53] 通过将这些技术应用于粗糙系数情形而得到了确立。此外，我们回顾一下相关研究 [4], ，其中作者为 Kolmogorov-Fokker-Planck 情形下 Harnack 不等式成立的集合以及强最大值原理给出了几何刻画。请注意，由于这两项后续结果的证明基于 Harnack 链、控制理论和不变 Harnack 不等式，因此其证明也可直接应用于我们关注的更一般情形（1.1）。

4. 物理学与经济学中的应用

本节旨在阐明研究这类算子（1.1）的动机：我们将通过实例说明 Kolmogorov 方程（及相关正则性结果）在经济学、物理学等多个研究领域中现实问题上的应用。具体而言，我们首先介绍期权定价方面的应用，并特别

关注美式期权和亚式期权。随后，我们将介绍关于相对论性 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的新结果。最后，我们将分析线性 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程（1.5）与玻尔兹曼方程之间的联系。

4.1. 美式期权与亚式期权。 在数理金融中，1.1) 形式的方程出现在用于金融工具定价的各种模型中，例如亚式期权和美式期权（例如，参见 [14, 67]），也出现在随机效用理论 [13] 和随机波动率模型 [41]中。本文聚焦于方程（1.1）在亚式期权和美式期权中的应用，并概述这一领域的最新成果。关于柯尔莫哥洛夫算子 $\mathscr{L}$ 在金融学和随机理论中的应用，更全面的分析可参阅专著 [67] Pascucci 所著的著作。

亚式期权是一类路径依赖衍生品，其收益取决于标的股票价格在某一特定时间区间内的平均值。在布莱克-舒尔斯框架中，标的股票 S_t 和债券 B_t 的价格由以下过程描述

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, \qquad B_t = B_0 e^{rt}, \qquad 0 \le t \le T,$$

其中 μ, r, T 和 σ 是给定常数。在这种设定下，连续路径依赖期权的价格 $(Z_t)_{0\le t\le T}$ 是函数 $Z_t = Z(S_t, A_t, t)$，它取决于股票价格S_t、到期时间 t 以及股票价格的平均值 A_t

$$A_t = \int_0^t f(S_\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [0, T],$$

并通过求解以下柯西问题来计算

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} + f(S)\frac{\partial Z}{\partial A} + r\left(S\frac{\partial Z}{\partial S} - Z\right) + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 & (S, A, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ Z(S, A, T) = \varphi(S, A) & (S, A) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{4.1}$$

我们指出，初始数据 φ 在（4.1）中对应于期权的收益。此外，根据函数 f（S）的选择，我们会得到不同的 Kolmogorov 型方程，其系数局部为 H¨older 连续。在[5] 这一框架下，第一作者 Muzzioli 和 Polidoro 证明了几何平均亚洲期权（即当 f（S）$=$ log（S）时）以及算术平均亚洲期权（即当 f（S）$= S$ 的基本解存在且唯一。

另一方面，具有收益 ψ 的美式期权是一种合约，赋予持有人在选定时刻 $t \in [0, T]$ 收取金额 $\psi(X_t)$ 的权利，其中 $X = (X_t^x)$ 是一个 N 维扩散过程，它满足随机微分方程

$$dX_t^x = BX_t^x dt + \sigma(t, X_t^x) dW_t,$$

其中 $X^{t_0,\ x}_{\cdot,\ t_0} = x$ 对于（x，t_0）$\in \mathrm{R}^N \times [0, T]$，并且如通常所示，$(W_t)_{t\ge 0}$ 表示一个 n 维维纳过程，$1 \le n \le N$。

特别是，方程（1.1）与确定美式期权无套利价格的问题密切相关。事实上，有相当多类美式期权，其对应的扩散过程 X 与某些柯尔莫哥洛夫型算子相关联，这些算子并非一致抛物型，且具有（1.1）所示的形式。美式风格期权（参见 [14]）以及采用文献 [41]中引入的随机波动率定价的美式期权，便是其中两个例子。此外，根据经典套利理论

（例如，参见 [67]），假设无风险利率为零时，美式期权在时间 t 的无套利价格由以下最优停止问题给出

$$u(x,t) = \sup_{\tau\in[t,T]} E\left[\psi\left(X_\tau^{t,x}\right)\right],$$

其中，上确界取遍所有停止时刻 $\tau \in [t,T]$ 的 X。在[66], 中，证明了函数 u 在（4.1）是障碍问题的一个解

$$\begin{cases} \max\{\mathscr{L}u - f, \psi - u\} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \\ u(x,t) = g & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中，$\mathscr{L}$ 是迹形式下的算子（1.1），障碍函数 ψ 对应于期权的收益，是 Ω 上满足关于变量 x_1、.....、x_n 的弱凸性条件的 Lipschitz 连续函数（见 [30, 假设 H4。]）。

鉴于障碍问题（4.2）在金融学中的重要性，相关数学研究早已在论文 [30, 34, 62]中展开。更具体地说，[30]的主要结果是：通过改进经典罚函数技术，证明了问题（4.2）在某些有界柱状区域及条带区域$\mathbb{R}^N \times [0,T]$ 上存在强解。另一方面，论文 [34, 62] 的主要目的是证明方程（4.2）解的一些新正则性结果。特别是，[34] 讨论了问题（4.2）解的最优内部正则性，而 [62] 则包含了关于 Cauchy-Dirichlet 问题及问题（4.2）解在初始状态附近正则性的新结果。

然而，[30, 34, 62] 其中包含的所有结果仅对强解以及满足上述凸性条件的连续障碍函数成立。直到最近，第一作者和第三作者才开始在 [12] 更一般且更自然的框架下研究与柯尔莫哥洛夫算子相关的障碍问题，即考虑与

$$\mathscr{K}u(v,x,t) := \nabla_v \cdot (A(v,x,t)\nabla_v u(v,x,t)) + v \cdot \nabla_x u(v,x,t) - \partial_t u(v,x,t),$$

函数空间$\mathcal{W}$ 第2节中引入的空间。具体而言，按照标准方式（参见[51, 第 6]章），在 [12] 中假设障碍函数 ψ 和边界数据 g 具有与函数 u相同的正则性，即 $\psi \in \mathcal{W}(\Omega_v \times \Omega_{xt})$ 和 $g \in \mathcal{W}(\Omega_v \times \Omega_{xt})$，其中 $\Omega := \Omega_v \times \Omega_{xt}$ 是$\mathbb{R}^{2n+1}$ 的一个子集，满足以下假设：

(D) $\Omega_v \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界的Lipschitz区域，且 $\Omega_{xt} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个有界区域，其中 $C^{1,\,1}_{t.}$-边界，即 $C^{1,\,1}$-相对于输运算子 Y 光滑，并且

得益于这一假设，可以引入外指单位法向量 N 到 Ω_{xt}，并以经典方式将集合 Ω 的 Kolmogorov边界定义为

$$\partial_K(\Omega_v \times \Omega_{xt}) := (\partial\Omega_v \times \Omega_{xt}) \cup \left\{(v,x,t) \in \overline{\Omega}_v \times \partial\Omega_{xt} \mid (v,-1)\cdot N_{xt} > 0\right\},$$

它在算子 $\mathscr{L}$ 的语境下，充当了亚椭圆对应物；而对于一致抛物型方程的 Cauchy-Dirichlet 问题，抛物边界正是在该语境下被考虑的。与 [30, 34, 62, 66], 中的 [12] 相比，作者通过考虑 $f \in L^2(\Omega_{xt},\ H^{-1}(\Omega_v))$，放宽了对右端项的正则性假设。此外，文中还考虑了以下比（4.2）更一般的障碍问题

$$\begin{cases} \mathscr{K}u(v,x,t) = f(v,x,t) & (v,x,t) \in \Omega, \\ u(v,x,t) \geq \psi(v,x,t) & (v,x,t) \in \Omega, \\ u(v,x,t) = g & (v,x,t) \in \partial_K\Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中，边界条件需要按照迹的意义来理解为已达到，障碍条件在 $W(\Omega_v \times \Omega_{xt})$ 中成立，并且

$$\psi \leq g \ \text{ on } \partial_K(\Omega_v \times \Omega_{xt}) \quad \text{in} \quad \mathcal{W}(\Omega_v \times \Omega_{xt}).$$

最后，条件 $\mathscr{K}u(v,\ x,\ t) = f(v,\ x,\ t)$ 对于 $(v,\ x,\ t) \in \Omega$ 出现在 (4.3) 中，应解释为：

$$0 = \iiint_{\Omega_v \times \Omega_{xt}} A(v,x,t)\nabla_v u \cdot \nabla_v \varphi \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_{xt}} \langle f(\cdot,x,t) - Yu(\cdot,x,t) | \varphi(\cdot,x,t)\rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

对每个 $\varphi \in L^2(\Omega_{xt},\ H_c^1(\Omega_v))$，且其中 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是 $H^{-1}(\Omega_v)$ 中的标准对偶配对。于是， [12] 的主要结果如下。

定理 4.1。 *假设扩散矩阵 A 在 (4.1) 中满足关于 $m_0 = n$ 的椭圆性条件 (H1)。设 $f \in L^2(\Omega_{xt}, H^{-1}(\Omega_v))$ 且 $g, \psi \in W(\Omega_v \times \Omega_{xt})$，其中 Ω 是 R^{2n+1} 的子集，并满足假设 (D)。那么，障碍问题 (4.3) 存在唯一的弱解 $u \in W(\Omega_v \times \Omega_{xt})$，其意义由方程 (4.4) 给出。此外，存在常数 C，它仅依赖于 d 和 $\Omega_v \times \Omega_{xt}$，使得*

$$\|u\|_{\mathcal{W}(\Omega_{xt}\times\Omega_v)} \leq C\left(\|g\|_{\mathcal{W}(\Omega_{xt}\times\Omega_v)} + \|f\|_{L^2(\Omega_{xt},H^{-1}(\Omega_v))}\right).$$

我们最终指出，借助 [12] ，作者旨在以变分法为框架，开启对障碍问题（4.3）的研究：将求解方程（4.3）的问题改写为寻找泛函的一个零极小元

$$\inf\Big\{ \iiint_{\Omega_v \times \Omega_{xt}} \frac{1}{2}\left(A\left(\nabla_v u - \mathfrak{J}\right)\right) \cdot \left(\nabla_v u - \mathfrak{J}\right) \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ : \ \mathfrak{J} \in \left(L^2(\Omega_{xt}; L^2(\Omega_v))\right)^n \ s.t.\ \nabla_v \cdot (A\mathfrak{J}) = f - Yu \Big\}, \tag{4.5}$$

显然，式（4.5）中的下确界非负；并且，给定方程（ u 的一个解，若取4.3） $\mathfrak{J} = \nabla_v u$，则式（4.5）在 u处取值为零。此外，容易证明式（4.5）中的泛函是一致凸的，且在零处达到其最小值。最后，我们注意到，该泛函为第2节中给出的泛函动理学空间定义提供了依据。然而，能否运用变分法中的经典工具来研究与泛函（4.5）相关的变分问题，仍是一个开放问题。

4.2. 相对论福克-普朗克方程。 正如例1.1所指出的，Kolmogorov 算子类（1.1）出现在许多物理学应用中。因此，我们在狭义相对论框架下考虑方程（1.15），即

$$\mathscr{L}u(p,x,t) = \sqrt{|p|^2+1}\,\nabla_p \cdot (D\,\nabla_p u) - p \cdot \nabla_x u - \sqrt{|p|^2+1}\,\partial_t u = 0, \tag{4.6}$$

其中 $(p, x, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ 和 D 是相对论扩散矩阵，其定义为

$$D = \frac{1}{\sqrt{|p|^2+1}}\left(\mathbb{I}_n + p \otimes p\right).$$

这里及下文中，I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵，并且

$$p \otimes p = (p_i p_j)_{i,j=1,\dots,n}.$$

在此背景下，解 $u = u(p,\ x,\ t)$ 表示在时间 t，相空间中动量为 p 、位置为 x 的粒子密度。方程（4.6）是一个推广形式，它

与无摩擦动力学福克-普朗克方程（1.15）的狭义相对论形式相符，因为相对论速度

$$v = \frac{p}{\sqrt{|p|^2+1}},$$

显然满足

$$\left|\frac{p}{\sqrt{|p|^2+1}}\right| < 1 \quad \text{for every } p \in \mathbb{R}^n,$$

符合相对论原理[1]。

算子 $\mathscr{L}$ 在 (4.6) 中可作为 $\mathscr{K}_0$ 在 (1.15) 中的一个合适的相对论版本，因为它保留了非相对论情形下的一些相关性质（更严格的方程 ([3] 推导见4.6）。特别是，算子 $\mathscr{L}$ 满足性质 (1.17) 的相对论对应形式，即它在洛伦兹变换下保持不变。利用这一性质，在 [9] Polidoro 和另外两位作者通过如下定义合成律，构造了 $\mathscr{L}$ 的不变群。

$$(p_0,x_0,t_0)\circ_{\mathcal{L}}(p,x,t) = \Big(p\sqrt{|p_0|^2+1}+p_0\sqrt{|p|^2+1}, \\ x_0+x\sqrt{|p_0|^2+1}+p_0 t, t_0+t\sqrt{|p_0|^2+1}+p_0\cdot x\Big). \tag{4.7}$$

我们注意到，当速度 $\sqrt{1+|p_0|^2} \approx 1$ 较小时，因此 (4.7) 正好变为变量 1.16下的非相对论合成律 p 和 x。引入合成律 (4.7)，进而在空间 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上引入适当的非欧结构，可显著简化对算子 $\mathscr{L}$正则性的研究。

与（1.15）中的非相对论算子一样， $\mathscr{L}$ 是一个强退化微分算子，因为只有关于动量变量 $p \in \mathbb{R}^n$的二阶导数出现。然而， $\mathscr{L}$ 的一阶部分具有强正则化性质，即$\mathscr{L}$ 是亚椭圆的。事实上（见 [9, 附录 A]），我们可以将 $\mathscr{L}$写成平方和加漂移项

$$\mathscr{L} := \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + X_{n+1},$$

with

$$X_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{jk}+\frac{p_j p_k}{1+\sqrt{|p|^2+1}}\right)\frac{\partial}{\partial p_k}, \quad j=1,\dots,n, \quad \text{and} \quad X_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} c_k(p)X_k - Y,$$

其中 c_1， $\dots c_n$ 是光滑函数，并且

$$Y = p\cdot\nabla_x + \sqrt{|p|^2+1}\,\frac{\partial}{\partial t}.$$

此外，如 [9, 附录 A]所示， $\mathscr{L}$ 满足 H¨ormander 秩条件（1.9），在每一点（p， x， t） $\in \mathbb{R}^{2n+1}$。

因此，自然可以考虑（1.6）的相对论对应形式，即

$$\begin{cases} P_s = p_0 + \sqrt{2}\int_0^s \sqrt{P_\tau^2+1}\,dW_\tau, \\ X_s = x_0 + \int_0^s P_\tau \mathrm{d}\tau, \\ T_s = t_0 + \int_0^s \sqrt{P_\tau^2+1}\,\mathrm{d}\tau, \end{cases} \tag{4.8}$$

[1]在此，我们采用自然单位制，其中 $c=1$，且 c 为光速。

其中第三个分量是时间，在相对论情形下，时间并非绝对量。显然，(4.6) 是描述随机过程 (4.8) 密度的相对论确定性方程。 [9] 的主要结果为这种密度函数提供了一个下界，对于 $(p, x, t) \in \mathbb{R}^3$，可表述如下。

定理 4.2。设 Γ 是 $\mathscr{L}$ 在 (4.6)中的基本解。那么，对每个 $T > 0$，存在三个正常数 θ、c_T、C，满足 $\theta < 1$，使得

$$\Gamma(p_1, x_1, t_1; p_0, x_0, t_0) \geq \frac{c_T}{(t_1 - t_0)^2} \exp\left\{-C\,\Psi\left(p_1, x_1, y_1; p_0, x_0, \theta^2 t_0 + (1-\theta^2)t_1\right)\right\}$$

对每个 $(p_0、\ x_0、\ t_0)$，$(p_1、\ x_1、\ t_1) \in \mathbb{R}^3$ 使得 $0 < t_1 - t_0 < T$。常数 θ 和 C 仅依赖于 $\mathscr{L}$，而 c_T 还依赖于 T。此外，Ψ 是一个合适的最优控制问题的 值函数 （见 [9, 第 3]节）。

我们指出，定理 4.2 仅仅是朝着在恰当的偏微分方程理论框架下，对 $\mathscr{L}$ 开展系统且更全面研究的第一步。事实上， [9] 旨在提出一种方法，以推动随机理论与动理学理论的多方面发展；其最终目标是将 [7] 中讨论的经典理论推广到相对论情形。

4.3. 玻尔兹曼方程。 在 Kolmogorov 算子应用于物理建模的诸多经典案例中，有玻尔兹曼算子，其中（1.5）表示一种线性化。在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中，“玻尔兹曼方程”写作

$$\partial_t u(v,x,t) + v \cdot \nabla_x u(v,x,t) = \mathcal{L}_K(u), \quad \text{for } (v,x,t) \in B_1 \times B_1 \times (-1,0], \tag{4.9}$$

其中，函数 $u \equiv u(v,\ x,\ t)$ 对任意 $(v,\ x,\ t) \in \mathbb{R}^n \times B_1 \times (-1,\ 0]$ 均有定义，而非局部的碰撞算子 L_K 定义为

$$\mathcal{L}_K(u) := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}} \left(u(v_*')u(v') - u(v_*)u(v)\right) K\left(|v - v_*|, \cos\theta\right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}\sigma,$$

其中，v_*' 和 v' 通过以下公式，利用 v、v_* 和 σ 计算得到

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma \quad \text{and} \quad v_*' = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma,$$

并且，θ 是衡量 v 与 v' 之间偏差的角度，其余弦定义为

$$\cos\theta := \frac{v + v_*}{|v - v_{*|}}\sigma.$$

方程 (4.9) 描述了稀薄气体的动力学。事实上，(4.9) 左端的输运项 $\left(\partial_t + v \cdot \nabla_x\right)$ 描述了在没有外力作用时粒子沿直线运动这一事实，而扩散项 L_K 则表示粒子相互作用所引起的速度涨落。在这一设定下，解 u 表示位置为 x 、速度为 v 的粒子在时间 t 的粒子密度，从统计意义上刻画了气体的状态。此外， v, v_* 和 v', v_*' 分别表示两个不同粒子的碰撞前后速度。从初始速度 v, v_* 变为碰撞后的速度 v', v_*' 的速率由核 K 给出，该核通常称为碰撞核。关于当碰撞核确实与.....一致时方程 (4.9) 的解的正则性及相关性质，感兴趣的读者可参见 [45, 46] 及其中的参考文献。

$$K(r, \cos\theta) = r^{\alpha} b(\cos\theta), \qquad \text{with } b(\cos\theta) \approx |\sin(\theta/2)|^{-(n-1)-2s},$$

其中 $\alpha > -n$ 和 $s \in (0, 1)$。

5. 非线性非局部柯尔莫哥洛夫–福克–普朗克方程

近年来，人们对非线性算子的分数次幂研究兴趣日益浓厚。这不仅是因为这类算子出现在物理学、生物学和金融学的许多具体模型中，也因为其数学本质颇具挑战性，主要原因在于非线性与非局部行为同时存在（例如参见 [21] 及其中的参考文献）。

当然，全面综述相关文献超出了本文概述的范围，但仍提及 [28, 29],，作者在该文中证明了以分数次 p-拉普拉斯算子为模型的（椭圆型）非线性分数阶算子满足德乔治–纳什–莫泽理论；另请参见综述文章 [64] 及其中的参考文献。此外，我们还回顾了抛物情形下的一些重要成果，例如 [31] 研究了超线性情形下当 $p \geq 2$时的德乔治–纳什–莫泽理论，以及近期论文 [1, 56] 对任意指数 $p \in (1, \infty)$ 情形下的 H¨older 正则性进行了研究。

因此，对于该领域的研究群体而言，开始考虑其扩散部分由分数阶 p-拉普拉斯算子建模的超抛物方程，以期将正则性理论的研究扩展到这一情形，是十分自然的。现在的参考模型是玻尔兹曼方程的一个非线性版本（4.9），其定义为

$$\partial_t u(v,x,t) + v \cdot \nabla_x u(v,x,t) + \mathcal{L}_K(u) = f(v,x,t,u), \qquad \text{in } \mathbb{R}^{2n+1}. \tag{5.1}$$

在上一个公式中，非齐次项 $f\colon \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足下述增长条件的 Carath´eodory 函数

$$|f(v,x,t,u)| \leq c_{\mathrm{o}}|u|^{\gamma-1} + h(v,x,t), \qquad \text{for a. e. } (v,x,t,u) \in \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R},$$

对于某个正常数 c_{o}，$\gamma \in (1, p]$ 以及给定函数 $h \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2n+1})$。

主算子 L_K 表示速度变量中的“扩散”，是一个可微阶数为 $s \in (0, 1)$、可积性指数为 $p \in (1, \infty)$ 的积分微分算子，其显式表达式为

$$\mathcal{L}_K(u)(v,x,t) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(v)} \mathcal{A}u(v,w,x,t) K(v,w)\, \mathrm{d}w, \tag{5.2}$$

为便于阅读，记

$$\mathcal{A}u(v,w,x,t) := |u(v,x,t) - u(w,x,t)|^{p-2}(u(v,x,t) - u(w,x,t)).$$

算子 L_K 由其非对称可测核 $K\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ 驱动，该核对某个 $0 < \lambda \leq \Lambda$ 满足以下界

$$\lambda |v-w|^{-n-sp} \leq K(v,w) \leq \Lambda |v-w|^{-n-sp}, \qquad \text{for a. e. } v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

我们指出，算子（5.2）在线性情形下，且作用于非负函数时，与（4.9）中的玻尔兹曼扩散项相容，其中 $p = 2$。事实上，若以下宏观物理量（5.3）与玻尔兹曼碰撞核（4.3）相容，则

$$\begin{aligned} M(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} u(v,x,t)\, \mathrm{d}v \qquad \text{(mass density)}, \\ E(x,t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} u(v,x,t)|v|^2\, \mathrm{d}v \qquad \text{(energy density)}, \end{aligned}$$

$$H(x,t) \quad := \quad \int_{\mathbb{R}^n} u \ln u(v,x,t)\,\mathrm{d}v \qquad \text{(entropy density)},$$

有界；例如，参见[45, 假设 1。1]。因此，方程（5.1）可视为（4.9）的推广，因此，研究其相关弱解的定性性质和正则性颇有意义。

在线性情形下，$p=2$ 已有许多重要成果，例如 H¨older 正则 [76]性、L^p估计、[26, 43]，亚椭圆正则性 [55]，、弱解的存在性 [79]以及粘性意义下解的存在性、唯一性和正则性 [44]。

此外，我们回顾近期的一篇论文 [58]，其中作者证明了 H¨older 连续性，并为非负且先验有界的分数阶 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程弱解证明了一些弱 Harnack 型不等式。

然而，在涉及 p-增长的更一般情形下，相关理论完全缺失，而下面定理 5.2 中的结果由两位作者在 [6],中证明，5.1将是首个此类结果，同时也是首次尝试证明方程（5.1）的弱解具有某些预期的局部性质。

此外，定理 5.2 即使在线性情形下也是新的，此时 $p=2$ 在正则性理论中通常将有界性作为假设；例如参见前述 [58,定理 1。2]。

本节中，我们将回顾一些有助于研究 (5.1) 的底层几何与分数阶函数空间框架的性质。随后，我们将回顾 (5.1) 的弱解在任意可积性指数 $p\in(1,\ +\infty)$ 下的有界性估计，并为读者提供其与文献中已有结果的比较，以及相关开放问题和进一步发展方向的介绍。

5.1. 几何与函数分析框架。与前几节一样，我们用 $z=(v,\ x,\ t)$ 表示 R^{2n+1} 中的点，并按如下方式在 R^{2n+1} 上定义一族各向异性膨胀 $(\delta_r)_{r>0}$

$$\delta_r = \mathrm{diag}(r\mathbb{I}_n, r^{1+sp}\mathbb{I}_n, r^{sp}t), \quad \forall r>0.$$

首先，我们注意到，当 s 趋于 1 时，便可恢复在线性 Kolmogorov-Fokker-Planck 算子的情形下于 (1.12) 中引入的膨胀族。此外，与线性情形类似，方程 (5.1) 关于刚刚引入的膨胀群 $(\delta_r)_{r>0}$ 是二次齐次的。此外，我们在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上赋予乘法律

$$z_0\circ z = (v_0+v, x_0+x+tv_0, t_0+t), \qquad \forall z_0=(v_0,x_0,t_0)\in\mathbb{R}^{2n+1}, \tag{5.4}$$

即为在线性 Kolmogorov-Fokker-Planck 情形中所考虑的伽利略变量变换（1.16）。这是因为，从几何角度看，平移族与输运算子的形式紧密相关；在此情形下，该形式与（1.5）中所考虑的相同，即由 $\partial_t+v\cdot\nabla_x$ 给出。由此，$\mathbb{K}:=(\mathbb{R}^{2n+1},\circ)$ 是一个李群，其单位元为 $e:=(0,0,0)$，逆元为

$$z^{-1} := (-v,-x+tv,-t), \qquad \forall z=(v,x,t)\in\mathbb{R}^{2n+1},$$

并且，对于足够正则的函数，方程（5.1）在李乘积“$\circ$”下保持不变。

接下来，仿照局部框架，我们引入两族分数阶动力学圆柱；其中一族由上述膨胀变换和乘法律定义，

$$Q_r(z_0) := \big\{z:\ |v-v_0|<r,\ |x-x_0-(t-t_0)v_0|<r^{1+sp},\ t_0-r^{sp}<t<t_0\big\}, \tag{5.5}$$

另一族则通过球表示公式定义。

$$\mathcal{Q}_r(z_0) := B_r(v_0) \times U_r(x_0,t_0) := B_r(v_0) \times B_{r^{1+sp}}(x_0) \times (t_0 - r^{sp}, t_0). \tag{5.6}$$

以下所有结果均针对按（5.6）中球表示定义的圆柱体。这些圆柱体与（5.5）中定义的圆柱体等价。事实上，以下引理成立；参见 [6,引理 2。2]。

引理 5.1。 对于每个 $z_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ 以及每个 $r > 0$，都存在一个正常数 ϑ，使得

$$Q_{\frac{r}{\vartheta}}(z_0) \subset \mathcal{Q}_r(z_0) \subset Q_{r\vartheta}(z_0).$$

现在我们引入分数阶函数空间框架。对于任意 $s \in (0,1)$ 和 $p \in (1,\infty)$，我们将分数阶 Sobole夫空间定义为

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ g \in L^p(\mathbb{R}^n) : \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|g(v)-g(w)|^p}{|v-w|^{n+sp}} \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w < \infty \Big\},$$

并赋予其范数

$$\|g\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|g(v)-g(w)|^p}{|v-w|^{n+sp}} \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \right)^{\frac{1}{p}},$$

从而使其成为 Banach空间。类似地，可以在开有界集 $\Omega_v \subset \mathbb{R}^n$ 上定义分数阶 Sobole夫空间 $W^{s,p}(\Omega_v)$。最后，我们将 $W^{s,p}_0(\Omega_v)$ 记为 $C_c^\infty(\Omega_v)$ 关于 $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega_v)}$ 的闭包。

研究诸如 L_K 这样的算子，其难点在于算子本身的定义。事实上，我们既要处理其非线性结构，也要处理其非局部行为。因此，正如分数阶框架中的常见做法，为了谨慎控制研究分数阶问题时自然产生的长程相互作用，需要将尾部型贡献纳入考量。在科尔莫戈罗夫–福克–普朗克框架中，动力学非局部尾部主要考虑与核中出现的速度变量相关的长程贡献。

定义 5.1. 设 $z_0 \in \Omega := \Omega_v \times \Omega_x \times (t_1,t_2) \subset R^{2n+1}$ 且 $r > 0$ 满足 $B_r(v_0) \times U_{2r}(x_0,t_0) \subset \Omega_v \times \Omega_x \times (t_1,t_2)$。设 u 是定义在 $R^n \times \Omega_x \times (t_1,t_2)$ 上的可测函数。那么，对任意 $r > 0$，我们将 u 关于 z_0 和 r 的动力学非局部尾部定义为

$$\mathrm{Tail}(u;z_0,r) := \left(r^{sp} \fint_{U_{2r}(t_0,x_0)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(v_0)} \frac{|u(v,x,t)|^{p-1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{|v-v_0|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

此外，我们将 u 关于 z_0 和 r 的动力学非局部上确界尾部 定义为

$$\mathrm{Tail}_\infty(u;z_0,r) := \left(r^{sp} \sup_{(x,t)\in U_{2r}(x_0,t_0)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(v_0)} \frac{|u(v,x,t)|^{p-1}\,\mathrm{d}v}{|v-v_0|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{5.7}$$

函数的非局部尾部最初在上述论文中于椭圆情形下引入 [28, 29]，随后被用于推导非局部算子弱解的精细性质；参见 [64] 及其中的参考文献。抛物情形下的各种推广见 [1, 31, 50, 56, 77, 78]。此外，在 [60,65] 中，为 n维海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 的次黎曼框架定义了一个类似的量；尽管这一概念提出不久，它已被用于证明分数阶（可能是非线性）方程解的一些正则性结果；参见 [36, 71]。

借助这一点记号，可以引入方程（5.1）的弱解定义，即属于空间

$$\mathcal{W} := \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}; W^{s,p}(\mathbb{R}^n)) : (\partial_t u + v \cdot \nabla_x u) \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}; (W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*) \right\}$$

并且按以下意义满足（5.1）。

定义 5.2。 设 $\Omega := \Omega_v \times \Omega_x \times (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$。函数 $u \in \mathcal{W}$ 是方程 (5.1) 在 Ω 中的弱次解（分别地，上解），如果

$$\mathrm{Tail}_\infty(u_+; z_0, r) < \infty, \qquad (resp.\ \mathrm{Tail}_\infty(u_-; z_0, r) < \infty), \tag{5.8}$$

对于任意满足以下条件的 z_0 和 $r > 0$： $U_{2r}(x_0, t_0) \subset \Omega_x \times (t_1, t_2)$ 以及 $B_r(v_0) \subset \Omega_v$，并且

$$\int_{\Omega_x \times (t_1,t_2)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathcal{A}u(v,w,x,t)\,(\varphi(v,x,t) - \varphi(w,x,t))\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\geq \ (\leq,\ resp.) \int_{\mathbb{R}^n \times \Omega_x \times (t_1,t_2)} (u\,\partial_t\varphi + u\,v \cdot \nabla_x \varphi + f(u)\varphi)\,(v,x,t)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

对于任意非负的 $\varphi \in L^p(\Omega_x \times (t_1, t_2); W^{s,p}_{,0}(\Omega_v))$，满足 $(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi) \in L^{p'}(\Omega_x \times (t_1, t_2); (W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*)$ 且 $\mathrm{supp}(\varphi) \Subset \Omega$。

我们称 u 是 (5.1) 在 Ω 中的弱解

$$\mathrm{Tail}_\infty(u; z_0, r) < \infty, \tag{5.9}$$

对于任意满足以下条件的 z_0 和 $r > 0$： $U_{2r}(x_0, t_0) \subset \Omega_x \times (t_1, t_2)$ 且 $B_r(v_0) \subset \Omega_v$，并且

$$\int_{\Omega_x \times (t_1,t_2)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathcal{A}u(v,w,x,t)\,(\varphi(v,x,t) - \varphi(w,x,t))\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \Omega_x \times (t_1,t_2)} (u\,\partial_t\varphi + u\,v \cdot \nabla_x \varphi + f(u)\varphi)\,(v,x,t)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

对于任意 $\varphi \in L^p(\Omega_x \times (t_1, t_2); W^{s,p}_{,0}(\Omega_v))$ 满足 $(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi) \in L^{p'}(\Omega_x \times (t_1, t_2); (W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*)$ 且 $\mathrm{supp}(\varphi) \Subset \Omega$。

请注意，在此框架下，定义 $\partial_t + v \cdot \nabla_x$) 5.2 中出现的输运导数 上文 也需按对偶空间意义理解，这正如我们的泛函设定所提示的那样。因此，我们的记号代表更形式化的写法：

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \Omega_x \times (t_1,t_2)} u(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\Omega_x \times (t_1,t_2)} \langle (\partial_t u + v \cdot \nabla_x u) \mid \varphi \rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

其中，$\mathrm{h}\cdot \mid \cdot\mathrm{i}$ 表示 $W^{s,p}_{,0}(\mathrm{R}^n)$ 与 $(W^{s,p}(\mathrm{R}^n))^*$ 之间的标准对偶配对。

5.2. 有界性估计。根据可积性指数的取值范围，结果分为两种情形。

我们先讨论超线性情形，此时 $p \geq 2$。第一个主要结果是关于弱次解的上界估计，之后我们将由此推导出弱解所需的 L^∞-界。

定理 5.1。 设 $p \in [2, \infty)$， $s \in (0,\ 1)$ 并设 u 是根据定义 (5.1) 在 Ω 中关于 5.2 和 $\mathcal{Q}_r(z_0) \Subset \Omega$ 的弱次解。则对任意 $\delta \in (0, 1]$, 有

$$\sup_{\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}}(z_0)} u \ \leq \ C\delta^{-\frac{n(p-1)}{sp^2}} \max\left\{ \left(\fint_{\mathcal{Q}_r(z_0)} u_+^p\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,dt \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \right\}$$
$$+\delta\,\mathrm{Tail}_\infty\left(u_+; z_0, \frac{r}{2}\right) + C\,\|h\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^\infty(\mathcal{Q}_r(z_0))}, \tag{5.10}$$

其中 尾项$_\infty(\cdot)$ 在 (5.7) 以及 $C = C(n,\ p,\ s,\ c_{\mathrm{o}},\ \gamma,\ \lambda,\ \Lambda) > 0$。

此外，正如 [6, 注 52], 中所解释的，我们可以调整定理5.1 的证明，从而得到一个类似于式（5.10）的弱上解下界。此外，结合这个下界与式（5.10），只要 u 是弱解，就能得到所需的局部有界性。

定理 5.2。设 $p \in [2,\infty),\ \ s \in (0,\ 1)$，并设 u 是满足定义(5.1) 的弱解，定义域为Ω。那么，$u \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。

在奇异情形下，当 $p \in (1,\ 2)$ 时，情况更为复杂。为处理核$\mathcal{A}$ 中出现的式（5.2）非线性项的奇异性，还需要一个在抛物框架中也会用到的额外假设，参见例如 [31, 72], ，以证明所需的上估计。

($\mathbf{H_S}$) 存在一个有界弱下解序列 $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$，它们是方程 (5.1) 的弱次解，使得对于任意 z_0 和 $r > 0$ 满足 $\mathcal{Q}_r(z_0) \Subset \Omega$，有

$$\mathrm{Tail}_\infty\big((u_\ell)_+; z_0, \frac{r}{2}\big) \le C, \qquad \text{for any } \ell > 0,$$

and

$$u_\ell \to u, \qquad \text{in } L^{2/p}(\mathcal{Q}_r(z_0)).$$

定理 5.3. 设 $p \in (1,2),\ s \in (0,1)$，并设 u 是方程 (5.1) 在 Ω 中按照定义 5.2 给出的弱次解，$\mathcal{Q}_r(z_0) \Subset \Omega$，且 ($\mathbf{H_S}$) 成立。那么，对于任意 $\delta \in (0,1]$, 有

$$\sup_{\mathcal{Q}_{\frac{r}{2}}(z_0)} u \ \le\ C\,\delta^{-\frac{n(p-1)}{sp}}\ \max\Big\{ \fint_{\mathcal{Q}_r(z_0)} u_+^{2/p}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,\ 1\Big\} + \delta\mathrm{Tail}_\infty\big(u_+; z_0, \frac{r}{2}\big) + C\,\|h\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^\infty(\mathcal{Q}_r(z_0))}, \tag{5.11}$$

其中 尾项$_\infty(\cdot)$ 见 (5.7)，且 $C = C(n,p,s,c_{\mathrm{o}},\gamma,\lambda,\Lambda) > 0$.

由于指数 $p \in (1,\infty)$ 的取值范围任意，仅通过应用线性框架中使用的大多数方法（例如，速度平均和傅里叶变换 [19] 或狄利克雷到诺依曼映射法 [37]）无法建立所需的估计式(5.10)。因此，我们从一个适当的分数阶卡乔波利型不等式出发，采用一种迭代方案，同时考虑输运算子 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)$ 和扩散项 $\mathcal{L}_K$。此外，还需进一步处理出现在方程 (f) 右端的非齐次项5.1。

我们还注意到，在奇异情形下，当 $p \in (1,2)$ 时，在证明上界 ($\mathbf{H_S}$)由逼近序列 （5.11）一致满足并随后令 $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 时传递到极限的过程中，技术假设 $\ell \to \infty$发挥作用。去掉假设 ($\mathbf{H_S}$) 仍是一个开放问题。

最后，出现在估计式 δ （5.10）和（5.11）中的参数，使得对 Tail$_\infty$所表示的局部贡献与非局部贡献进行精确插值成为可能；其可通过较弱表述 Tail(·) 以适当方式加以控制；参见 [6, 命题 3。1]

5.3. 进一步进展。尽管人们对非局部问题的兴趣日益浓厚，仍有若干问题尚未解决。下面，我们仅列举与本综述最后一节所呈现结果相关的几个可能发展方向。

按照正则性理论中的惯例， [6] 中所获得估计的进一步发展，将是证明某些 Harnack 型不等式，以及关于¨弱解的相关 Hölder 连续性结果。对于 Boltzmann 方程，这些结果已见于相关论文 [45, 46]。关于（5.1），请参阅前述 [58] 中针对线性

情形，其中 $p = 2$。然而，在 [58] 中，作者将研究范围限定为完全非负解；正如 [6, 命题 31], 所示，在这一假设下，尾部贡献为零。此外，正如 Kassmann 在其开创性论文 [47, 48], 中针对经典分数阶拉普拉斯算子所证明的那样，如果不在 Harnack 不等式右侧纳入非局部尾部贡献，就不能去除或放宽正性条件。在椭圆框架 [28] 和抛物框架 [50, 49, 78] 中取得上述结果之后，自然会想知道：对于（5.1），在放宽符号假设、纳入动力学尾部贡献的情况下，某些 Harnack 型不等式是否仍然成立。

此外， [6] 所采用的定量方法不仅使我们能够仔细处理由核$\mathcal{A}$ 的非线性以及核 K的非局部性，而且还可以用于处理更一般的非局部方程。沿着这一方向，可以考虑更一般的、具有非标准增长条件的非局部扩散，如 [24, 25]中所做的那样。

此外，还可以研究一个与之密切相关的问题类别中解的正则性；也就是说，在（5.1）中加入一个以经典 p-拉普拉斯算子为模型的拟线性算子。混合型算子是一个非常新的研究领域，但当速度方向上的扩散部分 $\mathcal{L}_K$ 是混合型算子时，（5.1）的弱解的正则性及相关性质几乎无人知晓。显然， [15, 16, 17, 23, 32, 35, 63, 73], 中的若干结果，例如.....，预计仍适用于混合型动力学算子。

此外，也可以在（5.1）中加入第二个积分-微分算子，$\mathcal{L}^{K;\alpha}$ 其可微性指数为 $t > s$ ，可和性增长为 $q > 1$，并由调制系数的零点集 $\alpha \equiv \alpha(x,\ t)$ ；这就是所谓的非局部双相问题，与文献[22, 33, 72]中讨论的椭圆情形遵循相同思路。

参考文献

[1] K. Adimurthi, H. Prasad, V. Tewary：非局部抛物型 p-Laplace 方程的局部 H¨older 正则性。arXiv2205.09695 (2022年)。[2] D. Albritton, S. Armstrong, J.C. Mourrat, M. Novack：动力学福克-普朗克方程的变分方法。arXiv:1902.04037v2 (2021年)。[3] J. A. Alc´antara, S. Calogero：关于动力学理论中的一个相对论福克-普朗克方程。《Kinetic and Related Models》4，401–426（2011年）。[4] F. Anceschi, M. Eleuteri, S. Polidoro：粗糙系数退化 Kolmogorov 方程的 Harnack 不等式的几何表述。《当代数学通讯》21，第 7 期，文章编号 1850057，17 页（2019）。[5] F. Anceschi, S. Muzzioli, S. Polidoro：与亚式期权相关的偏微分方程基本解的存在性。《非线性分析：真实世界应用》62，1–29（2021年）。[6] F. Anceschi, M. Piccinini：非线性非局部动力学 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的有界性估计。 arXiv:2301.06334 (2023年)。[7] F. Anceschi, S. Polidoro：Kolmogorov 方程经典理论综述。《Matematiche》75，第 1 期，221–258（2020）。[8] F. Anceschi, S. Polidoro, M. A. Ragusa：非负散度低阶系数退化 Kolmogorov 方程的 Moser 估计。《非线性分析》189，文章编号 111568，19 页（2019）。[9] F. Anceschi, S. Polidoro, A. Rebucci：相对论福克-普朗克算子的 Harnack 不等式与渐近下界。arXiv:2211.05736 (2022年)。[10] F. Anceschi, A. Rebucci：关于退化 Kolmogorov 方程弱正则性理论的一则注记。《微分方程杂志》341，538–88（2022年）。[11] F. Anceschi, A. Rebucci：关于粗糙系数退化 Kolmogorov 方程的基本解。《椭圆与抛物方程杂志》doi:10.1007/s41808-022-00191-8 (2022年)。

[12] F. Anceschi, A. Rebucci：粗糙系数 Kolmogorov-Fokker-Planck 算子的障碍问题。 arXiv:2302.11889 (2023年)。[13] F. Antonelli, A. Pascucci：随机微分效用问题粘性解的研究。《微分方程杂志》186，69–87（2002年）。[14] E. Barucci, S. Polidoro, V. Vespri：偏微分方程与亚式期权的一些结果。《数学模型与应用科学方法》11，第 03 期，475–497（2001年）。[15] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, E. Vecchi：涉及局部与非局部混合算子的半线性椭圆方程。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》151，第 5 期，1611–1641（2021年）[16] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, E. Vecchi：局部与非局部混合椭圆算子：正则性与极大值原理。《偏微分方程通讯》47，第 3 期，585–629（2022年）。[17] A. Biswas, M. Modasiya, A. Sen：局部与非局部混合算子的边界正则性及其应用。《纯粹与应用数学年刊》（4）202，第 2 期，679–710（2023年）。[18] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni：《分层李群及其次拉普拉斯算子的势理论》。Springer-Verlag Berlin Heidelberg（2007年）[19] F. Bouchut：动力学方程中的亚椭圆正则性。《纯粹与应用数学杂志》（9）81，第 11 期，1135–1159（2002年）。[20] H. Brezis：《泛函分析、Sobolev 空间与偏微分方程》。Universitext。Springer，纽约（2011年）。[21] C. Bucur, E. Valdinoci：《非局部扩散及其应用》。意大利数学联盟讲义，20，Springer（2015年）[22] S.-S. Byun, J. Ok, K. Song：非局部双相问题弱解的 H¨older 正则性。《纯粹与应用数学杂志》168（2022年），110–142。[23] S.-S. Byun, H.-S. Lee, K. Song：局部与非局部混合双相泛函的正则性结果。arXiv:2301.06234 (2023年)[24] J. Chaker, K. Minhyun, M. Weidner：非标准增长非局部问题的正则性。《微分变分法与偏微分方程》61，第 6 期，论文编号 227（2022年）。[25] J. Chaker, K. Minhyun, M. Weidner：非标准增长非局部问题的 Harnack 不等式。《数学年刊》 https://doi.org/10.1007/s00208-022-02405-9 (2022年)。[26] Z.-Q. Chen, X. Zhang：非局部动力学福克-普朗克算子的 L^p-最大亚椭圆正则性。《纯粹与应用数学杂志》116，第 6 期，52–87（2018年）。[27] C. Cinti, A. Pascucci, S. Polidoro：一类非齐次 Kolmogorov 方程的逐点估计。《数学年刊》340，第 2 期，237–264（2008年）。[28] A. Di Castro, T. Kuusi, G. Palatucci：非局部 Harnack 不等式。《泛函分析杂志》267，6，1807 1836 2014 第 – 期（）。[29] A. Di Castro, T. Kuusi, G. Palatucci：分数阶 p-极小值子的局部性质。《H. Poincar´e 非线性分析研究所年刊》33，1279–1299（2016年）。[30] M. Di Francesco, A. Pascucci, S. Polidoro：一类亚椭圆超抛物方程的障碍问题。《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》464，155–176（2008年）。[31] M. Ding, C. Zhang, S. Zhou：抛物型分数阶 p-Laplace 方程的局部有界性与 H¨older 连续性。《微分变分法与偏微分方程》60，第 1 期，1–21（2021年）。[32] C. De Filippis, G. Mingione：局部与非局部混合问题中的梯度正则性。《数学年刊》（2022年）。[33] C. De Filippis, G. Palatucci：非局部双相方程的 H¨older 正则性。《微分方程杂志》 267 （ 2019 ），第 1 期，547–586。[34] M. Frentz, K. Nystr¨om, A. Pascucci, S. Polidoro：与美式亚式期权相关的 Kolmogorov 算子障碍问题的最优正则性。《数学年刊》347，第 4 期，805–838（2010年）。[35] P. Garain, J. Kinnunen：局部与非局部混合拟线性椭圆方程的正则性理论。《美国数学会会刊》375（2022），第 8 期，5393–5423。[36] N. Garofalo, A. Loiudice, D. Vassylev：齐次群上具有临界指数的非局部半线性方程解的最优衰减。arXiv:2210.16893 (2022年)

[37] N. Garofalo, G. Tralli：一类非局部次椭圆算子及其扩张。Indiana Univ. Math. J. 70, No. 5, 1717–1744 (2021)。[38] F. Golse, C. Imbert, C. Mouhot 和 A. F. Vasseur：粗糙系数动力学福克-普朗克方程的 Harnack 不等式及其在 Landau 方程中的应用。Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) 19, No. 1, 253–295 (2019)。[39] J. Guerand, C. Imbert：动力学福克-普朗克方程的对数变换与弱 Harnack 不等式。J. Inst. Math. Jussieu, 1–26 (2022)。[40] J. Guerand, C. Mouhot：动力学理论中的定量 De Giorgi 方法。J. ´Ec. Polytech., Math. 9, 1159 1181 2022– ( )。[41] D.G. Hobson, L.C.G Rogers：随机波动率的完备模型。Math. Finance 8, 27–48 (1998)。[42] L. H¨ormander：次椭圆二阶微分方程。Acta Math. 119, 147–171 (1967)。[43] L. Huang, S. Menozzi, E. Priola： L^p 退化非局部 Kolmogorov 算子的估计。J. Math. Pures Appl. 9, No. 121, 162–215 (2019)。[44] C. Imbert：一阶 Hamilton-Jacobi 方程的非局部正则化。J. Differential Equa- tions 211, No. 1, 218–246 (2005)。[45] C. Imbert, L Silvestre：无截断玻尔兹曼方程的弱 Harnack 不等式。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 22, No. 2, 507–592 (2020)。[46] C. Imbert, L. Silvestre：无截断玻尔兹曼方程的整体正则性估计。J. Amer. Math. Soc. No. 3, 625–703 (2022)。[47]M. Kassmann：经典 Harnack 不等式对非局部算子不成立。 https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.454.223 (2007)[48] M. Kassmann：重新探讨非局部算子的 Harnack 不等式与赫尔德正则性估计。¨ https://sfb701.math.uni-bielefeld.de/preprints/sfb11015.pdf (2011)[49]M. Kassmann, M. Weidner：非局部方程的抛物型 Harnack 不等式。arXiv:2303.05975 (2023)[50] Y.-C. Kim：非局部热方程的非局部 Harnack 不等式。J. Differential Equations 267(11), 6691–6757 (2019)。[51] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia：变分不等式及其应用导论。纯粹与应用数学丛书，第 88 卷。纽约等：Academic Press（ Harcourt Brace Jovanovich 出版社子公司）。XIV, 313 (1980)。[52] S. N. Kruzhkov：椭圆方程和抛物方程解的先验界及其若干性质。Mat. Sb. (N.S.) 4, 65(107), 522–570 (1964)。[53] A. Lanconelli, A. Pascucci, S. Polidoro：可测系数非齐次 Kolmogorov 方程的高斯下界。J. Evol. Equ. 20, No. 4, 1399-1417 (2020)。 [54] E. Lanconelli, S. Polidoro：关于一类次椭圆演化算子。Rend. Semin. Mat., Torino 52, No. 1, 29-63 (1994)。[55] W.-X. Li：分数阶动力学方程的整体次椭圆估计。Math. Nachr. 287, No. 5-6, 610–637 (2014)。[56] N. Liao：抛物型分数阶 p-拉普拉斯算子的赫尔德正则性。arXiv:2205.10111 (2022)。[57] M. Litsgard, K. Nystr¨om：粗糙系数 Kolmogorov-Fokker-Planck 型方程的狄利克雷问题。J. Funct. Anal. 281, No. 10, 1–39 (2021)。[58] A. Loher：非局部算子动力学理论中的定量 De Giorgi 方法。arXiv:2203.16137(2022)。[59] M. Manfredini：一类超抛物方程的狄利克雷问题。Adv. Differ. Equ. 2, No. 5, 831-866 (1997)。[60] M. Manfredini, G. Palatucci, M. Piccinini, S. Polidoro：海森堡群中非线性分数阶方程的赫尔德连续性与有界性估计。J. Geom. Anal. 33, 77 (2023)。¨J. Moser：快速收敛迭代法与非线性微分方程。Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser. 20, No. 265-315, 499-535 (1966)。

[62] K. Nystr¨om, A. Pascucci, S. Polidoro：一类亚椭圆超抛物算子障碍问题在初始状态附近的正则性。J. Differential Equations 249, 2044–2060 (2010)。[63] P. Oza, J. Tyagi：变指数退化混合全非线性局部与非局部方程解的正则性。 arXiv:2302.06046 (2023)[64] G. Palatucci：

p **177**, -分

699, 732 , 2018
数阶拉普拉斯方程的狄利克雷问题。Nonlinear Anal. – ( )。[65] G. Palatucci, M. Piccinini：海森堡群中的非局部 Harnack 不等式。《微分变分法与偏微分方程》61, Art. 185 (2022)。[66] A. Pascucci：美式亚式期权的自由边界与最优停止问题。《金融与随机》12, 21–41 (2008)。[67] A. Pascucci：期权定价中的偏微分方程与鞅方法。博科尼大学出版社与 Springer 丛书 2。米兰：Springer；米兰：博科尼大学出版社（ISBN 978-88-470-1780-1/hbk；978-88-470-1781-8/ebook）。xvii, 719 页 (2011)。[68] A. Pascucci, A. Pesce：动力学福克-普朗克方程的索伯列夫嵌入。arXiv:2209.05124(2022)。[69] A. Pascucci, S. Polidoro：一类超抛物方程的莫泽迭代法。Commun. Contemp. Math. 6, No. 3, 395–417 (2004)。[70] A. Pesce：Kolmogorov 型群中的逼近与插值。arXiv:2205.05340 (2022)。[71] M. Piccinini：海森堡群中非线性分数阶方程的障碍问题与佩龙方法。Nonlinear Anal. 222, Art. 112966 (2022)。[72] H. Prasad, V. Tewary：非局部双相抛物方程变分解的局部有界性。 arXiv 2112.02345 (2022)。[73] B. Shang, C. Zhang：混合局部与非局部抛物型 p-拉普拉斯方程的 Harnack 不等式。J. Geom. Anal. 33, no. 3 (2023)。[74] L. Silvestre：动力学方程中的正则性估计与开放问题。arXiv:2204.06401 (2022)。[75] L. Silvestre：动力学福克-普朗克方程到边界处的赫尔德估计。Ars I nveniendi Analytica: Mathematics of Fluids, Gases and Plasmas (2022)。¨L. F. Stokols：一族非局部亚椭圆动力学方程的赫尔德连续性。SIAM J. Math. Anal. 51, No. 6, 4815–4847 (2019)。[76] M. Str¨omqvist：以分数阶 p-拉普拉斯算子为模型的非局部抛物方程解的局部有界性。J. Differential Equations 266 No. 12, 7948–7979 (2019)。[78] M. Str¨omqvist：抛物型非局部方程的哈纳克不等式。Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire 36 No. 6, 1709–1745 (2019)。[79] M. Wang, J. Duan：带增长漂移的线性非局部福克-普朗克方程的存在性与正则性。J. Math. Anal. Appl. 449, No. 1, 228–243 (2017)。[80] W. Wang, L. Zhang：一类非齐次超抛物方程的 C^α 正则性。Sci. China, Ser. A 52, No. 8, 1589–1606 (2009)。[81] W. Wang,L. Zhang：超抛物方程弱解的 C^α 正则性。Discrete Contin. Dyn. Syst. 29, No. 3, 1261–1275 (2011)。[82] W. Wang, L. Zhang：带漂移项的非齐次超抛物方程弱解的 C^α 正则性。arXiv:1704.05323 (2017)。[83] Y. Zhu：有界区域中动力学福克-普朗克方程的正则性 arXiv:2206.04536 (2022)。

Francesca Anceschi，马尔凯理工大学工业工程与数学科学系，布雷切·比安凯街 12 号，60131 安科纳，意大利电子邮箱： f.anceschi@staff.univpm.it

Mirco Piccinini，帕尔马大学数学、物理与信息科学系，科学园区 53/a 号，校园，43124 帕尔马，意大利电子邮箱： mirco.piccinini@unipr.it

Annalaura Rebucci，摩德纳与雷焦艾米利亚大学物理、信息与数学科学系，坎皮街 213/B 号，41125 摩德纳，意大利电子邮箱： annalaura.rebucci@unipr.it