arXiv:2304.01160v1 [math.DG] 3 Apr 2023

诺特定理及其在双曲曲面上的变分问题中的应用

KAREN K. UHLENBECK

埃米·诺特在变分法中的基本定理在历史上具有重要意义。1915年，她应 Hilbert 和克莱因的邀请来到哥廷根。1915年至1918年间，随着广义相对论的轮廓逐渐成形，学界展开了良性竞争，其中以爱因斯坦和 Hilbert 之间的竞争尤为突出。广义相对论应正确归功于爱因斯坦，但 Hilbert 也作出了重要贡献，尤其是在发展变分原理 [H]方面。有一个问题令许多数学家和物理学家感到困惑，尤其是 Hilbert：为什么在广义相对论中没有与能量相对应的守恒量？诺特当时已因其在不变量方面的研究而知名，Hilbert 和克莱因于是邀请她研究这一问题。诺特出人意料地迅速发表了一篇论文 [N]，彻底解决了这个问题，以至于直到今天，几乎没有什么可补充的内容。当时，人们对变分方法的重要性尚存争论，其适用范围之广也完全未被认识到。然而在过去50年中，她的定理已逐渐演变为一条广为认可的原则，融入数学和物理学的思想体系之中：对称性与守恒定律相关联。不过，研究定理本身仍然很有价值。一份兼具历史与数学内容的优秀而完整的参考资料可见于 [K-S]。

她的原始定理严格来说是变分法中的一个定理，包含两个不同的部分，但这两部分并不总是被区分开来。

“第一部分：如果变分法中的一个积分 J 在一个 [群]G_ρ （维数为 ρ）作用下保持不变，那么在拉格朗日表达式及其导数中，存在 ρ 个线性无关的组合，使其散度为零；反之亦然.....”。

“第二部分：如果变分法中的一个积分 J 在一个依赖于 ρ 个任意函数及其最高至 σ阶导数的 [群]$G_{(\infty,\rho)}$ 作用下保持不变，那么在拉格朗日表达式及其最高至 σ 阶导数中，存在 ρ 个线性无关的恒等式；反之亦然.....”。

在定理的第一部分中，每一种对称性都会为欧拉-拉格朗日方程的每个解产生一个局部向量场 V，其在任意选定的欧几里得坐标中散度为 $\operatorname{div} V = 0$；这些坐标可用于表示该积分和函数，前提是该对称性在这些坐标中得到了恰当表达。

诺特是一位彻头彻尾的通才。所讨论的积分取决于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的定义域 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 上的因变量函数 $y^k = f^k(x)$ 及其导数 $y^k_\alpha = \partial_\alpha f^k(x)$，阶数达到 $s \geq 1$。这些积分是重积分，其被积函数称为拉格朗日密度，形式为

$$L(x, f(x), \{\partial_\alpha f\})(dx)^n.$$

这些积分的重要性在于欧拉-拉格朗日方程组：对于函数 $u = (u^1, \cdots, u^m)$， J 的变分为零。特别地，该函数可能使 J 取得最小值，但更常见的是只有 J 的偏导数或变分为零。

$$\sum_{\beta} (-1^{|\beta|} \partial_\beta [L_{(y^k_\beta)}(x, u, \cdots, \{\partial_\alpha u\})] = 0.$$

拉格朗日表达式是在欧拉-拉格朗日方程的解处取值的 L 沿各个方向的偏导数y^k_β。

广义相对论的方程要求导数的阶数为 $s = 2$。爱因斯坦-希尔伯特泛函定义在度量张量 g上，其拉格朗日密度是标量曲率乘以由该度量诱导的体积形式。

我们并非通才，就本文而言，将范围限定为 $s = 1$，并且只考虑一阶导数。本文中的例子都具有 $s = 1$：因此，拉格朗日密度只依赖于函数及其一阶导数，这使得讨论得以简化。对诺特而言，对称性是指一种无穷小对称性，它使拉格朗日密度 $L(x, f(x)$ $\partial f(x))(dx)^n$ 保持不变（或至多相差一个散度项）。这种对称性不一定保持泛函不变。

需要注意的是，这一方法中的对称性只需是局部的。对于一个以 t 为基础、定义在 $[0, 1]$ 中的变分法问题，如果其中不显含t（例如 $J(f) = \int_0^1 L(f'(t)\ f(t)\ dt)$），那么沿 t方向的平移并不保持 $[0, 1]$不变，但它仍是局部对称性，因此诺特定理仍然适用。她的证明展示了其原理。将无穷小对称性（李代数）作用于欧拉-拉格朗日方程的解，并乘以一个具有局部支撑的任意函数 ϕ，将其作为一阶变分代入积分中。由于我们处于欧拉-拉格朗日方程的解上，该积分为零。由于对称性，表达式中只会出现 $\partial\phi$ 项（若积分依赖于多个导数，还会出现更高阶导数项）。其中没有仅含 ϕ的项。若涉及多个导数，我们可以自由地分部积分，直到得到类似于积分仅依赖一个导数时所出现的表达式

$$0 = \int \sum_j V^j d_{x^j} \phi \, (dx)^n$$

对于所有支集位于某个球内的 ϕ，这一结果便显现出来。分部积分。由于 ϕ 是任意的，过去称为变分法基本定理的定理给出 $\operatorname{div} V = 0$。这是因为缺少仅包含 ϕ的项，而这又是由对称性导致的。

与欧拉-拉格朗日方程解相关的散度为零的向量场，其重要性体现在散度定理中。若 Ω 属于 $\mathbb{R}^n$，边界为 $\Omega = \mathcal{S}$，则$\int_{\mathcal{S}} [\nu, V] = \int_\Omega \operatorname{div}\ V$，其中 ν是外向单位法向量。

在现代语言中，我们用微分形式来表述这一点；由于诺特的论证完全是局部的，该定理很容易推广到流形上。拉格朗日密度是一个 n-形式，向量场 V通过 $\theta = V \lrcorner (dx)^n$变换为一个 $n-1$ 形式，而散度为零的向量场 V 则变为闭的（$n-1$）形式θ。反过来，对于一个 $n-2$形式， $\theta = d\xi$在局部成立。稍后我们将特别关注 $n = 2$，其中 ξ 是一个函数。

能量和动量的守恒定律在许多几何学和物理学问题中早已为人所知，尤其是在狭义相对论中。一个简单的例子是维数为 $n=1$、拉格朗日密度为 $L(f,\frac{d}{dt}f)\,dt$ 的积分。如前所述，时间平移是一种局部对称性。在欧拉 - 拉格朗日方程 u 的一个解处，量

$$E(u)=\sum_k \frac{d}{dt}L_{y_1^k}\left(u,\frac{d}{dt}u\right)\frac{d}{dt}u^k-L\left(u,\frac{d}{dt}u\right)$$

是常数（在 t 中）。在更高维度中，不依赖于 x 的拉格朗日量密度会为每个欧拉-拉格朗日方程的解给出一个能量-动量张量 S：一个 $n\times n$ 对称矩阵，其行和列均无散度。诺特的贡献在于指出，这个能量-动量张量的存在源于时间平移不变性所对应的能量守恒以及空间平移不变性所对应的动量守恒（更不用说由目标空间中的对称性所产生的广义动量的额外解释），并且这一结果融入了关于对称性与守恒定律的更宏大图景。20 世纪 60 年代人们重新开始关注她的研究成果之前，物理学界对这一点究竟理解得有多充分，并不清楚。

诺特定理的第二部分回答了为什么广义相对论中不存在守恒量这一问题。空间平移和时间平移等通常产生守恒定律的对称性，都包含在更大的微分同胚群之中。因此，根据诺特定理第二部分，由此得到的“守恒定律”实际上是恒等式；无论积分是否处于临界点，这些恒等式都成立。后来，Schouten 和 Struik [S-S] 指出，她在广义相对论中的这些恒等式等价于比安基恒等式（后者在她发表论文时已为人所知）。这解决了广义相对论（以及规范理论）中的守恒定律问题，尽管这一点经过了一段时间才得到认可。Rowe [Ro]的文章对此有更详细的讨论。

规范理论这个问题无疑很有意思。在网上搜索“诺特，规范理论”，可以看到物理学家们正在热烈讨论这一话题，却没有数学家参与。虽然有些参考文献提到了第二部分中的“诺特恒等式”，但这些恒等式对所有场都成立，因此很难看出如何从中推导出有关特定结构的信息。量子层面发生的一切，都是表示的结果，很可能也源于对定理的理解，而非定理本身。感兴趣的读者可以了解一下，将她的定理应用于杨-米尔斯泛函所得到的经典恒等式：它要么是 $D*D*F=0$，要么是 trace trace$[F,F]=0$；这两者即使对该领域的初学者来说也显而易见。

我目前对这一主题的兴趣，源于我与 George Das- kalopoulos 合作，近似瑟斯顿研究的双曲曲面之间的“最佳利普希茨”映射f： $M\to N$。为了求得使 f 的利普希茨常数最小的映射的近似，或者等价地，使 f 的偏导数最大值最小的映射的近似，我们研究依赖于沙滕-冯·诺依曼范数的变分问题中的积分。在像空间 N 上的固定坐标系中摸索时，我们发现了闭一形式。这些形式是我们所求函数的导数。后来我们意识到，二维中的这些闭一形式，恰好就是诺特基于 N 的局部对称空间结构所预示的散度为零的向量场的对偶。一个由 3 个闭一形式组成的完备集合，每种对称性对应一个，便自然出现了，于是我们便顺利开展了工作。本文将于近期f D-U- $M\to N$ 发表。

每种对称性都对应一个，它们自然出现了，于是我们便顺利开展了工作。本文将于近期 [D-U-2]发表。

这里有一个简单的例子。设 $u\colon M \to S^1$ and $J_p(u) = \int_M |du|^p * 1$ 是所考虑的积分，其临界点称为 p-调和函数。这里所说的对称性是圆周的旋转。即使只对变分法略知一二，也不难看出欧拉-拉格朗日方程为

$$d * |du|^{p-2} du = 0.$$

甚至无需借助诺特的做法，也能看出与圆周旋转相对应的闭 $n-1$形式为

$$\theta = d\xi = *|du|^{p-2} du$$

其中 ξ 是一个 $\dim M - 2$ 形式。像这样使用它而不归功于诺特（我们大家都是如此）很容易，但将 N 替换为 S^1 时，情况就没那么显而易见了。我们将在二维中充分利用这些 $n-1=1$ 形式，但高维情形仍有待深入理解。

有一次，Daskalopoulos 和我随口问道：那么，定义域 M的对称性又如何呢? 其实，这并非无人涉足的领域。对于 $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$，平移都是局部对称性，诺特定理适用，并由此得到物理学家所称的线动量守恒（如果某个方向代表时间，则为能量守恒）。过去几十年来，几何学家在不提及诺特的情况下，一直以此为基础建立单调性定理，尤其是针对调和映射和杨-米尔斯方程的解。它们在曲流形上只能近似成立，但对于所用的估计而言，这已足够。此外，其证明不同于诺特的证明，因为通常缺乏她所需的正则性。Bernard [B], 的论文讨论了这一背景，并介绍了诺特第一定理在几何中的另一项应用。

现在我们可以回到积分，其中积分区域是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Ω。

$$J_p(f) = \int_\Omega |df|^p (dx)^n.$$

还有一些直接使用微分同胚的较现代证明，但这里我们采用经典论证。事实证明，在本例中，寻找与沿 x^j 方向平移相对应的守恒律，其方法是将欧拉-拉格朗日方程与 $f = u$ 沿 x^j 方向的偏导数作内积，我们将其记为 $d_{x^j} u$。于是得到

$$(|du|^{p-2}\, du, d(d_{x^j} u)) = (|du|^{p-2}\, du, d_{x^j} du) = 1/p\, d_{x^j} |du|^p.$$

这个表达式也等于

$$d * (|du|^{p-2}\, du\, d_{x^j} u) - (d * (|du|^{p-2}\, du), d_{x^j} u) = d * (|du|^{p-2}\, du, d_{x^j} u)$$

因为我们假设欧拉-拉格朗日方程成立。因此，沿第 j 个方向的无散度（动量）向量为

$$S_{(i,j)} = |du|^{p-2}(d_{x^i} u, d_{x^j} u) - \frac{1}{p}\delta_{(i,j)} |du|^p.$$

取对偶以得到闭的（$n-1$）形式并保持对称性，有些棘手；而维数大于 2 时则更加困难。

在二维情形下，我们可以对两个指标都取对偶（星号），从而得到 $S^*_{(1,1)}$ =$S_{(2,2)}$、$S^*_{(2,2)} = S^*_{(1,1)}$ 和 $S^*_{(2,1)} = S^*_{(1,2)} = -S_{(2,1)} = -S_{(1,2)}$。然后，仅依据以下局部微积分事实进行初等但略显繁琐的计算：在 $\mathbb{R}^2$中，$d\theta = 0$ 当且仅当 $\theta = d\xi$，可得：

命题1. 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and J 是定义在某个 L^p_1 空间上的积分 $f : \Omega \to N$，且该空间在平移下保持不变，那么对于每个欧拉-拉格朗日方程的解，都存在一个能量动量张量 S with $d * S = 0$。若$n = 2$，则上面计算得到的 S^* 满足 $dS^* = 0$。此外，任意对称张量S^* 是闭的（相对于任一指标），当且仅当存在 E 使得 $S^*_{(i,j)} = d_i d_j E$。函数 E 在加上一个 $ax^1 + bx^2 + c$项的意义下唯一。

该定理相当一般，除了我们给出的例子之外，还有许多其他例子。任何由平移不变的积分导出的欧拉-拉格朗日方程的解，都具有一个能量-动量张量；即使该解的正则性很低，通常也依然如此。

那么，当定义域是双曲曲面 M时又如何呢?

我们上面所做的计算对于任意流形上的几何学家而言都很熟悉，无论该流形是否对称；而且可以证明，它会为许多以黎曼流形为定义域的积分导出一个能量-动量张量方程 S M。这类计算是研究调和映射和杨-米尔斯方程的基本步骤，源自参数化的变分。（一般来说， S 是一个取值于 $T^*(M) \, \mathrm{s} T^*(M)$的对称张量，且可能仅属于 L^1。这些方程按分布意义解释。◯) 然而，此处的方程是

$$D^* S = 0.$$

这里， D 是外微分 d的协变导数形式。

为了解诺特定理与此的联系，令 ω 为一个无穷小局部等距变换（基灵向量场）。注意，(S,ω)现在是一个1-形式，而 $^*(S,\omega)$是一个 $n-1$形式。下面给出一个简单的计算。

命题2。若定义域是对称空间，则当且仅当$d^*(S,\omega) = 0$ 对于局部基灵场 ω时，$D^*S = 0$。

这一结果向共形不变积分和共形基灵场的推广，见于多处文献（未提及诺特） [B-L], [P]。

在曲面上，若如上从 S 构造对称张量 S^*，则这变为

$$DS^* = 0.$$

当然，外微分的协变导数形式会破坏上述计算。在双曲曲面上，我们有3个线性无关的向量场 ω_α，它们对应于局部对称性。

诺特所保证的三个1-形式是 $^*(S,\omega_\alpha)$。然而，应当注意，这三个形式之间存在一个线性关系。它们并非线性无关。诺特定理早于对李代数的理解。在上半平面坐标中，进行另一项与 $\mathbb{R}^2$ 中类似的初等但繁琐的计算，我们得到如下结果：

定理 3。在双曲曲面 M 上，方程 $D^*S = 0$ 成立，当且仅当局部有 $S^* = \nabla dE + RgE$，其中 ∇ 是协变导数， R 是常曲率， g 是度量张量。此外，算子 $\nabla d + Rg$ 的核 K 对应于函数 E，这些函数是.....的哈密顿量

关于 M 上自然辛形式的对称群 SO(2, 1) 作用。

请注意，非恒定曲率会彻底破坏“若”这一部分；找到算子后，很容易验证这一点。

我们简要描述一下这个核 K 在上半空间 H^2的坐标（x^1, x^2） = （x, y）中的表示。

H^2 上的三个线性无关的 Killing 向量场为

$$\omega_0 = x d_x + y d_y$$
$$\omega_1 = d_y$$
$$\omega_2 = (x^2 - y^2)\, d_x + 2xy\, d_y.$$

算子 $\nabla d + Rg$ 的核 K 由以下三个函数生成

$$k_0 = x/y$$
$$k_1 = 1/y$$
$$k_2 = (x^2 + y^2)/y.$$

为了说明 k_j 是 $-\omega_j$ 的哈密顿量，我们用坐标进行计算。 k_0 的计算如下：

$$*dk_0 = 1/y * dx - x/y^2 * dy = -x/y^2\, dx - 1/y\, dy \to -x d_x - y d_y.$$

最后一步将 1-形式与切向量等同起来，利用了该度量与欧几里得度量共形且共形因子为 $1/y$ 这一事实。对于 k_1 和 k_2，计算类似。

核 K 是由 $\tilde{M} = H^2$ 上的函数组成的三维空间，其元素为 $\sum_j a_j k_j$。若 γ 是 M 中的一条闭曲线，则将其提升到 γ： $[0,1] \to H^2$。求解 S^* =$\nabla dE + RgE$，得到覆盖空间中的一个解。可以验证， $E(\gamma X)$ 也是一个解，因此 $k(X) = E(\gamma X) - E(X)$ 属于 K。结合这一点与同伦不变性，可得到一个可用于构造仿射丛的定理。

推论 4。 设 M 为双曲曲面。对于每个 S^*，若其属于 $T^*(M)\, sT^*(M)$且关于任一指标都是闭的，则 ν： $\pi_1(M) \to K$ 在下述空间上有良好定义：$\pi_1(M)$，并满足

$$\nu(\gamma_1\gamma_2) = \nu(\gamma_1) + \nu(\gamma_2).$$

我们特别关注这样一种情形： S^* 是一个测度，其支撑集位于层状结构 [D-U-1] 上。关于这一情形的应用，以及本文所概述结果的详细证明，可参见一篇即将发表的论文。

参考文献包括一篇关于诺特在相对论革命中所起作用的文章 [Ro]，以及关于诺特定理应用的文献 [B-G-G, O]。我特别推荐 Kosmann-Schwarzbach 的文献，其中介绍了相关的历史背景，并详述了物理学和数学领域的相关文章 [K-S]。

我们完全不了解这些观察结果有何用途，也不清楚其真正含义；也不知道高维情形下定理 2 的精确表述是什么，更不清楚它们可能有哪些应用，

然而，有时，追求无用的知识也会有所收获。

References

[B] Bernard, Yann； *Noether's Theorem and the Willmore Functional*, 《变分演算进展》9 (3)，第 217–234 页。（档案 2019）。[B-L] Bourguignon, Jean-Pierre 和 Lawson, Blaine； *Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills* 79, 189 230 1981 ，《通讯数学物理》– ( )。[B-G-G] Bryant, Robert、Griffiths, Phillip 和 Grossman, Daniel， *Exterior Differential Systems and Euler-Lagrange Equations* 2000 2008 ，芝加哥大学出版社 ( )。（档案 ）[D-U-1] Daskalopoulos, George 和 Uhlenbeck, Karen； *Transverse Measures and Best Lipschitz and Least Gradient Maps* （已提交发表）。

[D-U-2] ； *Analytic Properties of Stretch Maps and Geodesic Laminations* （准备中）。[H] Hilbert, David； *Gesammelte Abhandlung*，第 3 卷，Springer 1935 年版，纽约Chelsea 1965 年重印。[K-S] Kossman-Schwarzbach, Yvette, （B. Schwarzbach 译）； *The Noether Theorem, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, Springer Verlag（ 2018）[N] Noether, Emmy； *Invariante Variationsprobleme*, 《哥廷根新闻》（1918），第 37-44 页。[O] Olver, Peter； *Applications of Lie Groups to Differential Equations;* Springer 研究生教材（2000）。[P] Parker, Tom； *Conformal Fields and Stability*, 《数学杂志》185，305–319（1984）。[Ro] Ro we, David； *On Emmy Noether's Role in the Relativity Revolution;*《数学智能》41，第 2 期，65–72 页。（档案 2019）[S-S] Schouten, Jan Arnoldus 和 Struik, Dirk； *On Some Properties Of General Manifolds Relating to Einstein's Theory of Gravitation* 43, 1921 4 213 216 ，《美国数学杂志》（ ）第 - 期。

德克萨斯大学奥斯汀分校荣休教授，高等研究院杰出访问教授