arXiv:2304.01150v2 [math.AT] 5 Oct 2023

代数 与空间网络的几何模型

William Bernardoni[1], Robert Cardona[2], Jacob Cleveland[3,5], Justin Curry[2], Robert Green[2], Brian Heller[2], Alan Hylton[4], Tung Lam[2], 和 Robert Kassouf-Short[5]

[1]凯斯西储大学[2]纽约州立大学奥尔巴尼分校[3]科罗拉多州立大学[4]*NASA*戈达德太空飞行中心[5]美国国家航空航天局格伦研究中心

2023年10月6日

摘要

本文介绍了关于网络化太空通信的一些全新代数与几何视角。我们的主要贡献是提出了一种时变图（TVG）的新定义：用取值于实数子集的矩阵 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 来定义。我们利用 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 的半环性质，通过矩阵乘法和截断的克莱尼星对时变图中的多跳通信进行建模。由此，我们提出了用于描述时变图通信能力的新统计量，称为寿命曲线；并针对随机选取的大量 STARLINK 卫星生成了这些曲线，其连通性通过为期一天的模拟进行建模。我们还运用本文提出的、受拓扑数据分析（TDA）启发的新度量，进一步分析 STARLINK 大型子样本何时在时间上强连通。为更好地对地球与火星之间的网络场景建模，我们引入了多种半环，可用于模拟传播延迟以及容迟网络（DTN）中的常见协议，例如存储转发。最后，我们展示了之字形持久性在不同太空网络特征化方面的适用性，并证明仅凭时变拓扑，就能有效运用 K近邻（K近邻）分类来区分地火与地月卫星系统。

目录

1 引言与概要 **2**

1.1 面向应用读者的提纲.31.2 面向应用拓扑学读者的提纲.41.3 应用代数读本提纲.5

2 时变图（TVG）的代数模型 **6**

2.1 图与时变图的半环和矩阵视角.82.2 使用克莱尼星测量 STARLINK 的通信容量 . . . . . 122.3 克莱尼星不收敛：传播延迟的半环 . . . . . 162.4 图优化问题相关既有半环综述.202.4.1 热带/最小加半环.212.4.2 时变网络的热带自同态半环 . . . . . 212.5 用于时变路由的通用接触半环（UCS）.22

3 几何与 时变图的拓扑模型 24

3.1 时变图上的距离.243.1.1 具有固定节点对应的距离.253.1.2 具有未知节点对应的距离. 263.1.3 通过余层实现的交错距离连接 . . . . . 273.2 利用条形码进行时变图的拓扑摘要以用于机器学习 293.2.1 地月与地火卫星系统上的K近邻.30

4 未来方向 **32**

A 半环的定义与技术结果 38B 基本范畴论 41C 条形码及其上的距离 42D 等距定理的证明 42

资金鸣谢 **谢辞：** 本成果由 NASA合同80GRC020C0016 资助。

1 引言与大纲

随着人类迈入太空探索的新阶段，国际和商业参与者不断带来大量新的太空资产，自动化并扩展太空通信的需求也日益迫切。目前，太空中的通信——例如火星上的一辆探测车与地球上的某栋特定建筑之间的通信——由工程师团队手动安排在何时使用哪些点对点链路，以实现数据的端到端传输。消息抵达地球上的地面站后，便由 TCP/IP 等传统地面网络理论接手；这类理论高度依赖低延迟和大体上

静态网络架构。然而，在太空中，这两项要求都无法满足。狭义相对论规定，所有通信都受光速限制，这意味着地球与火星之间最快的单向通信时间会因两者在轨道上的相对位置而有所不同，介于 3 至 22 光分之间。网络拓扑也可能迅速变化，例如低地球轨道（LEO）上的卫星，其轨道周期通常为 90 分钟，而任意一对卫星可能只有几分钟能够建立视距连接。在所有这些情形下，遮挡通常会迫使点对点通信中断；对此，可以通过本地存储，或使用绕过遮挡的替代路径来应对。

受这些问题的启发，我们在此提出一套新的工具，用于对实际空间网络场景中出现的时变网络建模。我们的主要贡献是明确定义时变图（TVG）：我们将其视为一个矩阵，其中各条目由时间子集构成。我们利用这样一个事实：时间子集作为 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 的元素，具有由并集和交集定义的自然加法和乘法，从而使 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 成为半环；参见定义 2.6。基于这一观察，我们通过考虑时变图邻接矩阵的克莱尼星（定义2.20），更准确地建模端到端通信容量：

$$A^* := I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

由于上述方程中的加法表示对各条目中的连通时间取并集，部分级数和 $C_k(A) := I + \cdots + A^k$提供了一个有意义的过滤参数，它沿着长度为$k$ 或更短的游走累积机会窗口。通过计算每个条目 $C_k(A)_{i,j}$在某个固定时间窗口 $W \subset \mathbb{R}$内的平均测度，我们得到一种新的统计量，称为引理 *2.22*中的寿命曲线，并用它作为衡量时变图与强连通图接近程度的代理指标[1]。

我们将这些想法付诸代码实现（代码可在`github.com/TheaMAS/sat-parser`获取），并借助卫星轨道分析程序（SOAP）模拟各种网络场景。SOAP 是一种用于精确模拟轨道力学并计算视距通信窗口的工具[2]。我们利用`celestrak.org`上提供的大型 STARLINK 卫星数据库，从星链网络中抽取不同规模的样本，以模拟随机低地球轨道网络。如图5 所示，这些寿命曲线的形状可能截然不同，但当节点数量超过$n = 40$时，曲线似乎会经历明显的相变。这表明，要确保低地球轨道网络具有强连通性，可能需要超过 40 个节点。目前尚不清楚这些曲线为何呈现这样的形状，这也促使人们进一步从数学角度研究其结构，参见猜想2.27。

1.1 应用优先读本概要

对于主要关注我们的方法在空间网络中的直接应用，尤其是如何衡量近地与深空

[1]如果从任意节点都可以到达任意其他节点，那么这个普通有向图就是强连通的。对于时变图（TVG），如果在任意时刻都可以从任意节点到达任意其他节点，那么它就是强连通的。[2]在我们的分析中，所有可能的视线机会都视为同时有效。实际上，某个节点可能一次只能建立一条链路，这意味着选择一个接触对象必然会排除其他选择。这一点以及其他因素，都可能成为未来有趣且定义明确的研究课题。

空间通信网络之间的差异的读者，我们建议直接从第 2 节（包括第 2.1 节和第2.2节）开始阅读，接着读到第 3节。在那里，我们将继续探讨给定时变图与强连通时变图有多接近这一问题，并引入一种受拓扑数据分析（TDA）启发、适用于时变图的真正距离。这里我们借鉴这样一种观点：边存在（或不存在）的时段可以表示为一组区间，前提是时变图的连通性并非过于病态。这些区间可以用持久图表示，而持久图上有许多定义良好的距离。为强调第 3.1.1 节和第 3.1.2 节中的距离并非用于传统持久同调流程的输出——因为这里并未计算同调——我们在定义*3.5*中将这些距离称为断连距离。随后，我们利用这些距离更细致地衡量 STARLINK 子样本的连通性，这些子样本展示于图 15中。图中表明，可能需要 100 个节点才能建立强连通性。除了 STARLINK，我们还展示如何利用之字形持久性比较地月与地火系统 [CSM09；CDS10], 是借鉴自拓扑数据分析的另一种工具，它概括网络拓扑随时间的变化，且不依赖节点标签。我们展示了，当使用H_1之字形持久条形码对时变图进行特征化时，如何利用K近邻（KNN）分类器自动区分不同类型的空间网络。正如第 4 节所述，我们将此视为创建空间互联网自动推荐与分段协议的第一步，该协议采用机器学习。

1.2 《应用拓扑学读者》提纲

对于希望了解我们的工作如何拓展拓扑数据分析理论的读者，我们建议直接从第2.2 节开始，通读第3节。我们对时变图的定义自然导出一个汇总余层（定义3.13），它通过追踪整个图结构而非仅追踪连通分量，对[dMP15] 中的 Reeb余层进行了细化。不过，与 [dMP15] 类似，我们将交错距离的构造推广到这一情形，并证明了一些新颖的等距结果（定理3.16），其思想与 [Gas+19]中关于合并树的结果十分接近。我们的汇总余层还提供了一种新颖的流程，用于证明在上述度量下之字形条形码的稳定性，见命题3.21。

时变图的拓扑数据分析（TDA）相关研究 之字形持久性 [CSM09；CDS10], 之字形持久性是拓扑数据分析中的一种常用工具，多年来一直用于研究动态网络中随时间演变的拓扑。从较高层次来看，之字形持久性揭示了由 $\mathbb{R}$ 参数化的空间 X 中拓扑特征的形成、消失及持续时间，也就是说，使用函数 $f : X \to \mathbb{R}$。为了理解某一时刻 t_0 的拓扑与另一时刻 t_1, 的拓扑之间的关系，通常会考察交替的包含关系 $f^{-1}(t_0) \hookrightarrow f^{-1}[t_0,t_1] \hookleftarrow f^{-1}(t_1)$ 并计算同调，这正是之字形持久性得名的由来。为了通过之字形持久性分析时间上的拓扑特征，人们会将一组时变网络快照及其之字形并集（或交集）结合起来，形成一系列单纯复形。网络快照可以通过滑动窗口或时间划分构造获得[Loz18]。例如， [Mye+23b] 采用这种方法分析英国交通网络。 [Mye+23a] 采用了类似方法，分析不同社区的社交网络和网络数据，其中考虑了网络快照为超图的情形。在太空通信领域，研究 [Hyl+22]

采用之字形持久性分析模拟空间网络，以识别并提取子网络结构，从而降低网络的复杂性。Kim 和 Mémoli 开展了一项更具理论性的动态图库研究 [KM17], 从持久性的莫比乌斯反演视角出发，定义了一种名为持久性簇图的新型时变簇概述。

1.3 应用代数读本大纲

最后，对于最关注我们工作中半环方面内容的读者，我们建议通读第 2 节。即使是更偏应用的读者，也会受益于了解我们如何在第 2.3 节中利用时变图的半环模型来建模传播延迟。不过，最关注理论的读者应重点阅读第 2.5 节，因为该节提出了一种“通用”半环，可用于建模图优化问题中所有已知的方面，包括热带几何。从应用角度来看，这一节最重要之处在于它能够建模存储转发路由行为，而这正是容迟网络中最常用的协议之一。

代数路径问题的先前研究 据我们所知，本文提出的时变图半环模型此前尚未被研究过。具体而言，我们认为矩阵时变图半环、传播延迟半环和通用接触半环都是新的，在现有文献中尚无明确先例。我们对此谨慎而言，是因为网络的半环视角至少已有 [Car71] 这样的开创性著作作为最早的重要论文之一，已有50年历史。这一视角历久弥新，教材篇幅的论述见于 [Car79；Hei+06；GM08] 和 [BT10]。

在所有这些研究中，人们都希望将任意网络刻画或优化问题表示为一个矩阵，其元素取自经过仔细选择的半环。此类刻画/优化问题通常通过该矩阵的传递闭包，即克莱尼星，来求解。例如，第 2.4 节将对此作更详细的阐述：网络上的最短路径问题可以用热带半环（$[0,\infty]$, min, +）来表示。通过 min（加法）运算比较所有路径的成本，而每条路径的成本则是沿路径聚合弧权重的结果，所用运算为 + （乘法）。因此，该矩阵的克莱尼星由网络中各节点对之间的最短路径长度构成，从而以卓越的代数效率解决全对最短路径问题 [Moh02]。正如 Carré 在 [Car71], 中所指出的，这些矩阵理论方法在理论上可以推广通过直接方法求解路由问题的算法，例如贝尔曼-福特算法和 Floyd–Warshal 算法。随后， [Min76], 继续了这些研究，指出广义路径代数可用于推导出 Moore、Ford 和 Dijkstra 等广为人知的路径搜索算法；更多内容参见 [Min98a；Min98b] 。

令人惊讶的是，我们将半环应用于整个互联网并非新鲜事，正如这些著作[GS05；Sob03；Sob01；Sob05；GG08；DG13] 从这一视角研究互联网路由协议。然而，这些著作都关注所谓的“封闭网络”，其中的节点和边从一开始就是固定的。近来，应用范畴论（ACT）领域的研究提出了一种更灵活的网络理论，支持节点发现以及在其他未知网络之间进行路由；参见 Jade Master 的相关著作 [Mas20；Mas22；Mas21], 其论文 [Mas21] 在

这些所谓的“开放网络”。我们预计，这项工作将有助于未来开发用于太空路由的通用、可组合算法。

2 时变图的代数模型

时变图（TVG）已由许多不同的研究团队进行了广泛研究，但对于 TVG 应如何定义，尚无统一共识。一种 TVG 模型认为，时变图只不过是一个图序列 $G_0,\ldots,G_n$，但这种观点掩盖了不同时刻之间的关系。另一种 TVG（或时序图）模型 [BM22], 则针对这一问题提出，TVG 是一个图 $G = (V, E)$，并配有一个函数 $\tau : E \to 2^{\mathbb{N}}$，用于指定边在图序列中存续的索引。

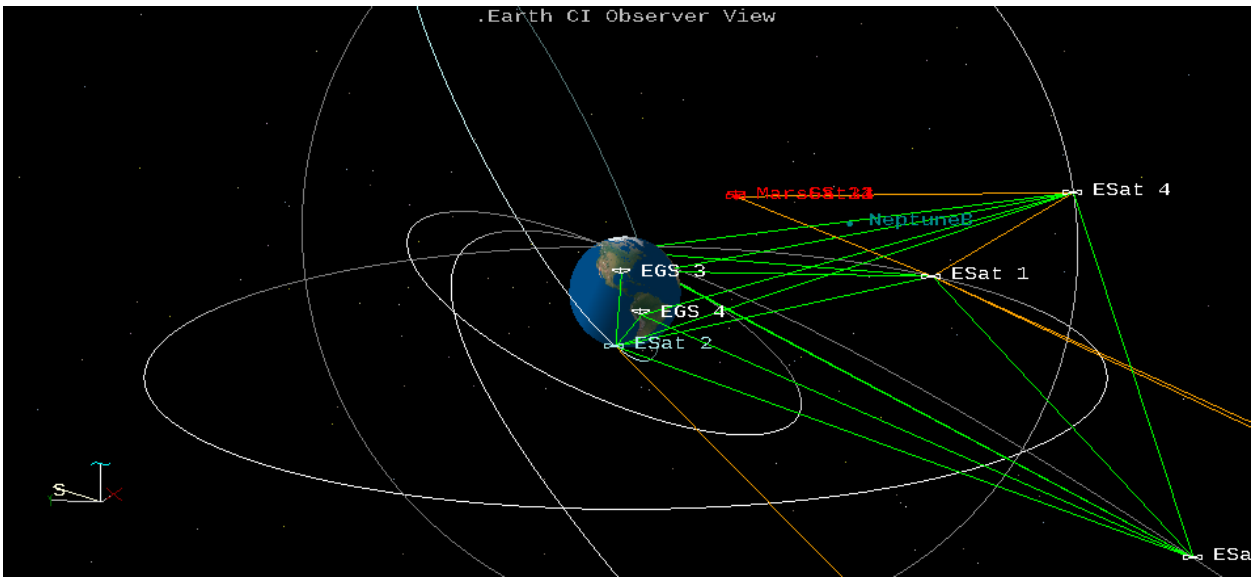


图 1：卫星轨道分析程序（SOAP）的屏幕截图展示了地球和火星周围地面站与卫星之间的视线。

这两种观点都不适用于空间网络，因为我们主要关心的是两个资产（地面站、巡视器、卫星等）何时具有清晰的视线以进行通信；见图1。由于轨道力学的影响，空间网络中的每条视线都有一个日出时刻作为起点，并以日落时刻作为终点，两者共同界定一个连通区间。由于这些区间的度量性质——何时以及持续多久？——对于确定数据何时以及有多少可以通过我们的网络进行路由至关重要，因此我们提出一个用于描述连接生存期的框架。我们将连接生存期集合按包含关系组织成一个偏序集结构，这将十分有用：

定义 2.1（生命周期偏序集）。令 $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ 为生命周期偏序集。非平凡元素 $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ 是由互不相交的闭区间构成的有限并

$$a = [x_0, y_0] \cup \cdots \cup [x_n, y_n],$$

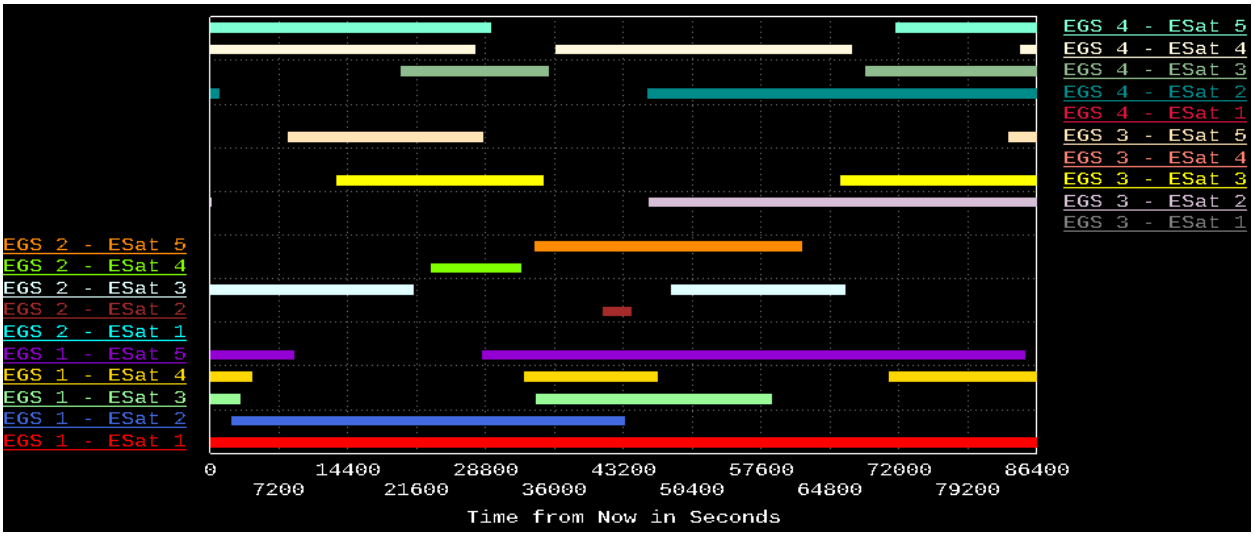


图 2：图 1 中的视距通信日出和日落时间定义了连通区间，这正是我们对 aTVG 的定义所强调的。

其中 $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 和 $y_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，且对所有 n，$x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$。生命周期上的偏序由子集的包含关系给出，即若 $a \preceq b$，则 $a \subseteq b$。

我们将时变图定义为配备了一个到生命周期偏序集 $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ 的保序反向映射的图。更确切地说，定义如下。

定义 2.2 (时变图)。 设 G 是一个图，即由边集 E、顶点集 V 以及关联关系 $v \lessdot e$ 组成，其中该关系表示顶点 v 何时属于边 e。时变图 ***(TVG)*** $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 是由图 G 及一个保序反向的生命周期函数

$$\ell_M : (G, \lessdot)^{op} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad i.e. \quad if \quad v \lessdot e \quad \Rightarrow \quad \ell_M(e) \subseteq \ell_M(v).$$

假设 $\ell_M(e) \subseteq \ell_M(v)$ 满足包含公理，因为这要求边存续时其顶点也必须存续。

备注 2.3。 我们指出，关于图的任何修饰语都可以转化为对时变图的修饰语。例如，定义 2.2 可以推广到超图，因为它只要求顶点与超边之间存在关联（或包含）关系；参见 [Mye+23a], 该文将时间归因用于超图应用。此外，如果G是有向多重图，那么我们可以定义$v \lessdot e$当且仅当v是边 e 的头顶点或尾顶点，但边 e 从i到 j的方向性。最后，回顾一下，如果任意两个顶点之间至多存在一条（有向）边，则该（有向）图称为**简单图**。

为简便起见，我们将采用时变图的一种替代矩阵表述，并将其视为本文的主要定义。请注意，在这种方法中，偏序集被特化为全序。

定义 2.4 （生命周期矩阵与一般矩阵时变图）。 每个（G，$\mathscr{G} = \ell_M$）都配备了其顶点集 V 上的全序的简单有向时变图，都有一个对应的生命周期矩阵：

$$M : V \times V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}) \qquad (i, j) \mapsto M(i, j) = \ell_M(i, j) \subseteq \mathbb{R}.$$

所有生命周期矩阵的集合记作$\mathsf{Mat}_n(\mathscr{L}(\mathbb{R}))$，包含所有元素属于 $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ 的可能矩阵，且不受任何包含公理约束。我们将元素为 $\mathbb{R}$ 的任意子集的矩阵，也就是说 $M \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$，称为矩阵时变图。

定义 2.4 应当让读者联想到图论中的邻接矩阵：对于简单图，其对角线上的元素为 0，而当存在从 i 到 j 的边时，相应元素为 1。一个重要的区别是，我们通常假设生命周期矩阵 M 的对角线上有 $\mathbb{R}$，类比而言，这意味着每个顶点上方都有一个自环。在时变图上进行消息传递时，这种解释是合理的，但在尝试模拟（或推广）图论中更传统的构造时，它也有一些缺点。为了能够采用这两种约定，我们引入以下定义。

定义 2.5（时变图的邻接矩阵）。简单有向时变图的邻接矩阵 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 记作 A；除 $A_{ii} = \varnothing$ 外，它与对应的矩阵时变图 M 完全相同。

2.1 图与时变图的半环和矩阵视角 s

使用矩阵的一个重要原因是，矩阵可以进行某些运算——例如加法和乘法——而这些运算对于图而言并不明显。本节将回顾如何将简单有向图解释为一个布尔值矩阵，以及该布尔值矩阵的高次幂如何表示相应长度的游走。这样便为定义和解释时变图上的这些矩阵运算扫清了道路。这两种观点的核心都是这样一个观察：加法和乘法是非常通用的运算，并且可以在半环的语言中得到形式上的统一；半环就是去除了负元的环。

定义 2.6。一个半环 $(S, \oplus, \otimes, \mathbf{n}, \mathbf{e})$ 由集合 S、一个加法运算 $\oplus$ 和一个乘法运算 $\otimes$ 组成，并且这两种运算分别具有幺元 $\mathbf{n}$（*"0"*元素）和 $\mathbf{e}$（*"1"*元素）。此外，这些运算还需要满足以下四组恒等式：

1. $(S, \oplus, \mathbf{n})$ 是一个交换幺半群（见定义 *A.1*），其单位元为 $\mathbf{n}$。这意味着：
   - $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
   - $a \oplus b = b \oplus a$
   - $\mathbf{n} \oplus$一个 = 一个 = 一个 $\oplus$ $\mathbf{n}$
2. $(S, \otimes)$ i s 是一个（不一定交换的）幺半群，其单位元为 $\mathbf{e}$。这意味着 s
   - $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
   - $\mathbf{e} \otimes a = a = a \otimes \mathbf{e}$
3. 乘法对左右两侧的加法都满足分配律：
   - 一 $\otimes$(二 $\oplus$三) = (一 $\otimes$二) $\oplus$ (一 $\otimes$三)
   - $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

4. 由**n** （“0”元素）进行的乘法会湮灭 S:

- $\mathbf{n} \otimes a = \mathbf{n} = a \otimes \mathbf{n}$

注释 2.7。 由于半环是去掉负元素的环，一些作者更喜欢称半环为**rig**——因为它们是去掉了“n”（代表“负数”）的“环”。

半环的典型例子是自然数集合 $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$，配以通常的加法和乘法。我们主要研究以下与时变图相关的半环。

定义 2.8 (布尔半环)。 考虑集合 布尔值 $= \{\bot, \top\}$ 其中 $\mathbf{n} = \bot = 0$ 对应于假，而$\mathbf{e} = \top = 1$ 对应于真。如果我们定义 $\oplus = \vee$ 为逻辑或 运算，并定义 $\otimes = \wedge$ 为逻辑与 运算，那么(布尔值，$\vee$，$\wedge$，$\bot$，$\top$) 就定义了布尔半环。

定义 2.9 (路径半环)。设 $G = (V, E)$ 是一个简单有向图。令 $\mathsf{Path}(G)$ 表示 G 中任意长度路径（或游走）的形式组合的集合，即

$$\mathsf{Path}(G) = \{\sum_i \gamma_i \mid \gamma_i = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}], \quad where \quad \forall i,j\,(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E\}.$$

若 $a = \sum \gamma_i$且 $b = \sum \gamma_j$，则 $a + b$ 是 a 中路径 ij 与 b 中路径的布尔和（即集合论并集）。加法单位元**n** 是路径的空集 $\varnothing$。对于乘法，我们首先将路径连接 $\gamma_i * \gamma_j$ 定义为：若 γ_i 中的最后一个顶点是 γ_j中的第一个顶点，则将路径 γ_i 与γ_j 连接；否则为 $\varnothing$；注意，这种乘法不满足交换律。通过线性扩展，我们可以定义

$$a * b = (\sum_i \gamma_i) * (\sum_j \gamma_j) = \sum_{ij} \gamma_i * \gamma_j, \quad where \quad \mathbf{e} = 1 = \sum_{v_i \in V} [v_i]$$

是乘法单位元。

定义 2.10 (生存期与幂集半环)。生命周期偏序集 $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ *(定义 2.1)* 是一个交换半环。实际上，这是一个更大半环的子半环，该半环由 的幂集构成，记作 $(\mathbb{R})$。加法和乘法定义如下：

- $a + b := a \cup b$，其单位元 $\mathbf{n} = \varnothing$ 为空集，且
- $a \cdot b := a \cap b$，其单位元 $\mathbf{e} = \mathbb{R}$ 为全集 $\mathbb{R}$。

更一般地，任意集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 在相同运算和类似幺元下构成一个交换半环。

注 2.11（幂等性与偏序）。 诸如 Bool 和 $\mathscr{P}(X)$ 这样的半环还具有**幂等**这一性质，即对于所有元素 a，都有 $a + a = a$。幂等半环可自然地导出一个偏序，其中

$$a \preceq b \iff \exists c \text{ s.t. } a + c = b.$$

定义 2.12 （函数半环）。 给定任意集合 X 和任意半环 $(S, \oplus, \otimes, \mathbf{n}, \mathbf{e})$，从 X 到 S 的函数集记作 $\mathsf{Fun}(X, S)$，它继承半环的结构。给定 $m, n : X \to S$,

- 有 $m \oplus n : X \to S$，其中 $(m \oplus n)(x) := m(x) \oplus n(x)$，并且
- $m \otimes n : X \to S$，其中 $(m \otimes n)(x) := m(x) \otimes n(x)$。

*"0"*函数 $0 : X \to S$，其常值为 $\mathbf{n}$；*"1"*函数 $1 : X \to S$，其常值为 $\mathbf{e}$，它们是相应的单位元。

注记 2.13（布尔函数与子集）。子集的半环 $\mathscr{P}(X)$ 与布尔函数的半环（记作 $\mathsf{Fun}(X, \mathsf{Bool})$）之间存在密切关系。事实上，存在一个映射 Φ，将每个子集 $A \subseteq X$ 映射为示性函数 $1_A : X \to \mathsf{Bool}$；该函数在 A 中的点上取值为 $\top$，在 $X - A$ 中的点上取值为 $\bot$。该映射还保持加法和乘法，即，

- $\Phi(A \cup B) = 1_{A \cup B} = 1_A \oplus 1_B = \Phi(A) \oplus \Phi(B)$，以及
- $\Phi(A \cap B) = 1_{A \cap B} = 1_A \otimes 1_B = \Phi(A) \otimes \Phi(B)$.

此映射 Φ 还保持两个半环的单位元，即 $\Phi(\varnothing) = 0$ 和 $\Phi(X) = 1$。这一切使得 Φ 一个满射 **半环同态** (定义 A.2)，其核是平凡的，因此它是一个 **半环同构**。

最后，取值于半环的矩阵定义了另一个半环。

定义 2.14 (矩阵半环)。如果 $(S, \oplus, \otimes, \mathbf{n}, \mathbf{e})$ 是一个半环，那么由条目属于 S 的 $n \times n$ 矩阵组成的集合，记作 $\mathsf{Mat}_n(S)$，同样也是一个半环，其中 $M + N$ 按条目定义为 $(M + N)_{ij} := M_{ij} \oplus N_{ij}$，且 $(M\,N)_{ij} = \oplus_k M_{ik} \otimes N_{kj}$。

图论中对布尔矩阵的加法和乘法的解释是经典且广为人知的。如果 A 和 B 是两个 $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ 布尔矩阵——等价地，也可将其视为图 G 和 H——那么 $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ 可以解释为 G 和 H 的边集的并集。矩阵乘积 AB 可以视为长度为 2 的游走矩阵，其中第一条边在 G 中遍历，第二条边在 H 中遍历。当 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ 时，矩阵 A^2 的条目 (i, j) 中有一个 $\top$，当且仅当存在一条从 i 到 j 的长度为 2 的游走。然而，如果 i 和 j 之间存在多条长度为 2 的游走，矩阵 A^2 无法检测到这一点。为此，最好使用取值于自然数 $\mathbb{N}$，甚至取值于 Path(G) 的邻接矩阵，因为这样可以分别编码节点之间路径的数量和确切名称；参见图 3。

本节其余部分致力于理解矩阵时变图 M 的高次幂。正如我们将看到的，矩阵 M^k 将编码两个节点之间存在瞬时长度为 k 的游走的时间区间。这需要证明矩阵时变图与从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathsf{Mat}_n(\mathsf{Bool})$ 的函数之间的同构。这又取决于以下"快照"构造。

定义2.15 (矩阵时变图的快照，参见 [Mye+23b])。令 $t\,I$ 为一个矩阵，其对角线上的元素为 $(t\,I)_{ii} = \{t\}$，而非对角线元素为 $(t\,I)_{ij} = \varnothing$。若 $M \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 是一个矩阵时变图，则 M 在 t 时刻的快照 是矩阵 $(t\,I\,M)$，视为由布尔值组成的矩阵 $\mathscr{S}_t(M)$，即，

$$\mathscr{S}_t(M)_{ij} = \top \iff (tIM)_{ij} = \{t\} \quad and \quad \mathscr{S}_t(M)_{ij} = \bot \iff (tIM)_{ij} = \varnothing.$$

这定义了一个半环同态 $\mathscr{S}_t$：$\mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \to \mathsf{Mat}_n$（布尔值）。

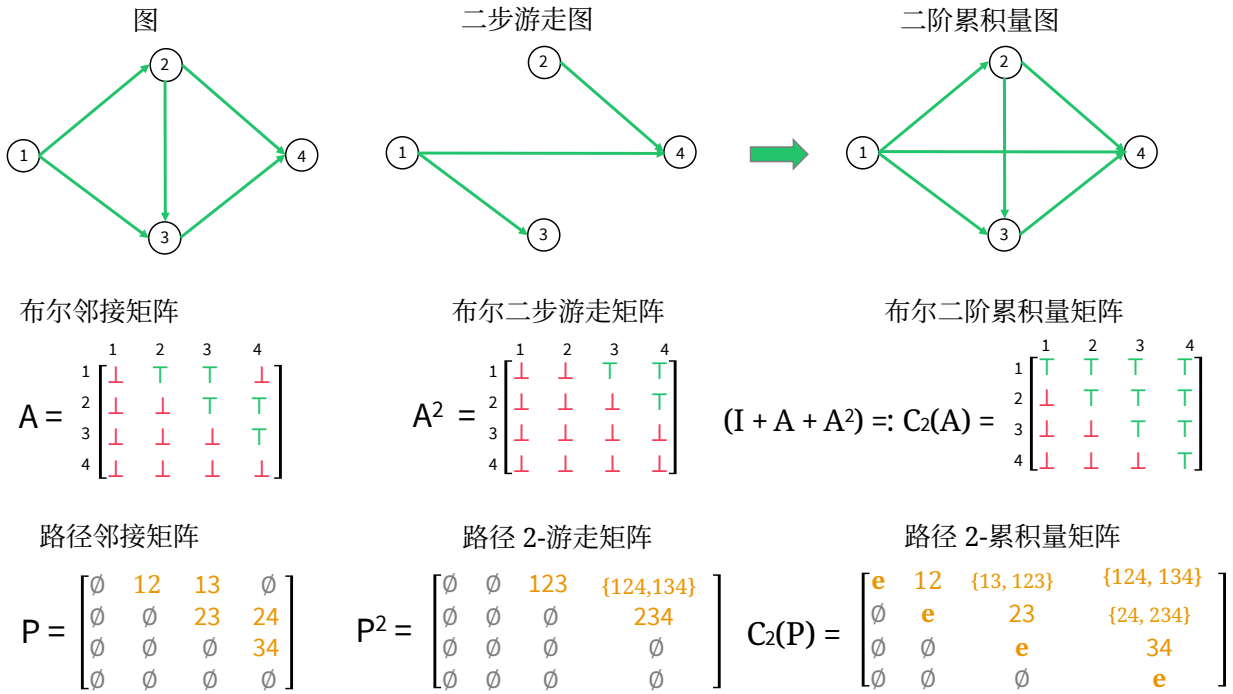


图 3：简单有向图等价于取值于布尔半环中的矩阵，定义 2.8。对该矩阵取幂可以揭示节点之间的更长游走。长度为 k 或更短的游走由 k-累积量进行汇总。使用路径半环中的矩阵，定义 2.9，可以编码同一对节点之间的不同路径。

以下定理对本文至关重要。其证明篇幅较长，故移至附录，并作为定理A.4。

定理2.16。矩阵时变图的半环$\mathrm{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 与从 $\mathbb{R}$ 到$\mathrm{Mat}_n(\text{布尔})$的函数半环同构。该同构由同态给出

$$\Psi : \mathrm{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Bool})), \quad \textit{where} \quad \Psi(M)(t) = \mathscr{S}_t(M)$$

是 M 在时刻 t 的快照。

尽管定理 2.16 允许我们将矩阵时变图解释为一族以$\mathbb{R}$为索引的布尔矩阵，但出于计算目的，直接使用生命周期矩阵更为合适，其中每个条目都是闭区间的有限并。具体而言，若矩阵时变图 M 的每个条目至多包含L个闭区间，那么求得 $M_{ij} \cap M_{jk}$至多需要 L^2次交集运算；但若采用布尔视角，即 $(m_{ij} \wedge m_{jk})(t)$，则需要检查每个$t \in \mathbb{R}$，以确定结果矩阵条目在 t时是否为真——这在计算上是不可能的。因此，我们以另外几个以时变图为中心的构造结束本节，并以一个推论作结，通过定理 2.16 的布尔视角来阐释这些结果。

定义 2.17 (游走的生命周期)。 假设 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 是一个时变图，如定义 2.2所述，且$\gamma = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$是由 k 个 $+1$ 节点组成的列表，它们在 G 中定义了一条 k-游走（长度为 k 的路径）。游走生命周期是游走中每条边的生命周期的交集，即：

$$\ell_M(\gamma) = \ell_M([v_{i_0}, v_{i_1}]) \cdot \ell_M([v_{i_1}, v_{i_2}]) \cdots \ell_M([v_{i_{k-1}}, v_{i_k}]).$$

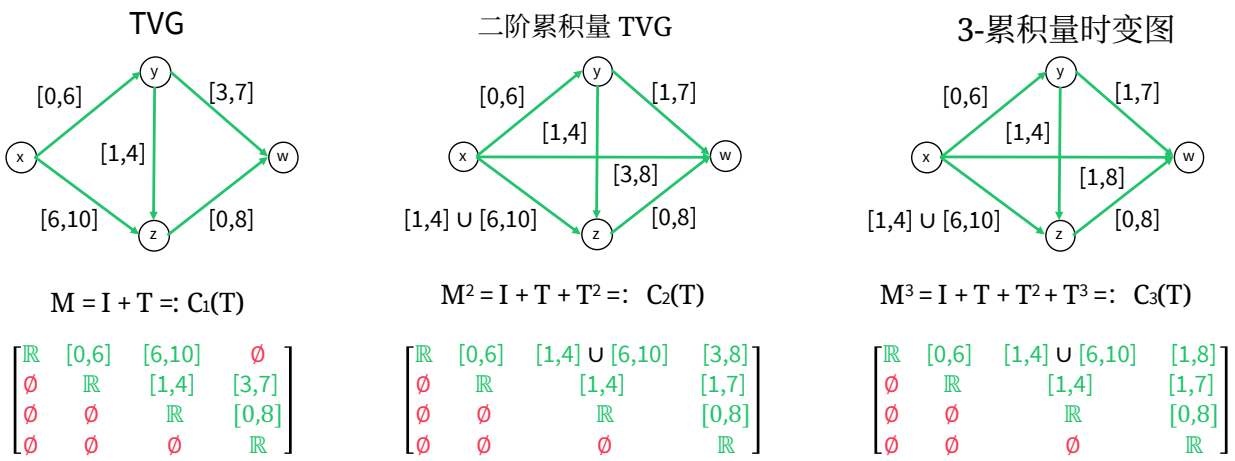


图4：时变图可以表示为取值于生存期半环中的矩阵，定义 2.10。该矩阵的高次幂刻画了更长的游走可能发生的时间。 k-阶累积量汇总了长度为 k 或更短的游走可能发生的机会窗口。请注意，随着 k 的增大，k-阶累积量为每条边定义了一个生命周期滤过。

对于长度为 0 的游走，即 $\gamma = [v_i]$，则 $\ell_M([v_i]) = \ell_M(v_i)$ 是该单个顶点的生命周期。

定义 2.17 将定义 2.9 与定义 2.10 联系起来，如下所示：

引理 2.18。 假设 $\mathcal{G} = (G, \ell_M)$ 是一个时变图，但 $\ell_M(v_i) = \mathbb{R}$ 对每个顶点 v 都成立，那么生命周期函数 ℓ_M 可扩展为一个半环同态（定义*A.2*）

$$\ell_M : \mathsf{Path}(G) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad where \quad \sum_i \gamma_i \mapsto \bigcup_i \ell_M(\gamma_i).$$

证明。 每个顶点都永久存在这一假设，即 $\ell_M(v_i) = \mathbb{R}$，保证了$\ell_M(1) = \ell_M(\sum [v_i]) = \mathbb{R}$。根据定义，加法和乘法性质也随之成立。 □

推论 2.19 (矩阵时变图的高次幂)。 如果 $M \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 是一个矩阵时变图，那么 $M^k ij$ 是所有满足存在一条从节点 i 到节点 j 的长度为 k 的游走的生命周期的并集。

2.2 通过 KleeneStar 衡量 STARLINK 的通信容量

如定理 2.16 和推论 推论 2.19 所示，矩阵时变图模型的高次幂在时间瞬时，可以表示节点之间发生的游走。本节将说明，克莱尼星及其截断（称为累积量）如何导出时变图中两个节点之间通信时间容量的一种特定增长滤过。由此得到一种汇总统计量，用于衡量时变图接近强连通图的程度。我们通过 STARLINK 的不同规模样本来展示这一点。STARLINK 是由 SpaceX 运营的互联网服务，在低地球轨道上拥有 3,000 多颗卫星。我们的研究结果表明，时间容量在约 30 颗卫星时出现相变；按照本文定义，更大的子网络具有强连通性。

定义 2.20（克莱尼星与 k-累积量）。设 A 为任意矩阵时变图。A 的克莱尼星记作

$$A^* := I + A + A^2 + A^3 + \cdots,$$

是一个矩阵，其$(i,\ j)$条目是实数集的一个子集，表示从节点 i 到节点 j 的任意通信可能发生的时刻，其中可能涉及任意长度的游走。 ***k*-**累积量是克莱尼星中前 k 个 $+1$ 项之和，记作 $C_k(A)$，或者在上下文中矩阵 A 明确时记作 C_k。最后，如果 $A^* = G(A)$ 在半径 $r \in \mathbb{N}$时，我们称克莱尼星收敛。图*4*展示了一个时变图及其累积量的示例，其克莱尼星在 $r = 3$处收敛。

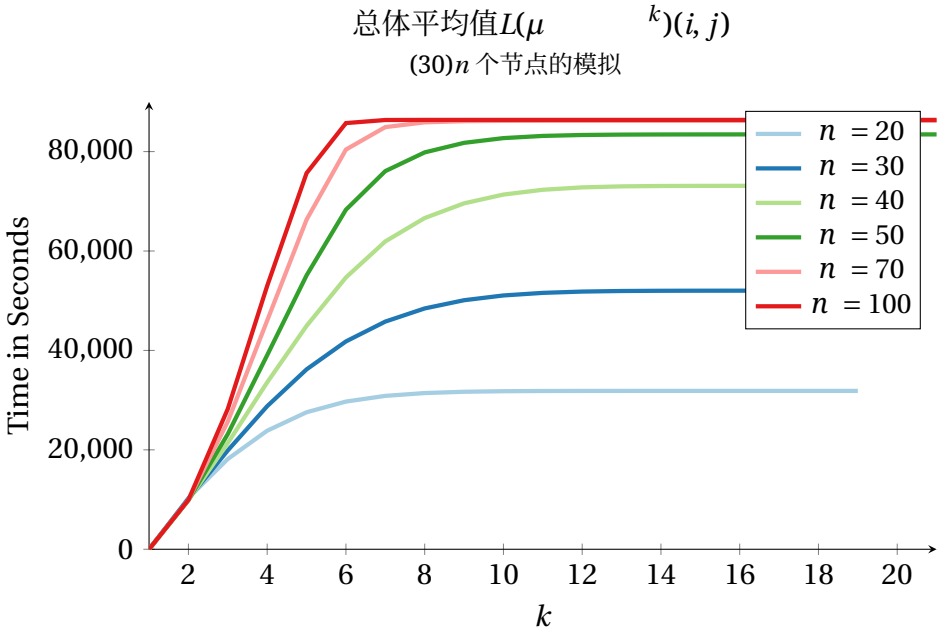


图 5：STARLINK 中 n 个节点的样本n使用 SOAP 模拟了一天，即 86,400 秒。对于每次模拟，都会针对时变图矩阵的每个 k 次幂，计算所有节点 i、j 的平均生命周期曲线（定义见引理 2.22）。平均连通性似乎在节点数超过 i, j时出现跃升，k 节点数。$n = 30$ nodes.

注 *2.21*2.21。克莱尼星号构造有助于说明我们为何将与简单时变图相关联的生命周期矩阵 M（定义 2.4）与其邻接矩阵（定义 （G，ℓ_M）区分开来。具体而言，若 ℓ_M（v）$= \mathbb{R}$，则 $M = I + A$，并且我们可以利用 $\mathscr{P}$（$\mathbb{R}$）（注 2.112.11）的幂等性证明：

$$C_k(A) = I + A + \cdots + A^k = (I + A)^k = M^k.$$

要看出这一点，请注意 $A + A = A$ 以及

$$M^2 = (I + A)^2 = (I + A)(I + A) = I^2 + IA + AI + A^2 = I + A + A^2 = C_2(A).$$

一般性结果随后通过归纳法得出。

由于矩阵时变图的加法是生命周期的并集，因此k-累积量在每条边上定义了 $\mathbb{R}$ 的一条嵌套子集链。

引理 2.22（寿命曲线）。 假设 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 是一个简单时变图，且 $\ell_M(v) = \mathbb{R}$，使得相应的生命周期矩阵满足 $M = I + A$。对于这样的时变图，我们有一个生命周期滤过，它将每条边 $[i,j]$ 与 G 的子集链对应起来

$$M_{ij}^0 = \varnothing \subseteq M_{ij}^1 \subseteq \cdots \subseteq M_{ij}^k \subseteq \cdots,$$

其第 k 个条目是长度不超过 k 的游走的生命周期并集；参见定义 *2.17*。此外，由于 $\mathbb{R}$ 中的闭区间是勒贝格可测的，因此我们可以为 $[i,j]$ 中$\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 的每条边定义其寿命曲线，它是一个非递减函数

$$L(M^\bullet)(i,j) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad where \quad L(\mu^k)(i,j) = \mu(M_{ij}^k)$$

是 $M(i,j)$ 的第 k 个条目中区间长度之和。假设 M 的所有非对角线条目均具有有限测度，则该值有限。部分示例见图 *5*。

寿命曲线旨在提供一种汇总统计量，用于衡量一个时变图与强连通时变图的接近程度。下面给出强连通时变图的定义。

定义 2.23（强连通时变图）。 矩阵时变图 $M \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 若 $M^* = I + M + M^2 + \cdots$ 等于每个条目都取值为 $\mathbb{R}$ 的常数矩阵，则称其为强连通。更一般地，若 $W \subseteq \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 的某个子集，则当 M^* 是取值为 W 的常数矩阵时，称矩阵时变图 $M \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(W))$ 在 W 上强连通。 [3]

备注 2.24（有向图的强连通性）。 提醒一下，有限有向图若能沿有向路径从任意节点到达其他任意节点，则称为强连通。这等价于克莱尼星是常数 $\top$ 矩阵，这也解释了我们上述定义的合理性。

如图 5 所示，从 STARLINK 采样得到的卫星系统寿命曲线，根据系统中的节点数量，呈现出截然不同的行为。此处节点数达到 40 个或更多的系统，其平均生命周期（对所有节点对取平均）似乎随着游走长度k呈现近乎指数级增长；而节点数不超过 30 个的系统，其增长则更接近平方根函数。不过，所有曲线最终都会达到水平渐近线，因为对于有限的 r 值，克莱尼星会收敛。我们在最一般的情形下回顾这一结果，该结果最早由 Carré 以 [Car71，定理 3 的形式确立，1] 随后由 Baras 在 [BT10，第 19]，页重新表述；之后我们将针对半环 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 提出对此结果的改进。

定理 *2.25*（克莱尼星号收敛，参见 [*Car*71] 和 [*BT*10]）。设 $G = (V, E)$ 是一个赋权于半环 $(S, \oplus, \otimes, n, e)$ 的简单有向图，即给定映射 $w : V \times V \to S$。若对于每个圈，也就是路径 $\gamma = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}]$，其中 $v_{i_0} = v_{i_n}$，其权重

$$w(\gamma) = w(v_{i_0}, v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes w(v_{i_{n-1}}, v_{i_n}) \quad satisfies \quad w(\gamma) \oplus \mathbf{e} = \mathbf{e},$$

那么，加权邻接矩阵 $A_{ij} = w(i, j)$ 的克莱尼星在 $r \leq |V| - 1$ 时收敛。

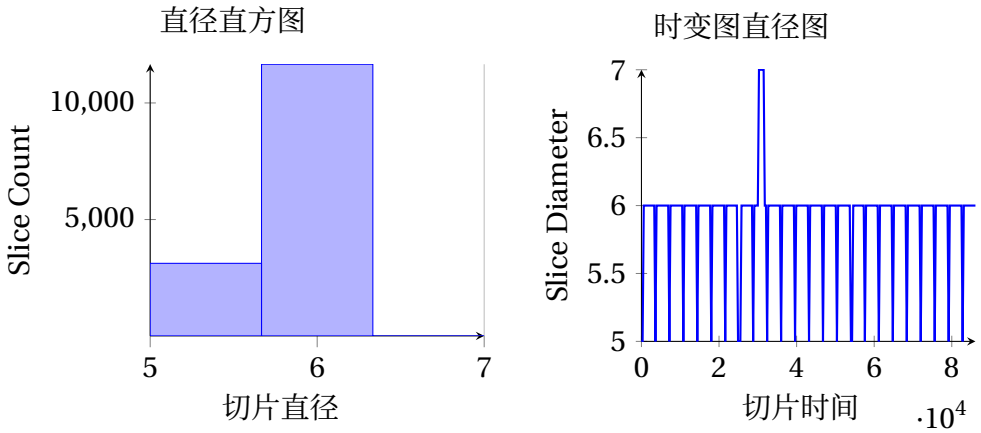


图6：对包含 100 个节点的 STARLINK 单日模拟进行切片后，得到的直径直方图。观测到的最大直径为 7，但典型直径约为 6。

定理 2.25 的假设适用于生存期与幂集半环，因为每个圈都有一个生命周期 w（γ，使得 w（γ）$\cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$。这意味着，图 5中的寿命曲线必将稳定于 $k = n - 1$。由于某些模拟在单次运行中涉及多达 $n = 100$ 个节点，因此 k阶累积量可能需要计算到 $r = 99$（含）为止。然而，下一条命题（其证明见附录中的命题 A.5）以及我们的模拟结果表明，STARLINK 模拟中克莱尼星的收敛半径通常要小得多。

命题 2.26 (在时间直径处收敛)。 设 A 为简单时变图 $\mathcal{G} = (G, \ell_M)$ 的邻接矩阵。k-累积量 $C_k(A)$ 的 $(i, j)^{th}$条目在 dij 之后趋于稳定，其中

$$d_{ij} = \max_{t \mid \exists \gamma : i \rightsquigarrow j} \min_{\gamma} |\gamma|$$

是忽略不存在此类路径的时刻后，从 i 到 j 的最长最短路径的长度。按照约定，我们令 $d_{ii} = 0$。我们将时变图 *TVG* $\mathcal{G}$ 的时间直径 定义为

$$\operatorname{diam}(\mathcal{G}) = \max_{ij} d_{ij}.$$

因此，当 $r \geq \operatorname{diam}(\mathcal{G})$时，克莱尼星 A^* 收敛。

命题 2.26 的要点是，我们只需了解在所有可能的 $t \in \mathbb{R}$取值下测得的 M 快照的最大直径。根据图 6所述的模拟，这个包含 100 个节点的 STARLINK 模拟的时间直径实际上为 7。

然而，进一步的仿真表明，对于来自 STARLINK 的时变图，克莱尼星的收敛半径实际上远小于 $r = 7$，而命题 2.26 和图 6所预测的正是这一数值。通过查看图 7，可以看出收敛半径随节点数量的变化情况——这由寿命曲线趋于平稳的位置表示。节点更多时，例如 $n = 150$ （未显示），收敛半径似乎还要更小

[3]通常 ，对于持续一天、以秒为单位测量的模拟，我们将假设 $W = [0, 86400]$ s.

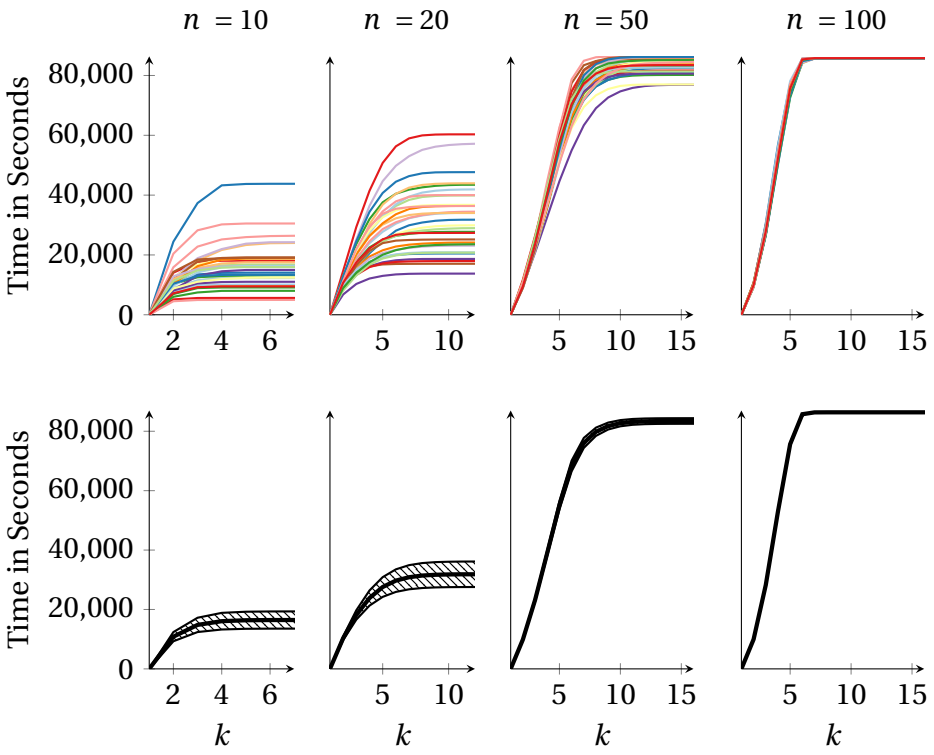


图 7：在一天（即 86400 秒）内，从 STARLINK 中随机抽取的 $n = 10$、20、50、100 个节点进行的 30 次模拟（上图）。下方显示置信区间。

于 $r = 7$，并且我们推测，对于节点数超过 150 的 STARLINK 系统，该收敛半径小于 5。从图9所示的纯几何考量来看，极限半径应为 $r = 3$，但我们的实验尚未达到这一极限。因此，我们陈述了该猜想的弱形式和强形式。

猜想 2.27 （STARLINK 时变图的收敛半径）。*A.*（弱版本）随着 $n \to \infty$，以高概率，*STARLINK* 的一个随机抽取的子时变图的克莱尼星将在 $r \leq 5$ 时收敛。

B.（强版本）随着 $n \to \infty$ 增大，以高概率随机采样的 *STAR-LINK* 子时变图将在 $r = 3$ 处具有收敛的 *Kleene* 星。

这两个猜想都可以视为关于从单位球面上均匀采样的n 个节点所构成的 Vietoris-Rips 复形的 1- 骨架性质的断言，其连通半径为 $r = \pi/3$。尽管理论上球面上的任意两点都应由一条长度为三的路径连接，但离散采样可能需要额外的两条链路：一条通向直径为三的子骨架，另一条通向接收节点。

2.3 克莱尼星的不收敛性：用于传播延迟的半环

在前面的所有章节中，我们都聚焦于空间网络场景中的时变图，例如 STARLINK；在这些场景中，光速带来的时延可以忽略不计。接下来，我们将

总体平均值 $L(\mu^{k})(i,j)$ ＝条目 (i,j) 中区间的总和 (30)n 个节点模拟

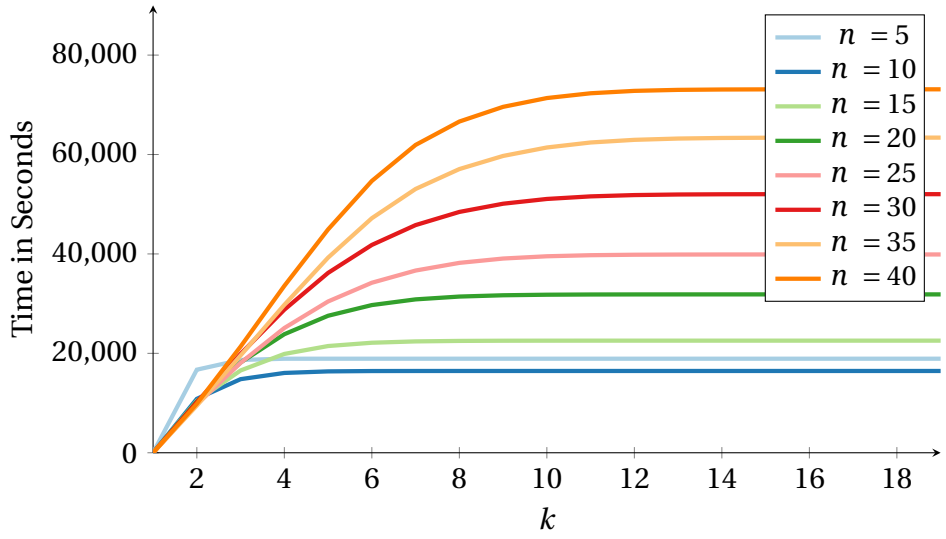


图 8：节点系统规模从$n = 5$到$n = 40$、每次增加五个节点时，30 次模拟得到的平均生命周期曲线。模拟一天后，规模大于$n = 30$的节点系统似乎呈现强连通性；也就是说，克莱尼星似乎收敛到一个值为 86400 的常数矩阵，即一天的秒数。

研究资产分布在地球的月球（月球）和火星周围的卫星系统。在这两种情况下，尽管消息以光速传输，视距通信仍可能因传播延迟而需要相当长的时间。提醒一下，光线单程到达月球约需 1.2 秒；这意味着往返时间（RTT）已长到足以使通信可靠性无法采用标准或传统的反馈机制，不过仍可进行响应式操作。发送到火星的消息可能需要 3 到 22 分钟，具体取决于地球和火星在各自轨道上的相对位置。当 RTT 以分钟计时，通信可靠性往往需要依靠主动而非响应式的方式来保障。因此，我们需要一种能够对传播延迟进行建模的新型半环。

本节介绍传播延迟半环，它是定义 2.10 中的生存期半环与一个时延参数的组合。对于该半环，定理2.16不成立，这进一步说明，将时变图视为一个 $\mathbb{R}$索引的简单有向图族（或图序列）无法刻画具有非平凡传播延迟的系统。此外，Carré 的经典克莱尼星收敛结果（定理定理 2.25）不适用于传播延迟半环。我们通过对地球—火星—月球系统进行的 17 节点模拟对此进行了实验说明：从一个节点发出的 ping 会在网络中无限次地“回响”。克莱尼星不收敛这一现象，可视为深空路由与通信困难的一种代数刻画。

定义传播延迟半环的出发点基于这样一个观察：

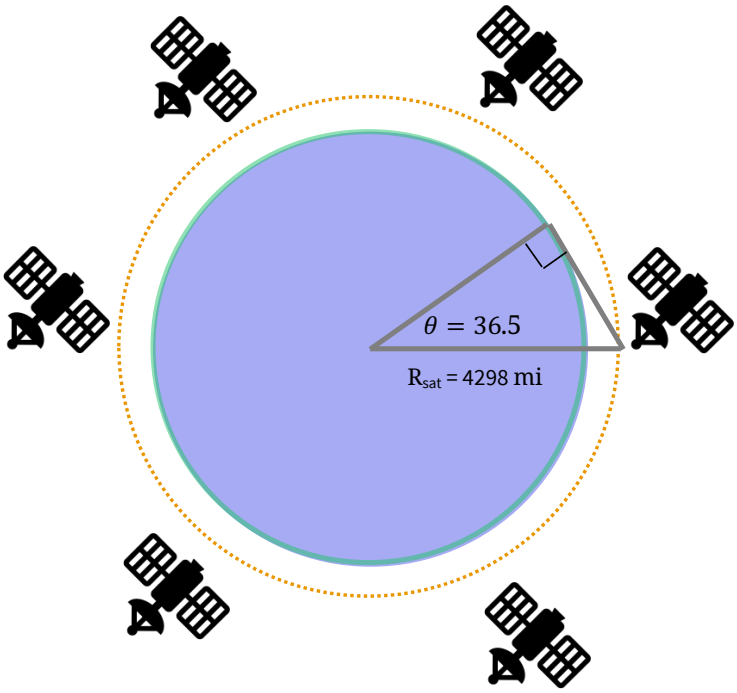


图 9：STARLINK 卫星通常在距地球 ∼340 英里的高度运行。根据视线条件，每颗卫星的视角应约为 73°，这意味着在卫星数量充足的情况下，任意两颗对跖卫星之间最多可通过长度为 3 的游走连接。

半环的加法自同态集合S也构成一个半环；参见引理A.3。若必然采用相对论视角看待太空通信，那么一位观察者在时间区间$I \subseteq \mathbb{R}$内记录的消息，可能会传送这条消息，而接收时间则稍晚，落在时间区间

$$\varphi^{\epsilon}(I) := I^{\epsilon} = \{x + \epsilon \mid x \in I\}.$$

复合这类延迟算子会形成另一种半环结构，现将其具体定义如下。

定义 2.28 (传播延迟半环)。 考虑集合$\mathscr{L}(\mathbb{R}) \times [0,\infty)$，其中包含生命周期（定义*2.1*）以及可能的延迟。该集合可以配备加法和乘法运算，如下所示：

- $(I, s) + (J, t) := (I \cup J, \max\{s, t\})$，以及
- $(I, s) \otimes (J, t) := (I \cap (J - s), s + t)$.

幺元分别为$\mathbf{n} = (\varnothing, 0)$和$\mathbf{e} = (\mathbb{R}, 0)$。

备注 2.29（三个半环及其关系）。 生存期半环（定义2.10）注入到传播延迟半环中，而后者又注入到生存期半环的自同态半环$\mathrm{End}(\mathscr{L}(\mathbb{R}))$，该半环在引理 A.3 中作了一般定义。为说明这一点

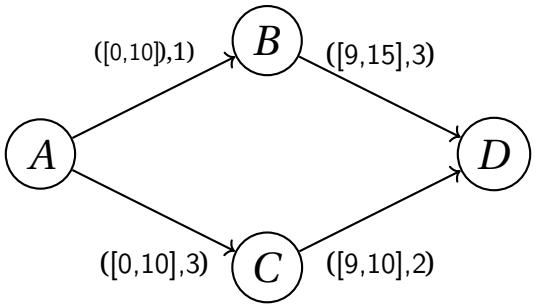


图10：包含 4 个节点的时变网络：每条边表示一个连接，并标注了可用时间和延迟时间。

最后一个注入，注意每个 $I \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ 和时延 $s \geq 0$，我们考虑一个“相交并平移”自同态 $\varphi^s{}_I$：$\mathscr{L}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathbb{R})$，定义如下

$$\varphi_I^s(K) = \{x + s \mid x \in I \cap K\}.$$

在此赋值下，单位元 $\mathbf{n} = (\varnothing, 0)$ 被映射到“所有内容都映射到 $\varnothing$”操作员，而 $\mathbf{e} = (\mathbb{R}, 0)$ 被映射到恒等变换。

示例 2.30（四节点示意图示例）。 在图 10 中，我们考虑对带有时延的时变图进行扩展。路径 $A \to B \to D$ 将导出一个复合

$$([0,10],1) \otimes ([9,15],3) = ([0,10] \cap [9-1, 15-1], 1+3) = ([8,10],4).$$

路径 $A \to C \to D$ 将导出一个复合

$$([0,10],3) \otimes ([9,10],2) = ([0,10] \cap [9-3, 10-3], 3+2) = ([6,7],5).$$

与二步游走矩阵相关的条目中，对应于 $A \to D$ 通信的条目为 A^2_{14}，，其值随后为

$$([8,10],4) + ([6,7],5) = ([6,7] \cup [8,10],5).$$

如本示例所示，加法运算假设了一种最坏情况：消息可能被拆分，并沿两条不同的路径发送，节点 D 的操作员需要等到两条消息都到达后，才能重新组装或解码该消息。这对节点 D 的存储容量做出了隐含假设，即我们假定其存储容量可以任意大。

最后，我们使用 14 项资产展示一个模拟示例：

- 澳大利亚悉尼的一座地面站，它是“ping”在 $t = 300$ 时的源站。
- 四颗星链卫星在首次发送 ping 时不在视野范围内。
- 两秒后，五颗（IOAG）月球卫星接收到来自悉尼的 ping。
- 四颗火星卫星在 13 至 14 分钟后收到这条消息。

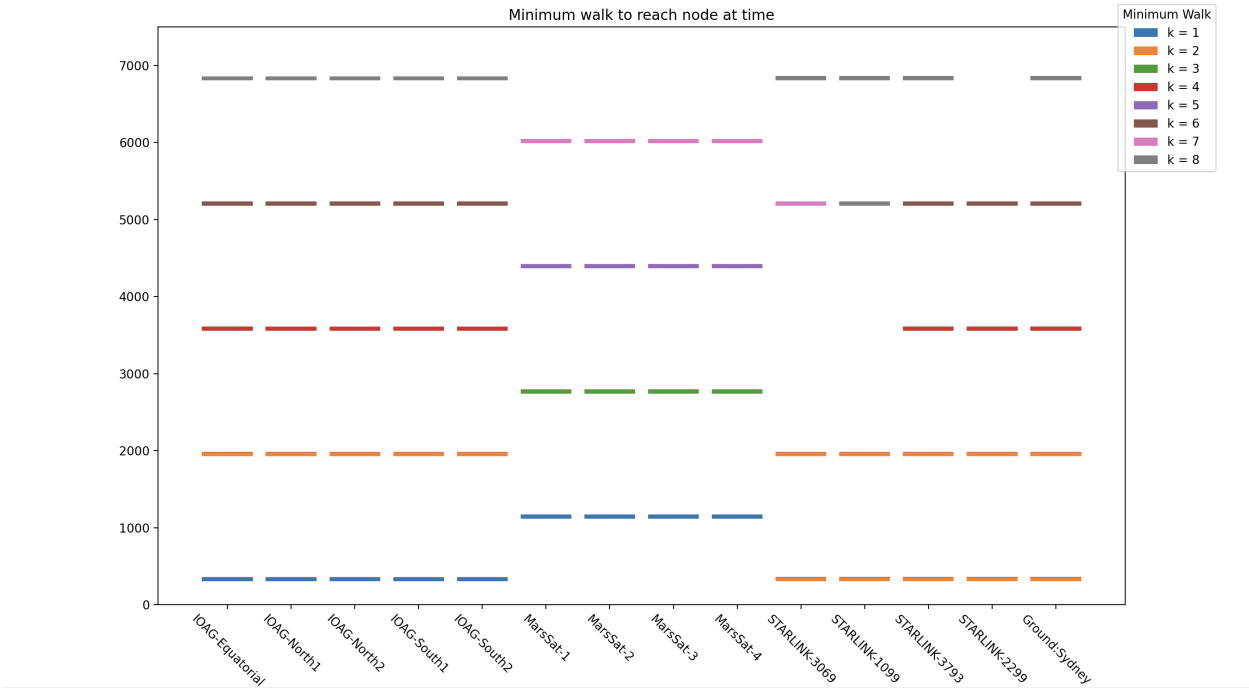


图 11：悉尼的一座地面站在 $t = 300$ 时发出一次 ping。IOAG 推荐的月球卫星在不到 2 秒后收到消息。该消息随即沿所有可能的链路转发，返回地球并继续传往火星。悉尼和星链卫星都将这条重复消息视为长度为 2 的游走的终点。火星卫星约在 800 秒后从悉尼收到消息，时间为 $t \approx 1100$，随后将消息广播回 IOAG 和星链卫星。消息在网络中无限次转发，路径的游走长度以颜色表示。这说明克莱尼星在传播延迟半环中无法收敛。

每当某项资产收到 ping，就会自动将 ping 转发给所有已连接的资产；这些资产收到 ping 的时间取决于它们之间相隔的光秒数。随着模拟的进行，STAR- LINK 卫星会时隐时现，并通过长度各异的游走相互连接。这种“弯管式”通信通过行向量乘法建模

$$v^t(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^8 + \cdots)$$

向量 v 在悉尼条目中取单元素集合 $\{300\}$，而 $\varnothing$ 取其他每个条目中的值。到达时间向量如图 11 所示，颜色表示游走矩阵 A^k 中所遍历路径的游走长度。

2.4 图优化问题中已有半环的综述

本节回顾了有关半环的既有研究，这些半环用于求解加权图的全对最短路径问题，以及在具有时变边且有或没有容量约束的情况下求解最短路径问题。

2.4.1 热带/最小加半环 如 2.30中的例子所述，传播延迟半环在第二个坐标中使用“最大加”半环。这个半环与一种更常用于图优化问题的半环互为对偶。

定义 2.31 （热带半环）。 考虑集合 $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。若定义 $a \oplus b = \min\{a,b\}$，且 $a \odot b = a+b$，则集合 $\mathbb{T}$ 配以 $\mathbf{n} = \infty$ 和 $\mathbf{e} = 0$，构成热带半环，亦称***min-plus*** 半环。

备注 2.32（全点对最短路径问题）。 若G 是一个每条边都赋有长度的简单有向图，则将该图视为在 $\mathbb{T}$ 上加权，并计算其加权邻接矩阵的克莱尼星，即可解决**全点对最短路径问题**，也就是说，A^*_{ij} 这一条目将记录从i 到j 的最短路径长度。请注意，如果某个圈具有负权重，则定理2.25 的假设不成立，因为沿该圈反复行进可以构造出长度任意短（负值）的路径。

2.4.2 时变网络的热带自同态半环 正如备注2.32 所示，可以通过计算热带半环中加权邻接矩阵的克莱尼星来解决最短路径问题 $\mathbb{T}$。一种模型推广了这一视角，同时也允许边长度随时间变化；它使用End($\mathbb{T}$的某个子半环，我们现在对其进行定义。

定义 2.33(非递减自同态**).** 令 $\mathbb{W}$ 为所有满足以下条件的自同态 w 的集合：w 单调不减，且$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$。我们在 $\mathbb{W}$ 上定义运算 $\oplus$和 $\otimes$如下：对所有 $t \in \mathbb{T}$，

- $(w \oplus v)(t) = \min\{w(t), v(t)\}$，并且
- $(w \otimes v)(t) = w(v(t))$.

注 释 2.34. 定义 2.33 背后的直观含义是，函数 $w_{ij} \in \mathbb{W}$ 决定了在时间 t从节点 i传输的消息何时到达节点 j——也就是时间 $w_{ij}(t)$。考虑此类矩阵的克莱尼星，也可以求得交通网络中的最早到达时间，其中交通密度会随时间变化。定义2.33 中的非递减条件在交通示例中也很直观，因为一天中较晚出发绝不会导致更早到达。

注释 2.35（与容迟网络的联系）。 [BT10，第33] 指出，定义 2.33 也可用于对机会网络和容迟网络建模，而这正是当前空间网络的范式。事实上，我们也可以将生命周期半环嵌入该模型，但这样会牺牲易用性，以及第 3 节所述的与拓扑数据分析之间的联系。

最后，我们指出，可以很方便地在定义2.33 中加入容量约束。注释 2.36（容量约束时变路由）。采用与上述类似的方法，我们可以构造一个基于自同态的半环，用于刻画时变网络上的容量约束传送。具体而言，给定容量 $C > 0$，对于每个$w \in \mathbb{W}$，都存在一个 $W \in \mathbb{W}$，使得：

$$W(t) = \min\left\{s : \int_t^s w(x)\,dx = C\right\}.$$

随后，可以像定义2.33中那样组合这些元素。

2.5 用于时变路由的通用接触半环（UCS）

最后，我们通过介绍一种称为**通用接触半环（UCS）**的新型半环，来结束对半环的讨论。它使我们能够对大量网络问题建模。对于将半环应用于空间网络而言，最重要的是，UCS 可以对“存储并转发”协议进行建模；该协议是容迟网络（DTN）的主要范式，而上述其他半环都无法对其进行描述。 [Tor+07]给出必要定义后，我们将通过一个合成示例，演示这种半环如何描述存储并转发网络协议。

定义 2.37。通用接触半环（***UCS***） $\mathscr{C}$ 由一组从$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$的幂集的映射构成，

$$\mathscr{C} = \{f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}\},$$

并配有定义如下的加法和乘法运算：

$$f \oplus g(t) = f(t) \cup g(t) \quad \textit{and} \quad f \odot g(t) = \bigcup_{x \in f(t)} g(x+t) + x,$$

分别如此。这里，形式和 $A + x$ 表示闵可夫斯基和，即

$$A + x = \{a + x, a \in A\}.$$

$\mathscr{C}$ 的加法单位元是常值函数

$$\begin{aligned} 0_{\mathscr{C}} : \mathbb{R} &\to 2^{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto \emptyset, \end{aligned}$$

而乘法单位元是常值函数

$$\begin{aligned} 1_{\mathscr{C}} : \mathbb{R} &\to 2^{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto \{0\}. \end{aligned}$$

尽管通用接触半环具有幂等性，但由于缺乏交换性、整性以及全序，这个半环的性质并不理想。不过，我们认为 UCS 适用于现实应用建模：在网络环境中，映射 $f \in \mathscr{C}$表示给定时刻可能出现的传递延迟：若 $x \in f(t)$，则消息可沿边传输，并于时刻 $t + x$到达。这使 UCS 能够涵盖接触窗口、时间转发、变化的通信时间，以及节点处有限或无限的存储。

此外，UCS 还包含上述路由问题中自然出现的大多数半环，作为其子商，即 UCS 的子半环的商。下一条结果的证明见命题A.6（附录中）。

命题 2.38。 令 $\mathscr{C}$ 表示通用接触半环（定义*2.37*）。 $\mathscr{C}$ 包含

(a). 布尔半环S 的一个单射像；

(b). 一个与时变图半环同构的子半环；

(c). 一个映射到热带半环 $\mathbb{T}$上的子半环；

(d). 一个映射到传播延迟半环上的子半环；以及

(e). 一个映射到函数自同态半环 $\mathbb{W}$上的子半环。

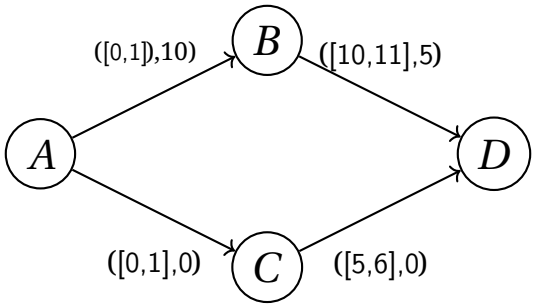


图12：包含 4 个节点的时变网络：每条边表示一个连接，并标注可用时间和延迟时间。

示例 2.39. 设 $\mathcal{N}$为一个包含 4 个节点的时变网络 A、B、C和 D，如图 12所示。通过将边 $([a,b], \omega)$ 视为如下映射，可以为该网络赋予通用接触半环：

$$t \mapsto \begin{cases} \{\omega\} & \text{for } t \in [a,b] \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为模拟节点处可能发生的信息存储，我们在每个节点上添加一个自环，并通过映射表示该自环，该映射发送 $t \mapsto [0,\infty)$。使用传播延迟半环或其他半环时，从 A到 B唯一可能的路径是 $A \to B \to D$，时延为 15。然而，在 $\mathscr{C}$ 中，路径 $A \to C \to C \to D$是允许的，时延为 5。

路径 $A \to B \to D$ 的半环权重，即将路径中各边的权重相乘所得，可由如下映射给出：

$$t \mapsto \begin{cases} \{15\} & t \in [0,1] \\ \emptyset & t \notin [0,1] \end{cases}$$

而半　　环权重将由映射给出，该映射将路径 $A \to C \to C \to D$映射为

$$t \mapsto \begin{cases} [5-t, 6-t] & t \in [0,1] \\ \emptyset & t \notin [0,1] \end{cases}$$

因此，除了允许采用另一条路径外，假设节点具有存储缓冲区，我们还可以看到，就路径总时间而言，对于路径 $A \to C \to C \to D$，我们可以在 $[0,1]$ 内的任意时刻发送消息，并仍能在时间 5 前到达。

我们注意到，可以通过修改自环映射 $t \mapsto [0,a]$，来封装每个节点有限的存储缓冲区，其中 $[0,a]$ 是一个有限区间。

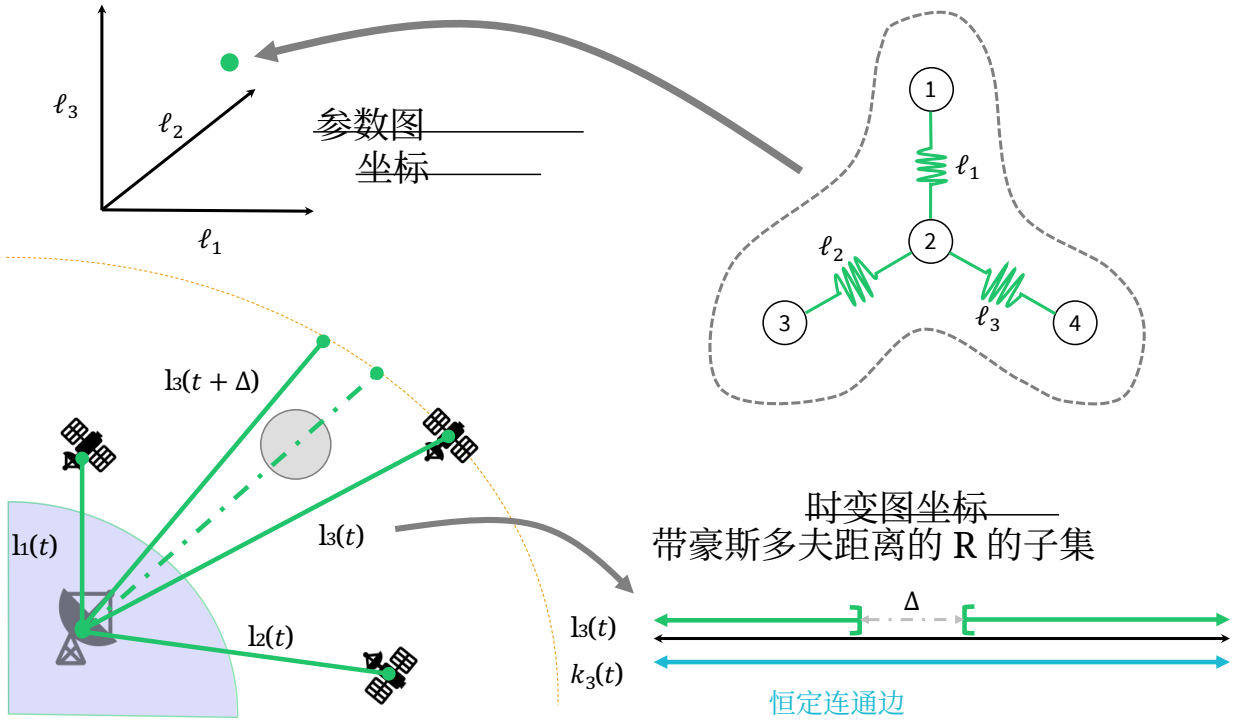


图 13：将边长度或权重视为连续变化参数的模型，根本无法妥善处理边的移除或图拓扑的其他变化。事实上，如果在参数模型中移除 ℓ_3，第三个坐标的值就会变得模棱两可。相比之下，时变图模型能够恰当地表示服务中断，并且可以使用豪斯多夫距离来衡量断连持续时间。

3 时变图的几何与拓扑模型

本节探讨一个问题：如何以精确的方式判断两个时变图（TVG）何时“接近”。这个问题有多方面的重要性，一个直接的应用是计算一个 n 节点的 STARLINK 子系统是否确实接近强连通系统，正如图 5 中的寿命曲线所示。寿命曲线仅仅是汇总统计量，缺乏真正度量所具有的判别力，但图 15 支持这样一种直觉：从概率上看，节点数超过 40 就足以构造一个强连通的子时变图，而 $n = 100$ 则能提高保证恒定连通性的概率。

更广泛地说，时变图模型非常适合日益发展的拓扑数据分析（TDA）范式，在这一范式中，拓扑变化可以得到精确量化。这相较于传统的参数图模型是一次根本性的改进，例如 [JS22], 中使用的模型；在这些模型中，移除一条边会导致坐标化过程发生不连续；参见图 13。

3.1 时变图上的距离

本节我们开始研究时变图上的距离（定义2.2）。我们使用距离而非度量，因为某些时变图之间的距离可能是无穷远，而且两个时变图的

距离可以为零，即使它们并不完全相同。我们简要回顾一下度量这一更灵活的概念。

定义 3.1（距离）。集合 X 上的距离是一个映射 $d: X \times X \to [0,\infty]$，其中对于所有 $x, y \in X$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, x) = 0$

我们的时变图距离的基础是豪斯多夫距离。

定义 3.2。给定 $A, B \subseteq \mathbb{R}$，$A$ 与 B 之间的豪斯多夫距离 d_H 定义为

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid A \subseteq B^\varepsilon \text{ and } B \subseteq A^\varepsilon\},$$

其中 $A^\varepsilon = \bigcup_{a\in A} Ball_\varepsilon(a)$ 且 $B^\varepsilon = \bigcup_{b\in B} Ball_\varepsilon(b)$。这里 $Ball_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \varepsilon\}$。

3.1.1 固定节点对应下的距离

定义 3.3. 给定两个矩阵时变图 $M, N \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 其豪斯多夫距离为

$$d_H(M,N) := \max_{1\leq i,j\leq n} \{d_H(M_{ij}, N_{ij})\}.$$

注 3.4（$d_H(M, N)$）。假设 M和 N是生命周期矩阵（定义 2.4），那么每个条目都是有限个互不相交的闭区间。在这种情况下，计算 $d_H(M_{ij}, N_{ij})$ 的问题可归结为计算这些区间集合之间的豪斯多夫距离。 [KMS19，定理 E。1]证明了，可以通过计算它们各自补区间之间的瓶颈距离得到该量，即:

$$d_H(M_{ij}, N_{ij}) = d_B(C(M_{ij}), C(N_{ij})),$$

其中，$C(M_{ij})$ 和 $C(N_{ij})$ 分别表示在 $\mathbb{R}$ 中的补集——通常与某个表示模拟时间的紧区间取交集。

鉴于注 3.4，我们在时变图上引入一组新的距离。

定义 3.5 ((p, q)-断连距离)。**给定生命周期矩阵 M**，$N \in \mathsf{Mat}_n(\mathscr{L}(\mathbb{R}))$ 其(p, q)-断连距离为

$$d_{DC,p,q}(M,N) := \left\| \left\langle d_W^p\left(C(M_{ij}), C(N_{ij})\right)\right\rangle_{1\leq i,j\leq n} \right\|_q.$$

其中，$C(M_{ij})$ 和 $C(N_{ij})$ 分别是 M_{ij}，$N_{ij} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ 中区间的补集，$d_p W$ 是条形码上的瓦瑟斯坦距离，相关内容已在附录中回顾。这些距离构成一个长度为 n^2 的向量，然后计算其 ℓ^q 范数。

注 3.6。根据注 3.4，当定义3.3 限制在生命周期矩阵上时，豪斯多夫距离可视为定义 3.5 在 $p = q = \infty$.

图 15 计算了 $p = q = \infty$（豪斯多夫距离）以及$p = q = 2$（2-瓦瑟斯坦距离）的断连距离。

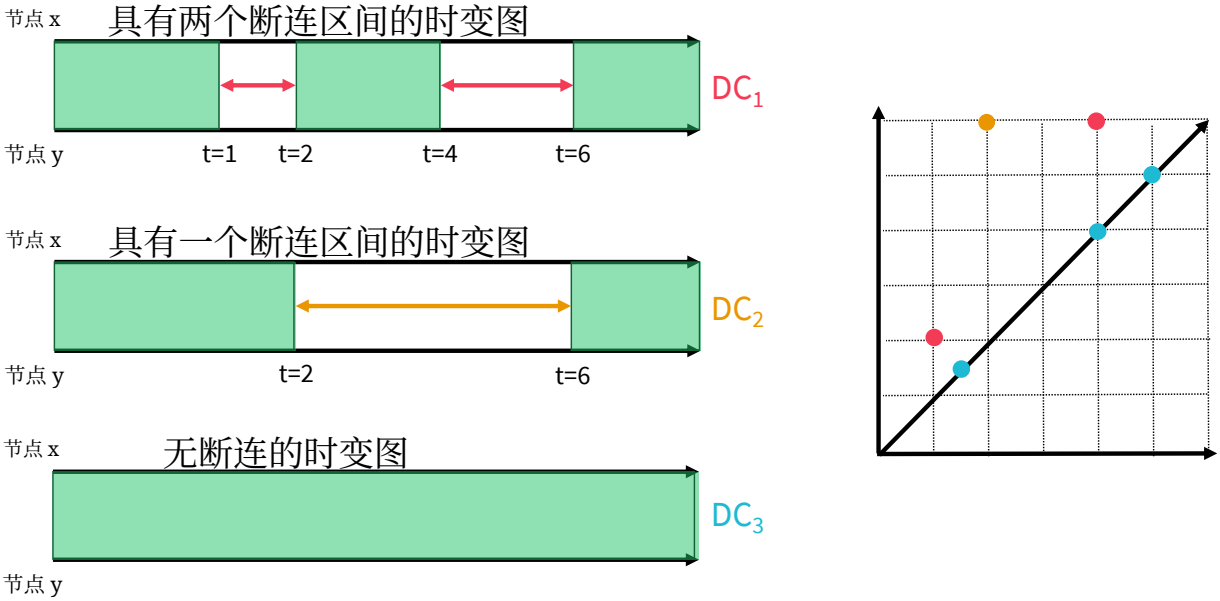


图14：从算法角度来看，最好将连接时间窗口上的豪斯多夫距离视为断连时间上的瓶颈距离。这利用了 [KMS19中证明的一个等距映射，定理 E。1]无断连的时变图可视为在对角线上有任意数量的点。瓶颈距离通过优化两个时变图之间断连时间的对齐方式来计算。

3.1.2 未知节点对应下的距离 定义 3.3 和定义 3.5 仅在两个时变图的节点数量相同且存在固定节点对应时才有用。这是因为需要对顶点排序以确定矩阵表示，然后逐条目计算距离。为了考察两个一般时变图之间的距离——此时节点对应关系不明确——我们需要引入一种放宽的豪斯多夫距离，它与拓扑数据分析中常用的一种交错型距离存在可证明的联系。

定义 3.7。 两个矩阵时变图 M、$N \in \mathrm{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$之间的对称化豪斯多夫距离为

$$d_{\Sigma H}(M,N) = \inf_{\sigma\in\Pi(n)} d_H(M,\sigma(N)),$$

其中 $\Pi(n)$ 是 $\{1,\ldots,n\}$的所有置换的集合，而 $\sigma(N)$ 是矩阵时变图，其 $(i$、$j)$项为 $N_{\sigma(i),\sigma(j)}$.

推论 3.8。 对于任意一对矩阵时间变化图 M、$N \in \mathrm{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$，有

$$d_{\Sigma H}(M,N) \le d_H(M,N).$$

备注 3.9。 由于$d_{\Sigma H}$需要考虑所有d_H个可能的排列，共$n!$种，$d_{\Sigma H}$的计算往往耗费极大，因此我们将改用时变图的拓扑摘要，例如之字形条形码。

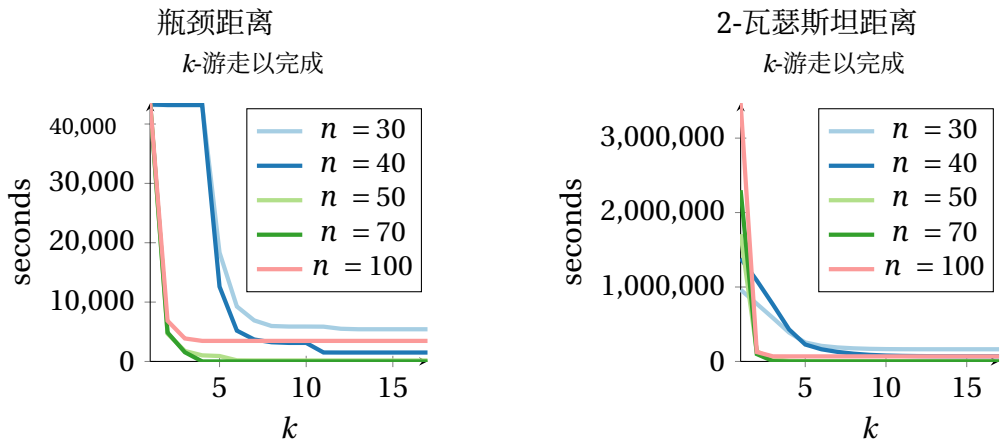


图15：两种不同的度量有助于验证图中所示的汇总统计量 5——对于 STARLINK 中每个样本的 $n = 30$ 个节点（40、50、70、100），计算 k-累积量与值为 86400 的常数矩阵之间的距离，其中 k 逐渐增大。瓶颈距离（左图）衡量与恒定连通性的最大偏差，并将 $n = 100$ 区分出来，作为唯一真正连通的子网络；而 2-瓦瑟斯坦距离则汇总了时变图各项之间的差异，并将 $n = 30$ 节点和 40 节点的模拟与 50 个及更多节点的节点系统更清晰地区分开来。

3.1.3 通过余层连接交错距离 与定义 2.15中的快照构造类似，可以对任意区间 $I \subseteq \mathbb{R}$上的时变图进行汇总。此外，为了更好地理解时变图在给定区间 I 上的行为，以及该汇总与另一汇总 J（其中 $I \subseteq J$）之间的关系，我们引入一种时变图的函子性汇总，它还有一个额外优点：它是一个余层。本文不需要深入了解余层理论；只需对范畴论有基本了解即可，相关内容见附录B。不过，我们始终鼓励读者进一步阅读范畴论相关资料，而 [Rie17] 尤其是一个极佳的资源。

定义3.10 (汇总图)。 设 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 是按照定义 *2.2* 所述的时变图。对于每个区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，我们定义一个 在 I 上的汇总子图 ：

$$\mathscr{E}_M(I) := \{e \in G \mid \ell_M(e) \cap I \neq \varnothing\}.$$

这是图 G 的一个子图，其中当且仅当某条边在区间 I 内的某个时刻处于存活状态时，才将其纳入其中。时变图 $\mathscr{G}$的底层图 是区间 $I = \mathbb{R}$上的摘要图。

现在，我们将摘要图构造提升为一个具有两个可能余域的函子。

定义3.11 （子图与图单态射范畴）。 固定 $G = (V, E)$ 为一个简单有向图。

- G 的子图集合记作**Sub**(G)，其对象为满足 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$ 的成对元素 $G' = (V', E')$。当且仅当 $V' \subseteq V''$且 $E' \subseteq E''$时，存在从 $G' \to$到 G''的唯一态射，因此**Sub**(G) 构成一个偏序集。

- G 的图单态集合记作$\mathbf{Mon}(G)$，由简单有向图 $G\prime = (V\prime, E\prime)$ 及其单射图态射 $\varphi\prime : G\prime \to G$ 组成。若 ψ 是满足 $\varphi\prime\prime \circ \psi = \varphi\prime$ 的图态射，则存在从 $\psi(G\prime, \varphi\prime) \to$ 到$(G\prime\prime, \varphi\prime\prime)$ 的态射。

- 存在一个函子 $\boldsymbol{\iota}$: $\mathbf{子图}(G) \to \mathbf{单态射}(G)$，它将每个子图映射到对应的包含映射。

注 3.12。 $\mathbf{Sub}(G)$ 与 $\mathbf{Mon}(G)$ 之间的差异微妙却至关重要。为说明这种差异，设G是一个顶点集为$V=\{x, y,z\}$、边集为$E = \{[xy], [yz], [zx]\}$的有向三环。在$\mathbf{Sub}(G)$ 中，恰有一个包含 3 个顶点和 3 条边的对象，即G 本身。然而，在$\mathbf{Mon}(G)$ 中，有三个包含 3 个顶点和 3 条边的对象；其单射图态射遍历了 3-圈的全部三个循环置换G。

定义 3.13 (汇总余层)。 TVG 的汇总余层 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 是函子

$$\mathscr{E}_M : \mathbf{Int} \to \mathbf{Sub}(G) \qquad where \qquad I \mapsto \mathscr{E}_M(I) \subseteq G,$$

它将每个闭区间 I 映射为 I 上的汇总图。

注记 3.14. 根据 [Cur13; 15], dMP可以验证 $\mathscr{E}_M$ 实际上是一个余层，不过这里并不需要这一观察。此外，函子 $\mathscr{E}_M$ 是理解我们的时变图如何等价于 [KM17]提出的动态图构造的一种方式。

定义 3.15。 如果 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 和 $\mathscr{G}\prime = (G, \ell_N)$ 是具有相同底层图的两个时变图，那么当存在态射 $\varphi : \mathscr{E}_M \to \mathscr{E}_N$ 和 $\psi : \mathscr{E}_N \to \mathscr{E}_M$ 时，它们称为 ε-交错的；对于所有 $I \in \mathbf{Int}$，以下图表均可交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{E}_M(I) & \xrightarrow{\quad\varphi_I\quad} & \mathscr{E}_M(I^\varepsilon) & \xrightarrow{\quad\varphi_{I^\varepsilon}\quad} & \mathscr{E}_M(I^{2\varepsilon}) \\ & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & \\ \mathscr{E}_N(I) & \xrightarrow{\quad\psi_I\quad} & \mathscr{E}_N(I^\varepsilon) & \xrightarrow{\quad\psi_{I^\varepsilon}\quad} & \mathscr{E}_N(I^{2\varepsilon}), \end{array}$$

其中 I^ε 表示 I 的 ε-加厚，参见定义 3.2。该 交错距离 在 $\mathscr{G}$与 $\mathscr{G}'$ 之间为

$$d_I(\mathscr{G}, \mathscr{G}') = \inf\{\varepsilon \geq 0 : \mathscr{E}_M \text{ and } \mathscr{E}_N \text{ are } \varepsilon\text{-interleaved}\}.$$

定理 3.16 (等距定理)。 设 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 和 $\mathscr{H} = (H, \ell_N)$ 是两个底层图同构的时变图。固定一个同构 $\Phi : H \to G$，它相应地诱导出同构 $\mathbf{Sub}(G) \cong \mathbf{Sub}(H)$ 和 $\mathbf{Mon}(G) \cong \mathbf{Mon}(H)$，因此我们可以将 $\mathscr{E}_N$ 和 $\boldsymbol{\iota} \circ \mathscr{E}_N$分别视为到$\mathbf{Sub}(G)$ 和 $\mathbf{Mon}(G)$的函子。于是，G 中节点的任意排序都会确定两个等距映射

$$d_H(M, N) = d_I(\mathscr{E}_M, \mathscr{E}_N) \quad and \quad d_{\Sigma H}(M, N) = d_I(\boldsymbol{\iota} \circ \mathscr{E}_M, \boldsymbol{\iota} \circ \mathscr{E}_N),$$

其中，M 和 N 分别是 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$和 $\mathscr{H} = (H, \ell_N)$的生命周期矩阵。

3.2 用于机器学习的时变图条形码拓扑摘要

本节将展示如何利用拓扑数据分析（TDA）中的技术，通过将时变图（TVG）转换为两种之字形持久条形码，来简化对时变图的研究：一种是 0阶条形码，用于概括 $\mathscr{G}$ 随时间演变的快照中的连通分支；另一种是 1阶条形码，用于概括快照中的环如何演变。本节有两个重要结论：

1. 0阶和1阶之字形条形码是时变图的稳定特征，并且
2. 这些特征可用于在K近邻（K近邻）分类器中区分地火与地月空间网络场景，仅依据网络拓扑。

这些之字形条形码基于图的同调，以及由图态射在同调上诱导的映射。

定义3.17 (同调)。 在本文余下部分中固定一个域 $\mathbb{k}$。对于每个图 G，都有两个与之关联的向量空间：$H_0(G)$——由 G 的连通分量生成的向量空间——以及 $H_1(G)$——由 G 中的环生成的向量空间。此外，对于任意图态射 $G' \to G$，都有在这些向量空间上诱导的线性映射 $H_k(G') \to H_k(G)$。换言之，我们有同调函子，其中 $k = 0$ 且 $k = 1$:

$$H_k : \mathbf{Mon}(G) \to \mathbf{Vec}.$$

定义 3.18 (时变图的同调模)。 回顾定义 *3.11*中的子图范畴，以及定义 *3.13*中的摘要余层构造。对于任意时变图 $\mathscr{G}$，通过后复合 $\mathscr{E}_M(\mathscr{G})$，我们得到相应的 同调模 $H_k\mathscr{E}_M(\mathscr{G})$：**Int** $\to$**Vec**，它刻画了时变图 $\mathscr{G}$ 的每个摘要图在次数 $k = 0$ 和 1上的同调。

定义 3.19 (时变图条形码)。 对于 $k = 0, 1$，同调模 $H_k\mathscr{E}_M(\mathscr{G})$：**Int** $\to$**Vec** 具有一个典范关联的之字形条形码，它是 $\mathbb{R}$ 中区间的一个多重集：

$$B_k(\mathscr{G}) = \{(I_j, m_j)\} \quad where \quad m_j : I_j \to \mathbb{N}.$$

注 3.20（之字形持久性回顾）。 拓扑数据分析社区对之字形持久性已有深入研究，其计算基础已在 [CSM09；DH23；DH21；DH22；Mor21]等文献中确立。我们回顾这一构造的两种理论视角。

第一种方法是直接识别出，对于每个时变图 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$，每条边 $v,e \in G$ 都对应一个有限的闭区间集合。将这些区间的端点在所有 v,e 上取并集，即可确定一个有限的“临界值”集合 $\{\tau_i\}^n{}_{i=0}$，在这些值处边或顶点可以出现。由此，我们可以将任意时变图表示为完全图的子图构成的之字形图

$$G_{-1} \hookrightarrow G_0 \hookleftarrow G_1 \hookrightarrow G_2 \hookleftarrow \cdots \hookrightarrow G_{2n} \hookleftarrow G_{2n+1},$$

偶数索引子图G_{2i}表示在每个临界值 $\mathscr{G}$ 处 τ_i的快照，而奇数索引子图$G_{2i\pm1}$ 对应于 $\mathscr{G}$ 在时刻 $\tau_i \pm \epsilon$、充分小的 ϵ下的快照。对这些子图及图嵌入分别取同调，可得到一个类型为A_{2n+3} 的交替箭图表示。根据 Gabriel 定理[Gab72]，它有一个与之关联的典范区间多重集。

或者，也可以沿用 [KM17], 的研究，其中指出，我们的时变图也可等价地视为动态图。根据 [KM17，定义 2，17] 可知，将$H_k\mathcal{E}_M(\mathcal{G})$ 限制到单点区间t, t] 会产生一个映射h:**向量空间**，该映射是“余层诱导的”。如 [BL18；Bje21] 所示，可构造余层是块可分解的，将这些块限制到对角线y x 即可得到上文所述的之字形条形码。

如前所述，之字形条形码是时变图的稳定特征。下一个命题说明“稳定”的含义。

命题 3.21. 设 $\mathcal{G} = (G, \ell_M)$ 和 $\mathcal{H} = (H, \ell_N)$ 是两个时变图，其底层图之间存在固定同构 $\Phi : G \cong H$，如定理 *3.16*所示。H 的条形码与 ${}_k\mathcal{E}_M(\mathcal{G})\, H_k\mathcal{E}_N(\mathcal{H})$ 的瓶颈距离有如下上界：

$$d_B(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \leq d_I\left(\boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_M(\mathcal{G}), \boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_N(\mathcal{H})\right) \leq d_I\left(\mathcal{E}_M(\mathcal{G}), \mathcal{E}_N(\mathcal{H})\right).$$

证明. 记号 $H_k\mathcal{E}_M$实际上表示函子复合 $H_k \circ \boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_M$。 [BS12，命题 3.6] 非常一般地证明，函子的复合定义了配备交错距离的范畴之间的 1-Lipschitz 映射。因此

$$\begin{aligned} d_{\mathsf{I}}^{\mathbf{Vec}}\left(H_k \circ \boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_M(\mathcal{G}), H_k \circ \boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_N(\mathcal{H})\right) & \\ \leq d_{\mathsf{I}}^{\mathbf{Mon}(G)}\left(\boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_M(\mathcal{G}), \boldsymbol{\iota} \circ \mathcal{E}_N(\mathcal{H})\right) & \\ \leq d_{\mathsf{I}}^{\mathbf{Sub}(G)}\left(\mathcal{E}_M(\mathcal{G}), \mathcal{E}_M(\mathcal{G}')\right). & \end{aligned}$$

根据 [Bje21；BL18],的结果，有

$$d_B(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = d_I\left(H_k\mathcal{E}_M(\mathcal{G}), H_k\mathcal{E}_M(\mathcal{G}')\right),$$

由此证明了所述结果。 □

现在，我们使用 K 近邻（K近邻）分类器，展示之字形条形码在地月和地火模拟中的判别能力。

3.2.1 地月与地火卫星系统上的 K近邻作为最后一组实验，我们评估时变图模型作为监督式机器学习流程第一步的有效性，该流程最终以一阶之字形条形码的特征作为输出。在这些实验中，我们研究一个二分类问题，其样本来自以下两个类别。

- **地月类别**：由随机抽取的$s = 15$ 颗STARLINK卫星组成，这些卫星分布在地球周围，另有5颗卫星分布在月球周围；对它们进行为期一天（86400秒）的模拟，并将结果转换为一个 20×20 时变图矩阵。

- **地火类别**：由围绕地球的$s = 15$ 颗星链卫星和围绕火星的5颗卫星的随机样本组成，模拟时间为一天，并转换为一个 20×20时变图矩阵。

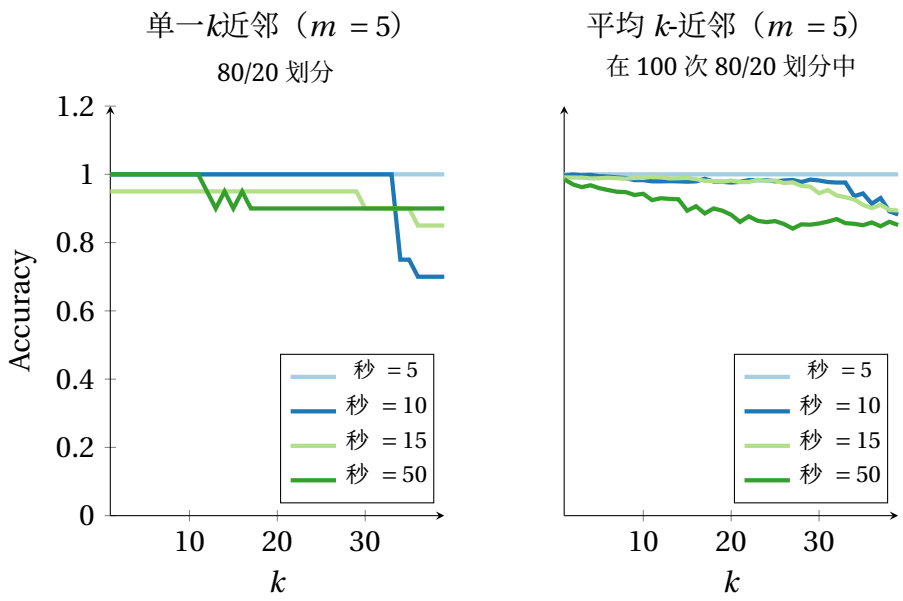


图 16：基于表示地月或地火卫星系统的时变图（TVG）计算出的H_1之字形持久条形码，K 近邻分类器的平均性能曲线。每次模拟中，地月系统和地火系统的类别数量均衡，每类有$m = 5$个样本，且模拟时间均为 2023年3月同一天。所有模拟均使用相同的月球/火星卫星，但 STARLINK 卫星为随机抽样，样本数范围为$s = 5$、10、15、50。平均性能基于 100 次（80%-20%）训练测试划分计算得出。

在图 16 中，我们使用2023年3月的同一天生成所有模拟，同时也将系统中的星链卫星数量s从5颗变到50颗。这样做有两个原因：(1) 星链卫星数量是时变图中“噪声”的主要来源，因为它们是从一个包含2500多颗星链卫星的数据库中选取的；(2) 我们希望了解这些模拟的计算复杂度。具体而言，改变s会生成大小为 10×10（当$s = 5$时）、 15×15（当$s = 10$时）、 20×20（当$s = 15$时）和 55×55（当$s = 50$时）的时变图矩阵。使用一台当前最先进的笔记本电脑（2023年款 MacBook Pro，配备12核 CPU 和38核 GPU 的 M2 Max 芯片），为每项实验生成 `.orb` 文件仅需数秒（对于s的每个取值进行100次随机模拟），而使用 SOAP 生成接触时间列表仅需两分钟。主要的计算瓶颈在于为每次模拟计算之字形持久性，以及构造这些条形码之间 100×100 个W_2距离的矩阵。当$s = 15$ 时，距离矩阵仅需十分钟即可计算完成；但对于$s = 50$ 个节点，类似的计算则耗时193分钟。尽管如此，分类结果都非常好：当$k = 3$ 时，$s = 5$ 和$s = 10$的分类准确率为 $\sim 98\%$，而$s = 15$ 和$s = 50$的准确率为 $\sim 93\%$。

固定 $s = 15$后，我们还可以改变模拟进行的日期。这对分类性能的影响要大得多，因为以会合周期衡量的地球与火星相对位置具有 ~ 2 年（780天）的周期。例如，在图 17 的顶行中，从2018年1月开始，连续24个月每月随机选择一天，并生成一对地月和地火模拟。这一过程持续到

24个月结束后，每个月都生成一对地月和地火模拟。由此得到48个样本，在两个类别间均匀分布。对于特定的80% – 20% 划分，KNN 的分类性能显示在图 17 左上角，其中分类率在 $k = 5$ 个近邻时达到峰值。图 17 右上角的结果，是对同一 $n = 48$ 样本实验进行200次训练测试划分后，对这些性能曲线取平均得到的。图 17 底行重复了类似实验，但对每个随机抽取的日期，每个类别都生成2次模拟，因此得到一个 $n = 96$ 的实验。请注意，随着通过在同一天进行随机抽样来平衡不同日期，分类能力会提高。最后，图 18 重复了这一基本实验，但使用了不同的起始年份：2021年、2022年、2023年和2024年。对于所有这些年份，平均 K 近邻分类性能通常都高于80%，当 $k < 5$ 时。

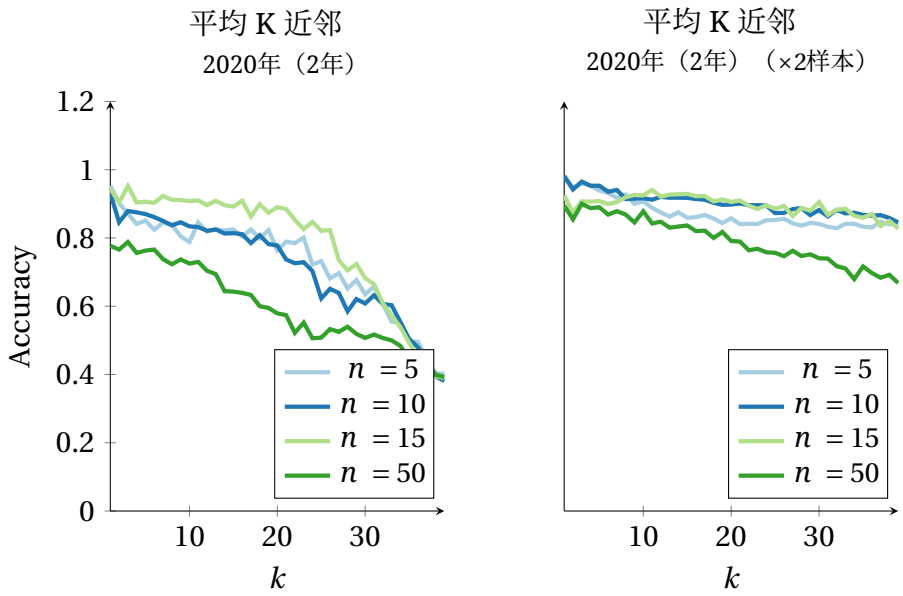


图17：K近邻在H_1锯齿持久性上的表现，用于区分两年期间的卫星系统。左侧选取24天，即从2020年开始的24个月中每月选取一天，并生成两组模拟：一组属于地月类别，另一组属于地火类别，共48次模拟。右侧进行相同的实验，但每个类别抽取2个样本，共进行96次模拟。来自同一天的模拟次数越多，分类准确率就会显著提高，

4 未来方向

本文是持续推进的一项工作，旨在将数学思想融入更完善的工程系统设计，以支持太阳系范围互联网中的快速、可靠且自主的路由。最后，我们列出了正在开展和未来的工作，希望借此让人们更加关注空间网络所带来的丰富研究问题。

1. **更快的算法：** 当前，在时变容延网络中进行路由的协议需要构建接触图，并在该图上求解 Dijkstra 算法；这称为接触图路由（CGR）。近期研究 [Moy+23] 表明，使用接触多重图可以显著加快这一过程，因为它减少了 Dijkstra 算法需要搜索的顶点数量。这种多重图可以视为与定义时变图的余层相关联的展示空间。本文提出的视角能否进一步提升计算效率？例如，能否设计一种直接在矩阵时变图（将其视为数据结构）上运行的路由算法？当前太空仿真工作的目标是能够模拟在具有 10^5 个节点的网络上进行路由；目前我们的能力大约达到 10^3。

2. **利用周期性：** 从代数角度来看，在存在传播延迟的系统（例如地球—火星通信）中进行路由的难点，在于克莱尼星无法收敛。然而，这是因为将 $\mathrm{End}(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 用作半环。在真正的周期系统中，例如由天体力学支配的系统，将生命周期视为圆 $\mathbb{S}^1$ 的子集或许更为合理。如果我们考虑一个元素属于 $\mathrm{End}(\mathscr{P}(\mathbb{S}^1))$ 的通信矩阵 A，那么在某些条件下，即使存在非平凡的传播延迟，克莱尼星仍可能收敛，例如当位移是圆周长的有理数倍时。

3. **时变图子网划分：** 我们的 KNN 分类实验表明，即使将时变图简化为其之字形条形码，它们仍能表示不同类型的空间网络场景。这使我们相信，本文提出的度量可用于识别时变图中的模体或其他子结构，从而自动识别路由域。这一点很重要，因为地面互联网严重依赖固定路由表，而这在时变环境中无法实现。是否有可能找到能够自动对时变图进行子网划分的算法或方法？如果可以，这将有助于制定适用于相应时变图类型（子图）的路由协议，进而将这些协议组合起来，高效地跨越未来太空互联网中彼此不同的区域进行路由。

4. **更现实的模型：** 本文采用的卫星网络建模方法，是基于视线考虑所有可能的接触。在实际中，许多（甚至大多数）节点可能一次只能维持一条链路；选择一种接触就意味着放弃其他接触。此外，建立链路、拆除链路以及调整天线指向都需要时间。这意味着，现实中的网络实际上基于所有可能接触的一个子集。如何选择这样的子集，尤其是以弹性和鲁棒的方式进行选择，目前仍无定论。本文介绍的方法可用于制定网络管理的“最佳实践”和框架。

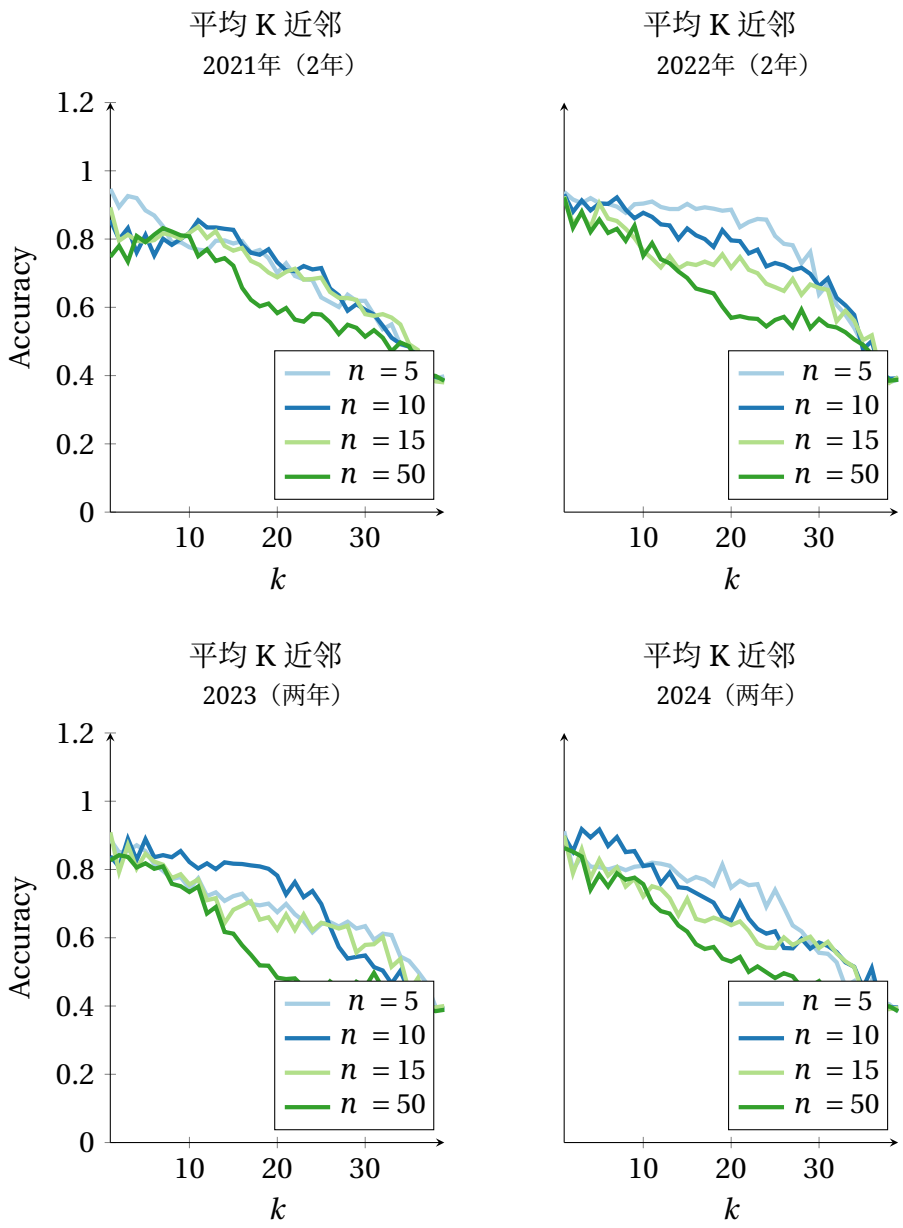


图18：按照图 17所述，使用总计 96 次模拟得到的 K近邻 平均性能，其中两年期始于所示年份。

参考文献

[Bje21] Håvard Bjerkevik。《区间可分解持久模的稳定性》。发表于 离散与计算几何 66（2021年7月）。DOI: 10.1007/s00454-021-00298-0.[BL18] Magnus Botnan和Michael Lesnick。《锯齿持久模的代数稳定性》。发表于代数与几何拓扑18.6（2018年），第3133–3204页。

[BM22] Benjamin Merlin Bumpus和 Kitty Meeks。《时态图的边探索》。载于：Algorithmica（2022年），第1–29页。[BS12] Peter Bubenik 和 Jonathan A. Scott。《持久同调的范畴化》。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:1205.3669（2012年5月），arXiv:1205.3669。arXiv：1205.3669[math.AT]。[BT10] John S. Baras 和 George Theodorakopoulos。《网络中的路径问题》。载于：《网络中的路径问题》。2010年。[Car71] B. A. Carré。《网络路由问题的代数》。载于：IMA 应用数学杂志 7（1971年），第273–294页。[Car79] B. Carré。《图与网络》。牛津应用数学与计算科学丛书。克拉伦登出版社，1979年。ISBN：9780198596158。URL：https://books.google.com/books?id=A-nuAAAAMAAJ。[CDS10] Gunnar Carlsson 和 Vin De Silva。《之字形持久性》。载于：《计算数学基础》10（2010年），第367–405页。[CSM09] Gunnar Carlsson、Vin de Silva 和 Dmitriy Morozov。《之字形持久同调与实值函数》。载于：第二十五届计算几何研讨会论文集。SCG '09。丹麦奥胡斯：计算机协会，2009年，第247–256页。ISBN：9781605585017。DOI：10.1145/1542362.1542408。URL：https://doi.org/10.1145/1542362.1542408。[Cur13] Justin Curry。《层、余层及其应用》。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:1303.3255（2013年3月），arXiv:1303.3255。arXiv：1303.3255 [math.AT]。[DG13] Seweryn Dynerowicz 和 Timothy G Griffin。《互联网路由算法生成的转发路径》。载于：2013 年第 21 届 IEEE 国际网络协议会议（ICNP）。IEEE，2013年，第1–10页。[DH21] Tamal K. Dey 和 Tao Hou。《以近线性时间计算图上的之字形持久性》。载于：第 37 届国际计算几何研讨会（SoCG 2021）。编者：Kevin Buchin 和 Éric Colin de Verdière。第189卷。信息学国际会议录（LIPIcs）。德国达格施图尔：达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2021年，30:1–30:15。ISBN：978-3-95977-184-9。DOI：10.4230/LIPIcs.SoCG.2021.30。URL：https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13829。[DH22] Tamal K. Dey 和 Tao Hou。《之字形持久性的快速计算》。载于：第 30 届欧洲算法研讨会（ESA 2022）。编者：Shiri Chechik、Gonzalo Navarro、Eva Rotenberg 和 Grzegorz Herman。第244卷。信息学国际会议录（LIPIcs）。德国达格施图尔：达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2022年，43:1–43:15。ISBN：978-3-95977-247-1。DOI：10.4230/LIPIcs.ESA.2022.43。URL：https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/16981。[DH23] Tamal K. Dey 和 Tao Hou。《面向更新与效率的图持久性再探》。载于：（2023年）。DOI：10.48550/ARXIV.2302.12796。URL：https://arxiv.org/abs/2302.12796。

[dMP15] Vin de Silva、Elizabeth Munch 和 Amit Patel。《范畴化 Reeb 图》。载于：*arXiv* 电子预印本，arXiv:1501.04147（2015年1月），arXiv:1501.04147。arXiv：1501.04147[cs.CG]。[Gab72] Peter Gabriel。《不可约表示 I》。载于：《数学手稿》6（1972年）

，

第71–103页。[Gas+19] Ellen Gasparovic、Elizabeth Munch、Steve Oudot、Katharine Turner、Bei Wang 和 Yusu Wang。“合并树的内在交错距离”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1908.00063*（2019年）。[GG08] Timothy G Griffin 和 Alexander JT Gurney。“递增双半群与代数路由”。载于：国际计算机科学关系方法会议。Springer。2008年，第123–137页。[GM08] Michel Gondran 和 Michel Minoux。图、幂等半环与半环：新模型与算法。第41卷。Springer Science & Business Media，2008年。[GS05] Timothy G Griffin 和 Joäo Luís Sobrinho。“元路由”。载于：*2005*年通信计算机网络应用、技术、架构与协议会议论文集。2005年，第1–12页。[Hei+06] Bernd Heidergott、Geert Jan Olsder、Jacob Van Der Woude 和 JW van der Woude。*Max Plus* 的实践：同步系统的建模与分析：*Max-Plus* 代数及其应用课程。第13卷。普林斯顿大学出版社，2006年。[Hyl+22] Alan Hylton、Robert Short、Jacob Cleveland、Olivia Freides、Zander Memon、Robert Cardona、Robert Green、Justin Curry、Sriram Gopalakrishnan、Devavrat Vivek Dabke 等。“月球网络数学结构综述”。载于：*IEEE* 航空航天会议（*AeroConf 2022*）。电气电子工程师学会。2022年。URL：https://ntrs.nasa.gov/citations/20220003566。[JS22] Michael Joswig 和 Benjamin Schröter。“通过热带几何求解参数化最短路径算法”。载于：《运筹学数学》47.3（2022年），第2065–2081页。[KM17] Woojin Kim 和 Facundo Mémoli。“通过莫比乌斯反演从动态数据中提取持久簇”。载于：*arXiv* 电子预印本（2017年），arXiv–1712。[KMS19] Woojin Kim、Facundo Mémoli 和 Anastasios Stefanou。“分部交错：交错的连接分解与测地线的连接组装”。载于：（2019年）。DOI：10.48550/ARXIV.1912.04366。URL：https://arxiv.org/abs/1912.04366。[Loz18] Dimitri Lozeve。“时间网络的拓扑数据分析”。硕士论文。英格兰：牛津大学圣凯瑟琳学院，2018年。URL：https://www.lozeve.com/files/tdanetworks.pdf。[Mas20] Jade Master。“开放代数路径问题”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2005.06682*（2020年）。

[Mas21] Jade E. Master。《网络行为的组合》。英文。版权 - 数据库版权归 ProQuest LLC 所有；ProQuest 不主张对底层个别作品的版权；最后更新日期 - 2021-09-15。博士论文。2021年，第158页。ISBN：9798534695 267.

URL： https : / / www . proquest . com / dissertations - theses / composing - behaviors-networks/docview/2565195807/se-2.[Mas22] Jade Master.《如何组合最短路径》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2205.15306（2022年）。[Min76] M. Minoux.《图中路径问题的广义代数结构》。法文。载于：RAIRO - 运筹学 - 运筹研究 10.V2（1976年），第 33–62 页。URL：http://www.numdam.org/item/RO_1976__10_2_33_0/。[Min98a] Michel Minoux.《半环和 dioid 中的线性代数》。研究报告 lip6.1998.052。LIP6，1998年12月。URL：https://hal.archives-ouvertes.fr/ hal-02548201。[Min98b] Michel Minoux.《半环和 dioid 中线性系统的求解》。研究报告 lip6.1998.051。LIP6，1998年12月。URL：https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02548198。[Moh02] Mehryar Mohri.《最短距离问题的半环框架与算法》。载于：J. Autom. Lang. Comb. 7.3（2002年），321–350。ISSN：1430-189X。[Mor21] Dmitriy Morozov. Dionysus2。2版。2021年6月14日。URL：https :/ / github . com/mrzv/dionysus。[Moy+23] Michael Moy、Robert Short、Nadia Kortas、Jacob Cleveland、Dominic Conricode、Yael Kirkpatrick、Robert Cardona、Brian Heller 和 Justin Curry。《接触多重图路由：概述与实现》。载于：IEEE 航空航天会议（AeroConf 2023）。电气电子工程师学会。2023年。[Mye+23a] Audun Myers、Cliff Joslyn、Bill Kay、Emilie Purvine、Gregory Roek 和 Madelyn Shapiro。《时间超图的拓扑分析》。载于：（2023年）。DOI：10 . 48550/ARXIV.2302.02857。URL：https://arxiv.org/abs/2302.02857。[Mye+23b] Audun Myers、David Muñoz、Firas A Khasawneh 和 Elizabeth Munch。《利用之字形持久性进行时间网络分析》。载于：EPJ Data Science 12.1（2023年），第 6 页。[Rie17] E. Riehl.《语境中的范畴论》。Aurora：Dover Modern Math Originals。Dover Publications，2017年。ISBN：9780486820804。[Sob01] João L Sobrinho.《互联网中的 QoS 路径计算与逐跳路由的代数与算法》。载于：IEEE INFOCOM 2001 论文集。计算机通信会议。IEEE 计算机与通信学会第二十届年度联合会议（目录号 01CH37213）。第 2 卷。IEEE。2001年，第 727–735 页。[Sob03] Joao Luis Sobrinho.《采用路径向量协议的网络路由：理论与应用》。载于：2003年计算机通信应用、技术、体系结构与协议会议论文集。2003年，第 49–60 页。

[Sob05] Joao L Sobrinho.《动态网络路由的代数理论》。载于：*IEEE/ACM*《网络学报》13.5（2005年），第 1160–1173 页。

[Tor+07] Leigh Torgerson、Scott C. Burleigh、Howard Weiss、Adrian J. Hooke、Kevin Fall、Vinton G. Cerf博士、Keith Scott 和 Robert C. Durst。 容延网络架构。RFC 4838。2007年4月。 DOI： 10.17487/RFC4838。 URL： https://rfc-editor.org/rfc/rfc4838.txt。

A 半环的定义与技术结果

定义 A.1。 A 幺半群 是一个集合$(S,\circ,\mathbf{e})$，配备一个二元运算 $\circ : S \times S \to S$，该运算满足结合律，即 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$，并且 $\mathbf{e}$在左侧和右侧均作为单位元，即 $a \circ \mathbf{e} = a = \mathbf{e} \circ a$。如果对所有元素对 $a,b \in S$，都有 $a \circ b = b \circ a$，则该幺半群称为交换。

定义 A.2. 从半环 $(S,\oplus,\otimes,\mathbf{n},\mathbf{e})$ 到 $(T,+,\times,0,1)$ 的加法同态 是一个映射 $h : S \to T$，满足

- $h(\mathbf{n}) = 0$，并且
- $h(a \oplus b) = h(a) + h(b)$.

一个 同态 是 半环的同态是一个加法同态，并且还满足以下性质

- $h(\mathbf{e}) = 1$，并且
- $h(a \otimes b) = h(a) \times h(b)$.

加法自同态是从 S 到其自身的加法同态。类似地，自同态是从 S 到其自身的同态。

关于 [BT10，第 14] 页有以下初等结论：

引理 A.3. 若 S 是半环，则 $H :=\mathrm{End}(S)$，即 S 的加法自同态集合，本身也是一个半环。两种运算为

- $(h_1 + h2)(a) := h1(a) + h2(a)$
- $(h_1 \odot h2)(a) := h2(h1(a))$

请注意，特别是，为了使 $\mathrm{End}(S)$ 成为半环，我们并不需要假设自同态保持乘积。还请注意，即使 S 是交换半环，也就是说， $\otimes$ 是交换的，$\mathrm{End}(S)$也未必是交换的。

下面给出定理 2.16的证明，为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 A.4。 矩阵时变图的半环 $\mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ 与从 $\mathbb{R}$到 $\mathsf{Mat}_n(\mathsf{Bool})$的函数所构成的半环同构。该同构由以下同态给出

$$\Psi : \mathsf{Mat}_n(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \to \mathsf{Fun}(\mathbb{R}, \mathsf{Mat}_n(\mathsf{Bool})), \quad \textit{where} \quad \Psi(M)(t) = \mathscr{S}_t(M)$$

是 M 在时刻 t 的快照。

证明。 Ψ 保持幺元。对角线元素为 $\mathbb{R}$ 的恒等 TVG 矩阵 $\mathbb{R}I$ 被映射到函数 1，该函数为每个 t 赋予恒等布尔矩阵 $\top I$。空集的 TVG 矩阵 $\varnothing I$ 被映射到常值为 $\bot I$ 的函数 0。

为明确符号约定，我们将用大写字母（如M和N）表示时变图矩阵，并用$M + N$和MN表示矩阵加法和乘法。为强调这些矩阵的条目是子集，我们用并集和交集来表示在 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$中进行的运算，即，

$$(M+N)_{ij} = M_{ij} \cup N_{ij} \quad \text{and} \quad (MN)_{ij} = \bigcup_k M_{ik} \cap N_{kj}.$$

在半环 Fun($\mathbb{R}$, Mat$_n$(布尔值)) 中，我们用小写字母（如 m 和 n）表示函数。我们将 m(t) 写作时刻 t 的布尔矩阵，其条目 (i , j) 的真值记为 m(t)(i , j)。函数的逐点加法写作 (m $\oplus$n)(t) = m(t) +n(t)，这里我们沿用“+”操作员表示布尔矩阵的加法。(m $\oplus$n)(t)(i , j) 的真值由 m(t)(i , j) $\vee$n(t)(i , j) 决定。Fun($\mathbb{R}$, Mat$_n$(布尔值)) 中的乘法是逐点进行的，即 (m $\otimes$n)(t) =m(t) n(t)，这里同样使用矩阵乘法的记法。(m $\otimes$n)(t)(i , j) 的真值由 $\vee_k$m(t)(i , k) $\wedge$n(t)(k, j) 决定。为稍微简化记号，我们将 Ψ(M) = m 写作，它是满足下列性质的唯一函数

$$t \in M_{ij} \iff m(t)(i,j) = \top.$$

为证明赋值 $\Psi : M \mapsto m$保持加法，注意到 $t \in (M+N)_{ij}$当且仅当 $t \in M_{ij}$或 $t \in N_{ij}$，而这当且仅当

$$m(t)(i,j) \vee n(t)(i,j) = (m(t)+n(t))(i,j) = (m \oplus n)(t)(i,j) = \top.$$

同 样地，要证明赋值 Ψ: $M \mapsto m$保持乘法，注意到 t

$$\begin{aligned} t \in (MN)_{ij} &\iff t \in \bigcup_k M_{ik} \cap N_{kj} \\ &\iff \top = \bigvee_k m(t)(i,k) \wedge n(t)(k,j) \\ &\iff \top = (m(t)n(t))(i,j) \\ &\iff \top = (m \otimes n)(t)(i,j). \end{aligned}$$

□

现在陈述并证明命题2.26。

命题 A.5 (在时间直径处收敛)。 设 A 是简单时变图 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$的邻接矩阵。$k$-累积量 $C_k(A)$ 的 $(i , j)^{th}$条目在 d_{ij} 之后稳定，其中

$$d_{ij} = \max_{t \mid \exists \gamma : i \rightsquigarrow j} \min_{\gamma} |\gamma|$$

是从 i 到 j 的最长最短路径的长度，不计不存在此类路径的时间。按惯例，令 $d_{ii} = 0$。我们将时变图 $\mathscr{G}$ 的时间直径 定义为

$$\operatorname{diam}(\mathscr{G}) = \max_{ij} d_{ij}.$$

因此，当 $r \geq$ 直径($\mathscr{G}$) 时，克莱尼星 A^* 收敛。

证明。根据注 2.21，判断 $C_k(A)$ 的某个条目是否会在某个 k 值处稳定，等价于判断 $M^k = (I + A)^k$ 是否会在 k 处稳定。此外，根据定理 2.16，通过考察相应的布尔函数 $m^k: V \times V \times \mathbb{R} \to$ 布尔值，我们可以忠实地恢复 M^k 的值，其中 is $\Psi(M\,k) = \Psi(M)^k$。这是 a^p 的逻辑或（并集）；该并集是$\Psi(A^p) = \Psi(A)^p$，涵盖所有 $p = 1, \ldots\ldots, k$，并包含恒等关系。因此，只需用 $a^p(t): V \times V \to$布尔值刻画时刻 t 哪些节点彼此相关。对于 $p = 1$，这很简单：如果时刻 t 存在一条从 i 到 j 的边，则 $a(i, j, t) = 1$。直接检查矩阵乘法可知，当且仅当时刻 t 存在一条长度为 2 的游走时，$a^2(i, j, t) = 1$。更一般地，当且仅当时刻 t 存在一条从 i 到 j、长度为 p 的游走时，$a^p(i, j, t) = 1$。如果 i 和 j 由某条游走连接，则 d_{ij} 定义为所有 $t \in \mathbb{R}$ 中的最大值。对于一个有 $|V|$ 个顶点的图，其任一连通分量的最大直径为 $|V| - 1$；并且 $a^p(i, j, \bullet): \mathbb{R} \to$ 布尔值在有限多个区间上分段恒定（因为采用了 $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ 而非 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$），所以该最大值必然存在。

□

现在证明命题2.38。

命题 A.6 。令 $\mathscr{C}$ 表示通用接触半环（定义 *2.37*）。 $\mathscr{C}$ *contai* *ns*

(a). 布尔半环 S 的单射像；*(b).* 与时变图半环同构的子半环；*(c).* 满射到热带半环的子半环 $\mathbb{T}$；*(d).* 满射到传播延迟半环的子半环；以及 *(e).* 满射到函数自同态半环 $\mathbb{W}$ 的子半环。

证明。 (a). 考虑映射 $S \to \mathscr{C}$，它将 $0 \mapsto (t \mapsto \emptyset)$ 和 $1 \mapsto (t \mapsto \{0\})$ 发送到相应对象。显然，该映射是一个单射半环同态，因此结论成立。

(b). 在 UCS 上，考虑由以下映射构成的子半环

$$t \mapsto \begin{cases} \{0\} & \text{for } t \in I, \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 I 是 $\mathbb{R}$ 的有限个互不相交闭区间的有限并。该子半环通过将上述映射对应到生命周期 I 的映射，与 TVG 半环同构。

(c). 令 $\{t \mapsto I,\ I$为有限集$\}$ 表示 $\mathscr{C}$ 中映射到 $\mathbb{R}$ 的有限子集的一族常值映射。该集合构成 $\mathscr{C}$ 的一个子半环，并通过以下半环同态满射到热带半环：

$$(t \mapsto I) \mapsto \begin{cases} \min(I), & I \neq \emptyset \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(d). 考虑一族 $\left\{\varphi:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}\right\}\cup\{0_{\mathscr{C}}:\ t\mapsto\emptyset\}\subseteq\mathscr{C}$，其中对于所有$t\in\mathbb{R}$，$\varphi(t)$ 是 $\mathbb{R}^{+}$ 的有限子集，且 $\sup\left\{\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)\right\}<\infty$。该集合是 $\mathscr{C}$ 的一个子半环，并通过将以下元素映射为相应对象的加法同态满射到传播延迟半环：

$$\left\{\varphi:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}\right\}\mapsto(K,m),$$

其中 $K=\{t:\ \varphi(t)\neq\emptyset\}$ 且 $m=\sup\left\{\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t)\right\}$。

（e）。与热带半环的情形类似，考虑 $\mathscr{C}$ 中满足以下条件的映射集合 $\{\varphi\}$

- $\varphi(t)$ 是 $[0,\infty$ 的有限子集），对每个 t,
- 若 $t_1\le t2$，且 $\varphi(t1)$、$\varphi(t2)$ 均非空，则 $\min(\varphi(t2))+t_2\ge\min(\varphi(t1))+t1$，并且
- 若 $t_1\le t2$，且 $\varphi(t1)=\emptyset$，则 $\varphi(t2)=\emptyset$。

该集合是 $\mathscr{C}$ 的子半环，并通过半环同态满射到 $\mathbb{W}$：

$$\varphi\mapsto\left(t\mapsto\begin{cases}\min(\varphi(t))+t & \varphi(t)\neq\emptyset\\ \infty & \varphi(t)=\emptyset\end{cases}\right).$$

□

B 基本范畴论

一个**范畴** $\mathscr{C}$由一组对象 Ob、$\mathscr{C}$以及一组态射 hom(*x*, *y*)构成；对于每个*x*、$y\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，满足

- 若$f\in\hom(x,y)$且 $g\in\hom(y,z)$，则$g\circ f\in\hom(x,z)$,
- 对于每个$x\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，存在一个态射$\mathrm{id}_x\in\hom(x,x)$,
- 对于$f\in\hom(x,y)$，有$f\circ\mathrm{id}_x=\mathrm{id}_x\circ f$，并且
- 复合满足结合律：$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$。

一个**函子** $\mathscr{F}$ 由范畴 $\mathscr{C}$与 $\mathscr{D}$ 之间的以下数据构成：

- 对每个对象 $x\in\mathscr{C}$，都有一个对象 $F(x)\in\mathscr{D}$，
- 对于每个态射$F(f)\in\hom(F(x),F(y))$，其中$f\in\hom(x,y)$，满足– F遵循 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{D}$中的复合规则：–对于 $\mathscr{C}$中的每个对象x，$F(\mathrm{id}_x)=\mathrm{id}_{F(x)}$。

$$F(f\circ g)=F(f)\circ F(g),$$

C 条形码及其距离

条形码 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}$中的区间多重集 $\{I\}$。条形码 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 之间的匹配 σ 定义为 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$与 $\mathscr{C}\prime \subset \mathscr{C}$ 之间的部分双射：

$$\sigma : \mathscr{B}' \to \mathscr{C}'.$$

给定一个 $p \in [1,\infty]$，我们按如下方式赋予一个**匹配 p-代价**： σ

$$\mathrm{cost}\sigma, p = \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum\limits_{\substack{I\in\mathscr{B},\\ \sigma(I)=J}} \|I-J\|_p^p + \sum\limits_{I\in\Delta} \|I-\mathrm{mid}(I)\|_p^p \right)^{1/p}, \text{when } 1 \le p < \infty \\ \max\left\{ \max\limits_{\substack{I\in\mathscr{B},\\ \sigma(I)=J}} \|I-J\|_\infty, \max\limits_{I\in\Delta} \|I-\mathrm{mid}(I)\|_\infty \right\}, \text{when } p=\infty, \end{array} \right\},$$

其中， $\|I-J\|_p$表示区间$I=[a,b)$ 与$J=[c,d)$ 视为 $\mathbb{R}^2$中的向量（a, b）和（c, d）时的 ℓ^p-范数；$\mathrm{mid}(I) := \left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+}{2} \right)_b$表示区间$I$中点处的空区间； Δ表示 $\mathscr{B} \sqcup \mathscr{C}$中未与 σ 匹配的所有区间。条形码 $\mathscr{B}$与 $\mathscr{C}$之间的**Wasserstein p-距离** 定义为所有可能匹配的p-代价的下确界，即：

$$d_W^p(\mathscr{B},\mathscr{C}) = \inf_\sigma \mathrm{cost}\sigma, p.$$

距离d_W^∞称为**瓶颈距离**，记作d_B。

D 等距定理的证明

我们现在证明定理3.16。

定理 D.1 (等距定理)。 设 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 和 $\mathscr{G}\prime = (G, \ell_N)$ 是两个底层图相同的时变图。我们可以将 $\mathscr{E}_N$和 $\boldsymbol{\iota} \circ \mathscr{E}_N$视为分别映到 **子图**$(G)$ 和 **单调映射**(G)的函子。G 中节点的任意排序都会确定两个等距映射

$$d_H(M,N) = d_I(\mathscr{E}_M, \mathscr{E}_N) \quad and \quad d_{\Sigma H}(M,N) = d_I(\boldsymbol{\iota}\circ\mathscr{E}_M, \boldsymbol{\iota}\circ\mathscr{E}_N),$$

其中 M 和 N 分别是 $\mathscr{G} = (G, \ell_M)$ 和 $\mathscr{H} = (H, \ell_N)$的生命周期矩阵。

证明。 设 G有 n个顶点，并为它们固定一个标记 $\{1, .., n\}$。

我们首先证明 $\mathrm{d}_{\Sigma H}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \le \mathrm{d}_I(\iota \cdot \mathscr{E}_M, \iota \cdot \mathscr{E}_N)$。设 (φ, ψ) 是一个 ε-交错；取余极限可知， φ 对应于某个置换 $\sigma \in \Pi_n$。我们要证明对所有 i、j，都有 $\mathrm{M}ij \subseteq \mathrm{N}_{\sigma(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})}^{\varepsilon}$ 且 $\mathrm{N}_{\sigma(i)\sigma(j)} \subseteq \mathrm{M}^{\varepsilon}ij$。若 $[\mathrm{i}\,\mathrm{j}\,] \in \mathscr{E}_M(\mathrm{I})$，则 φ_I保证$[\sigma(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})] \in \mathscr{E}_N(\mathrm{I}^{\varepsilon})$。特别地，存在 $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$，使得 $\mathrm{t} \in \mathrm{M}ij$。由于 φ_I 保证$[\sigma(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})]$在 $\mathscr{E}_N(\mathrm{I}^{\varepsilon})$ 中存在，因此存在 $\mathrm{t}' \in \mathrm{N}^{\sigma(i)\sigma(j)}$，使得 $\mathrm{t}' \in (\mathrm{t}-\varepsilon, \mathrm{t}+\varepsilon)$。这表明 $\mathrm{t} \in \mathrm{N}_{\sigma}^{\varepsilon}(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})$。对称地可得另一个包含关系。

现在证明$d_I(\iota \cdot \mathscr{E}_M, \iota \cdot \mathscr{E}_N) \le d_{\Sigma H}(M,N)$。令 σ为 Π_n中的一个置换，并考虑$d_H(M, \sigma(N)) = \varepsilon$，也就是说，对所有$i$、$j$，都有$Mij \subseteq N_{\sigma}^{\varepsilon}(i)\sigma(j)$，且$N_{\sigma(i)\sigma(j)} \subseteq M^{\varepsilon}ij$。对于$I \in \mathbf{Int}$,

定义 φ_I: $\mathscr{E}_M(\mathrm{I}) \to \mathscr{E}_N(\mathrm{I}^{\varepsilon})$，使得 $\mathrm{i} \mapsto \sigma(\mathrm{i})$，且 $[\mathrm{i}\,\mathrm{j}] \mapsto [\sigma(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})]$。若 $\mathrm{e} = [\mathrm{i}\,\mathrm{j}] \in \mathscr{E}_M(\mathrm{I})$，则存在 $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$，使得 $\mathrm{t} \in \mathrm{M}i\mathrm{j}$。但由于 $\mathrm{M}i\mathrm{j} \subseteq \mathrm{N}_{\sigma}^{\varepsilon}(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})$，因此 $\mathrm{t} \in \mathrm{N}_{\sigma}^{\varepsilon}(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})$，这意味着存在 $\mathrm{t}' \in \mathrm{N}^{\sigma(i)\sigma(j)}$，使得 $|\mathrm{t} - \mathrm{t}'| < \varepsilon$，也就是说 $[\sigma(\mathrm{i})\sigma(\mathrm{j})] \in \mathscr{E}_N(\mathrm{I}^{\varepsilon})$，因此 φ_I定义良好。对称地可证明 ψ_J也定义良好。

第一个等距映射可由第二个推出。 □