NRCPS-HE-22-2023
2023年3月

杨-米尔斯有效拉格朗日量

Leutwyler 零模色子的贡献

George Savvidy [1]

核与粒子物理研究所，*NCSR Demokritos*，希腊雅典 *GR-15310*

arXiv:2304.01164v1 [hep-th] 3 Apr 2023

摘要

最近，我们通过对非线性相互作用零模的集体坐标积分，计算了 Leutwyler 零模色子对杨-米尔斯有效拉格朗日量的贡献。本文分析零模的配分函数前因子和积分测度雅可比行列式的行为，并表明这些因子不会对有效拉格朗日量产生贡献。

[1]savvidy(AT)inp.demokritos.gr

1 引言。（反）自对偶的协变常数真空场[2] 具有正定/稳定且无穷多个零模，即所谓的 Leutwyler零模色子 [1, 2, 3]。此前，我们对非线性相互作用零模的集体坐标进行了积分，并得到了它们对有效拉格朗日量的贡献 [4]。本文将分析相应配分函数前因子以及零模色子集体坐标积分测度雅可比行列式的行为，并表明这些因子不会对有效拉格朗日量产生贡献，也不会改变此前的结果 [5, 6, 8, 9, 10]。我们对零模坐标的积分方法，是对特霍夫特瞬子零模集体坐标积分 [11]的推广，并与 Feynman [12] 和 Fujikawa [13]发展的积分技术相似。

2 欧几里得路径积分。杨–米尔斯理论中的有效拉格朗日量 [14, 15, 16] 可在欧几里得空间 [11, 17] 中进行分析，其形式如下 [1, 2, 10, 17, 18, 19, 20, 21]:

$$\int_{\vec{A}}^{\vec{A}'} \mathcal{D}\vec{A}(\tau) e^{-S_E[A(\tau)]} \equiv N_f e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(\vec{A}',\vec{A})}, \tag{1}$$

其中，路径积分涉及对满足适当边界值 A_i^a 的欧几里得场构型 $A_i^a(\vec{x},\ \tau)$ 进行积分 $\vec{x},\ 0) = A_i^a(\vec{x})$, $A_i^a(\vec{x},\ T) = A_i'^a(\vec{x})$。欧几里得作用量为:

$$S_E = \frac{1}{4}\int d^4x G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu}, \tag{2}$$

其中 $x_0 \to -ix_0 = -i\tau$、 $A_0 \to iA_0$ 和 $G^a_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$。实电场 $\vec{}$ $\vec{}$ 对应于欧几里得空间 $E \to iE$中的虚电场。给定插值真空场 $B^a_\mu(x)$ 从 $A^a_i(\vec{x})$ 出发并在 $A'^a_i(\vec{x})$ 处结束时，其邻域内真空场的行为可表示为： $A^a_\mu(x) = B^a_\mu(x) + a^a_\mu(x)$，其中量子场 $a^a_\mu(x)$ 的边界值为零。场强 $G^a_{\mu\nu}(A)$ 可按 $a^a_\mu(x)$ 展开为 $G^a_{\mu\nu}(A) = G^a_{\mu\nu}(B) + \nabla^{ab}_\mu a^b_\nu - \nabla^{ab}_\nu a^b_\mu + g f^{abc} a^b_\mu a^c_\nu$，其中 $\nabla^{ab}_\mu a^b_\nu = \partial_\mu a^a_\nu + g f^{abc} B^b_\mu a^c_\nu$ 是相对于真空场 $B^a_\mu(x)$ 和 $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]^{ab} = g f^{acb} G^c_{\mu\nu}(B)$ 的协变导数。对于欧几里得作用量 (2)，有:

$$\begin{aligned} S_E = &\frac{1}{4}\int d^4x G^a_{\mu\nu}(B) G^a_{\mu\nu}(B) + \int d^4x G^a_{\mu\nu}(B) \nabla^{ab}_\mu a^a_\nu + \\ &+ \frac{1}{4}\int d^4x \Big((\nabla^{ab}_\mu a^b_\nu - \nabla^{ab}_\nu a^b_\mu + g f^{abc} a^b_\mu a^c_\nu)^2 + 2 g G^a_{\mu\nu}(B) f^{abc} a^b_\mu a^c_\nu \Big). \end{aligned} \tag{3}$$

真空场 B^a_μ 应满足欧几里得杨–米尔斯方程:

$$\nabla_\mu G_{\mu\nu}(B) = 0, \tag{4}$$

[2]在此处及下文中，“真空场”指无源杨-米尔斯方程的解所对应的规范场。

这样，式 (3) 中关于 a^a_μ（x）的线性项便消失，有效拉格朗日量是一个规范不变泛函 [8]。作用量的二次部分具有以下形式:

$$K_E = \frac{1}{4}\int d^4x\Big[(\nabla^{ab}_\mu a^b_\nu - \nabla^{ab}_\nu a^b_\mu)^2 + 2gG^a_{\mu\nu}(B)f^{abc}a^b_\mu a^c_\nu\Big]. \tag{5}$$

欧几里得拉格朗日量 (3) 中的非线性项对于 $a^a_\mu(x)$ 是三次和四次的:

$$V_E = \int d^4x\Big(-gf^{abc}a^b_\nu a^c_\mu \nabla^{ad}_\mu a^d_\nu + \frac{g^2}{4}(f^{abc}a^b_\mu a^c_\nu)^2\Big). \tag{6}$$

边界场取为相等的 $A^a_i(\vec{x}) = A'^a_i(\vec{x})$，即为协变常量场 [7, 8, 9]，并满足方程 (4)。于是，真空场 $B^a_\mu(x)$ 将具有如下形式:

$$B^a_\mu(x) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x_\nu\delta^a_3, \tag{7}$$

其中矢量　　量 E_i 和 H_i 可通过两个独立旋转 [1]与 z轴对齐:

$$F_{12} = H, \quad F_{30} = E. \tag{8}$$

欧几里得规范不变量为: $\mathsf{F}_E = \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu} = \frac{H^2+E^2}{2}$和 $\mathsf{G}_E = \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^a_{\mu\nu} = HE$。在二次近似 (5) 下，真空场的稳定性归结为以下特征值问题 [1, 2, 4]:

$$-\nabla^{ab}_\mu(\nabla^{bc}_\mu a^c_\nu - \nabla^{bc}_\nu a^c_\mu) + gf^{abc}G^b_{\mu\nu}a^c_\mu = \lambda a^a_\nu. \tag{9}$$

将场 a_μ 分解为中性分量和带电分量[3]是很方便的:

$$a^a_\mu = (a^3_\mu, a_\mu, a^-_\mu), \quad a_\mu = a^1_\mu + ia^2_\mu, \quad a^-_\mu = a^1_\mu - ia^2_\mu. \tag{10}$$

对于中性分量和带电分量，我们将得到:

$$-\partial_\mu(\partial_\mu a^3_\nu - \partial_\nu a^3_\mu) = \lambda a^3_\nu, \quad -\nabla_\mu(\nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu) + igF_{\mu\nu}a_\mu = \lambda a_\nu, \tag{11}$$

其中 $\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2}igF_{\mu\nu}x_\nu$。考虑到 $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = igF_{\mu\nu}$，并对带电分量的量子场 $\nabla^{ab}_\mu a^b_\mu = 0$ [8] 施加背景规范固定条件，我们将得到:

$$-\nabla_\mu\nabla_\mu a_\nu + 2igF_{\mu\nu}a_\mu = \lambda a_\nu\ . \tag{12}$$

对于真空场（7）、（8），我们将得到 [1, 2, 4]

$$\begin{aligned} H_0 = -\nabla_\mu\nabla_\mu = &-\partial^2_1 - \partial^2_2 + igH(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + \frac{g^2}{4}H^2(x^2_2 + x^2_1) \\ &-\partial^2_3 - \partial^2_0 + igE(x_0\partial_3 - x_3\partial_0) + \frac{g^2}{4}E^2(x^2_3 + x^2_0) \end{aligned} \tag{13}$$

[3]在本文余下部分，我们将考虑 $SU(2)$规范群。

而 H_0 是（1，2）平面和（3，0）平面中同构振子的总和。算符 [1, 2]

$$c_i = \partial_i + \frac{g}{2}Hx_i, \qquad c_i^+ = -\partial_i + \frac{g}{2}Hx_i, \qquad i = 1, 2$$
$$d_j = \partial_j + \frac{g}{2}Ex_j, \qquad d_j^+ = -\partial_j + \frac{g}{2}Ex_j, \qquad j = 3, 0 \tag{14}$$

因此可以将 H_0 表示为以下形式： $H_0 = (c_1^+ + ic_2^+)(c_1 - ic_2) + (d_3^+ + id_0^+)(d_3 - id_0) + gH + gE$. 算符 H_0 的本征态为:

$$\psi_{nm} = (c_1^+ + ic_2^+)^n (d_3^+ + id_0^+)^m \psi_{00} = (gH)^n (x_1 + ix_2)^n (gE)^m (x_3 + ix_0)^m \psi_{00}, \tag{15}$$

其中 $\psi_{00}(x) = e^{-\frac{gH}{4}(x_1^2+x_2^2)} e^{-\frac{gE}{4}(x_3^2+x_0^2)}$ 相应的本征值 $H_0\psi_{nm} = \lambda_0\psi_{nm}$ 为 e:

$$\lambda_0 = (2n + 1)gH + (2m + 1)gE. \tag{16}$$

所有本征态均具有无穷简并，因为这些态

$$\psi_{nm}(n_0, m_0) = (c_1^+ - ic_2^+)^{n_0} (d_3^+ - id_0^+)^{m_0} \psi_{nm} \tag{17}$$

具有相同的本征值 (16)，并由两个整数 $n_0, m_0 = 0$,1,2...编号。带电场 (10) 的本征态由算符定义

$$H_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla_\lambda - 2igF_{\mu\nu} \tag{18}$$

其形式如下： $b = a_1 + ia_2, \quad b^- = a_1 - ia_2, \quad h = a_3 + ia_0, \quad h^- = a_3 - ia_0$. 因此，算符 $H_{\mu\nu}$ 的本征值具有以下形式:

$$\begin{aligned}
b^- : &\qquad \lambda_1 = (2n + 1)gH + (2m + 1)gE + 2gH \\
b \ : &\qquad \lambda_2 = (2n + 1)gH + (2m + 1)gE - 2gH \\
h^- : &\qquad \lambda_3 = (2n + 1)gH + (2m + 1)gE + 2gE \\
h \ : &\qquad \lambda_4 = (2n + 1)gH + (2m + 1)gE - 2gE,
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 n， $m = 0$、1、2.....。共轭场 a_μ^-具有相同的本征值 λ_i, $i = 5$、.....、8。负本征值出现在 λ_2, λ_4 中，当 $E \neq H$ [22, 23, 23, 24, 25, 26, 27] 时；且仅在（反）自对偶真空场 [1, 2]的情况下

$$E = H \tag{20}$$

谱 (19) 中不存在负本征值/不稳定本征值。

3 ***Leutwyler*** 零模色子。 由此可知，当 $n = m = 0$ 时，存在无穷多个零

本征值 $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$，它们是由自对偶场 $E = H$ 的高对称性和简并度 (17) 导致的。这些是 ***Leutwyler*** 零模色子，它们是 (17) 的线性组合（$b^- = a_1 - ia_2 = 0,\ h^- = a_3 - ia_0 = 0$）：

$$a_1(x) = ia_2(x) = \sum_{n_0,m_0} \xi_{n_0m_0}\ (c_1^+ - ic_2^+)^{n_0}(d_3^+ - id_0^+)^{m_0}\psi_{00}(x)$$
$$a_3(x) = ia_0(x) = \sum_{n_0,m_0} \eta_{n_0m_0}\ (c_1^+ - ic_2^+)^{n_0}(d_3^+ - id_0^+)^{m_0}\psi_{00}(x), \tag{21}$$

其中我们引入了零模复振幅（集体坐标）$\xi_{n_0m_0}$ 和 $\eta_{n_0m_0}$。

对于零模本征函数，二次型 (5) 为零，$K_E = 0$，并且由于零模振幅不受指数项 e^{-K_E} 的抑制，振幅可以无限增大。这仅意味着这些方向上的积分不是高斯型积分 [11]，而有效拉格朗日量中的零模贡献应通过对非线性相互作用零模的集体坐标 (21) 积分来计算：

$$\prod_{a,\mu}^{zero\ modes} \mathcal{D}a_\mu^a = J \prod_{n_0,m_0=0}^{\mathcal{D}eg} d\xi^{'}_{n_0m_0} \wedge d\xi^{''}_{n_0m_0} \wedge d\eta^{'}_{n_0m_0} \wedge d\eta^{''}_{n_0m_0}, \tag{22}$$

其中 $\xi_{n_0m_0} = \xi^{'}_{n_0m_0} + i\xi^{''}_{n_0m_0}$、$\eta_{n_0m_0} = \eta^{'}_{n_0m_0} + i\eta^{''}_{n_0m_0}$ 和 J 是雅可比因子[11, 13]。三次自相互作用项 (6) 在零模方向 (21) 上为零：

$$V_E^{(3)} = -g \int d^4x\ \epsilon^{abc} a_\nu^b a_\mu^c \nabla_\mu^{ad} a_\nu^d = 0. \tag{23}$$

四次相互作用项不为零，因此路径积分具有以下形式：

$$Z^{zero\ modes} = N \int \exp\Big[-\frac{g^2}{4} \int d^4x (\epsilon^{abc} a_\mu^b a_\nu^c)^2 \Big] \prod_{a,\mu}^{zero\ modes} \mathcal{D}a_\mu^a, \tag{24}$$

其中积分遍及所有相互作用的零模。零模配分函数 (24) 若按耦合常数 g^2 展开，将产生无限多个多圈图，似乎不可能对它们进行计算。然而，零模配分函数的精确计算是可行的，因为路径积分 (24) 中对场强的依赖可以因子化。

首先考虑当 $n = m = n_0 = m_0 = 0$ 在式 (15) 和 (17) 中时的最低态 (19)。对应于具有 $n_0 = m_0 = 0$ 的最低态的解 (21) 为：

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= \xi^{'}\psi_{00}, \quad a_1^2 = \xi^{''}\psi_{00}, \quad a_1^3 = 0 \\
a_2^1 &= \xi^{''}\psi_{00}, \quad a_2^2 = -\xi^{'}\psi_{00}, \quad a_2^3 = 0 \\
a_3^1 &= \eta^{'}\psi_{00}, \quad a_3^2 = \eta^{''}\psi_{00}, \quad a_3^3 = 0 \\
a_0^1 &= \eta^{''}\psi_{00}, \quad a_0^2 = -\eta^{'}\psi_{00}, \quad a_0^3 = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\xi_{00}=\xi^{'}+i\xi^{''}$ 和 $\eta_{00}=\eta^{'}+i\eta^{''}$。对于零模色子 (25)，四次项具有以下形式：

$$V_E^{(4)}=\frac{g^2}{4}\int d^4x(\epsilon^{abc}a_\mu^b a_\nu^c)^2=\frac{g^2}{2}(\xi^{'2}+\xi^{''2}+\eta^{'2}+\eta^{''2})^2\int d^4x|\psi_{00}(x)|^4 \tag{26}$$

对式（26）中的空间坐标积分后，配分函数将具有如下形式：

$$Z_{00}^{zero\ mode}=\mu^4\int\exp\Big[-\frac{g^2}{2}\Big(\frac{gH}{4\pi}\Big)^2(\xi^{'2}+\xi^{''2}+\eta^{'2}+\eta^{''2})^2\Big]\,d\xi^{'}d\xi^{''}d\eta^{'}d\eta^{''}. \tag{27}$$

引入无量纲集体坐标 $(\xi,\ \eta)\to(\xi,\ \eta)/(gH)^{1/2}$，便可在路径积分中分离出场强依赖性，从而得到

$$Z_{00}^{zero\ mode}=\Big(\frac{\mu^2}{gH}\Big)^2\int\exp\Big[-\frac{g^2}{32}(\xi^{'2}+\xi^{''2}+\eta^{'2}+\eta^{''2})^2\Big]\,d\xi^{'}d\xi^{''}d\eta^{'}d\eta^{''}=N_{00}\Big(\frac{\mu^2}{gH}\Big)^2. \tag{28}$$

对于高阶零模色子 $\psi_{00}(n_0,\ m_0)$（17），我们有

$$\begin{aligned}Z_{n_0m_0}^{zero\ mode}&=\Big(\frac{\mu^2}{gH}\Big)^2\int\exp\Big[-\frac{g^2}{32}\frac{\Gamma(n_0+1/2)\Gamma(m_0+1/2)}{\pi\Gamma(n_0+1)\Gamma(m_0+1)}(|\xi_{n_0m_0}|^2+|\eta_{n_0m_0}|^2)^2\Big]\,d^2\xi_{n_0m_0}d^2\eta_{n_0m_0}\\&=\Big(\frac{\mu^2}{gH}\Big)^2\times N_{n_0m_0}.\end{aligned} \tag{29}$$

为计算自相互作用零模的贡献，应考虑零模（17）的简并度（38），并求积 $J\prod_{\mathcal{D}n_0=0,\ m_0=0}^{eg}Z_{n_0m_0}^{zero\ mode}$：

$$Z_{zero\ modes}=J\prod_{n_0=0,m_0=0}^{\mathcal{D}eg}N_{n_0m_0}\Big(\frac{\mu^4}{g^2H^2}\Big)=JN\Big(\frac{\mu^4}{g^2H^2}\Big)^{\mathcal{D}eg}=JNe^{-\frac{g^2H^2}{4\pi^2}\ln\frac{g^2H^2}{\mu^4}V_4}, \tag{30}$$

其中 $N=\prod_{\mathcal{D}n_0=0,\ m_0=0}^{eg}N_{n_0m_0}$。在极限 $T\to\infty$ 下，我们有 $Z_{zero\ modes}\to e^{-\mathcal{L}_{eff}V_4}$，而零模对有效拉格朗日量的贡献（30）为

$$\mathcal{L}_{zero\ modes}=\frac{g^2H^2}{4\pi^2}\ln\frac{g^2H^2}{\mu^4}. \tag{31}$$

正模／稳定模的贡献形式如下 [4]:

$$\mathcal{L}^{(1)}_{positive\ modes}=-\frac{g^2H^2}{48\pi^2}\Big[\ln\frac{2g^2H^2}{\mu^4}-1\Big]. \tag{32}$$

有效拉格朗日量由正模／稳定模 (32) 和零模色子 (31) 组成：

$$\mathcal{L}_E^{eff}=H^2+\mathcal{L}^{(1)}_{positive\ modes}+\mathcal{L}_{zero\ modes}=H^2+\frac{11g^2H^2}{48\pi^2}\Big[\ln\frac{2g^2H^2}{\mu^4}-1\Big]. \tag{33}$$

这一结果与在物理时空 [5, 10]中得到的结果完全一致：

$$\mathcal{L}_{YM}=-\mathcal{F}-\frac{11g^2\mathcal{F}}{48\pi^2}\Big[\ln\frac{2g^2\mathcal{F}}{\mu^4}-1\Big],\qquad \mathcal{F}=\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}>0. \tag{34}$$

如前所述，物理时空 E 中的电场对应于欧几里得空间 $E \to iE$中的虚电场，因此可以将规范不变算符映射为

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\vec{H}^2 + \vec{E}^2)_E = \mathcal{F}_E \tag{35}$$

而有效拉格朗日量（34）变换为欧几里得有效拉格朗日量（33）。

4 前因子 N。我们现在主要关注的是研究公式（30）中前因子 N 和雅可比因子 J 可能存在的场强依赖性，这种依赖性会改变有效拉格朗日量（33）。对零模集体坐标的积分类似于 Feynman [12], 特霍夫特 [11] 和 Fujikawa [13] 所发展出的积分技术，并将用于研究前因子 N 和雅可比因子 J的场强依赖性。前因子 N 定义如下（30）

$$N = \prod_{n_0=0,m_0=0}^{\mathcal{D}eg} N_{n_0m_0}, \tag{36}$$

由（29）可得

$$N_{n_0m_0} = \int \exp\{-\frac{g^2}{32}\frac{\Gamma(n_0+1/2)\Gamma(m_0+1/2)}{\pi\Gamma(n_0+1)\Gamma(m_0+1)}(|\xi_{n_0m_0}|^2 + |\eta_{n_0m_0}|^2)^2\}\ d^2\xi_{n_0m_0}d^2\eta_{n_0m_0}. \tag{37}$$

前因子 N 可能具有场强依赖性，因为本征态（17）的简并度 Deg （38）具有场强依赖性，其形式如下 [4]:

$$\mathcal{D}eg = N_0M_0 = \frac{gH}{2\pi}A_{12}\frac{gE}{2\pi}A_{03} = \frac{g^2EH}{4\pi^2}V_4, \tag{38}$$

其中

$$N_0 = \frac{gH}{2\pi}A_{12}, \quad M_0 = \frac{gE}{2\pi}A_{30}. \tag{39}$$

A_{12} 是平面（x_1, x_2）上的二维面积，而 A_{30} 是平面（x_3, x_0）上的二维面积，四维体积为 $V_4 = A_{12}A_{30}$。将集体坐标（ξ, η）在$N_{n_0m_0}$ 中重新标度，可以得到 $N_{n_0m_0}$ 的另一种表达式，其中场强依赖性被因式分解

$$\begin{aligned} N_{n_0m_0} &= \frac{32\pi}{g^2}\frac{\Gamma(n_0+1)\Gamma(m_0+1)}{\Gamma(n_0+1/2)\Gamma(m_0+1/2)} \times \int e^{-(|\xi_{n_0m_0}|^2+|\eta_{n_0m_0}|^2)^2} d^2\xi_{n_0m_0}d^2\eta_{n_0m_0} \\ &= \frac{32\pi}{g^2}\frac{\Gamma(n_0+1)\Gamma(m_0+1)}{\Gamma(n_0+1/2)\Gamma(m_0+1/2)} \times I, \end{aligned} \tag{40}$$

其中

$$I = \int \exp\{-(|\xi_{n_0m_0}|^2 + |\eta_{n_0m_0}|^2)^2\}\ d^2\xi_{n_0m_0}d^2\eta_{n_0m_0}.$$

计算式（36）中的乘积，可得前因子 N：

$$N = \prod_{n_0,m_0}^{\mathcal{D}eg} N_{n_0m_0} = \prod_{n_0,m_0}^{\mathcal{D}eg} \frac{32\pi I}{g^2} \frac{\Gamma(n_0+1)\Gamma(m_0+1)}{\Gamma(n_0+1/2)\Gamma(m_0+1/2)} = \\ = \Big(\frac{2e^3\pi^6}{A^{36}}\Big)^{\frac{N_0+M_0}{24}} \Big(\frac{32\pi I}{g^2}\Big)^{N_0M_0} \Big[\frac{G(N_0+2)}{G(N_0+3/2)}\Big]^{M_0} \Big[\frac{G(M_0+2)}{G(M_0+3/2)}\Big]^{N_0} \tag{41}$$

其中 A 是格莱舍常数， $G(n)$是巴恩斯函数。由于有效拉格朗日量的贡献应按四维体积 $N_0M_0 \to V_4$ 缩放，因此我们必须从前因子 N 的渐近行为中，仅提取与乘积 N_0M_0 (38)成正比的项。只有最后两项随四维体积缩放，并能对有效拉格朗日量作出贡献。利用 Garnes 函数在 $N_0 \to \infty$处的渐近行为，对于给定的比值可得:

$$\frac{G(N_0+2)}{G(N_0+3/2)} \to (2\pi)^{1/4}\ e^{-\frac{N_0}{2}+(\frac{3}{8}+\frac{N_0}{2})\log N_0} \tag{42}$$

以及式 (41) 中的乘积

$$\Big[\frac{G(N_0+2)}{G(N_0+3/2)}\Big]^{M_0} \Big[\frac{G(M_0+2)}{G(M_0+3/2)}\Big]^{N_0} \to (2\pi)^{\frac{N_0+M_0}{4}}\ e^{\frac{3}{8}(M_0\log N_0 + N_0 \log M_0)}\ e^{-N_0M_0+\frac{N_0M_0}{2}\log(N_0M_0)}. \tag{43}$$

最后一个指数项中包含随四维体积缩放的项，因此

$$N \propto\ e^{-N_0M_0+\frac{N_0M_0}{2}\log N_0M_0} =\ e^{+\frac{g^2H^2}{8\pi^2}\left(\log\frac{g^2H^2}{\mu^4}-2\right)V_4} \tag{44}$$

前因子 N 对有效拉格朗日量的贡献为

$$\mathcal{L}_{eff}^{prefactor} = -\frac{g^2H^2}{8\pi^2}\log\frac{2g^2H^2}{\mu^4}. \tag{45}$$

我们转而研究积分测度及相应的雅可比因子。**5** 雅可比J。 Leutwyler零模色子 (21) 可表示为以下形式:

$$a_1(x) = ia_2(x) = \sum_{n_0,m_0} \xi_{n_0m_0}\ (x_1-ix_2)^{n_0}(x_3-ix_0)^{m_0}\psi_{00}(x) \\ a_3(x) = ia_0(x) = \sum_{n_0,m_0} \eta_{n_0m_0}\ (x_1-ix_2)^{n_0}(x_3-ix_0)^{m_0}\psi_{00}(x), \tag{46}$$

其中，对于自对偶场 (20)

$$\psi_{00}(x) = e^{-\frac{gH}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2)} \equiv e^{-\frac{gH}{4}x^2}.$$

引入维度　　在较少的坐标 $y_\mu = x_\mu/(gH)^{1/2}$ 中，可以将规范场表示为如下形式

$$a_1(y) = ia_2(y) = \sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} \xi_{n_0m_0}\ (y_1-iy_2)^{n_0}(y_3-iy_0)^{m_0}\psi_{00}(y) \\ a_3(y) = ia_0(y) = \sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} \eta_{n_0m_0}\ (y_1-iy_2)^{n_0}(y_3-iy_0)^{m_0}\psi_{00}(y). \tag{47}$$

将欧几里得空间中的大体积 V_4 划分为小的四维立方体 v_i (i=1,..,N_0M_0)，并近似认为小体积 v_i 内的规范场为常量，则 V_4 中的规范场具有以下形式：

$$a_1(i) = ia_2(i) = \sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} K_{n_0m_0}(i)\ \xi_{n_0m_0}$$
$$a_3(i) = ia_0(i) = \sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} K_{n_0m_0}(i)\ \eta_{n_0m_0}, \qquad i = 1, ..., N_0M_0, \tag{48}$$

其中核为

$$K_{n_0m_0}(i) = \ (y_1(i) - iy_2(i))^{n_0}\ (y_3(i) - iy_0(i))^{m_0}\ \psi_{00}(y_i). \tag{49}$$

积分测度中 包含场 $a_1(i)$ 的部分将具有如下形式：

$$\prod_{i=1}^{N_0M_0} da_1(i) \wedge da_1^*(i) = \tag{50}$$
$$\sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} K_{n_0m_0}(1) d\xi_{n_0m_0} \wedge d\xi^*_{n_0m_0} \wedge ... \wedge \sum_{n_0,m_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} K_{n_0m_0}(N_0M_0) d\xi_{n_0m_0} \wedge d\xi^*_{n_0m_0}.$$

展开楔积后，我们将得到一个大型矩阵的行列式 Δ，其大小为 $N_0M_0 \times N_0M_0$。Δ 矩阵的每一行都含有相同的场依赖因子（gH）$^{-\frac{n_0+m_0}{2}}$，因此该矩阵可以写成如下“符号”形式：

$$\Delta = \begin{pmatrix} (gH)^{-\frac{0+0}{2}} & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & (gH)^{-\frac{1+0}{2}} & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & (gH)^{-\frac{0+1}{2}} & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & (gH)^{-\frac{1+1}{2}} & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & (gH)^{-\frac{N_0+M_0}{2}} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

场强依赖性可以从每一行中提取出来，雅可比因子正比于以下乘积

$$J_1 = \mathrm{Det}\ \Delta = \Lambda_1 \prod_{n_0,m_0}^{N_0,M_0} (gH)^{-\frac{n_0+m_0}{2}} = \Lambda_1\ (gH)^{-\frac{1}{4}N_0M_0(N_0+M_0+2)}, \tag{52}$$

其中，Λ_1 是剩余矩阵的行列式，该矩阵现在不含任何依赖于场强的因子。完整的零模积分测度现在将具有以下形式：

$$\prod_{i=1}^{N_0M_0} da_1(i) \wedge da_1^*(i) \wedge da_3(i) \wedge da_3^*(i) = J \prod_{n_0,m_0}^{N_0,M_0} d\xi_{n_0m_0} \wedge d\xi^*_{n_0m_0} \wedge ... \wedge d\eta_{n_0m_0} \wedge d\eta^*_{n_0m_0}, \tag{53}$$

其中

$$J = J_1 J_3 = \Lambda_1 \Lambda_3 \ (gH)^{-\frac{1}{2} N_0 M_0 (N_0 + M_0 + 2)} \tag{54}$$

只有 $N_0 M_0$ 项随四维体积 V_4变化，因此雅可比行列式 J 中对有效拉格朗日量有贡献的部分与以下表达式成正比

$$J \quad \propto \quad (gH)^{-N_0 M_0} = e^{-\frac{g^2 H^2}{8\pi^2} \log \frac{2g^2 H^2}{\mu^4} V_4} \tag{55}$$

相应的有效拉格朗日量部分为

$$\mathcal{L}_{eff}^{Jacobian} = + \frac{g^2 H^2}{8\pi^2} \log \frac{2g^2 H^2}{\mu^4}. \tag{56}$$

将配分函数前因子 N (45)和雅可比因子 J (56)对有效拉格朗日量的贡献相加，可以看出这些贡献彼此抵消

$$\mathcal{L}_{eff}^{prefactor} + \mathcal{L}_{eff}^{Jacobian} = 0$$

因此不会改变（反）自对偶有效拉格朗日量 (33) 的表达式。

6 杨-米尔斯真空态的简并度。 在更一般的协变常量色磁真空场 [7, 8, 9], 情况下，出现的不是零模色子，而是大量呈现明显不稳定性 [22, 23, 24, 25, 26, 27]的负模。对 Ambjorn、Nielsen、Olesen [24, 25, 26, 27], 、Flory [18] 及其他作者 [1, 2, 3, 10, 19, 20, 21, 28, 29, 30, 31] 先前提出的计算方法加以推广，可以得到包含正／稳定模和负／不稳定模贡献的有效拉格朗日量，并证明该有效拉格朗日量不含虚数项 [4]。所有这些真空场都是稳定的，表明杨-米尔斯真空是一个高度简并的量子态。

文献中也考虑过一大类其他真空场 [32,33, 34, 28, 29, 30], ，其中一些真空场呈现出自然的混沌行为 [35]。在这方面，我们应当探讨是否存在真空态具有高度简并的物理系统。转而考察统计自旋系统，可以发现，经典三维伊辛系统的真空态及其所有激发态均具有二重简并。正是这种对称性使得我们能够构造三维伊辛模型的对偶规范不变表示 [36]。文献 [37], 中构造的、具有直接铁磁相互作用和四分之一强度次次近邻反铁磁相互作用的三维伊辛模型扩展，以及交叉耦合常数为零的模型（$k = 0$） [38, 39, 41, 42], ，其真空态具有指数级简并度。近期出版物将这种对称性称为子系统对称性 [45]。这种更高阶的

对称性使得我们能够在不同维度下构造这些相同系统的对偶表示[38, 39, 40]。由于真空态具有高度简并度，这些系统具有丰富的物理性质，包括玻璃行为 [43, 44], 、奇异的分形子激发 [45], ；有人还提出，它们可用于高密度存储设备 [46]。

参考文献

[1] H. Leutwyler，软胶子场周围的真空涨落，《物理快报》**96B** (1980) 154。doi:10.1016/0370-2693(80)90234-8

[2] H. Leutwyler，恒定规范场及其量子涨落，《核物理B辑》**179**(1981) 129。doi:10.1016/0550-3213(81)90252-2

[3] P. Minkowski，论规范理论中场强双线性项的基态期望值及恒定经典场，《核物理B辑》**177** (1981)，203-217 doi:10.1016/0550- 3213(81)90388-6

[4] G. Savvidy，杨-米尔斯真空态的稳定性，[arXiv:2203.14656 [hep-th]] .

[5] G. K. Savvidy，规范理论真空态的红外不稳定性与渐近自由，《物理快报》**71B** (1977年) 133. doi:10.1016/0370-2693(77)90759-6

[6] S. G. Matinyan 和 G. K. Savvidy，强规范场引起的真空极化，《核物理》B **134** (1978年) 539. doi:10.1016/0550-3213(78)90463-7

[7] M. J. Duff 和 M. Ramon-Medrano，关于杨-米尔斯场的有效拉格朗日量，《物理评论》D **12** (1975) 3357. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.3357

[8] I. A. Batalin、S. G. Matinyan 和 G. K. Savvidy，无源规范场引起的真空极化，《苏联核物理杂志》**26**(1977年) 214 [《核物理》**26** (1977年) 407]。

[9] G. K. Savvidy, 强规范场引起的真空极化，博士论文 1977年, `http://www.inp.demokritos.gr/~savvidy/phd.pdf`

[10] G. Savvidy，从海森堡-欧拉拉格朗日量到色磁胶子凝聚的发现，《欧洲物理学杂志C辑》**80** (2020) no.2, 165 doi:10.1140/epjc/s10052-020-7711-6[arXiv:1910.00654 [hep-th]].

[11] G. ’t Hooft，四维赝粒子所致量子效应的计算，《物理评论D》**14** (1976), 3432-3450 https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.3432[12] R. P. Feynman 和 A. R. Hibbs，量子力学与路径积分，麦格劳-希尔，纽约，1965年。[13] K. Fujikawa，规范不变费米子理论的路径积分测度，《物理评论快报》**42**(1979), 1195-1198 doi:10.1103/PhysRevLett.42.1195[14] W. Heisenberg 和 H. Euler，狄拉克正电子理论的后果，《物理学杂志》**98** (1936年) 714.[15] J. S. Schwinger，论规范不变性与真空极化，《物理评论》**82** (1951年) 664. doi:10.1103/PhysRev.82.664[16] S. R. Coleman 和 E. J. Weinberg，辐射修正作为自发对称性破缺的起源，《物理评论D》**7**(1973年) 1888. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.1888[17] S. Coleman，瞬子的用途，埃里切讲座，1977年[18]C. A. Flory，协变常色磁场与单圈不稳定性的消除，预印本，SLAC-PUB-3244, http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=SLAC-PUB-3244; https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1983/8312/8312331.pdf[19] D. Kay、R. Parthasarathy 和 K. S. Viswanathan *SU(2)*规范理论中的恒定自对偶阿贝尔规范场与费米子，Phys. Phys. D **28** (1983年) 3116-3120.[20] D. Kay. 量子色动力学中的不稳定模、零模与相变，博士论文，西蒙弗雷泽大学，1985年8月。[21] D. Kay、A. Kumar 和 R. Parthasarathy *SU(2)*杨-米尔斯理论中的*Savvidy*真空，《现代物理快报A》**20**(2005年) 1655-1662.[22] N. K. Nielsen 和 P. Olesen，不稳定杨-米尔斯场模，《核物理B辑》**144** (1978年) 376. doi:10.1016/0550-3213(78)90377-2[23] V. V. Skalozub，磁场中自发破缺对称性的恢复，《核物理》**28**(1978年) 228。

[24] J. Ambjorn, N. K. Nielsen and P. Olesen, 量子色动力学中的隐藏希格斯拉格朗日量，《核物理B辑》**152**(1979年) 75. doi:10.1016/0550-3213(79)90080-4[25] H. B. Nielsen, 量子色动力学袋常数的近似下界 B，《物理快报》 **80B** (1978年) 133. doi:10.1016/0370-2693(78)90326-X[26] N. K. Nielsen and P. Olesen, 杨–米尔斯理论中的电涡旋线，《物理快报B辑》**79**(1978年), 304 doi:10.1016/0370-2693(78)90249-6[27] J. Ambjorn and P. Olesen, 量子色动力学中的色磁涡旋凝聚态，《核物理B辑》 **170**(1980) 265. doi:10.1016/0550-3213(80)90150-9[28]Y. M. Cho, 受限规范理论，《物理评论D》 **21** (1980), 1080 doi:10.1103/PhysRevD.21.1080236-3

[29] D. G. Pak、B. H. Lee、Y. Kim、T. Tsukioka 和 P. M. Zhang，量子色动力学真空的微观结构，《物理快报B辑》**780** (2018)，479-484，doi:10.1016/j.physletb.2018.03.040[arXiv:1703.09635 [hep-th]]。

[30] K. I. Kondo，*SU(2)*杨-米尔斯理论中磁凝聚的稳定性、禁闭的质量生成，PoS **QCD-TNT-III**(2013), 020 doi:10.22323/1.193.0020 [arXiv:1312.0053[hep-th]].[31] G. Savvidy, 没有标量场的规范场论真空与宇宙暴胀，Annals Phys.**436** (2022), 168681 https://doi.org/10.1016/j.aop.2021.168681 [arXiv:2109.02162 [hep- th]].[32] G. Baseyan, S. Matinyan 和 G. Savvidy，无质量杨-米尔斯理论中的非线性平面波，Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29** (1979) 641-644[33] S. Matinyan, G. Savvidy 和 N. Ter-Arutyunyan-Savvidi，经典杨–米尔斯力学。非线性色振荡，Zh. Eksp. Teor. Fiz. **80** (1980) 830-838[34] G. Savvidy，非阿贝尔规范场的经典与量子力学，《核物理》**246**(1984) 302-334[35]G. Savvidy，最大混沌动力系统，Annals Phys. **421** (2020), 168274 https://doi.org/10.1016/j.aop.2020.168274

[36] F. J. Wegner，广义伊辛模型中的对偶性与无局域序参量的相变，《数学物理杂志》12 (1971), 2259-2272 https://doi.org/10.1063/1.1665530[37] G. K. Savvidy 和 F. J. Wegner，几何弦与自旋系统，《核物理B辑》 413 (1994), 605-613 https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90003-5 [arXiv:hep-th/9308094 [hep-th]].[38] G. K. Savvidy 和 K. G. Savvidy，自避广义测地弦与自旋系统，《物理快报B辑》 324 (1994), 72-77 https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)00114-6 [arXiv:hep-lat/9311026 [hep- lat]].[39] G. K. Savvidy 和 K. G. Savvidy，相互作用层级，《物理快报B辑》 337 (1994), 333-339 https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90984-9 [arXiv:hep-th/9409030 [hep-th]].[40]G. K. Savvidy, K. G. Savvidy 和 F. J. Wegner，几何弦与对偶自旋系统，《核物理B辑》 443 (1995), 565-580 https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00151-H[arXiv:hep-th/9503213 [hep-th]].[41]R. Pietig 和 F. J. Wegner，具有广义测地作用量的晶格表面系统中的相变，《核物理B辑》 466 (1996), 513-526 https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00072-7[arXiv:hep-lat/9604013 [hep-lat]].[42]R. Pietig 和 F. J. Wegner，广义测地伊辛模型的低温展开，《核物理B辑》 525 (1998), 549-570 https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00342-3[arXiv:hep-lat/9712002 [hep-lat]].[43] A. Lipowski, D. Johnston 和 D. Espriu，具有能垒的伊辛模型的慢动力学，《物理评论E辑》 62 (2000) 3404. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.3404[44] C. Castelnovo, C. Chamon 和 D. Sherrington，经典玻璃相变的量子力学与信息论视角，《物理评论B辑》 81 (2010) 184303 https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.184303[45] S. Vijay, J. Haah 和 L. Fu，分形子拓扑序、广义晶格规范理论与对偶性，《物理评论B辑》 94 (2016) no.23, 235157 https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.235157[arXiv:1603.04442 [cond-mat.str-el]].[46]G. K. Savvidy，具有指数简并真空态的系统，-[arXiv:cond-mat/0003220 [cond-mat]]。