arXiv:2304.01167v2 [math.PR] 8 Mar 2024

关于大型 3/2-稳定地图

Emmanuel Kammerer

2024年3月11日

摘要

我们讨论大型玻尔兹曼随机平面图的渐近性质，其中每个度为 k 的顶点具有量级为 k^{-2} 的权重。Budd、Curien 和 Marzouk 研究过这类地图的无限版本。这些地图对应于 Le Gall 和 Miermont 针对 $\alpha = 3/2$ 研究的离散 α-稳定地图的对偶，也对应于临界 $O(2)$ 装饰随机平面图的空隙。我们计算了两个均匀顶点之间的图距离和首次通过渗流距离的渐近行为；当地图的周长 ℓ 趋于 ∞ 时，这两种距离依概率分别等价于 $(\log \ell)^2/\pi^2$ 和 $2(\log \ell)/(\pi^2 p_{\mathbf{q}})$，其中 $p_{\mathbf{q}}$ 是依赖于模型的常数。我们还证明，对于这两种度量，直径与相应距离同阶；并且由于缺乏紧性，按 Gromov–Prokhorov 或格罗莫夫-豪斯多夫意义不存在缩放极限。为研究这些地图的剥离探索，我们针对一类具有重尾、并以在 $-\ell$ 处死亡为条件且在此之前保持正值的随机游走，证明了局部极限和缩放极限定理；其极限过程我们称为在跳跃并于 -1 处死亡之前保持正值的稳定 Lévy 过程。

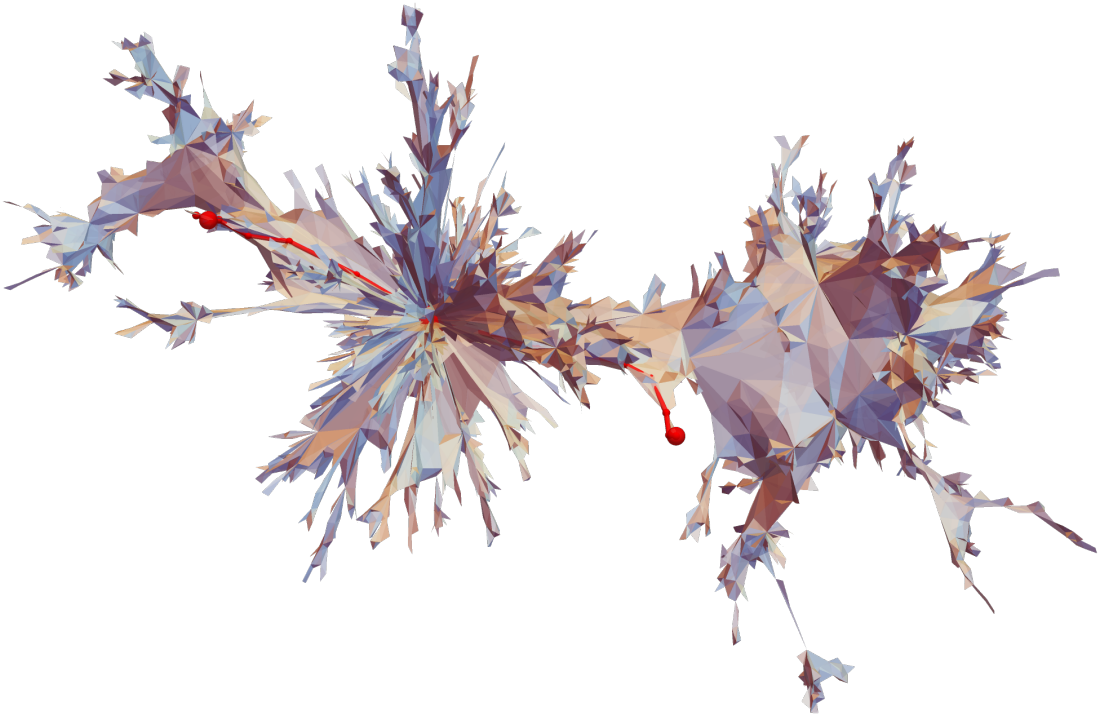

图 1：周长为 1000 的 3/2-稳定地图 $\mathfrak{M}^{(500,\dagger)}$ 的模拟。两个较大的红色球体是从 $\mathfrak{M}^{(500,\dagger)}$ 中均匀随机选取的两个顶点，红色路径是连接它们的最短路径。

目录

1 引言 **2**
1.1 玻尔兹曼 $3/2$-稳定平面图 .21.2 主要结果 .41.3 条件随机游走 .51.4 讨论.6

2 条件于在 $-\ell$ 6处终止的随机游走
2.1 ν 随机游走、调和函数与条件化 .62.2 条件于保持正值的随机游走的预备知识 .72.3 将条件于保持正值的随机游走与条件于在以下位置终止的随机游走耦合 $-\ell$ .82.4 条件于在以下位置终止的随机游走的局部极限定理 $-\ell$.102.5 条件于在以下位置终止的随机游走的标度极限 $-\ell$. 11

3 从均匀随机边开始的剥离探索 14
3.1 带目标的图的填充探索 .153.2 均匀剥离与首次通过渗流距离 .173.3 分层剥离与对偶图距离 .173.4 交换根与目标 .18

4 标度极限 到目标的距离 20
4.1 在 $\mathfrak{M}$ 中到均匀随机边的首次通过渗流距离 .204.2 在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中到均匀随机边的对偶图距离.214.3 将均匀随机边替换为顶点或面. 23

5 两个均匀随机面的距离 28
5.1 两条随机边以高概率位于“不同分支”中 .285.2 两条均匀随机边、顶点或面的距离 .31

6 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$的直径 33
6.1 首次通过渗流距离的直径上界 .336.2 首次通过渗流距离的直径下界 .366.3 图距离的直径上界 .38

1 引言

1.1 Boltzmann $3/2$-稳定平面图

随机平面图因其与二维李乌维尔量子引力的联系而受到广泛研究。在本文中，我们研究大型随机 $3/2$-稳定玻尔兹曼平面图的几何性质。平面图 $\mathfrak{m}$ 是嵌入球面中的连通平面图，视保向同胚而定，并带有一条指定的有向边 $\vec{e}_r$ ，称为根边。与根边右侧相邻的面 f_r 称为根面。 f_r 的度也称为 $\mathfrak{m}$的周长。我们还要求地图 $\mathfrak{m}$ 是

二分的，即其所有面的度数均为偶数，因为二分地图的计数尤其简单。我们用 $\mathcal{M}$ 表示有限二分根平面地图的集合。

随机平面图可以从给定大小的所有地图中均匀随机抽取。更一般地，抽取随机地图的方法 $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ 是按照 [22]所述，为它们赋予玻尔兹曼权重。设$\mathbf{q} = (q_k)_{k\geq 1}$ 是一个非零的非负数序列，称为权重序列。地图 $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ 的权重定义为

$$w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}) = \prod_{f\in \mathrm{Faces}(\mathfrak{m})\setminus\{f_r\}} q_{\deg(f)/2}.$$

对于所有 $\ell \geq 1$，令 $\mathcal{M}^{(\ell)} \subset \mathcal{M}$ 为周长为 2ℓ 的所有（有限）地图的集合。我们引入配分函数

$$W^{(\ell)} = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}^{(\ell)}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}).$$

当 $W^{(1)} < \infty$ 时，我们称$\mathbf{q}$ 为可容许。在下文中，我们还要求权重序列为 $a \in (3/2, 5/2]$）型临界序列；根据 [13] 的命题 5.10，这等价于满足

$$W^{(\ell)} \underset{\ell\to\infty}{\sim} \frac{p_{\mathbf{q}}}{2} c_{\mathbf{q}}^{\ell+1} \ell^{-a}, \tag{1.1}$$

对某个常数 $p_{\mathbf{q}} > 0$ 成立。情形 $a \in (3/2, 5/2)$ 称为非典型情形。这样的序列$\mathbf{q}$ 确实存在，参见 [10] 的引理 6.1，其中给出了具体例子。若$\mathbf{q}$ 可容许，我们记 $\mathbb{P}^{(\ell)}$ 为与权重序列$\mathbf{q}$对应的概率测度，称为玻尔兹曼测度，其定义为

$$\mathbb{P}^{(\ell)}(\mathfrak{m}) = \frac{w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m})}{W^{(\ell)}}.$$

我们也用 $\mathbb{E}^{(\ell)}$ 表示相应的数学期望。服从分布 $\mathbb{P}^{(\ell)}$ 的随机地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 称为周长为 2ℓ的$\mathbf{q}$-玻尔兹曼随机地图。类型为 a 的$\mathbf{q}$-玻尔兹曼随机地图（$\mathbf{q}$）也称为 $(a-1/2)$-稳定地图。本文研究的对象并非地图$\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 本身，而是通过交换面与顶点的角色得到的对偶地图 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 。

对于 $a = 2$，其局部极限——无限 3/2-稳定地图，已由 [11] 中的 Budd、Curien 和 Marzouk 进行研究。特别是，他们确定了与无限地图探索相关的周长的标度极限，并研究了其基本度量性质。他们的结果将在第 4 节中特别有用。

对地图进行剥离探索会引出一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上、步长分布为ν 的随机游走 S，它将在本文中发挥关键作用。它与$\mathbf{q}$ 的关系为

$$\forall k \geq 0,\ \nu(k) = q_{k+1} c_{\mathbf{q}}^{k} \qquad \text{and} \qquad \nu(-k-1) = 2W^{(k)} c_{\mathbf{q}}^{-k-1}. \tag{1.2}$$

当$\mathbf{q}$ 是类型为 $a = 2$的临界参数时，根据 [13] 中的命题 5.10，我们特别知道

$$\nu(-k) \sim p_{\mathbf{q}} k^{-2} \qquad \text{and} \qquad \nu([k,\infty)) \sim p_{\mathbf{q}} k^{-1} \quad \text{as } k \longrightarrow \infty, \tag{1.3}$$

使得 ν 属于对称柯西过程（无漂移）的吸引域。

1.2 主要结果

在本文中，除非另有明确说明，$\mathbf{q}$均表示类型为 $a=2$ 的临界非通用权重序列；对于所有 $\ell \geq 1$, $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 均表示周长为 2ℓ的$\mathbf{q}$-玻尔兹曼随机地图。

在陈述主要结果之前，我们先介绍地图 $\mathfrak{m}$上的距离函数。对于 $\mathfrak{m}$的任意两个面 f_1、 f_2，我们用 $d^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(f_1, f_2)$表示对偶地图 $\mathfrak{m}^{\dagger}$中 f_1 与 f_2 之间的图距离。另一种在我们的情形下更易研究的距离是首次通过渗流距离 $d^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}$，其定义如下：为 $\mathfrak{m}^{\dagger}$ 的每条边赋予一个服从参数为 1 的指数分布的独立随机变量（记作 $\mathcal{E}(1)$），并将其视为该边的随机长度。于是，对于 $\mathfrak{m}$的任意两个面 f_1、f_2，我们用 $d^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}(f_1, f_2)$表示对偶地图 $\mathfrak{m}^{\dagger}$ 中 f_1 与 f_2 之间的距离，其中各条边均带有这些随机长度。

第一个定理描述了从根面到一个均匀随机面的距离（我们还证明，相同结果对均匀随机边或均匀随机顶点也成立）。

定理 1.1。对于所有 $\ell \geq 1$，令 $F^{(\ell)}$ 为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中的一个均匀随机面（在给定 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的条件下），并回顾 f_r 是根面。那么

$$\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r, F^{(\ell)})}{\log \ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}} \qquad \textit{and} \qquad \frac{d^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(f_r, F^{(\ell)})}{(\log \ell)^2} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2\pi^2}.$$

在 $\log \ell$ 和 $(\log \ell)^2$ 中，距离所对应的尺度是 3/2-稳定情形所特有的，这是由于其临界性以及柯西过程的奇异行为。与此密切相关的行为，已经在无限地图中球的体积增长方面被[11]的定理 A 和 B 观察到。

随后我们证明，从根到两个均匀随机面的测地线会“非常迅速地分开”，由此得到两个均匀随机面的距离的渐近式，见推论 5.1。该推论表明，若 $(F_i^{(\ell)})_{i\geq 1}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中任意 $\ell \geq 1$个独立同分布的均匀随机面，那么在乘积拓扑下，

$$\left(\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(F_i, F_j)}{\log \ell}\right)_{i,j\geq 1} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \left(\frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}\right)_{i,j\geq 1} \qquad \text{and} \qquad \left(\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(F_i, F_j)}{(\log \ell)^2}\right)_{i,j\geq 1} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \left(\frac{1}{\pi^2}\right)_{i,j\geq 1}. \tag{1.4}$$

为了研究第 6 节中的直径，我们统一控制所有面之间的距离。除了一阶和二阶矩方法外，一个方便的工具是与周长过程相关联的鞅，因此我们能够证明，直径与随机均匀选取的两个面之间的距离同阶。

定理 1.2. 令 $\mathrm{Diam}^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})$ （分别地，$\mathrm{Diam}^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})$）表示 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 在图距离（分别地，首次通过渗流距离）下的直径。令 $\delta > 0$。存在一个依赖于 $\mathbf{q}$ 的常数 $K(\mathbf{q})$，使得当 $\ell \to \infty$ 时，以概率 $1 - o(1)$，

$$\left(\frac{3}{4(1-q_1^2)} \vee \frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}\right) - \delta \leq \frac{\mathrm{Diam}^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})}{\log \ell} \leq K(\mathbf{q}) \qquad \textit{and} \qquad \frac{1}{\pi^2} - \delta \leq \frac{\mathrm{Diam}^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})}{(\log \ell)^2} \leq 18 + \delta.$$

这些关于直径的界尤其表明，研究 Gromov-Hausdorff 收敛时应关注的尺度。1.4）实际上说明，在宏观尺度下，$\mathfrak{M}^{(\ell),\dagger}$当 $\ell \to \infty$时，呈现出有许多分支的星形图，见图1中的模拟。因此，

配备重标度距离的序列 $\left(\mathfrak{M}^{(\ell),\,\dagger}\right)_{\ell\geq 1}$ 在 Gromov- Hausdorff 拓扑和 Gromov–Prokhorov 拓扑下都不具有紧性。事实上，一方面，由于（1.4），任何子序列的极限都不可能是紧空间；另一方面，某个子序列在 Gromov–Prokhorov 意义下的任何极限随机可分度量测度空间$(X,\ d,\ \mu)$ 的支撑都将为空，因为根据（1.4），分布为 μ 的两个均匀点之间的距离为常数，这与可分性相矛盾（关于这一推理的细节，参见注 4.5 [17] ）。

更确切地说，对于所有 $\ell \geq 1$，令 μ_ℓ 为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$的各个面的均匀测度。由此我们证明了以下推论。

推论 *1.3*。序列 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}(\log \ell)_2\, d_{\mathrm{gr}}^{\dagger},\ \mu_\ell)_{\ell\geq 1}$ 和 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}\log \ell\, d^{\dagger}\ \mathrm{fpp}\ \mu_\ell)_{\ell\geq 1}$ 对于 *Gromov–Prokhorov* 拓扑不具紧性。此外，序列 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}(\log \ell)_2\, d_{\mathrm{gr}}^{\dagger})_{\ell\geq 1}$ 和 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}\log \ell\, d^{\dagger}\ \mathrm{fpp})_{\ell\geq 1}$ 对于 *Gromov–Hausdorff* 拓扑不具紧性。特别地，$(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}, d_{\mathrm{gr}}^{\dagger})_{\ell\geq 1}$ 或 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}, d^{\dagger}\ \mathrm{fpp})_{\ell\geq 1}$ 的任何子序列都不存在 *Gromov–Hausdorff* 标度极限

不过，根据 [16] 和 [18]，，收敛 (1.4) 也可以解释为以下对象依概率收敛：$(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}{}_{(\log \ell)_2}\, d_{\mathrm{gr}}^{\dagger},\ \mu_\ell)_{\ell\geq 1}$ 以及 $(\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)},\ {}^{1}{}_{\log \ell}\, d^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}\ \mu_\ell)_{\ell\geq 1}$，它们趋向于例 7.2 中定义的某个长树枝空间 [18]。

1.3 条件随机游走

研究 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 度量性质的主要技术是填充剥离探索。它最初由 [27] 和 [1] 针对三角剖分提出。一般形式定义于 [8] ，并在第 3 节介绍。参见 [7] 和 [13] ，了解更详细的介绍。剥离过程是从根面开始，按照某种剥离算法逐步对地图进行具有马尔可夫性质的探索。在每一步中，剥离过程都会揭示由剥离算法选定的剥离边后方的面。采用不同的剥离算法可以了解地图的不同性质。我们使用剥离算法的方式类似于 [10]研究无限 $(a-1/2)$ 稳定玻尔兹曼图时的做法，其中 $\mathbf{q}$ 为临界非典型类型 $a\in(3/2,\ 5/2)\setminus\{2\}$，以及 [11] 研究无限 3/2稳定玻尔兹曼图时的做法。不同之处在于，我们大多数时候会在重新定根后的地图上使用剥离算法（见第 3.4 小节）。

在我们的情形中，已探索部分周长的演化分布与 ν-条件于保持正值直至跳跃并在 $-\ell$处被杀死的随机游走相同。据我们所知，这是一种新型条件，我们将在第2节中详细研究。在该节中，我们将介绍一个关键耦合（引理2.5），它将这种条件随机游走与 ν-条件于永远保持正值的随机游走耦合起来；这一做法利用了可通过 Doob$h$-变换来实现此类条件这一事实。特别是，这种耦合使我们能够使用 [11]的一些结果。该引理指出，对于所有 $n\geq 1$，都存在这两个条件随机游走之间的一种耦合，使得如果第二个随机游走在时刻 n尚未被杀死，那么两个条件随机游走便会重合。

第2 节的其余部分可以视为对这一条件 ν-随机游走的渐近研究。我们首先证明该随机游走寿命和最后一个正值的局部极限定理。基于这一局部极限，我们接着在定理2.8 中建立该条件随机游走在 $-\ell$ 处终止时的标度极限，它趋向于一个我们称为$(a-1)$-稳定莱维过程在 -1处终止时的条件分布。我们希望这些结果能在其他领域发挥作用。

1.4 讨论

临界 $O(n)$ 环装饰平面图中，删除最外层环里的边和顶点后得到的空隙，是一种特殊的$(a-1/2)$-稳定地图，其中情形 $n=2$ 对应于 $a=2$。例如， [21, 5]展示了这种关系。 $O(n)$环装饰地图会经历在 [5, 9]中描述的相变。文献中通常不讨论临界情形 $n=2$ 。对于无限 Boltzmann$(a-1/2)$-稳定地图， [10] 同样会在 $a=2$处出现相变。还要提及这样一个猜想：对于 $n=2$ ，空隙应当以某种意义收敛到CLE_4 族（该族在 [23, 24]中引入）。

我们相信，我们的一些结果，例如定理 1.1和推论 5.1 ，可以推广到 $a\in(3/2,2)$ 的情形，其中对偶图距离采用 对数 ℓ 标度。鞅（6.1）似乎也适用于这一情形，因此定理 1.2 在此情形下应当也有相应的类似结论。

2 以在 $-\ell$ 处终止为条件的随机游走

本节旨在研究 ν-随机游走 S ，该游走以在跳跃并终止于 $-\ell$之前始终保持正值为条件，记作 $(P_\ell(n))_{n\geq 0}$ 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下。我们在引理 2.5中建立了这种条件随机游走与始终保持正值的条件随机游走之间的耦合。随后，我们证明了其命中时刻的局部极限定理 $\tau_{-\ell}$ ，即 $-\ell$ （命题 2.7），并据此建立标度极限（定理 2.8）。

2.1 ν 随机游走、调和函数与条件化

临界性条件 (1.1) 对步长分布施加了很强的限制 ν ，用调和函数来表述会更清晰。对于所有 $\ell\geq 0$ 和 $p\geq 1$，令

$$h_p^{\downarrow}(\ell)=h^{\downarrow}(\ell)h^{\downarrow}(p)\frac{\ell}{\ell+p}\qquad\text{and}\qquad h_0^{\downarrow}(\ell)=h^{\downarrow}(\ell)=2^{-2\ell}\binom{2\ell}{\ell},\tag{2.1}$$

其中按约定 $h^{\downarrow}(\ell)=h_p^{\downarrow}(\ell)=0$ 当 $\ell<0$ 时成立，但 $\ell=-p$ 除外，此时令 $h_p(-p)=1$。我们还对所有 $\ell\in\mathbb{Z}$令 $h^{\uparrow}(\ell)=2\ell h^{\downarrow}(\ell)$。令 $a\in(3/2,\ 5/2]$。本节余下部分只假设 ν 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个概率测度，并满足

(I) 函数 $h^{\downarrow}$ 和 $h^{\uparrow}$ 是关于 ν的调和函数。

(II) 当 $k\to\infty$时，我们有 $\nu(-k)\sim p_{\mathbf{q}}/k^a$ 。

这两个条件等价于权重序列 a 的 $\mathbf{q}$ 相对于 ν 由 (1.2) 所给出的临界性（参见 [8], 中的第 3.2 段、定理 1 和命题 5， [7] 中的定理 5.4 及其证明（对应于 [13] 的 (I)），以及 [13] 中的命题 5.9 和 5.10（对应于 (II)）。若 $\mathbf{q}$可容许，则 $h_p^{\downarrow}$ 对 S 所有 $p\geq 1$ 都是调和的（参见 [13]中的引理 5.2 的证明）。

此外，已知（例如参见 [13] 中的命题 10.1），对于 Skorokhod 拓扑，$(S_{\lfloor nt\rfloor}/n^{1/(a-1)})_{t\geq 0}$ 依分布收敛于 $p_{\mathbf{q}}^{1/(a-1)}\Upsilon_a$，其中 Υ_a 是从零开始、正性参数为 $\rho=\mathbb{P}(S_t\geq 0)$ 且满足 $(a-1)(1-\rho)=1/2$ 的 $(a-1)$-稳定 Lévy 过程，其莱维测度经归一化后为 $\cos(a\pi)(dx/x^a)\mathbf{1}_{x>0}+(dx/|x|^a)\mathbf{1}_{x<0}$。

最后，根据这些调和函数，可以定义相应的 Doob h-变换作用于 ν 随机游走 S。对于所有 $\ell\geq 1$，我们用 $(P_\infty(n))_{n\geq 0}$ 表示 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$ 下的 Doob $h^{\uparrow}$-变换

S 从 ℓ 出发的过程；对于所有 $\ell \geq 1$， $p \geq 0$，我们用 $(P_p(n))_{n\geq 0}$ 表示 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$下的 Doob $h_p^{\downarrow}$-变换作用于 S 在到达 $-p$时被杀死的过程。采用这种记号是为了与论文其余部分保持一致，因为这些条件随机游走将是第 3 节中的周长过程。 S 的 Doob $h^{\uparrow}$-变换可以看作随机游走 S 在始终保持正值的条件下的过程，而在 $-p$ 处被杀死的 S 的 Doob$h_p^{\downarrow}$-变换，也可以类似地理解为随机游走在被杀死于 $-p$ 之前保持正值的条件下的过程（见 [13] 命题 5.3）。

2.2 关于条件保持正值的随机游走的预备知识

在深入研究满足 $\mathbb{P}_{\ell}^{(1)}$ 条件的游走 P_ℓ 之前，我们先记录一些已知结果，以备后用。这些结果涉及满足 $\mathbb{P}_{\infty}^{(1)}$、 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 条件的游走 P_∞、 P_p，其中 p 固定且 $\ell \to +\infty$。最有用的结果之一是满足 $\mathbb{P}_{\infty}^{(1)}$ 条件、始终保持正值的随机游走 P_∞ 的标度极限。该标度极限由 [10] 和 [11] 利用 [12] 中的定理 1.1 引入。非正式地说，这个极限是上一小节中介绍的莱维过程 Υ_a，在保持正值且从零出发的条件下得到的过程。为此，可以先将从某个 $x > 0$ 出发的过程 $(\mathcal{S}_x^{\uparrow}(t))_{t\geq 0}$ 定义为从 x 出发的过程 $(x + \Upsilon_a(t))_{t\geq 0}$ 的 Doob$h$ 变换，其所用的调和函数为 $h : y \mapsto \mathbf{1}_{y\geq 0}\sqrt{y}$。随后，当 $x \to 0$_时，过程 $(\mathcal{S}_x^{\uparrow}(t))_{t\geq 0}$ 在分布上收敛到记作 $\Upsilon_a^{\uparrow}$ 的过程，该过程从零出发。回忆一下常数 $p_{\mathbf{q}}$，它首次出现在式 (1.1) 中。

定理 2.1。 *([13])* 对于 J_1-*Skorokhod* 拓扑，以下收敛成立：在 $\mathbb{P}_{\infty}^{(1)}$,

$$\left(\frac{P_\infty(\lfloor nt\rfloor)}{n^{1/(a-1)}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathrm{d})} \left(\Upsilon_a^{\uparrow}(p_{\mathbf{q}}t)\right)_{t\geq 0} \overset{(\mathrm{d})}{=} \left(p_{\mathbf{q}}^{1/(a-1)}\Upsilon_a^{\uparrow}(t)\right)_{t\geq 0}.$$

[12] 中定理 1.1 的证明主要依赖于 ν S -随机游走在某个时刻之前保持正值的条件下趋向稳定游走的标度极限：设 $\widetilde{\Upsilon}_a$ 为与 Υ_a 相关、长度为 1 的稳定游走，它非正式地说是指过程 Υ_a 在时间 1 之前保持正值条件下的过程。那么，下面的定理是 [14] 主定理的推论。

定理 2.2。 *([14])* 对于 $S_0 = 1$，在给定 $S_1, \ldots, S_n > 0$ 的条件下，过程 $(S(\lfloor nt\rfloor)/n^{1/(a-1)})_{t\geq 0}$ 在分布意义下关于 J_1-*Skorokhod* 拓扑收敛到 $(p_{\mathbf{q}}^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(t))_{t\geq 0}$。

$\Upsilon_a^{\uparrow}(1)$（分别为 $\widetilde{\Upsilon}_a(1)$）的密度记为 $f_a^{\uparrow}$（分别为 $\tilde{f}_a$）。由 [15] 可知， $\tilde{f}_a$ 连续且有界（并且在 $(0, \infty)$ 的任意紧集上也远离零），此外还存在 $C_1 > 0$ 使得 $f_a^{\uparrow}(x) = C_1 x^{1/2}\tilde{f}_a(x)$。

此外，为了建立局部极限定理，我们陈述以下引理，它是对 [11] 中引理 3 (i) 的扩展和重新表述。其证明与 [11] 中的完全相同，并以 [26] 为基础。

引理 2.3。 （引理 *3 (i)*，引自 *[11]*） 当 $n \to \infty$ 时，在 $x \geq 1$ 上一致成立，

$$\mathbb{P}_1\left(S_1, \ldots, S_n \geq 1 \text{ and } S_n = x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(np_{\mathbf{q}})^{1/(a-1)}\sqrt{x}} f_a^{\uparrow}\left(\frac{x}{(p_{\mathbf{q}}n)^{1/(a-1)}}\right) + o(n^{-3/(2(a-1))}).$$

最后，下面的命题描述了 P_p 在 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$固定 p条件下的标度极限，这将在第 5节中派上用场。该标度极限由莱维过程 $\Upsilon_a^{\downarrow}$ 在条件下保持

正值，直至其以连续方式在零处消亡。过程 $\Upsilon_a^{\downarrow}$ 可定义为对Υ_a+1施加 Doob 变换而得，其中使用的调和函数为 $x \mapsto (1/\sqrt{x})\mathbf{1}_{x>0}$。该命题略微推广了文献 [2] 中命题6.6的一个特例。其证明不仅依赖于 $(S_{\lfloor nt \rfloor}/n^{1/(a-1)})_{t\geq 0}$ 依分布收敛到 $p_{\mathbf{q}}^{1/(a-1)}\Upsilon_a$，还依赖于文献 [12] 中的定理1.3，在 $p=0$ 的情形下。在该情形中，P_0 是对 ν-随机游走施加 Doob $h^{\downarrow}$ 变换得到的过程，即一个以在零处消亡为条件的随机游走。文献 [12] 中定理1.3的证明可以改写：将 $h^{\downarrow}$（在文献 [12] 中记作 W）替换为 $h_p^{\downarrow}$，也就是说，将以在零处消亡为条件的随机游走替换为以保持正值直至在 $-p$处消亡为条件的随机游走。

命题 2.4. （将 *[2]* 中的命题*6.6*推广）对于所有 $p \geq 0$，在 J_1-*Skorokhod* 拓扑下，满足 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 时有如下收敛：

$$\left(\frac{P_p(\lfloor \ell^{a-1}t \rfloor)}{\ell}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathrm{d})} \left(\Upsilon_a^{\downarrow}(p_{\mathbf{q}}t)\right)_{t\geq 0}.$$

此外，与上述收敛联合，我们还有寿命的收敛：

$$\frac{\tau_{-p}}{\ell^{a-1}} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathrm{d})} \frac{\zeta}{p_{\mathbf{q}}},$$

其中 $\tau_{-p} = \inf\{n \geq 0;\ P_p(n) = -p\}$ 并且 $\zeta = \inf\left\{t \geq 0;\ \Upsilon_a^{\downarrow}(t) = 0\right\}$。

也可以通过应用 [3] 中的定理 2 来证明上述命题的第一个收敛结论，而第二个结论可视为 [3] 中的定理3 (i) 的推论。

2.3 将条件为保持正值的随机游走与条件为在 $-\ell$处终止的随机游走耦合

记 $\tau_{-\ell}$ 为 $-\ell$ 的首次命中时刻，$(P_\ell(k))_{k\geq 0}$ 为在 处终止之前始终保持正值的随机游走 $-\ell$ 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 条件下的情况。首先给出一个耦合引理，它将在本节及后续各节中发挥作用。特别是，它将使我们能够利用第 [11] 节的 4 中的结果。

引理 *2.5.* 存在一个耦合，使随机游走 P_ℓ 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下和 P_∞ 在 $\mathbb{P}_\infty^{(1)}$下直至时间 n，记作 $\mathbb{P}^{(1),\ell,\infty,n}$，满足：在 $\mathbb{P}^{(1),\ell,\infty,n}$ 下，对于所有 $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}^*$，在给定$(P_\infty(k))_{1\leq k\leq n} = (s_k)_{1\leq k\leq n}$的条件下，等式$(P_\ell(k))_{1\leq k\leq n} = (s_k)_{1\leq k\leq n}$ 以概率$\frac{1+\ell}{s_n+\ell}$ 成立，并且$\tau_{-\ell} \leq n$ 以概率 $1-\frac{1+\ell}{s_n+\ell}$ 成立（见图*2*）。

证明。 证明的关键在于关系式 $h_\ell^{\downarrow}(k) = h^{\downarrow}(\ell)h^{\uparrow}(k)/(2(\ell+k))$，其中 $k,\ \ell \geq 1$该关系式来自调和函数的精确表达式。根据在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下的 P_ℓ 定义

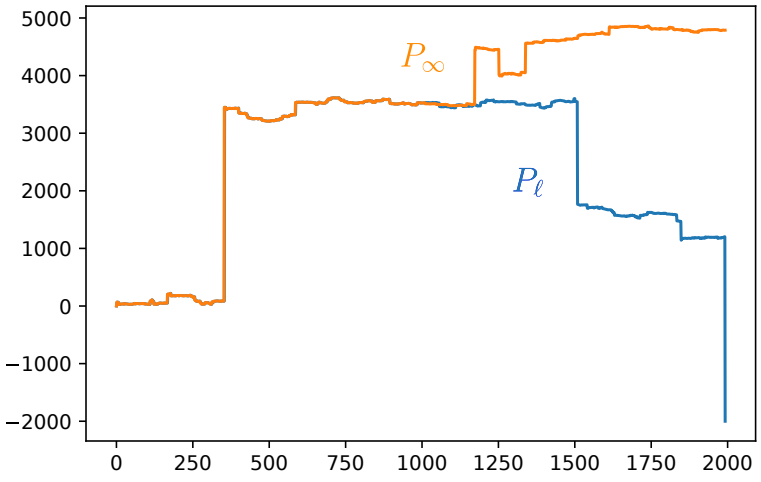

图2：在耦合 $\mathbb{P}^{(1)}_{\ell,\infty}{}^{n}$ 下对条件随机游走 P_∞ 和 P_ℓ 进行模拟，其中 $\tau_{-\ell} > n$，对于 $n = 1000$ 和 $\ell = 2000$（时间 n 之后，我们让两个过程独立演化）。

作为 ν-随机游走 S 的 $h^{\downarrow}_\ell$-Doob 变换，我们注意到，如果 $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}^*$，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(1)}_\ell((P_\ell(k))_{1\le k\le n} = (s_k)_{1\le k\le n}) &= \frac{h^{\downarrow}_\ell(s_n)}{h^{\downarrow}_\ell(1)}\mathbb{P}_1((S_k)_{1\le k\le n} = (s_k)_{1\le k\le n}) \\
&= \frac{h^{\uparrow}(s_n)}{h^{\uparrow}(1)}\frac{1+\ell}{s_n+\ell}\mathbb{P}_1((S_k)_{1\le k\le n} = (s_k)_{1\le k\le n}) \\
&= \frac{1+\ell}{s_n+\ell}\mathbb{P}^{(1)}_\infty((P_\infty(k))_{1\le k\le n} = (s_k)_{1\le k\le n}) \\
&\le \mathbb{P}^{(1)}_\infty((P_\infty(k))_{1\le k\le n} = (s_k)_{1\le k\le n}).
\end{aligned}$$

因此，可以定义这样的耦合。 □

从证明中可以看出，上述引理仅依赖于条件（I）。这一耦合的一个直接推论是，当 $\tau_{-\ell}/\ell^{(a-1)}$ 且 $\mathbf{q}$ 属于 $a \in (3/2, 5/2]$ 类型时的极限定理。回顾一下，$\Upsilon^{\uparrow}_a$ 是从零出发并以保持正值为条件的稳定 Lévy 过程 Υ_a。

命题 2.6。 我们有依分布收敛 $\tau_{-\ell}/\ell^{a-1} \xrightarrow[\ell\to\infty]{d} \tilde{\tau}/p_{\mathbf{q}}$，其中 $\tilde{\tau}$ 是一个随机变量，使得对所有 $u \ge 0$，$\mathbb{P}(\tilde{\tau} \ge u) = \mathbb{E}(1/(1+\Upsilon^{\uparrow}_a(u)))$。

证明。 由引理 2.5 和定理 2.1，对于每个 $u \ge 0$，

$$\mathbb{P}^{(1)}_\ell(\tau_{-\ell} > u\ell^{a-1}) = \mathbb{E}^{(1)}_\infty \frac{1+\ell}{P_\infty(\lfloor u\ell^{a-1}\rfloor)+\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \mathbb{E}\frac{1}{1+\Upsilon^{\uparrow}_a(p_{\mathbf{q}}u)},$$

结论由此得证。 □

2.4 随机游走在条件为于.....时死亡下的局部极限定理 $-\ell$

命题2.6 的结果可以进一步细化，得到寿命的联合局部极限定理 $\tau_{-\ell}$以及条件随机游走的最后一个正值 $P_\ell(\tau_{-\ell}-1)$:

命题 2.7. 对所有 $\varepsilon>0$，下述收敛关于 u、$s\in[\varepsilon,\varepsilon^{-1}]$一致成立:

$$\ell^a\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell}=\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor \text{ and } P_\ell(\tau_{-\ell}-1)=\lfloor \ell u\rfloor)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi p_{\mathbf{q}}^{1-1/(a-1)}}{s^{1/(a-1)}}\frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^a}f_a^{\uparrow}\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right),$$

且右端是一个概率密度。

证明. 设 $\varepsilon>0$。记 $n=\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor$ 和 $x=\lfloor \ell u\rfloor$。那么,

$$\frac{1}{2}\frac{h^{\downarrow}(\ell)}{\ell+1}\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell}=\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor \text{ and } P_\ell(\tau_{-\ell}-1)=\lfloor \ell u\rfloor)=\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{n-1}\geq 1 \text{ and } S_{n-1}=x)\nu(-\ell-x).$$

但根据引理 2.3 且由于 $\nu(-k)\sim p_{\mathbf{q}}k^{-a}$ 当 $k\to\infty$ 根据 (II)，关于 u，$s\in[\varepsilon,\varepsilon^{-1}]$,

$$\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{n-1}\geq 1 \text{ and } S_{n-1}=x)\nu(-\ell-x)\underset{\ell\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}p_{\mathbf{q}}^{1-1/(a-1)}}{2s^{1/(a-1)}\ell^{a+3/2}}f_a^{\uparrow}\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)\frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^a}.$$

由此，利用 $h^{\downarrow}(\ell)\sim 1/\sqrt{\pi\ell}$ 当 $\ell\to\infty$时，所需的收敛性得以证明。我们来验证右侧的项确实对应一个概率密度，换言之,

$$\int_0^\infty\frac{\pi p_{\mathbf{q}}^{1-1/(a-1)}}{s^{1/(a-1)}}\int_0^\infty f_a^{\uparrow}\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)\frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^a}duds=1$$

通过变量替换 $w=\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}$，固定 u 时,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\pi p_{\mathbf{q}}^{1-1/(a-1)}}{s^{1/(a-1)}}\int_0^\infty f_a^{\uparrow}\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)\frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^a}duds&=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\pi u^{a-2}(a-1)}{\sqrt{u}(1+u)^a}w^{1-a}f_a^{\uparrow}(v)dwdu\\&=\int_0^\infty\frac{\pi u^{a-2}(a-1)}{\sqrt{u}(1+u)^a}du\mathbb{E}\frac{1}{\Upsilon_a^{\uparrow}(1)^{a-1}}.\end{aligned}$$

然而，通过变量替换 $t=1/(1+u)$，利用贝塔函数与伽马函数之间的关系，并利用 $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$，可以看出

$$\int_0^\infty\frac{\pi u^{a-2}(a-1)}{\sqrt{u}(1+u)^a}du=\frac{(a-1)\pi^{3/2}\Gamma(a-3/2)}{2\Gamma(a)}.$$

最后，完全按照 [11], 中注 3 结尾处的推理，可以计算出

$$\mathbb{E}\frac{1}{\Upsilon_a^{\uparrow}(1)^{a-1}}=\frac{2\Gamma(a)}{(a-1)\pi^{3/2}\Gamma(a-3/2)},$$

这恰好是上述积分的逆。事实上，由于$\Upsilon_a^{\uparrow}$是一个正自相似马尔可夫过程，我们将$\Upsilon_a^{\uparrow}$的 La mperti 表示中出现的莱维过程记为 $\xi^{\uparrow}$。于是，根据 [4], ，我们知道$\mathbb{E}1/\Upsilon_a^{\uparrow}(1)^{a-1}=1/((a-1)\mathbb{E}\xi_1^{\uparrow})$。而$(\Gamma(a)/\pi)\xi^{\uparrow}$的拉普拉斯指数为 $\kappa_{a-1}(\omega_++q)$，其中 $\omega_+=a+1/2$，且 κ_{a-1}由 [2]中的方程（19）定义。也可以利用[20]的命题 2 中确定的 $\xi^{\uparrow}$ 的特征指数进行计算。

□

由命题 2.7 可得以下关于 $\tau_{-\ell}$ 和 $P_\ell(\tau_{-\ell}-1)$的局部估计。对于 $\tau_{-\ell}$，只需对区间 $[\ell\delta, \ell/\delta]$ 内的 $P_\ell(\tau_{-\ell}-1)$ 取值求和，其中 $\delta>0$可以任意小。因此，对于所有 $s>0$，当 $\ell\to\infty$时，

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell}=\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor) \geq (1+o(1))\frac{\pi p_{\mathbf{q}}^{1-1/(a-1)}}{\ell^{a-1}s^{1/(a-1)}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^a} f_a^{\uparrow}\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right) du.$$

同理，可以验证 $P_\ell(\tau_{-\ell}-1)$ 的局部估计：对所有 $u>0$，当 $\ell\to\infty$ 时，

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}(P_\ell(\tau_{-\ell}-1)=\lfloor \ell u\rfloor) \geq \frac{2\Gamma(a)}{\sqrt{\pi}\Gamma(a-3/2)\ell}\frac{u^{a-2}}{\sqrt{u}(1+u)^a}(1+o(1)).$$

2.5 在 ℓ – 处消亡条件下随机游走的标度极限

由命题 2.7 可知，$(\tau_{-\ell}/\ell^{a-1}, P_\ell(\tau_{-\ell}-1)/\ell)$ 依分布收敛，从而得到以下标度极限：在 $-\ell$ 处消亡条件下的重标度随机游走，记作 $(P_\ell(\ell^{a-1}t)/\ell)_{t\geq 0}$，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下依分布收敛于 $(\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(p_{\mathbf{q}}t))_{t\geq 0}$，其中 $\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}$ 是在 -1 处消亡前保持正值的 $(a-1)$-稳定 Lévy 过程。该过程定义如下。设 $(\tilde{\tau}, Z)$ 是一个分布为

$$g(s,z)dsdz := \frac{\pi}{s^{1/(a-1)}}\frac{1}{\sqrt{z}(1+z)^a} f_a^{\uparrow}\left(\frac{z}{s^{1/(a-1)}}\right) dsdz.$$

我们定义 $\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}$，使得在给定 $(\tilde{\tau}, Z)$ 的条件下，路径 $(\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(t))_{0\leq t<\tilde{\tau}}$ 是与 Υ_a 相关、长度为 $\tilde{\tau}$ 且在 $\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(\tilde{\tau}-) = Z$ 条件下的稳定游走，并且对所有 $t\geq\tilde{\tau}$，令 $\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(t) = -1$。

形式上，过程 $\Upsilon_{-1,\ a}^{\downarrow}$ 的分布可以用长度为 $\tilde{}$ 的 Υ_a 漫步的分布来刻画。为表达这一点，我们引入 $\tilde{\tau}$ 的密度，记作 f。对于所有 $s>0$，我们利用 Υ_a 定义过程 Υ_a^s，使得对于所有 $t\geq 0$,

$$\widetilde{\Upsilon}_a^s(t) := \begin{cases} s^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(t/s) & \text{if } t<s, \\ -1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意，由于 Υ_a 是 $(a-1)$-稳定的，$(s^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(t/s))_{t\geq 0}$ 与在时刻 t 取值的长度为 s 的漫步具有相同的分布。于是，我们通过以下关系定义 $\Upsilon_{-1,\ a}^{\downarrow}$ 的分布：

$$\mathbb{E}\,F\left(\left(\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(t)\right)_{t\geq 0}\right) = \int_0^\infty f(s)\mathbb{E}\left(\frac{g(s, s^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(1))}{f(s)\tilde{f}_a\left(\widetilde{\Upsilon}_a(1)\right)}F\left(\widetilde{\Upsilon}_a^s\right)\right) ds$$

对于所有有界可测函数 $F:\ \mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})\to\mathbb{R}$，其中 $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$ 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 的 càdlàg ~ ~ 函数空间，该空间配备 Skorokhod 拓扑 J_1，而 f_a 是 $\Upsilon_a(1)$ 的密度。这确实刻画了 $\widetilde{\Upsilon}_{-1,\ a}^{\downarrow}$ 的分布，因为长度为 $s>0$ 的漫步与 $(s^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(t/s))_{t\geq 0}$ 具有相同的分布。

定理 2.8。约定 $P_\ell(k) = -\ell$ 对于 $k\geq\tau_{-\ell}$，我们有关于 *Skorokhod* 拓扑的依分布收敛：

$$\textit{Under } \mathbb{P}_\ell^{(1)}, \qquad \left(\frac{P_\ell(\ell^{a-1}t)}{\ell}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\ell\to\infty]{\text{(d)}} (\Upsilon_{-1,a}^{\downarrow}(p_{\mathbf{q}}t))_{t\geq 0}.$$

上述定理首先说明，可以将 $\Upsilon^{\downarrow}_{-1,\ a}$ 视为这样一个莱维过程： Υ_a 该过程在跳跃并于 -1处终止之前一直保持为正。

证明。 证明的主要思路是条件为保持正值的随机游走在时间 n 处的 [14], 标度极限结果，这一结果已在定理2.2中回顾，并结合绝对连续关系。令 $F:\ \mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})\ \to \mathbb{R}$ 为一个有界连续实函数。为简洁起见，对所有 $\ell \geq 1$，对所有 $s,\ u \geq 0$,

$$g_\ell(s,u) = \ell^a \mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\tau_{-\ell} = \lfloor \ell^{a-1}s\rfloor \text{ and } P_\ell(\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor - 1) = \lfloor \ell u\rfloor\right),\ f_\ell(s) = \ell^{a-1}\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\tau_{-\ell} = \lfloor \ell^{a-1}s\rfloor\right)$$

and

$$\tilde{f}_{\ell,s}(u) = \ell \mathbb{P}_1\left(S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor - 1} = \lfloor \ell u\rfloor \middle| S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor -1} \geq 1\right),$$

这里回顾一下，$(S_i)_{i\geq 0}$ 是一个 ν-随机游走。对所有 $s \geq 0,\ \ell \geq 1,\ t \geq 0$，我们也记作

$$S^{s,\ell}(t) = \begin{cases} S_{\lfloor \ell^{a-1}t\rfloor}/\ell & \text{if } t < s, \\ -1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是，根据 P_ℓ 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下的分布表达式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\ell^{(1)} F\left(\left(\frac{P_\ell(\ell^{a-1}t)}{\ell}\right)_{t\geq 0}\right) \\
&\quad = \sum_{k,n\geq 1} \mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\tau_{-\ell} = k, P_\ell(k-1) = n\right) \mathbb{E}_1\left(F\left(S^{k/\ell^{a-1},\ell}\right)\middle| S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1,\ S_{k-1} = n\right) \\
&\quad = \int_0^\infty ds \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ell} g_\ell(s,\frac{n}{\ell}) \mathbb{E}_1\left(F\left(S^{s,\ell}\right)\middle| S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor -1}\geq 1,\ S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor -1} = n\right) \\
&\quad = \int_0^\infty ds f_\ell(s) \mathbb{E}_1\left(\frac{g_\ell(s,S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1}))}{f_\ell(s)\tilde{f}_{\ell,s}(S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1}))} F\left(S^{s,\ell}\right)\middle| S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor -1}\geq 1\right).
\end{aligned}$$

期望中的因子可按如下方式计算：对于所有 $k,\ n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{g_\ell\left(k/\ell^{a-1}, n/\ell\right)}{f_\ell(k/\ell^{a-1})\tilde{f}_{\ell,k/\ell^{a-1}}(n/\ell)} &= \frac{\frac{2(\ell+1)}{h^\downarrow(\ell)}\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1 \text{ and } S_{k-1} = n)\nu(-\ell-n)}{\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell} = k)\mathbb{P}_1(S_{k-1} = n | S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1)} \\
&= \frac{2(\ell+1)\nu(-\ell-n)\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1)}{h^\downarrow(\ell)\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell} = k)} \\
&= \frac{\nu(-\ell-n)\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1)}{\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1 \text{ and } S_k = -\ell)} \\
&= \left(\sum_{m\geq 1}\frac{\nu(-\ell-m)}{\nu(-\ell-n)}\mathbb{P}_1(S_{k-1} = m | S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1)\right)^{-1} \\
&= \left(\mathbb{E}_1\left(\frac{\nu(-\ell-S_{k-1})}{\nu(-\ell-n)}\middle| S_1,\dots,S_{k-1}\geq 1\right)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

利用定理2.2，很容易看出，如果 $s,\ u>0$，那么

$$\mathbb{E}_1\left(\frac{\nu(-\ell-S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1})}{\nu(-\ell-\lfloor \ell u\rfloor)}\middle| S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}\geq 1\right)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^\infty\left(\frac{1+u}{1+v}\right)^a\tilde{f}_a\left(\frac{v}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)dv,$$

~ ~其中 $\tilde{f}_a$ 是 $\Upsilon_a(1)$的密度。事实上，由 (II),

$$\sup_{n,m\geq 1}\left|\frac{\nu(-\ell-m)}{\nu(-\ell-n)}-\left(\frac{\ell+n}{\ell+m}\right)^a\right|\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

此外，由于存在一个常数 $C_1>0$，使得对所有 $x\geq 0$, $f_a^{\uparrow}(x)=C_1x^{1/2}\tilde{f}_a(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{1+u}{1+v}\right)^a\tilde{f}_a\left(\frac{v}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)dv&=\frac{1}{C_1}(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(2(a-1))}(1+u)^a\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{v}(1+v)^a}f_a^{\uparrow}\left(\frac{v}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)dv\\&=\frac{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(2(a-1))}(1+u)^a}{C_1}\frac{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}{\pi}f(p_{\mathbf{q}}s)\\&=\frac{f(p_{\mathbf{q}}s)\tilde{f}_a\left(\frac{u}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)}{g(p_{\mathbf{q}}s,u)}.\end{aligned}$$

因此，再次利用定理 2.2，我们得到，对所有 $s>0$，在给定 $S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor}\geq 1$ 的条件下，随机变量 $g_\ell(s,S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1}))/(f_\ell(s)\,\tilde{f}_{\ell,s}(S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1})))$ 依分布收敛至

$$\frac{1}{\int_0^\infty\left(\frac{1+(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(1)}{1+v}\right)^a\tilde{f}_a\left(\frac{v}{(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}}\right)dv}=\frac{g(p_{\mathbf{q}}s,(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(1))}{f(p_{\mathbf{q}}s)\tilde{f}_a\left(\widetilde{\Upsilon}_a(1)\right)}.$$

此外，若 $s>0$，则可以对 $n,\ell\geq 1$ 一致地给出上界

$$\begin{aligned}\frac{g_\ell(s,n/\ell)}{f_\ell(s)\tilde{f}_{\ell,s}(n/\ell)}&=\frac{1}{\sum_{m\geq 1}\frac{\nu(-\ell-m)}{\nu(-\ell-n)}\mathbb{P}_1(S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}=m|S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}\geq 1)}\\&\leq\frac{C}{\mathbb{P}_1(\,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}\in[0,\ell]\big|\,S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}\geq 1)}\\&\leq\frac{C'}{\mathbb{P}((p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(1)\in[0,1])}\ \text{by Theorem 2.2},\end{aligned}$$

其中 $C,\ C'$ 是仅依赖于 ν 的常数。因此，由控制收敛定理并再次应用定理 2.2，对所有 $s>0$,

$$\begin{aligned}G_\ell(s)&:=\mathbb{E}_1\left(\frac{g_\ell(s,S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1}))}{f_\ell(s)\tilde{f}_{\ell,s}(S^{s,\ell}(s-1/\ell^{a-1}))}F\left(S^{s,\ell}\right)\middle| S_1,\dots,S_{\lfloor \ell^{a-1}s\rfloor-1}\geq 1\right)\\&\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}G(s):=\mathbb{E}\left(\frac{g(p_{\mathbf{q}}s,(p_{\mathbf{q}}s)^{1/(a-1)}\widetilde{\Upsilon}_a(1))}{f(p_{\mathbf{q}}s)\tilde{f}_a\left(\widetilde{\Upsilon}_a(1)\right)}F\left((\widetilde{\Upsilon}_a^{p_{\mathbf{q}}s}(p_{\mathbf{q}}t))_{t\geq 0}\right)\right).\end{aligned}$$

此外，由命题 2.7，并利用 Scheffé 引理，f_ℓ 在$\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ 中收敛到$p_{\mathbf{q}} f(p_{\mathbf{q}}\cdot)$。因此，再次由控制收敛定理可得，对所有 $A>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(F\left(\left(\frac{P_\ell(\ell^{a-1}t)}{\ell}\right)_{t\geq 0}\right)\mathbf{1}_{\frac{\tau_{-\ell}}{\ell^{a-1}}<A}\right) &= \int_0^A f_\ell(s)G_\ell(s)ds \\ &\xrightarrow[\ell\to\infty]{} \int_0^A p_{\mathbf{q}} f(p_{\mathbf{q}}s)G(s)ds \\ &= \mathbb{E}\left(F\left(\left(\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}(p_{\mathbf{q}}t)\right)_{t\geq 0}\right)\mathbf{1}_{\tilde{\tau}<p_{\mathbf{q}}A}\right),\end{aligned}$$

其中，最后一个等号源于 $\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}$ 的定义以及变量替换 $s'=p_{\mathbf{q}}s$。但由于 $\tau_{-\ell}/\ell^{a-1}$ 依分布收敛，且 F 有界，我们得到

$$\sup_{\ell\geq 1}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(F\left(\left(\frac{P_\ell(\ell^{a-1}t)}{\ell}\right)_{t\geq 0}\right)\mathbf{1}_{\frac{\tau_{-\ell}}{\ell^{a-1}}\geq A}\right)\xrightarrow[A\to\infty]{} 0,$$

因此得证。 □

过程 $\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}$ 可以通过引理 2.5 和定理 2.8与条件为保持正值的稳定 Lévy 过程 $\Upsilon^{\uparrow}_a$ 联系起来：

推论 2.9. 设 $\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}$ 如定理 *2.8* 中所述。设 $\tilde{\tau}$ 为 $\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}$ 在 -1 处死亡的时刻。对于任意有界可测函数 $F\colon \mathbb{D}([0,t],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\,\mathbf{1}_{\tilde{\tau}>t}F\left(\left(\Upsilon^{\downarrow}_{-1,a}(s)\right)_{0\leq s\leq t}\right)=\mathbb{E}\,\frac{1}{1+\Upsilon^{\uparrow}_a(t)}F\left(\left(\Upsilon^{\uparrow}_a(s)\right)_{0\leq s\leq t}\right).$$

对于所有 $\lambda>0$，也可以定义在跳跃并于 $-\lambda$ 处死亡之前保持正值条件下的莱维过程，记作 $\Upsilon^{\downarrow}_{-\lambda,a}$。它满足以下标度极限：

$$\text{Under } \mathbb{P}^{(1)}_{\lfloor\lambda\ell\rfloor},\ \left(\frac{P_{\lfloor\lambda\ell\rfloor}(\ell^{a-1}t)}{\ell}\right)_{t\geq 0}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathrm{d})}\left(\Upsilon^{\downarrow}_{-\lambda,a}(p_{\mathbf{q}}t)\right)_{t\geq 0}.$$

设 $\tilde{\tau}_{-\lambda,a}$ 为 $\Upsilon^{\downarrow}_{-\lambda,a}$ 在 $-\lambda$ 处跳跃的时刻。由耦合 $\mathbb{P}^{(1)}_{\lfloor\lambda\ell\rfloor},_\infty$ 可知，在给定 $\tilde{\tau}_{-\lambda,a}>t$ 的条件下，过程 $(\Upsilon^{\downarrow}_{-\lambda,a}(s))_{0\leq s\leq t}$ 的分布与 $(\Upsilon^{\uparrow}_a(s))_{0\leq s\leq t}$ 相同。此外，由标度极限容易看出，$\tilde{\tau}_{-\lambda,a}$ 与 $\lambda^{a-1}\tilde{\tau}$ 的分布相同。因此可以证明

$$\Upsilon^{\downarrow}_{-\lambda,a}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{(\mathrm{d})}\Upsilon^{\uparrow}_a$$

在配备 Skorokhod J_1-拓扑的 $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$ 中。这种收敛与 $\ell\to\infty$ 时 P_ℓ 在 $\mathbb{P}^{(1)}_\ell$ 下趋向于 P_∞ 在 $\mathbb{P}^{(1)}_\infty$ 下的局部收敛相呼应。

3 从“均匀随机边”开始的剥离探索

在本节中，我们回顾带有一个称为目标面的标记面的地图的填充（边）剥离探索，以及这种探索如何帮助我们恢复根面到该目标面的距离。在小节 3.4 中，我们将展示，就我们的目的而言，可以“从一条均匀随机边开始”探索，该边将成为根，而原先度数为 2ℓ 的根面将成为目标面。

3.1 带目标的图的填充探索

边剥离过程由 Budd 在 [8] 中引入，本文介绍的结果可在 [13] 的第三章和第四章中找到更详细的说明，或参见 [7]。

带目标面的地图 $\mathfrak{m}_\square = (\mathfrak{m}, \square)$ 是一个（有限的有根二分平面）地图 $\mathfrak{m}$，其给定的标记面 $\square$ 不同于根面 f_r。对于所有 ℓ，$p \geq 1$，我们将周长为 2ℓ 且具有周长为 $2p$ 的目标面的有限地图集合记为 $\mathcal{M}_p^{(\ell)}$。对所有 $\mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}_p^{(\ell)}$，我们设：

$$w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_\square) = \prod_{f \in \mathrm{Faces}(\mathfrak{m}) \setminus \{f_r, \square\}} q_{\deg(f)/2}.$$

然后我们还定义配分函数 $W_p^{(\ell)} = \sum_{\mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}_p^{(\ell)}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_\square)$。类似地，带目标顶点的地图 $\mathfrak{m}_\bullet = (\mathfrak{m}, \bullet)$ 是一个（有限的有根二分平面）地图 $\mathfrak{m}$，具有一个标记顶点 $\bullet$。我们将周长为 2ℓ 且带有目标顶点的有限地图集合记为 $\mathcal{M}_0^{(\ell)}$。对于所有 $\mathfrak{m}_\bullet \in \mathcal{M}_0^{(\ell)}$，我们设 $w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_\bullet) = w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m})$，并设 $W_0^{(\ell)} = \sum_{\mathfrak{m}_\bullet \in \mathcal{M}_0^{(\ell)}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_\bullet)$。由于 $\mathbf{q}$ 是可容许的，因此对于所有 $\ell \geq 1$，$p \geq 0$，有 $W_p^{(\ell)} < \infty$。此外，我们知道（例如参见 [13]中的公式 (3.9)）对于所有p，$\ell \geq 1$，

$$W_p^{(\ell)} = \frac{1}{2} h_p^{\downarrow}(\ell) c_{\mathbf{q}}^{\ell+p} \qquad \text{and} \qquad W_0^{(\ell)} = h^{\downarrow}(\ell) c_{\mathbf{q}}^{\ell}. \tag{3.1}$$

We 对所有 $p \geq 0$，在 $\mathcal{M}_p^{(\ell)}$ 上写出相应的玻尔兹曼概率测度 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$.

设 $\ell \geq 1$。根据 [7]，的定理 2，可以将随机无限平面地图 $\mathfrak{M}_\infty^{(\ell)}$ 定义为当 $p \to \infty$ 时，分布为 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 的随机地图在分布意义下的局部极限。地图 $\mathfrak{M}_\infty^{(\ell)}$ 几乎必然是局部有限且单端的，称为平面的 $\mathbf{q}$-玻尔兹曼无限平面随机地图。其分布记为 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$。

（填充）剥离算法 $\mathcal{A}$ 是一种函数，它为带有一个标记简单面（不同于根面）的地图 $\mathfrak{e}$，指定该标记面边界 $\partial\mathfrak{e}$ 上的一条边。设 $\mathfrak{m}_*$ 是一个带有目标面 $\square$ （“$* = \square$”）、目标顶点 $\bullet$ （“$* = \bullet$”）或无限二分地图（“$* = \infty$”）的地图。采用算法 $\mathcal{A}$ 对 $\mathfrak{m}_*$ 进行的填充剥离探索，是一列递增的子地图 $(\mathfrak{e}_n)_{n \geq 0}$，这些子地图属于 $\mathfrak{m}$，包含根面，并且是带有一个称为洞的标记简单面的地图。这里，子地图指的是：将一个经过恰当选择、周长与 $\mathfrak{e}_n$ 中该洞的周长相对应的地图粘合上去后，就能还原地图 $\mathfrak{m}_*$。这列子地图通过算法 $\mathcal{A}$ 归纳构造：$\mathfrak{e}$ 是仅有两个面的地图，即根面和一个周长相同的洞；之后，对每个 $n \geq 0$，通过剥离 $\bar{\mathfrak{m}}_*$ 中的边 $\mathcal{A}(\mathfrak{e}_n)$，从 $\mathfrak{e}_n$ 得到子地图 $\mathfrak{e}_{n+1}$（见图3）。剥离一条边时，有三种情况：

(i) $\mathfrak{m}_*$ 另一侧的面不属于 $\mathfrak{e}_n$，且不是目标面 $\square$，其中 $\mathcal{A}^-(\mathfrak{e}_n)$ $* = \square$; 然后通过将该面粘合到边 $\mathcal{A}(\mathfrak{e}_n)$ 上的 $\mathfrak{e}_n$，得到 $\mathfrak{e}_{n+1}$；我们用 $\mathcal{C}_k$ 表示这种情况，其中 k 是已发现面的半度。(ii) $\mathfrak{m}_*$ 中位于 $\mathcal{A}(\mathfrak{e}_n)$ 另一侧的面是目标面 $\square$ （当 $* = \square$ 时）；在这种情况下，记为 $C_{停止}$，其中 p 是目标面的半度，我们令 $\mathfrak{e}_{n+1} = \mathfrak{m}_\square$，并停止探索。(iii) 或者，$\mathcal{A}(\mathfrak{e}_n)$ 的另一侧对应于 $\mathfrak{e}_n$ 中一个已发现的面，该面必须位于洞的边界上。在这种情况下，通过识别洞中的两条边得到 $\mathfrak{e}_{n+1}$

$\bar{\mathfrak{e}}_n$。这至多会产生两个洞。如果 $* \in \{\square, \bullet\}$，我们就填补不包含目标的洞。如果 $* = \infty$，我们就填补包含 $\mathfrak{m}_\infty$ 的有限部分的洞。这种情况记为 $G_{k,\,*}$ 或 $G_{*,\,k}$，其中 $2k$ 是被填补洞的度，具体取决于该洞是在剥离边的左侧还是右侧形成的。如果 $* = \bullet$ 且 $k = |\partial \mathfrak{e}_n|/2 - 1$，则停止探索。

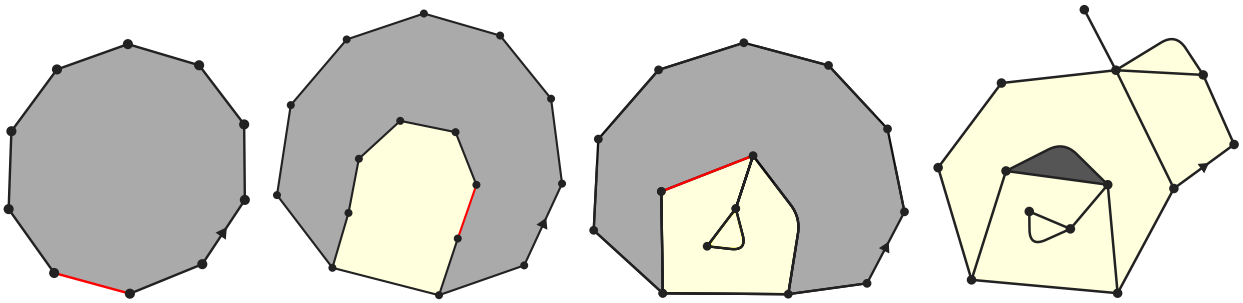

图3：带目标面的地图的填充探索 $\mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}_1^5$。剥离边以红色表示，根面为白色，目标面为黑色，包含目标的洞为灰色。在第一步，发生事件 C_4，随后发生事件 $G_{1,\,*}$，最后事件 C_1^{stop} 结束探索。

剥离算法 $\mathcal{A}$ 可以是任意的，甚至可以是随机的，但我们要求它相对于探索具有马尔可夫性质，即在给定已探索区域 $\mathfrak{e}_n$ 的条件下，$\mathcal{A}(\mathfrak{e}_n)$ 的条件分布仅取决于 $\mathfrak{e}_n$。例如，可以像第3.2节中那样，在洞的边界上均匀随机地选择剥离边；也可以像第3.3小节中那样，选择使剥离边到根的对偶距离沿探索过程非递减的边。在剥离探索过程中，记录洞边界上边数的一半的变化，记作 $(P_p(n))_{n\geq 0}$（若 $* \in \{\bullet, \square\}$）以及 $(P_\infty(n))_{n\geq 0}$（若 $* = \infty$），称为与探索相关的周长过程。利用步长分布为 ν 的随机游走 $S = (S_n)_{n\geq 0}$ 的 Doob h-变换，可以表示 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 下或 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$ 下剥离过程的分布（以及周长过程的分布）。

现在我们回顾填充剥离探索的分布 $(\mathfrak{e}_n)_{n\geq 0}$ 在 $\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 或在 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$ 下的情形，具体如 [13] 中命题4.7所述，$* = \square$ 在 $\bullet$ 的情形下，[8] 以及 $* = \infty$ 在 [13] 的情形下（另见 [13] 中的命题7.4）。

命题 3.1。 *([13],[8])* 设 ℓ，$p \geq 1$，令 $\mathcal{A}$ 为一种剥离算法，且 $(\mathfrak{e}_n)_{n\geq 0}$ 为在 $\mathbb{P}_0^{(\ell)}$、$\mathbb{P}_p^{(\ell)}$ 或 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$ 下的剥离过程。则 $(\mathfrak{e}_n)_{n\geq 0}$ 是一个马尔可夫链，其转移概率如下：在给定 $\mathfrak{e}_n$ 和 $P(n) = m \geq 1$ 的条件下（假设探索尚未停止），事件 C_k、C_p^{stop}（对于 $* = \square$）$G_{k,\,*}$ 和 $G_{*,\,k}$ 分别以如下概率发生

$$\nu(k-1)\frac{h(m+k-1)}{h(m)},\ \nu(-m-p)\frac{h(-p)}{h(m)},\ \frac{1}{2}\nu(-k-1)\frac{h(m-k-1)}{h(m)}\ \textit{and}\ \frac{1}{2}\nu(-k-1)\frac{h(m-k-1)}{h(m)},$$

其中 $h = h_p^{\downarrow}$ 对于 $* = \square$，$h = h^{\downarrow}$ 对于 $* = \bullet$，以及 $h = h^{\uparrow}$ 对于 $* = \infty$。此外，给定每个事件后，探索过程中填充的洞彼此独立，且都是周长与之对应的有限**q**-玻尔兹曼图（无目标）。

因此，对于所有 $p \geq 0$，$\mathbb{P}_p^{(\ell)}$（分别为 $\mathbb{P}_\infty^{(\ell)}$）下的周长过程确实对应于从 ℓ出发的随机游走 S 的 Doob $h_p^{\downarrow}$-变换（分别为 Doob $h^{\uparrow}$-变换）；当探索停止时，按约定将周长降至 $-p$。

3.2 均匀剥离与首次通过渗流距离

可以利用剥离过程研究带目标的图 $\mathfrak{m}_*$上的首次通过渗流距离，$\mathcal{A}_{\text{uniform}}$ 或平面无穷地图上的首次通过渗流距离。一个非常方便的算法是均匀剥离算法，[13] 13该算法在每一步都从洞的边界上均匀随机地选择一条边。有关细节请参阅 [10] 2.1 或 .4。

这种探索可以通过以下方式与 $\mathfrak{m}_*$ 上的首次通过渗流距离联系起来：对于所有 $t \geq 0$，令 $\overline{\text{Ball}}_t^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*)$ 表示从 $\mathfrak{m}_*$ 得到的子地图，具体做法是保留其对偶边中端点到根面的首次通过渗流距离至多为 t 的连通子集，然后根据这些对偶边粘合相应的面，最后填补不包含目标的洞（在 $* = \infty$ 情形下为有限洞）。于是，过程 $(\text{Ball}_t^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*))_{t\geq 0}$ 具有跳跃 $0 = T_0 < T_1 < \cdots$。可以检查（见 [10] 中的命题 2.3），对于所有 $n \geq 0$，子地图 $\text{Ball}_{T_{n+1}}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m})$ 可以通过对 $\text{Ball}_{T_n}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*)$ 的剥离得到：即在洞的边界上均匀随机地剥离一条边。此外，条件于 $(\text{Ball}_{T_n}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*))_{n\geq 0}$，随机变量 $T_{n+1} - T_n$ 相互独立，并服从参数为 $|\partial$ 的指数分布；$\text{Ball}_{T_n}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*)|$ 表示 $\text{Ball}_{T_n}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*)$ 边界上的边的集合，其中 ∂。

根据上述结果，通过将均匀探索与定义首次通过渗流距离的指数随机变量耦合，从根面到填充边界为 $\partial \mathfrak{e}_n$ 的洞的子地图 $\mathfrak{u}$ 的首次通过渗流距离可写为

$$d_{\text{fpp}}^{\dagger}(f_r, \mathfrak{u}) = T_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{|\partial \overline{\text{Ball}}_{T_i}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m}_*)|} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{2P(i)}, \tag{3.2}$$

其中，$P(i) = |\partial \text{Ball}_{T_i}^{\text{fpp}}(\mathfrak{m})|/2$ 是与探索相关的周长过程，而 $\mathcal{E}_i$（$i \geq 0$）是参数为 1、且与探索（$\mathfrak{e}_n$）$_{n\geq 0}$独立的独立同分布指数随机变量，因此也与（$P(n)$）$_{n\geq 0}$独立。特别地，若 $\mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}_p^{(\ell)}$（$\ell$，$p \geq 1$）且 n是发现目标面 $\square$的时刻，即事件 C_p^{target}在时刻 n发生，或者等价地 $\mathfrak{e}_n = \mathfrak{m}_\square$，那么 $d^{\dagger}{}_{\text{fpp}}(f_r, \square) = T_n$。

3.3 分层剥离与对偶图距离

同样，有一种称为分层剥离算法的特定剥离算法 $\mathcal{A}_{\text{layers}}$，适用于研究带目标的图 $\mathfrak{m}_*$（或平面无穷地图）上的对偶图距离。回顾一下，$d_{\text{gr}}^{\dagger}$ 表示地图 $\mathfrak{m}$上的对偶图距离。若 f 是 $\mathfrak{m}$ 的一个面，则到根面 $d_{\text{gr}}^{\dagger}(f_r, f)$ 的距离也称为 f的高度。我们也可以将边 e的高度定义为其两侧面的高度中的较小值 e。

文献 [10] 2.3 中所述的剥离算法 $\mathcal{A}_{\text{layers}}$（另见 [13] 第185页）仅适用于具有洞的（有限）子地图 $\mathfrak{e}$（当 $* = \square$时，该洞包含目标），且这些子地图 $\mathfrak{m}_*$ 需满足以下假设：

(H) 存在一个整数 $h \geq 0$，使得洞 $\partial \mathfrak{e}$ 边界上的所有边的高度均为 h 或 $h+1$，且 $\partial \mathfrak{e}$ 中高度为 h 的边构成一条（非空）线段。

如果 $\mathfrak{e}$ 满足 **(H)**，那么我们将 $\mathcal{A}_{\text{layers}}(\mathfrak{e})$ 设为 $\partial \mathfrak{e}$ 中高度为 h 且其紧邻左侧的边高度为 $h+1$ 的唯一一条边。如果 $\partial \mathfrak{e}$ 的所有边都处于高度 h，则确定性地选取边 $\mathcal{A}_{\text{layers}}(\mathfrak{e})$。

可以验证，在事件 C_k、$G_{*,k}$ 和 $G_{k,*}$ 发生时，剥离 $\mathcal{A}_{\text{layers}}(\mathfrak{e})$ 后得到的子地图再次满足 **(H)**。此外，$\mathfrak{e}_0$ 也满足 **(H)**。因此，采用算法 $\mathcal{A}_{\text{layers}}$ 的剥离探索是良定义的。

对于每个 $n \geq 0$，令 $H(n)$ 为 $\partial \mathfrak{e}_n$ 各边高度的最小值。于是 $H(0) = 0$，并且对于所有 $n \geq 0$，都有 $\Delta H(n) := H(n+1) - H(n) \in \{0, 1\}$。当 $\partial \mathfrak{e}_{n+1}$ 的所有边都处于高度 $H(n)+1$ 时，有 $\Delta H(n) = 1$。过程 $H(n)$ 称为与分层剥离探索相关联的高度过程。整数 $H(n)+1$ 也可以看作 $\mathfrak{e}_n$ 中洞的高度。特别地，如果对于某个 ℓ，$\mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}_p^{(\ell)}$，且 n 是满足 $\mathfrak{e}_n = \mathfrak{m}_\square$ 的首次时刻，那么 $d^\dagger_{\text{gr}}(f_r, \square) = H(n-1) + 1$。

3.4 交换根与目标

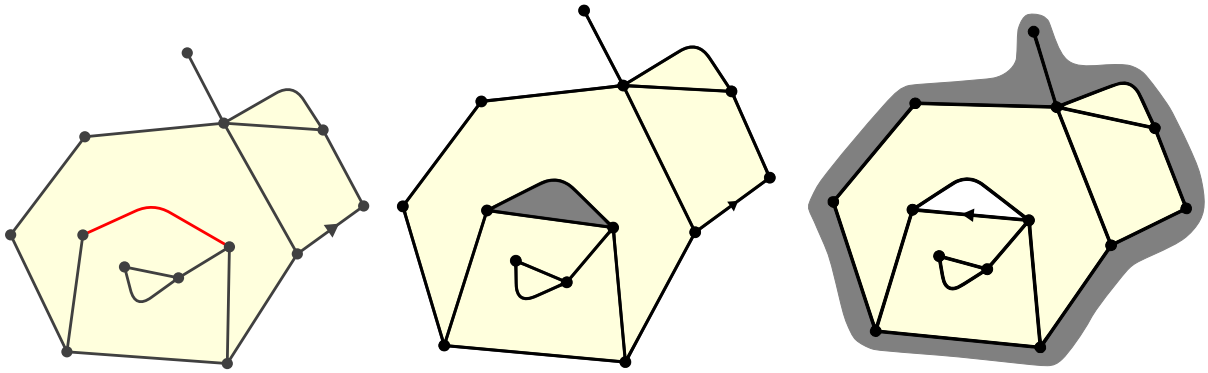

图4：从左到右：一张带有红色特殊边的地图；将该边“解开”后得到一张带有特殊2-面的相同地图（灰色部分）；最后是重新选定根的同一张地图。

为了研究根面到 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中均匀随机面的距离，我们首先考察根面与均匀随机边 E 在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中的距离。随后，我们将在小节4.3中通过加权论证回到均匀随机面。该距离定义为根面到与该边相邻的某个面之间距离的最小值。将均匀随机边解开，从而生成一个度为2的标记面，可以看出，从 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 得到的地图属于 $\mathcal{M}_1^{(\ell)}$。我们将这张地图记为 $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}$。

注记 3.2。这一解开操作对距离的影响不大。更准确地说，$\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}$ 中的图距离 $d^\dagger_{\text{gr}}(f_r, \square)$ 等于 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中的 $d^\dagger_{\text{gr}}(f_r, E)$；而 $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}$ 中的 $d^\dagger \,\text{fpp}(f_r, \square)$ 的下界为 $d^\dagger \,\text{fpp}(f_r, E)$，上界为 $d^\dagger \,\text{fpp}(f_r, E) + \mathcal{E}$（位于 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中），其中 $\mathcal{E}$ 是参数为1的独立指数变量。

此外，可以注意到，通过在原目标面上选择一条根边来交换根面与目标面的角色，并不会改变根面与目标面之间的距离。我们所做的所有操作均由图 4 展示。这种根面与目标面的互换很有用，因为在下一小节中，我们将介绍 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 与 $\mathbb{P}_\infty^{(1)}$之间的一种耦合，从而能够使用 [11] 的结果。令 $\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}$ 为从 $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}$ 通过交换根面和目标面，并在新的根面周围均匀随机地选择根边而得到的地图。

为了将我们在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下的结果转移到配备随机均匀边 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 地图上，我们陈述如下引理。

引理 3.3。 若 $(\varphi_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是从 $\mathcal{M}_\ell^{(1)}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数序列，并且一致地由常数 $C>0$ 有界，满足

$$\mathbb{E}_\ell^{(1)}\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

then

$$\mathbb{E}\varphi_\ell\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}\right)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

特别地，若 $(A_\ell)_{\ell\geq 1}$ 是 $\mathcal{M}_\ell^{(1)}$ 的子集序列，满足 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}(A_\ell)\to 0$ 当 $\ell\to\infty$ 时，则 $\mathbb{P}(\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}\in A_\ell)\to 0$。

证明。 首先注意到，$\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}$ 的分布可以利用 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}$ 来刻画。事实上，若 $\mathfrak{m}_\square\in\mathcal{M}_1^{(\ell)}$ 是通过解开地图 $\mathfrak{m}'\in\mathcal{M}^{(\ell)}$ 的一条边得到的，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}=\mathfrak{m}_\square)&=\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}')}\mathbb{P}(\mathfrak{M}^{(\ell)}=\mathfrak{m}')=\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}')}\frac{w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}')}{W^{(\ell)}}\\&=\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\frac{w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_\square)}{W_1^{(\ell)}}=\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\mathbb{P}_1^{(\ell)}(\mathfrak{m}_\square).\end{aligned}$$

这一解开操作的另一个众所周知且有用的推论是

$$\mathbb{E}\,\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})=\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\underset{\ell\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(\ell)c_{\mathbf{q}}^{\ell+1}}{\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}c_{\mathbf{q}}^{\ell+1}\ell^{-2}}\underset{\ell\to\infty}{\sim}b_{\mathbf{q}}\ell^{3/2}\text{ where }b_{\mathbf{q}}=\frac{1}{2p_{\mathbf{q}}\sqrt{\pi}},\tag{3.3}$$

依次应用（1.1）、（3.1）、（2.1），以及 $h^{\downarrow}(\ell)\sim 1/\sqrt{\pi\ell}$。

接下来，$\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}$ 的分布可表示如下。设 $\mathfrak{m}_\square\in\mathcal{M}_\ell^{(1)}$，它是通过对地图 $\mathfrak{m}'_\square\in\mathcal{M}_1^{(\ell)}$ 重新定根得到的。于是可以验证，

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}=\mathfrak{m}_\square\right)=\frac{2\ell}{2}\mathbb{P}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1^{(\ell)}=\mathfrak{m}'_\square\right)=\frac{2\ell}{2}\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\frac{\mathbb{P}_1^{(\ell)}(\mathfrak{m}'_\square)}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}'_\square)-1}=\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\frac{\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\mathfrak{m}_\square)}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}.\tag{3.4}$$

我们推导出

$$\mathbb{E}\varphi_\ell\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}\right)=\sum_{\mathfrak{m}_\square\in\mathcal{M}_\ell^{(1)}}\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\frac{\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\mathfrak{m}_\square)}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)=\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(\frac{\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\right).\tag{3.5}$$

令 $\varepsilon > 0$。接下来我们区分边数是否大于 $\varepsilon\ell^{3/2}+1$。一方面，利用（3.3），可以看出

$$\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(\frac{\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)\geq\varepsilon\ell^{3/2}+1}\right) \leq \frac{W_1^{(\ell)}}{\varepsilon\ell^{3/2}W^{(\ell)}}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square) \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(\frac{\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)\leq\varepsilon\ell^{3/2}}}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\right) &\leq \frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(C\frac{\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)\leq\varepsilon\ell^{3/2}}}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\right)\\ &= C\mathbb{P}\left(\#\mathrm{Edges}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_\ell^{(1)}\right)\leq\varepsilon\ell^{3/2}\right) \text{ by (3.5)}\\ &= C\mathbb{P}(\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\leq\varepsilon\ell^{3/2}-1).\end{aligned}$$

此外，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\ell\to\infty}\mathbb{P}^{(\ell)}(\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})\leq\varepsilon\ell^{3/2}-1)=0,$$

由于#边$(\mathfrak{M}^{(\ell)})\ell^{-3/2}$ 当 $\ell\to\infty$时依分布收敛于一个正随机变量，参见例如 [13]中的命题10.4。

□

4 到目标的距离的标度极限

本节及本文余下部分致力于研究周长为 2ℓ的 3/2-稳定地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 上的对偶距离。因此，下文假设 $\mathbf{q}$ 是类型为$a=2$的非一般临界情形。我们将省略 Υ_2、 $\Upsilon_2^{\uparrow}$、 $\Upsilon_2^{\downarrow}$ 和$\Upsilon_{-1,2}^{\downarrow}$中的下标2。

如前所述，我们首先研究从根面到 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中均匀随机边的距离，然后将结果转化为到均匀随机面和均匀随机顶点的距离。根据小节3.4，只需研究在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，从根面 f_r 到目标面 $\square$ 的距离。因此，我们可以使用第 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 节中介绍的3的填充探索，特别是剥离算法 $\mathcal{A}_{\mathrm{uniform}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{layers}}$。

4.1 到 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$中均匀随机边的首次通过渗流距离

根据小节 3.2，特别是（3.2），我们知道，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，从根面 f_r 到目标面 $\square$ 的首次通过渗流距离为

$$d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,\square)=\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{\mathcal{E}_k}{2P_\ell(k)}, \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{E}_k$ 是参数为 1、且与周长过程独立的独立同分布指数随机变量。第 2 节证明的周长过程性质使我们能够给出以下命题，从而进一步接近定理 1.1 的第一个收敛结果。

命题 4.1. 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ ，

$$\frac{d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,\square)}{\log\ell}\underset{\ell\to\infty}{\overset{(\mathbb{P})}{\longrightarrow}}\frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}.$$

因此，如果 $E^{(\ell)}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$中的一条均匀边，那么

$$\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r, E^{(\ell)})}{\log \ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}.$$

证明。 对于第一个收敛，只需证明

$$\frac{1}{\log \ell} \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{1}{2P_\ell(k)} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}. \tag{4.2}$$

事实上，假设（4.2），如同 [11], 中命题3证明开头所述，我们可以在给定 P_ℓ的条件下进行推理:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\log \ell}\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{\mathcal{E}_k-1}{2P_\ell(k)}\right)^2 \middle| P_\ell\right) = \frac{1}{(\log\ell)^2}\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{4P_\ell(k)^2} \le \frac{1}{(\log\ell)^2}\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{4P_\ell(k)} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} 0,$$

这里的收敛性来自（4.2）。为了证明（4.2），首先注意到，根据定理2.8，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=\lfloor\varepsilon\ell\rfloor}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{2P_\ell(k)} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathrm{d})} \int_{\varepsilon}^{\tilde{\tau}} \frac{1}{2\Upsilon^{\downarrow}_{-1}(p_{\mathbf{q}}t)}dt. \tag{4.3}$$

此外，在引理 2.5中的耦合 $\mathbb{P}^{(1),\ell}_{\infty}{}^{\lfloor\varepsilon\ell\rfloor}$,下，在事件 $\tau_{-\ell} > \lfloor\varepsilon\ell\rfloor$ 发生时（其概率大于 $1-o(1)$，且当 $\varepsilon\to 0$时，对 ℓ一致成立），对所有 $k \le \lfloor\varepsilon\ell\rfloor$，都有 $P_\ell(k) = P_\infty(k)$。因此，在事件 $\tau_{-\ell} > \lfloor\varepsilon\ell\rfloor$发生时，有

$$\frac{1}{\log\ell}\sum_{k=0}^{\lfloor\varepsilon\ell\rfloor}\frac{1}{2P_\ell(k)} = \frac{1}{\log\ell}\sum_{k=0}^{\lfloor\varepsilon\ell\rfloor}\frac{1}{2P_\infty(k)} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}},$$

根据 [11]中的方程（15）。因此，结合这一收敛性与（4.3），可得（4.2）成立，从而完成第一个收敛性的证明。

该命题的第一个收敛性可立即由注释 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 转移到配有均匀边的地图上，这由注释 3.2和引理3.3推出，其中使用函数 φ_ℓ 定义如下:

$$\forall \mathfrak{m}_\square \in \mathcal{M}^{(1)}_\ell, \qquad \varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r,\square)}{\log\ell} - \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}\right| \wedge 1\right),$$

其中，期望是针对定义首次通过渗流距离的指数权重而言的。 □

4.2 地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中到均匀随机边的对偶图距离

地图在 $\mathbb{P}^{(1)}_\ell$ 下通过分层剥离算法进行填充探索时的高度过程记为 H_ℓ。回顾一下， $H_\ell(n)$ 是 $\partial\mathfrak{e}_n$ 中一条边的最小高度。根据小节 3.3，我们知道，在 $\mathbb{P}^{(1)}_\ell$ 下，从根面 f_r 到目标面 □的对偶图距离为 $d^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(f_r,\square) = H_\ell(\tau_{-\ell}-1) + 1$。

现在我们可以陈述并证明本节的主要结果，该结果给出了在 $\mathbb{P}^{(1)}_\ell$ 条件下，从根面到目标面的对偶图距离的渐近行为，并通过小节1.1 中的论证，使我们更接近定理3.4的第二个收敛结论。

命题 4.2. 在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 条件下，

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,\square)}{(\log \ell)^2} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2\pi^2}.$$

因此，如果 $E^{(\ell)}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$的均匀随机边，那么，在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$中，

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,E^{(\ell)})}{(\log \ell)^2} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2\pi^2}.$$

证明。首先，由命题 3.1，很容易看出，对所有 $n\geq 1$，对于任意递增的带孔映射序列 $\mathfrak{u}_0\subset\mathfrak{u}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{u}_{n-1}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\mathfrak{e}_0=\mathfrak{u}_0,\dots,\mathfrak{e}_{n-1}=\mathfrak{u}_{n-1}|\tau_{-\ell}=n \text{ and } P_\ell(n-1)=|\partial\mathfrak{u}_{n-1}|/2)\\ =\mathbb{P}_\infty^{(1)}(\mathfrak{e}_0=\mathfrak{u}_0,\dots,\mathfrak{e}_{n-1}=\mathfrak{u}_{n-1}|P_\infty(n-1)=|\partial\mathfrak{u}_{n-1}|/2).\end{aligned}$$

因此，如果 $F\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续有界函数，

$$\mathbb{E}_\ell^{(1)}F\left(\frac{H_\ell(\tau_{-\ell}-1)}{(\log\ell)^2}\right)=\sum_{n,k\geq 1}\mathbb{E}_\infty^{(1)}\left(F\left(\frac{H_\infty(\tau_{-\ell}-1)}{(\log\ell)^2}\right)\middle|P_\infty(n-1)=k\right)\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\tau_{-\ell}=n,P_\ell(n-1)=k\right)$$

我们取 $F\colon\ x\mapsto|x-1/(2\pi^2)|\wedge 1$。令 $\varepsilon>0$。令 $\delta>0$ 足够小，使得对于所有 $\ell\geq 1$，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，我们以至少 $1-\varepsilon$的概率有 $\tau_{-\ell}/\ell\in[\delta,1/\delta]$ 和 $P_\ell(\tau_{-\ell}-1)/\ell\in[\delta,1/\delta]$。根据命题 2.7，这样的 δ 是存在的。然后，由命题 2.7 和引理 2.3，可知在s上一致地，当 $\ell\to\infty$时，$u\in[\delta,1/\delta]$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell}=\lfloor\ell s\rfloor \text{ and } P_\ell(\lfloor\ell s\rfloor-1)=\lfloor\ell u\rfloor)}{\mathbb{P}_\infty^{(1)}(P_\infty(\lfloor\ell s\rfloor-1)=\lfloor\ell u\rfloor)}&=\frac{\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell}=\lfloor\ell s\rfloor \text{ and } P_\ell(\lfloor\ell s\rfloor-1)=\lfloor\ell u\rfloor)}{(h^\uparrow(\lfloor\ell u\rfloor)/h^\uparrow(1))\mathbb{P}_1(S_1,\dots,S_{\lfloor\ell s\rfloor-1}\geq 1 \text{ and } S_{\lfloor\ell s\rfloor-1}=\lfloor\ell u\rfloor)}\\ &\sim\frac{\pi p_{\mathbf{q}}}{\ell\sqrt{u}(1+u)^2},\end{aligned}$$

其中我们利用了 $h^\uparrow(\ell)\sim 2\sqrt{\ell/\pi}$。特别地，上述比值关于 $\ell\geq 1$ 和 $u,\ s\in[\delta,1/\delta]$ 一致有界，其上界为常数 $C(\delta)$ 乘以 $1/\ell$。因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\ell^{(1)}F\left(\frac{H_\ell(\tau_{-\ell}-1)}{(\log\ell)^2}\right)&\leq\varepsilon+C(\delta)\ell^{-1}\int_\delta^{1/\delta}ds\int_\delta^{1/\delta}du\ell^2\mathbb{E}_\infty^{(1)}\left(F\left(\frac{H_\infty(\lfloor\ell s\rfloor-1)}{(\log\ell)^2}\right)\mathbf{1}_{P_\infty(\lfloor\ell s\rfloor-1)=\lfloor\ell u\rfloor}\right)\\ &\leq\varepsilon+C(\delta)\int_\delta^{1/\delta}ds\mathbb{E}_\infty^{(1)}\left(F\left(\frac{H_\infty(\lfloor\ell s\rfloor-1)}{(\log\ell)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

最后一个积分趋于 0，当 $\ell\to+\infty$ 时，这是因为 [11], 中的命题 4 指出，在 $\mathbb{P}_\infty^{(1)}$ 下，

$$\frac{H_\infty(\ell)}{(\log\ell)^2}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{1}{2\pi^2}.$$

这就得出了第一个收敛结论。
根据备注 3.2 和引理 3.3，利用由下式定义的函数 φ_ℓ，即可直接由第一个收敛结论得到第二个收敛结论。

$$\forall\mathfrak{m}_\square\in\mathcal{M}_\ell^{(1)},\qquad\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)=\left|\frac{d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,\square)}{(\log\ell)^2}-\frac{1}{2\pi^2}\right|\wedge 1.$$

证明至此完成。 □

4.3 用顶点或面替代均匀随机边 e

下面说明，前面各小节的结果如何帮助我们求出根面到均匀随机顶点或均匀随机面的距离，从而在本小节末证明定理 1.1 。本小节依赖于涉及剥离探索和与树的双射的经典论证，读者可以略过。

我们首先关注均匀随机顶点的情形。注意， |顶点$(\mathfrak{M}^{(\ell)})| = \sum_{\vec{e}} \frac{1}{v\text{度}(\vec{e})}$，其中求和遍及 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的所有 $\vec{e}$ 有向边。为了在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$上选取一个均匀随机顶点，在给定 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$的条件下，我们以如下分布随机选取 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的一个 $\vec{E}$ 有向边：

$$\forall \vec{e} \in \mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)}),\quad \mathbb{P}\left(\vec{E} = \vec{e} \,\middle|\, \mathfrak{M}^{(\ell)}\right) := \frac{1}{\deg v(\vec{e})} \frac{1}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}, \tag{4.4}$$

其中$\vec{e}$($\vec{e}$)是 v的起点。于是，对所有顶点 v 属于 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$,

$$\mathbb{P}\left(v(\vec{E}) = v \,\middle|\, \mathfrak{M}^{(\ell)}\right) = \frac{1}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}, \tag{4.5}$$

也就是说， $V:=v(\vec{E})$是在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$上均匀随机选取的顶点。

我们来控制 v_r （根边的起点）在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下的度。下面的引理是 [13]中引理 15.6 的推广。

引理 4.3。 存在 $c \in$ （0，1），使得对所有 ℓ、 $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\deg v_r \geq j) \leq c^{j-2}.$$

证明。 与 [13] 中一样，我们采用“绕根顶点剥 peeling”这一剥离探索，定义如下：只要根顶点属于洞 $\partial \mathfrak{e}_n$的边界，我们就剥离 $\partial \mathfrak{e}_n$ 上紧邻 v_r 左侧的边，直到它变成内部顶点。更准确地说，在发生 G类型的事件后，我们填充边界上不含 v_r 的洞，并继续探索。因此，经过一段时间后，目标可能不再位于该洞内。我们将G_{k_1,k_2} 记为：在周长为 $2p = 2k_1 + 2k_2 + 2$ 且不含目标的洞的边界上，两条边发生识别，从而在被剥离边左侧产生一个周长为 $2k_1$ 的洞（该洞将被填充），并在右侧产生一个周长为 $2k_2$的洞。此事件的转移概率为 $W^{(k_1)}W^{(k_2)}/W_{(p)}$。当 v_r 变成内部顶点时，探索即告结束，也就是说，在发生$G_{*,0}$ 类型的事件后，或者对某个 $k \geq 0$发生$G_{k,0}$ 类型的事件后结束。

在此次剥离探索的一步中，令 $2p$ 为边界包含 v_r 的洞的周长。我们区分以下两种可能的情况：

- 要么 v_r 位于包含目标面的洞的边界上。在这种情况下，当且仅当事件 $G_{*,\ 0}$发生时，探索才会停止。这种情况发生的概率为 $\frac{1}{2}\nu(-1)h_\ell^{\downarrow}(p-1)h_\ell^{\downarrow}(p)$ 根据命题 3.1 （且必然有 $p \geq 2$ ，因此包含目标面的洞具有正的边界长度）。

- 或者 v_r 位于一个不包含目标面的洞的边界上。在这种情况下，当事件$G_{p-1,\ 0}$ 发生时，探索便会停止。该事件发生的概率为$W_{(p-1)}\ W_{(0)}\ /W_{(p)}$ 。

但由（1.1）、（2.1）以及由于 $h^{\downarrow}(\ell) \sim 1/\sqrt{\pi \ell}$ 当 $\ell \overrightarrow{\to} \infty$ 时

$$\frac{W^{(0)}W^{(0)}}{W^{(1)}} \wedge \inf_{\substack{p\geq 2\\ \ell \geq 1}} \left(\frac{1}{2}\nu(-1)\frac{h_\ell^{\downarrow}(p-1)}{h_\ell^{\downarrow}(p)} \wedge \frac{W^{(p-1)}W^{(0)}}{W^{(p)}} \right) > 0.$$

此外，在第一种情况下，当 $p=1$ 时，我们会自动在下一步通过一个类型为 C_k的事件得到 $p \geq 1$，并且以正概率在下一步得到 $p \geq 2$。此外，在探索的每一步中，$\deg(v_r)$ 只会增加零或一，因此引理得证。

□

现在我们回顾一个引理，它汇集了 Bouttier-DiFrancesco-Guitter 双射（见 [6]）和 Janson & Stefánsson 技巧（见 [19] 第 3 节）的若干众所周知的推论，以及吕卡谢维奇路径。

引理 4.4. *([6],[19])* 定义在 $\mathbb{Z}_{\geq -1}$ 上的测度 μ

$$\mu(-1) = \frac{4}{c_{\mathbf{q}}} \qquad \textit{and} \qquad \mu(k) = q_{k+1}\binom{2k+1}{k+1}(c_{\mathbf{q}}/4)^k \textit{ for all } k \geq 0.$$

是一个概率测度。此外，对于在 $\mathbb{P}_0^{(\ell)}$ 下的地图 $\mathfrak{m}_\bullet$，我们可以关联一个从零开始、步长分布为 μ、并在达到 $-\ell$ 时停止的随机游走$(Y_n)_{n\geq 0}$。若将 Y 达到 $-\ell$的时刻记为 $\tau_{-\ell}(Y)$，则

$$\begin{cases} \#\{n \in [\![0, \tau_{-\ell}(Y)-1]\!];\ Y_{n+1}-Y_n = -1\} + 1 = \#\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m}_\bullet) \\ \#\{n \in [\![0, \tau_{-\ell}(Y)-1]\!];\ Y_{n+1}-Y_n \neq -1\} + 1 = \#\mathrm{Faces}(\mathfrak{m}_\bullet). \end{cases}$$

因此 $\tau_{-\ell}(Y) = \#$边$(\mathfrak{m}_\bullet)$。

利用前面的引理，我们能够控制地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中均匀随机顶点的度。地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中均匀随机顶点的度，随机占优于一个分布不依赖于 ℓ 的随机变量：

引理 4.5。存在 $C>0$ 和 $c \in (0、1)$，使得对于所有 k、$\ell \geq 1$，如果 V 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的均匀随机顶点，那么

$$\mathbb{P}(\deg(V)=k) \leq Cc^k.$$

证明。设 $\ell \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $K>0$，其取值稍后确定。对于 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\deg(V)=k) =& \mathbb{P}(\deg(V)=k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| \geq |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|) \qquad (4.6)\\ &+ \mathbb{P}(\deg(V)=k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| < |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|) \qquad (4.7) \end{aligned}$$

对于第一项（ 4.6），如果我们用 $\vec{E}'$ 表示 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的一条均匀有向边，可以看出，对于所有 1

$k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\deg(V)=k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| \geq |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\geq|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\sum_{\vec{e}}\frac{1}{\deg v(\vec{e})}\frac{1}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\mathbf{1}_{\deg(v(\vec{e}))=k}\right) \text{ by (4.5)}\\
&= \mathbb{E}^{(\ell)}\left(\mathbf{1}_{K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m})|\geq|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})|}\frac{1}{k|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m})|}\#\{\vec{e};\ \deg v(\vec{e})=k\}\right)\\
&\leq \mathbb{E}^{(\ell)}\left(\mathbf{1}_{K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m})|\geq|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})|}\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})|}{k|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m})|}\mathbb{P}(\deg(v(\vec{E}'))=k|\mathfrak{M}^{(\ell)}=\mathfrak{m})\right)\\
&\leq \mathbb{E}^{(\ell)}\left(2K\mathbb{P}(\deg(v(\vec{E}'))=k|\mathfrak{M}^{(\ell)}=\mathfrak{m})\right)\\
&= 2K\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\deg(v_r)=k)\\
&\leq 2Kc^{k-2} \text{ by Lemma 4.3},
\end{aligned}
$$

与 $C>0$ 和 $c\in(0,1)$ 相互独立于 ℓ。现在我们聚焦于第二项（4.7）。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\deg(V)=k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| < |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\right)\\
&\quad\leq \mathbb{P}\left(|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\geq k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| < |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\right).
\end{aligned}
$$

设 Y 为与 μ-随机游走，在达到 $-\ell$ 时停止，它与 $\mathfrak{m}_\bullet$ 在 $\mathbb{P}_0^{(\ell)}$ 下相关，依据引理4.4。我们还知道 $\tau_{-\ell}(Y) = |\text{边}(\mathfrak{m})|$ 以及 $D := \#\{i\in[\![0,\tau_{-\ell}(Y)-1]\!];\ \ Y_{i+1}-Y_i=-1\}+1 = |\text{顶点}(\mathfrak{m})|$。因此，按顶点数进行偏置，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\geq k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})| < |\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|\right)\\
&= \frac{1}{W^{(\ell)}}\sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}^{(\ell)}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m})\mathbf{1}_{|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})|\geq k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m})|<|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})|}\\
&= \frac{W_0^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_0^{(\ell)}\left(\frac{1}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m}_\bullet)|}\mathbf{1}_{|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\bullet)|\geq k \text{ and } K|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{m}_\bullet)|<|\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\bullet)|}\right)\\
&= \frac{W_0^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}\left(\frac{1}{D}\mathbf{1}_{KD\leq\tau_{-\ell}(Y) \text{ and } \tau_{-\ell}(Y)\geq k}\right)\\
&= \frac{W_0^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}\left(\frac{1}{D}\mathbb{P}\left(KD\leq\tau_{-\ell}(Y) \text{ and } \tau_{-\ell}(Y)\geq k|\,D\right)\right).
\end{aligned}
$$

我们来给期望中的条件概率一个上界。注意，随机游走 Y 可以通过先抽取非零步，再在这些步之间插入几何分布数量（从零开始，参数为 $1-\mu(0)$）的零步来构造（当 $\mu(0)=0$ 时，不插入任何零步）。此外，在 $\tau_{-\ell}(Y)$ 之前的正步数量小于 D。因此可以写成

$$
\tau_{-\ell}(Y)\leq 2D+\sum_{i=1}^{2D}\mathcal{G}_i,
$$

其中， $\mathcal{G}_i$ 是参数为 $1-\mu(0)$ 的几何分布独立同分布随机变量，按照惯例，当 $\mu(0)=0$ 时，$\mathcal{G}_i=0$。令 $\beta=(1-\mu(0))/(2(3-\mu(0)))$，使得 $1-2\beta=4\beta/(1-\mu(0))$。我们将区分 $D\geq\beta k$ 是否成立。一方面，若 $D\leq\beta$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(KD\leq\tau_{-\ell}(Y)\text{ and }\tau_{-\ell}(Y)\geq k\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\leq\beta k}&\leq\mathbb{P}\left(\tau_{-\ell}(Y)\geq k\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\leq\beta k}\\&\leq\mathbb{P}\left(2D+\sum_{i=1}^{2D}\mathcal{G}_i\geq k\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\leq\beta k}\\&\leq\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2\beta k}\mathcal{G}_i\geq(1-2\beta)k\right)\\&\leq C'(c')^k,\end{aligned}$$

对于不依赖于 ℓ 的 $C'>0$、$c'\in(0,1)$，其中最后一个不等式来自独立同分布几何变量之和的大偏差。另一方面，当 $D\geq\beta k$ 时，通过选择 $K\geq 2+4/(1-\mu(0))$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(KD\leq\tau_{-\ell}(Y)\text{ and }\tau_{-\ell}(Y)\geq k\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\geq\beta k}&=\mathbb{P}\left(KD\leq\tau_{-\ell}(Y)\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\geq\beta k}\\&\leq\mathbb{P}\left((K-2)D\leq\sum_{i=1}^{2D}\mathcal{G}_i\middle|D\right)\mathbf{1}_{D\geq\beta k}\\&\leq C'(c')^D\mathbf{1}_{D\geq\beta k}\leq C'(c')^{\beta k},\end{aligned}$$

根据同样的大偏差结果即可得到。这就完成了证明，因为 $\mathbb{E}(1/D)=\mathbb{E}_0^{(\ell)}(1/|\text{顶点}(\mathfrak{m})|)=W^{(\ell)}/W_0^{(\ell)}$，因此

$$\frac{W_0^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}\left(\frac{1}{D}\mathbb{P}\left(KD\leq\tau_{-\ell}(Y)\text{ and }\tau_{-\ell}(Y)\geq k\middle|D\right)\right)\leq C'(c')^{\beta k},$$

从而得到该命题中的上界。 □

如果 v 是 $\mathfrak{m}$ 的一个顶点，并且 $d^\dagger$ 是 $\mathfrak{m}^\dagger$ 上的一个距离，我们将 $d^\dagger(f_r,\ v)$ 定义为从 f_r 到与 v 相邻的一个面 f 的最小距离。

命题 4.6。 如果对于所有 $\ell\geq 1$，$V^{(\ell)}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的一个均匀随机顶点，那么

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,V^{(\ell)})}{(\log\ell)^2}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{1}{2\pi^2}\qquad and\qquad\frac{d_{\mathrm{fpp}}^\dagger(f_r,V^{(\ell)})}{\log\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{1}{\pi^2p_{\mathbf{q}}}.$$

证明。 我们证明对偶图距离的情形（使用命题 4.1）可以用相同思路证明首次通过渗流距离的情形）。首先，由于$d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,\vec{E})-\deg(V^{(\ell)})\leq d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,V^{(\ell)})\leq d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,\vec{E})$，且根据引理 4.5，$\deg V^{(\ell)}$ 随机占优于一个不依赖于 ℓ 的随机变量，因此我们可以考虑 $d_{\mathrm{gr}}^\dagger(f_r,\vec{E})$，其中 $\vec{E}$ 如上所述由（4.4）定义。令 $\varepsilon,\delta>0$。令 $\vec{E}'$ 为均匀分布的

随机有向边。根据命题 4.2，当 ℓ 足够大时，概率至少为 $1-\delta$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)=\sum_{\vec{e}}\frac{1}{\deg v(\vec{e})}\frac{1}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\mathbf{1}_{\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]}\\
&=\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\deg v(\vec{E}')}\mathbf{1}_{\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E}')}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]}\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)\\
&\geq\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{\deg v(\vec{E}')}\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)-\delta\right)\\
&=1-\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Vertices}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\delta\\
&\geq 1-C\delta,
\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 是一个不依赖于 ℓ 和 δ的常数。最后一个不等式由引理4.4 和大数定律得到。

□

从 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的根面到一个均匀随机面的距离情形甚至更简单，并且依赖于类似的思想。

定理 *1.1* 的证明。令 $\ell\geq 1$。令 F 是在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 条件下的均匀随机面 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$。在 F 和 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$的条件下，令 $\vec{E}$ 为满足其右侧的面是 F的均匀随机有向边。根据到边的距离的定义，

$$d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})\leq d^{\,\dagger}_{\mathrm{gr}}(f_r,F)\leq d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})+1\qquad\text{and}\qquad d^\dagger_{\mathrm{fpp}}(f_r,\vec{E})\leq d^\dagger_{\mathrm{fpp}}(f_r,F)\leq d^\dagger_{\mathrm{fpp}}(f_r,\vec{E})+\mathcal{E},$$

其中 $\mathcal{E}$ 是 参数为 $\mathbf{1}$ 的指数随机变量。因此，只需证明 t

$$\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})}{(\log\ell)^2}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{1}{\pi^2}\quad\text{and}\quad\frac{d^\dagger_{\mathrm{fpp}}(f_r,\vec{E})}{\log\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}.$$

现在我们关注对偶图距离。对于首次通过渗流距离，使用命题 4.1 中的相同思路即可。如果 $\vec{e}$是一条有向边，我们记 $f(\vec{e})$ 为 $\vec{e}$ 右侧的面。给定 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$，令 $\vec{E}'$为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 上一条均匀随机的有向边。令 ε，$\delta>0$。于是由命题 4.2可知，当 ℓ 足够大时，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)=\sum_{\vec{e}}\frac{1}{\deg f(\vec{e})}\frac{1}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\mathbf{1}_{\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E})}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]}\\
&=\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\deg f(\vec{E}')}\mathbf{1}_{\frac{d^\dagger_{\mathrm{gr}}(f_r,\vec{E}')}{(\log\ell)^2}\in\left[\frac{1}{2\pi^2}-\varepsilon,\frac{1}{2\pi^2}+\varepsilon\right]}\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)\\
&\geq\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{\deg f(\vec{E}')}\middle|\,\mathfrak{M}^{(\ell)}\right)-\delta\right)\\
&=\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\frac{1}{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\left(\sum_{\vec{e}}\frac{1}{\deg f(\vec{e})}\right)-\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\delta.
\end{aligned}$$

但由引理 4.4 和大数定律可知，当 $1-\delta$ 对于 ℓ 足够大时，以至少

$$\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\frac{1}{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\left(\sum_{\vec{e}}\frac{1}{\deg f(\vec{e})}\right)-\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\delta=1-\frac{2|\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}{|\mathrm{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})|}\delta\geq 1-C\delta,$$

其中 $C>0$ 是一个常数，不依赖于 ℓ （也不依赖于 δ、 ε）。 □

5 两个均匀随机面的距离

本节旨在证明以下推论，该推论确立了两个均匀随机面的距离的概率标度极限。

推论 5.1. 对于所有 $\ell\geq 1$，设 $F_1^{(\ell)}$ 和 $F_{(\ell)\,2}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中两个相互独立的均匀随机面。那么

$$\frac{d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(F_1^{(\ell)},F_2^{(\ell)})}{\log\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}\qquad and\qquad \frac{d^{\dagger}_{\mathrm{gr}}(F_1^{(\ell)},F_2^{(\ell)})}{(\log\ell)^2}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})}\frac{1}{\pi^2}.$$

其陈述可扩展至均匀随机边或均匀随机顶点的情形，见定理5.3 和推论5.6。实际上，我们将先证明关于均匀随机边的结果。主要思路是证明，从根到两条均匀随机边的测地线以高概率会“在根附近分开”。因此，地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 看起来像一颗有许多分支的星形图，如图 1所示。

5.1 两条随机边以高概率位于“不同分支”中

我们在此证明，两条均匀随机边的分支会在根面附近分开。更准确地说，我们希望证明，以第一条随机均匀边为目标的填充探索以较高概率会在距离探索结束相对较远的时刻吞没第二条边。然而，我们并不知道以随机均匀边为目标的 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的剥离探索分布，但引理 3.3 为我们提供了一种方法，可以将在 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}$ 下关于带目标的地图的结果转移到配有均匀边的 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 上。有鉴于此，设 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 为一张带有目标二面的随机地图，其分布为 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}$。目标二面 □ 将扮演第一条均匀边的角色。设 $E^{(\ell)}$ 为 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 的一条均匀随机边（其中 □ 被视为一条边），它将扮演第二条均匀边的角色。设 $\tau_{-1}^{(\ell)}$ 为与 $P(\ell)\,1$ 相关联的周长过程在 -1 处终止的时刻，该过程对应于对 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 进行的填充探索 $(\mathfrak{e}_n^{(\ell)})_{n\geq 0}$，也就是该填充探索的持续时间。回忆命题 2.4， $\tau_{-1}^{(\ell)}/\ell$ 依分布收敛。

引理 5.2。我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\ell\to\infty}\mathbb{P}(\square\ and\ E^{(\ell)}\ lie\ in\ the\ same\ hole\ until\ time\ (\tau_{-1}^{(\ell)}-\varepsilon\ell)\vee 0)=0.$$

证明。 考虑填充探索 $(\mathfrak{e}_n^{(\ell)})_{n\geq 0}$。我们的思路是证明，在一个发生得“不太晚”的分裂事件中， □ 和 $E^{(\ell)}$ 位于不同的洞中。根据命题 2.4，我们知道

$$\left(\frac{P_1^{(\ell)}(\ell t)}{\ell}\right)_{t\geq 0}\xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathrm{d})}\left(\Upsilon^{\downarrow}(p_{\mathbf{q}}t)\right)_{t\geq 0},\tag{5.1}$$

其中 $\Upsilon^{\downarrow}$ 是从 1 出发并以在 0 处连续消亡为条件的柯西过程 Υ 。令$\zeta := \inf\{t \geq 0;\ \Upsilon^{\downarrow}(t) = 0\}$ 为 $\Upsilon^{\downarrow}$ 的寿命。

首先，我们注意到，大小超过 $\Upsilon^{\downarrow}$ 一半的负跳跃数量几乎必然是无限的。更准确地说

$$N := \#\left\{t \in [0,\zeta[;\ \Upsilon^{\downarrow}(t) < \frac{\Upsilon^{\downarrow}(t-)}{2}\right\} = \infty \text{ a.s.}$$

˜事实上，根据 [2] 的命题 5.2（在 $\theta = 1,\ \rho = 1/2,\ \beta = 1,\ \gamma = 1/2,\ \hat{}\gamma = 1/2$ 的情形下），经过时间变换后，$\Upsilon^{\downarrow}$ 是一个莱维过程的指数。设 Λ 为其莱维测度。根据 [2] 的第 4.3 节，该莱维过程的拉普拉斯指数为 $\Phi^{-}(q) = \kappa_1(q-3/2) = (q-1/2)\tan(\pi q)$，其中 $\omega_- = 3/2$ 对于 $q \in (-1/2,\ 3/2)$。可以验证，Λ 是 $\frac{1}{\pi\sqrt{x}\ (1-x)_2}dx$ 在映射 $x \mapsto \log x$ 下的像测度。于是，N 是一个期望为

$$\mathbb{E}N = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{-\log 2} \Lambda(dy) = \infty \times \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1-x)^2}dx = \infty,$$

因此，几乎必然有 $N = \infty$。

此外，由（5.1），直到时刻 $\tau_{(\ell)-1} - \varepsilon\ell$，大小大于 $P_{(\ell)1}(\cdot)$ 的负跳跃次数 $N_{\varepsilon}^{(\ell)}$ 在分布意义下收敛于大小大于 $\Upsilon^{\downarrow}(\cdot-)$ 的 $\Upsilon^{\downarrow}$ 的负跳跃次数 N_{ε}，而后者直到时刻 $\zeta - \varepsilon p_{\mathbf{q}}$；当 $\ell \to \infty$ 时，该数进一步几乎必然趋于 $N = \infty$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。

现在固定这样一个步骤：令 n 满足 $P_{(\ell)1}(n+1) < P_1^{(\ell)}(n)/2$。我们将 $k_1 = P_{(\ell)1}(n+1)$ 和 $k_2 = P_1^{(\ell)}(n) - P_1^{(\ell)}(n+1) - 1$ 记为此步骤产生的两个洞的半周长。下面证明：条件为均匀随机边 $E^{(\ell)}$ 位于填充的洞 $\mathfrak{h}$（即不包含 $\square$ 的那个洞）中，且它不是从 $\mathfrak{e}_n^{(\ell)}$ 得到的已探索区域 $\mathfrak{e}$ 的内部边（该区域是在产生两个洞后、填充洞 $\mathfrak{h}$ 前得到的），并且满足 $\mathfrak{e}$ 时，只要 k_2 足够大，该概率就大于 $1/3$。当 $P_1^{(\ell)}(n)$ 足够大时，这一条件便得到满足。

确实，根据命题3.1，在给定 $\mathfrak{e}$的条件下，填充这两个洞的地图相互独立$\mathbf{q}$-玻尔兹曼平面图，周长分别对应；其中包含 $\square$ 的地图具有一个度为 2 的目标面。因此，若对所有 $\ell \geq 1,\ p \geq 0,\ n \geq 1$,

$$W_p^{(\ell)}[n] = \sum_{\substack{\mathfrak{m}_{\square} \in \mathcal{M}_p^{(\ell)} \\ |\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})| = n}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}_{\square}) \qquad \text{and} \qquad W^{(\ell)}[n] = \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}^{(\ell)} \\ |\mathrm{Edges}(\mathfrak{m})| = n}} w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}),$$

then

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E^{(\ell)} \in \mathfrak{h} | \mathfrak{e} \text{ and } E^{(\ell)} \notin \mathfrak{e}) &= \sum_{\mathfrak{u}_1 \in \mathcal{M}_1^{(k_1)}, \mathfrak{u}_2 \in \mathcal{M}^{(k_2)}} \frac{|\mathrm{Edges}(\mathfrak{u}_2)|}{|\mathrm{Edges}(\mathfrak{u}_1)| - 1 + |\mathrm{Edges}(\mathfrak{u}_2)|} \frac{w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{u}_1)}{W_1^{(k_1)}} \frac{w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{u}_2)}{W^{(k_2)}} \\
&= \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{n_2}{n_1 + n_2 - 1} \frac{W_1^{(k_1)}[n_1]}{W_1^{(k_1)}} \frac{W^{(k_2)}[n_2]}{W^{(k_2)}} \\
&= \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1 + n_2 - 1} \frac{W_1^{(k_1)}[n_1]}{W_1^{(k_1)}} \frac{W_1^{(k_2)}[n_2+1]}{W_1^{(k_2)}} \frac{W_1^{(k_2)}}{W^{(k_2)}},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立，是因为考虑到将目标面拉链闭合会产生一条特殊边，我们有 $W_1^{(\ell)}[n+1] = nW^{(\ell)}[n]$ 对所有 $n \geq 1$均成立。然而，众所周知，

$$\forall n \geq 1, \qquad W_1^{(\ell)}[n] = \frac{\ell}{\ell+1}\binom{2\ell}{\ell}(c_{\mathbf{q}}/4)^{\ell+1}\mathbb{P}(\tau_{-\ell-1}(Y) = n), \tag{5.2}$$

其中 Y 是一个 μ-随机游走，从零开始，定义如引理 4.4所述，例如参见[13]中的定理 3.12。因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1,n_2\geq 1} \frac{1}{n_1+n_2-1}\frac{W_1^{(k_1)}[n_1]}{W_1^{(k_1)}}\frac{W_1^{(k_2)}[n_2+1]}{W_1^{(k_2)}}\frac{W_1^{(k_2)}}{W^{(k_2)}} \\
&\qquad = \sum_{n_1,n_2\geq 1} \frac{1}{n_1+n_2-1}\mathbb{P}(\tau_{-k_1-1}(Y) = n_1)\mathbb{P}(\tau_{-k_2-1}(Y) = n_2+1)\frac{W_1^{(k_2)}}{W^{(k_2)}} \\
&\qquad = \mathbb{E}\frac{1}{\tau_{-k_1-k_2-2}(Y)-2}\frac{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_2)c_{\mathbf{q}}^{k_2+1}}{W^{(k_2)}} \text{ by (3.1).}
\end{aligned}$$

此外，由于我们有 $W_1^{(\ell)}[n+1] = nW^{(\ell)}[n]$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立，因此利用 (5.2)，可知对所有 $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}\frac{1}{\tau_{-k-1}(Y)-1} = \frac{W^{(k)}}{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k)c_{\mathbf{q}}^{k+1}}.$$

例如， [13]中的公式 (3.11) 也可以找到相同的计算。由此可知，由于$\mathbb{E}1/(\tau_{-k-1}(Y)-2) \sim \mathbb{E}1/(\tau_{-k-1}(Y)-1)$ 当 $k \to \infty$时,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\frac{1}{\tau_{-k_1-k_2-2}(Y)-2}\frac{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_2)c_{\mathbf{q}}^{k_2+1}}{W^{(k_2)}} &\underset{k_2\to\infty}{\sim} \frac{W^{(k_1+k_2+1)}}{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_1+k_2+1)c_{\mathbf{q}}^{k_1+k_2+2}}\frac{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_2)c_{\mathbf{q}}^{k_2+1}}{W^{(k_2)}} \\
&\underset{k_2\to\infty}{\sim} \frac{\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}c_{\mathbf{q}}^{k_1+k_2+2}\frac{1}{(k_1+k_2)^2}}{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_1+k_2+1)c_{\mathbf{q}}^{k_1+k_2+2}}\frac{\frac{1}{2}h_1^{\downarrow}(k_2)c_{\mathbf{q}}^{k_2+1}}{\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}c_{\mathbf{q}}^{k_2+1}\frac{1}{k_2^2}}} \text{ by (1.1)} \\
&\underset{k_2\to\infty}{\sim} \frac{k_2^{3/2}}{(k_1+k_2)^{3/2}} \geq \frac{1}{2^{3/2}} > \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

其中我们使用 d 根据假设， $k_1 < k_2 + 1$ 。由上述计算可得 th at

$$\mathbb{P}(E^{(\ell)} \in \mathfrak{h} \mid \mathfrak{e} \text{ and } E^{(\ell)} \notin \mathfrak{e}) > \frac{1}{3}$$

若 $P_1^{(\ell)}(n)$ 足够大。因此， $\square$ 和 $E^{(\ell)}$ 在探索过程中，直到 k次负跳跃时仍位于同一个洞中的概率，小于 $P_1^{(\ell)}$ 大于周长一半时的 $(2/3)^k$，当 ℓ足够大时成立。我们还利用了这一事实：在这次 k 跳跃时，特殊洞的周长为 ℓ 量级，这由 (5.1) 可得。因此，

$$\limsup_{\ell\to\infty} \mathbb{P}(\square \text{ and } E^{(\ell)} \text{ lie in the same hole until time } (\zeta-\varepsilon)\ell) \leq \mathbb{E}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{N_\varepsilon}\right).$$

由控制收敛可得结论。 $\square$

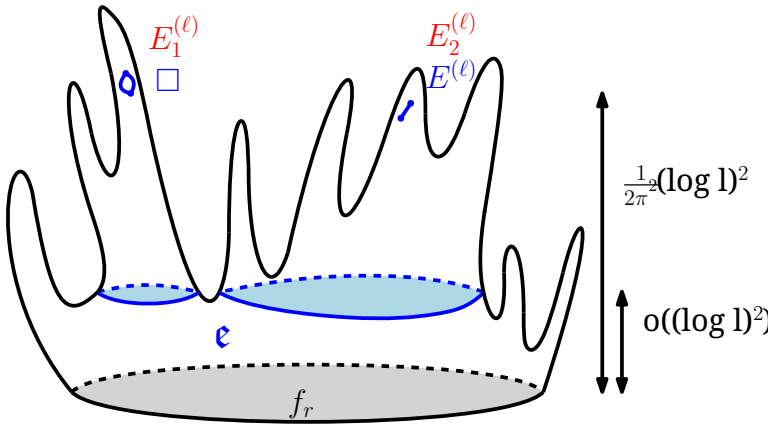

图5：定理证明示意图 5.3：地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ (或 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$) 表示为一棵仙人掌图，其高度对应于到根面的距离 f_r。蓝色的洞是已探索区域的两个洞 $\mathfrak{e}$。目标 2-面 $\square$ 以及均匀随机边 $E^{(\ell)}$ 在 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 上的蓝色表示，分别对应于随机均匀边 $E_1^{(\ell)}$ 和 $E_2^{(\ell)}$ 在 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 上的红色表示。

5.2 两条均匀随机边、顶点或面的距离

定理 5.3. 如果 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 服从分布 $\mathbb{P}^{(\ell)}$，且 $E_1^{(\ell)}$、$E_2^{(\ell)}$ 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的两条均匀随机边，那么

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(E_1^{(\ell)},E_2^{(\ell)})}{(\log \ell)^2} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2} \quad \textit{and} \quad \frac{d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(E_1^{(\ell)},E_2^{(\ell)})}{\log \ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}$$

证明的大致思路见图 5。关键步骤是关于分布为 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 的地图 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}$ 的一个中间结果。

引理 5.4. 如果 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 是一个目标分布为 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}$ 的随机地图，并且 $E^{(\ell)}$ 是 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 上的一条均匀随机边（其中目标2-面已被缝合，并视为一条边），那么

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\square,E^{(\ell)})-d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E^{(\ell)})}{(\log \ell)^2} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2\pi^2} \quad \textit{and} \quad \frac{d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(\square,E^{(\ell)})-d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,E^{(\ell)})}{\log \ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}$$

证明。我们考虑对 $\mathfrak{M}_1^{(\ell)}$ 进行的填充剥离探索，采用 $\mathcal{A}_{\mathrm{layers}}$ 算法来计算对偶图距离，并采用 $\mathcal{A}_{\mathrm{uniform}}$ 算法来计算首次通过渗流距离。令 n 为在一次类型为 G 的事件过程中，$\square$ 与 $E^{(\ell)}$ 位于两个不同洞中的时刻 $\mathfrak{h}_1$，并令 $\mathfrak{h}_2$ （若其存在）。根据引理 5.2，我们知道当 ε 足够小时，$n \le \tau_{-1}^{(\ell)} - \varepsilon\ell$ 以较高概率成立。我们还将 $\mathfrak{e}$ 称为识别这些边后、填充包含 $E^{(\ell)}$的洞之前所得到的子地图。

我们采用对偶图距离，因此使用分层剥离算法。需要指出的是，从 $\square$ 到 $E^{(\ell)}$ 的路径必须经过 $\mathfrak{e}$（见图 5），因此

$$d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\square,E^{(\ell)}) \ge d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\partial\mathfrak{e},\square)+d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\partial\mathfrak{e},E^{(\ell)}).$$

但在时刻 n，周长 $P_1(n)$ 以较大概率大于某个常数乘以 ℓ，这归功于命题 2.4，因为 $n \le \tau_{-1}-\varepsilon\ell$。因此，根据命题 4.2，并且由于地图

填充洞 $\mathfrak{h}_1$ 服从分布 $\mathbb{P}^{(P_1(n))\,1}$，在给定截至时刻 n 的探索条件下，根据命题3.1，

$$d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\partial\mathfrak{e},\square)=\frac{(\log\ell)^2}{2\pi^2}(1+o(1))\qquad\text{and}\qquad d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\square)=\frac{(\log\ell)^2}{2\pi^2}(1+o(1))$$

在 n 存在且 $n\le\tau_{-1}-\varepsilon\ell$的事件上，以概率收敛。特别地，在同一事件上，以概率收敛，$d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\ \partial\mathfrak{e})=o((\log\ell)^2)$。由此可得，$d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\ E^{(\ell)})=d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\partial\mathfrak{e},\ E^{(\ell)})+o((\log\ell)^2)$，以概率收敛。因此，以概率收敛，

$$d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\square,E^{(\ell)})\ge\frac{(\log\ell)^2}{2\pi^2}(1+o(1))+d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E^{(\ell)}).$$

反向不等式直接由三角不等式和命题 4.2 得出。对于首次通过渗流距离，使用命题 4.1，同样的推理也成立。 □

注 *5.5.* 在上述证明中，我们看到 $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\partial\mathfrak{e})=o((\log\ell)^2)$，且 $d^{\dagger}\text{-}fpp(f_r,\partial\mathfrak{e})=o(\log\ell)$。不过，利用命题 *2.4* 和引理 *5.2*，很容易证明 $d^{\dagger}\text{-}fpp(f_r,\partial\mathfrak{e})=O(1)$ 依概率成立。此外，我们指出，引理 *6.6* 与引理 *5.2* 一起，可以证明 $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\partial\mathfrak{e})=O(\log\ell)$ 依概率成立。

定理5.3 可通过恰当地应用引理3.3得出：

定理*5.3*的证明。对于对偶图距离，我们将引理 3.3 和引理 5.4 应用于函数 φ_ℓ 定义如下

$$\forall\mathfrak{m}_\square\in\mathcal{M}_1^{(\ell)},\qquad\varphi_\ell(\mathfrak{m}_\square)=\mathbb{E}\left(\left|\frac{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\square,E(\mathfrak{m}_\square)-d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E(\mathfrak{m}_\square))}{(\log\ell)^2}-\frac{1}{2\pi^2}\right|\wedge 1\right),$$

其中 $E(\mathfrak{m}_\square)$是 $\mathfrak{m}_\square$ 上的一条随机均匀边（其中目标二面被视为一条边）。因此，我们得到：若 $E_1^{(\ell)}$ 和 $E_2^{(\ell)}$ 是$\mathfrak{M}^{(\ell)}$中的两条相互独立的随机均匀边，则

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(E_1^{(\ell)},E_2^{(\ell)})-d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E_2^{(\ell)})}{(\log\ell)^2}-\frac{1}{2\pi^2}\right|\wedge 1\right)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

定理中的第一个收敛结论，随后再次应用命题 4.2即可得出。对于首次通过渗流距离，函数 φ_ℓ 的定义类似，但其期望还涉及定义首次通过渗流距离的指数权重。

□

采用与命题4.6 证明中相同的思路，我们还得到以下结果

推论 5.6。若 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 服从分布 $\mathbb{P}^{(\ell)}$，且 V_1、V_2 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$中的两个均匀顶点，则

$$\frac{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(V_1,V_2)}{(\log\ell)^2}\underset{\ell\to\infty}{\overset{(\mathbb{P})}{\longrightarrow}}\frac{1}{\pi^2}\quad and\quad\frac{d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(V_1,V_2)}{\log\ell}\underset{\ell\to\infty}{\overset{(\mathbb{P})}{\longrightarrow}}\frac{2}{\pi^2 p_{\mathbf{q}}}.$$

证明。我们给出对偶图距离的证明；同样的思路也适用于首次通过渗流距离。我们可以考虑 $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\vec{E}_1,\vec{E}_2)$，其中 $\vec{E}_1$,$\vec{E}_2$ 是独立同分布的有向边，其分布与 (4.4) 中 $\vec{E}$ 的分布相同，因为 $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\vec{E}_1,\vec{E}_2)-\deg(V(\ell)\,1)-\deg(V(\ell)\,2)\le d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(V(\ell)\,1,V(\ell)\,2)\le d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\vec{E}_1,\vec{E}_2)$；又由引理 4.5，$\deg V(\ell)\,1$ 和 $\deg V(\ell)\,2$ 随机占优于一个不依赖于 ℓ 的随机变量。最后，沿用命题 4.6 证明中的相同步骤，并应用定理 5.3，即可得出结论。

□

最后，我们沿用第 5.1 节推论证明中的相同思路，证明推论 1.1 ，并在第 4.3 小节中应用定理 5.3。

6 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 的直径

本节的主要目的是给出 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 在图距离和首次通过渗流距离下的直径界，并证明定理1.2。上界通过一阶矩方法以及对均匀随机边高度的大偏差分析得到，后者借助超鞅实现。其中两个超鞅（引理 6.2 和 6.9中的）与鞅 $(M_n^{(\ell)})_{n\geq 0}$ 有关。该鞅由 P_ℓ 下的周长过程 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 按如下方式定义：

$$\forall n\geq 0,\qquad M_n^{(\ell)}=\frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\nu([-P_\ell(j)+1,\infty))+\nu(-P_\ell(j)-\ell)}\vee \mathbf{1}_{P_\ell(j)=-\ell}\right). \tag{6.1}$$

确实，这是一个鞅，因为对于所有的 $n\geq 0$，若 $P_\ell(n)\geq 1$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(M_{n+1}^{(\ell)}\middle|\mathcal{F}_n\right)=&\frac{h_\ell^{\downarrow}(-\ell)}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))}\nu(-P_\ell(n)-\ell)\frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(-\ell)}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\nu([-P_\ell(j)+1,\infty))+\nu(-P_\ell(j)-\ell)}\\&+\sum_{k\geq 1-P_\ell(n)}\frac{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n)+k)}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))}\nu(k)\frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n)+k)}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\nu([-P_\ell(j)+1,\infty))+\nu(-P_\ell(j)-\ell)}\\=&M_n^{(\ell)},\end{aligned}$$

而指示函数 $\mathbf{1}_{P_\ell(j)=-\ell}$ 使得在 P_ℓ 于 $-\ell$处被吸收后，仍能保持鞅性质。这个鞅特别适合研究 3/2-稳定地图上的距离，这归因于步长分布的渐近行为（1.3）：直观而言，由于 ν， $\nu((-\infty,-P_\ell(n)))\approx p_{\mathbf{q}}/P_\ell(n)$，上述乘积可近似为 $\sum_{j=0}^{n-1}1/P_\ell(j)$ 的指数形式（乘以适当的常数），因此可通过集中不等式与首次通过渗流距离（4.1）联系起来。

一个值得注意的事实是，我们的上界表明，首次通过渗流距离下的直径在很大程度上取决于 ν 的尾部，也取决于 ν的非渐近行为。因此，尽管首次通过渗流直径与均匀点之间的距离处于同一量级，它们的比值却不会收敛到一个普适常数。相反，对于对偶图距离，直径的上界是普适的，这与定理1.1中随机均匀面高度的普适标度极限相呼应。

6.1 首次通过渗流距离的直径上界

在本小节中，我们给出 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 在首次通过渗流距离下的直径上界。令 $\gamma(\mathbf{q}):=\min_{k,\ell\geq 1}k(\nu((-\infty,-k])-\nu(-\ell-k)))$，由 (1.3可知其定义良好，且属于(0,1)。下面的命题推出定理1.2的第一个上界。

命题 6.1. 令 直径$^{\dagger}_{\text{首次通过渗流}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})$ 表示 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 在首次通过渗流距离下的直径。则存在一个常数 $C>0$，它不依赖于 $\mathbf{q}$，使得以概率 $1-o(1)$ 当 $\ell\to\infty$ 时，

$$\frac{\mathrm{Diam}_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(\mathfrak{M}^{(\ell)})}{\log\ell}\leq C\left(1+\frac{1}{\gamma(\mathbf{q})}\right).$$

为证明上述命题，我们引入与周长过程相关、并与鞅相关的一族上鞅（6.1）：

引理 6.2。设 $\lambda > 0$。对于所有 $\ell \geq 1$、$n \geq 0$，令

$$M_n^{\lambda,\ell} = \frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))} \exp\left(\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{P_\ell(j)} \mathbf{1}_{P_\ell(j)>0}\right).$$

若 $\lambda \leq \gamma(\mathbf{q})$，则对于所有 $\ell \geq 1$，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，$(M^{\lambda,\ell}_n)_{n\geq 0}$ 是关于与剥离探索相关的滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 的超鞅。

证明。若 $\lambda \leq \gamma(\mathbf{q})$，则对于所有 $\ell \geq 1$，$n \geq 0$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(M_{n+1}^{\lambda,\ell} \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \sum_{\substack{k>-P_\ell(n) \\ \text{or } k=-P_\ell(n)-\ell}} \frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n)+k)} \exp\left(\lambda \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{P_\ell(j)} \mathbf{1}_{P_\ell(j)>0}\right) \frac{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n)+k)}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))} \nu(k) \\
&= M_n^{\lambda,\ell} e^{\lambda \frac{1}{P_\ell(n)} \mathbf{1}_{P_\ell(n)>0}} \left(\left(\sum_{k>-P_\ell(n)} \nu(k)\right) + \nu(-P_\ell(n)-\ell)\right) \\
&\leq M_n^{\lambda,\ell},
\end{aligned}$$

根据 $\gamma(\mathbf{q})$ 的定义 < 1，并利用 $\exp((\lambda/P_\ell(n))\mathbf{1}_{P_\ell(n)>0}) \leq 1/(1-(\lambda/P_\ell(n))\mathbf{1}_{P_\ell(n)>0})$。

□

上述超鞅给出了根到一条均匀随机边的距离的大偏差不等式。

推论 6.3。设 $c > 0$。设 E 是 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的一条均匀随机边。若 $K > 0$ 足够大，则

$$\mathbb{P}\left(d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r, E) \geq K \log \ell\right) = O(\ell^{-c}) \text{ when } \ell \to \infty.$$

可以选取 $K = C'(1+c)(1+1/\gamma(\mathbf{q}))$，其中 C' 足够大，且不依赖于 $\mathbf{q}$，c。

证明。令 $c > 0$。首先，由于到边的距离小于解开该边所得的 2-面距离，并且根据（3.4），

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r, E) \geq K \log \ell\right) &\leq \frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}} \mathbb{E}_1^{(\ell)}\left(\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square) - 1} \mathbf{1}_{d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,\square) \geq K \log \ell}\right) \\
&\leq \frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}} \mathbb{P}_1^{(\ell)}\left(d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r, \square) \geq K \log \ell\right).
\end{aligned}$$

但是，由于（3.3），我们知道 $W^{(\ell)}_1/W^{(\ell)}$ 是一个 $O(\ell^{3/2})$，因此只需证明对于 $\mathbb{P}_1^{(\ell)}(d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r, \square) \geq K \log \ell)$ 的类似陈述即可。此外，回顾（4.1），可以看出，只需证明存在 $K' > 0$ 使得

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{1}{P_\ell(k)} \geq K' \log \ell\right) = O(\ell^{-c}) \text{ when } \ell \to \infty. \tag{6.2}$$

事实上，若我们假设（6.2），那么通过对周长过程进行条件化并应用伯恩斯坦不等式（我们所使用的版本来自 [25] 的推论 2.10），可得存在一个常数 $C>0$，使得对所有 $\ell\geq 1$ 以及所有 $t>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\left|\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{\mathcal{E}_k-1}{P_\ell(k)}\right|>t\log\ell\,\middle|\,P_\ell\right)&\leq 2\exp\left(-C\min\left(\frac{t^2(\log\ell)^2}{\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)^2}},\frac{t\log\ell}{\max_{0\leq k\leq\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}}\right)\right)\\&\leq 2\exp\left(-C\min\left(\frac{t^2(\log\ell)^2}{\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}},t\log\ell\right)\right)\\&\leq 2\ell^{-(\frac{Ct^2}{K'}\wedge Ct)}\text{ with probability at least }1-O(\ell^{-c}).\end{aligned}$$

然后，取使得 $\frac{Ct^2}{K'}\wedge Ct\geq c$ 的 $t>0$，并令 $K=\frac{K'+t}{2}$，即可得出结论。 ——

现在，我们来证明（6.2）。令 $\lambda\in(0,\ \gamma(\mathbf{q})]$，使得对所有 $\ell\geq 1$，$M^{\lambda,\ell}$ 都是一个超鞅（由引理6.2给出）。然后，利用马尔可夫不等式和法图引理,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}\geq K'\log\ell\right)&\leq \ell^{-\lambda K'}\mathbb{E}_\ell^{(1)}e^{\lambda\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}}\\&=\ell^{-\lambda K'}\mathbb{E}_\ell^{(1)}M_{\tau_{-\ell}}^{\lambda,\ell}\\&\leq \ell^{-\lambda K'}\mathbb{E}_\ell^{(1)}M_0^{\lambda,\ell}=\ell^{-\lambda K'}\frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(1)}=O(\ell^{3/2-\lambda K'})=O(\ell^{-c})\end{aligned}$$

对于 $K'\geq(c+3/2)/\lambda$。 □

命题 *6.1* 的证明。 首先，由于直径至多为到根面的最大距离的两倍，只需证明存在 $K>0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\exists e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)}),\ d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,e)\geq K\log\ell\right)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

还利用了如下事实：对于所有 $f\in\mathsf{Faces}(\mathfrak{M}^{(\ell)})$，若 e 是围绕 f 的一条边，则 $d^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}(f_r,\ f)\leq d^{\dagger}{}_{\mathrm{fpp}}(f_r,\ e)+\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是参数为 1 的指数随机变量。
接下来，我们判断边数是否过多：令 $\varepsilon>0$。

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\exists e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)}),\ d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,e)\geq K\log\ell\right)\\&\leq\ \mathbb{E}\left(\#\left\{e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)});\ d_{\mathrm{fpp}}^{\dagger}(f_r,e)\geq K\log\ell\right\}\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\leq\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}}\right)\\&\quad+\mathbb{P}\left(\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\geq\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\right)\end{aligned}$$

且最后一项小于 ε 对于 ℓ 足够大的（3.3）。此后我们将重点关注第一项

项。给定 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$，令 E 为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的均匀随机边。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\#\left\{e\in \mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)});\ d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r,e)\geq K\log\ell\right\}\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\leq \frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}}\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\mathbb{P}(d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r,E)\geq K\log\ell|\mathfrak{M}^{(\ell)})\right)\\
&=\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\mathbb{P}(d^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(f_r,E)\geq K\log\ell).
\end{aligned}$$

最后一行的表达式在 $\ell\to\infty$ 若 K 根据推论6.3选得足够大时趋于零。

□

6.2 首次通过渗流距离下直径的下界

推论5.1已经给出了直径的一个下界。然而，这个下界只取决于 ν的尾部行为。事实上，对于首次通过渗流距离，直径很大程度上取决于 ν。例如，我们来展示 q_1，或等价地 $\nu(0)$对直径渐近行为的影响；这尤其意味着定理1.2中的第一个下界，从而完成该定理的证明。

命题 6.4。对于所有 $\delta>0$，以概率 $1-o(1)$ 当 $\ell\to\infty$ 时，

$$\frac{\mathrm{diam}^{\dagger}_{\mathrm{fpp}}(\mathfrak{M}^{(\ell)})}{\log\ell}\geq\frac{3}{4(1-q_1^2)}-\delta.$$

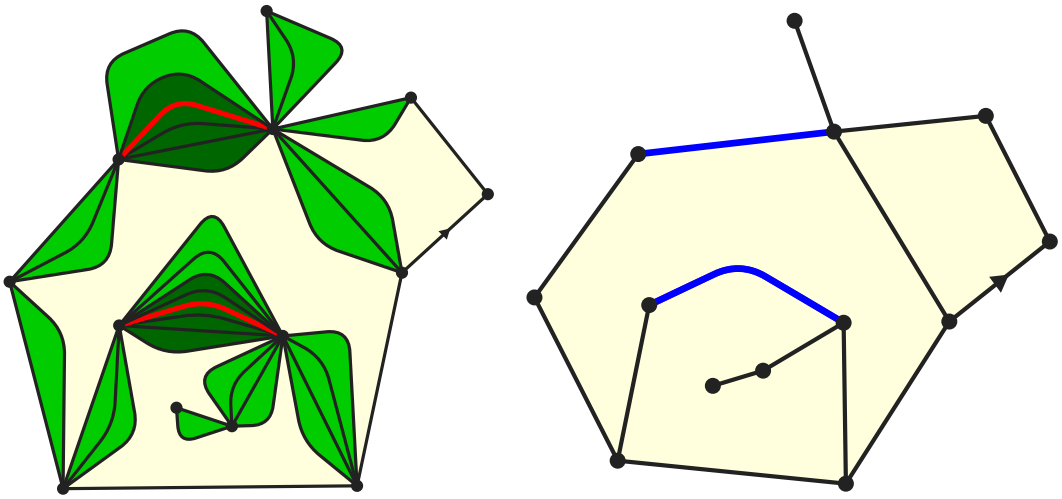

图 6：左图为地图 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$，其中两条随机边 E_1 和 E_2 以红色标出。2-面以绿色显示，构成“西瓜图”；E_1 和 E_2 位于各自西瓜图的中间。仅由2-面构成、以 E_1 和 E_2 为中心的最大快速通路渗流球以深绿色标出。右图为从 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中删除2-面后得到的地图 $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}$。蓝色边是两条随机均匀边 $\tilde{E_1}$ 和 E_2，分别对应包含 E_1 和 E_2的两个西瓜图。

证明。 我们用二阶矩方法证明该结论。若 e 是 $\mathfrak{m}^{(\ell)}$的一条边，令 $R(e)$表示以 e 为中心、仅由度为 2的面构成的最大快速通路渗流球的半径。注意，这个快速通路渗流球包含在由2度面以及端点与 e相同的边组成的极大子图中，该子图称为包含 e 的“西瓜图”（见图 6）。

根据 [13] 中命题 11.10，我们知道 $\mathfrak{m}^{(\ell)}$ 由 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 将每个西瓜图替换为一条边（见图6）得到的，是一个周长为 $\tilde{\mathbf{q}}$的玻尔兹曼图，其权重序列 2ℓ $\tilde{\mathbf{q}}$定义如下：

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = 0 \\ \tilde{q}_k = q_k/(1-q_1)^k \quad \text{for } k \geq 2. \end{cases}$$

此外，在给定 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 的条件下，地图 $\mathfrak{m}^{(\ell)}$ 是通过在 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 的每条边上独立添加几何分布数量的 2-面得到的，参数为 q_1。我们用 $M(\tilde{e})$ 表示与 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 的一条边 $\tilde{e}$ 相对应的西瓜图的边数；因此，在给定 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 的条件下，随机变量 $M(\tilde{e})-1$ 相互独立同分布，且服从参数为 q_1 的几何分布。根据 [13] 中命题 11.10 上方的段落，我们还知道 $c_{\mathbf{q}} = c_{\tilde{\mathbf{q}}}/(1-q_1)$，并且 $\tilde{\mathbf{q}}$ 再次是一个类型 2 的临界权重序列。

If $\tilde{E}$ 是.....中的一条随机均匀边 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 和 E 是西瓜图 中间的边，对应于 E （如果西瓜图的边数为偶数，则从中间的两条边中均匀选择 E ）。那么，在给定 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 和 $\tilde{E}$的条件下，随机变量$M(E)$服从参数为 q_1 、从 1 开始取值的几何分布。因此， $R(E)$有一个下界，为 $\lfloor M(E)/2 \rfloor - 1$ 个参数为 2 的指数随机变量之和（即其期望为 $1/2$）。由此，对所有 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(R(E) \geq t \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}, \tilde{E}\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor M(\tilde{E})/2 \rfloor - 1} \frac{\mathcal{E}_i}{2} \geq t \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}, \tilde{E}\right),$$

其中， $\mathcal{E}_i$是参数为 1 的独立同分布指数随机变量，并且与$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 和 $M(\tilde{E})$ 相互独立。但可以对其给出下界：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\lfloor M(\tilde{E})/2 \rfloor - 1} \frac{\mathcal{E}_i}{2} \geq t \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}, \tilde{E}\right) &= \sum_{k=4}^{\infty} q_1^{k-1}(1-q_1) \int_{2t}^{\infty} \frac{x^{\lfloor k/2 \rfloor - 2} e^{-x}}{(\lfloor k/2 \rfloor - 2)!} dx \\ &\geq q_1^5(1-q_1) \int_{2t}^{\infty} \sum_{k=4}^{\infty} (q_1^2)^{\lfloor k/2 \rfloor - 2} \frac{x^{\lfloor k/2 \rfloor - 2} e^{-x}}{(\lfloor k/2 \rfloor - 2)!} dx \\ &= 2q_1^5(1-q_1) \int_{2t}^{\infty} e^{(q_1^2-1)x} dx \\ &= \frac{2q_1^5}{1+q_1} e^{-2(1-q_1^2)t}. \end{aligned}$$

今后，令 $\tilde{E}_1$、.....、$\tilde{E}_{\lfloor \ell^{3/2} \rfloor}$ 为 $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$ 的相互独立的随机均匀边（在给定$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\ell)}$的条件下）。对于所有 $1 \leq i \leq \lfloor \ell^{3/2} \rfloor$，我们将 $\mathfrak{m}^{(\ell)}$ 中西瓜图中心对应于 E_i 的边 E_i 记为（如果西瓜图的边数为偶数，则在中间的两条边中均匀随机选取一条）。我们仍将 E_i 处以E_i为中心且仅包含 2-面的最大快速通路渗流球的半径记为 R。为简洁起见，我们省略 $\lfloor \cdot \rfloor$。如果 $t > 0$，那么根据二阶

矩方法，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\exists i \le \ell^{3/2}, R(E_i) \ge t\log\ell \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}\right) \\
&\quad\ge \frac{\mathbb{E}(\#\left\{i \in [\![1,\ell^{3/2}]\!], R(E_i) \ge t\log\ell\right\}|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})^2}{\mathbb{E}((\#\left\{i \in [\![1,\ell^{3/2}]\!], R(E_i) \ge t\log\ell\right\})^2|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})} \\
&\quad= \frac{\ell^3\mathbb{P}(R(E) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})^2}{\ell^{3/2}\mathbb{P}(R(E) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) + \ell^{3/2}(\ell^{3/2}-1)\mathbb{P}(R(E_1),R(E_2) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})}.
\end{aligned}$$

No ˜ ˜w，可以区分是否 $E_1 = E_2$。那么，当 $\ell \to \infty$时，以概率收敛 ，

$\mathbb{P}(R(E_1)\ R(E_2) \ge t$对数 $\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})$

$$\begin{aligned}
&\le \mathbb{P}(\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 \text{ and } R(E_1) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) + \mathbb{P}(\tilde{E}_1 \ne \tilde{E}_2 \text{ and } R(E_1),R(E_2) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) \\
&= \frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})}\mathbb{P}(R(E) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) + \frac{\#\mathrm{Edges}(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})-1}{\#\mathrm{Edges}(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})}\mathbb{P}(R(E_1),R(E_2) \ge t\log\ell|\tilde{E}_1 \ne \tilde{E}_2,\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) \\
&= O(\ell^{-3/2})\mathbb{P}(R(E) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) + \mathbb{P}(R(E) \ge t\log\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})^2,
\end{aligned}$$

其中，最后一行是由#边$(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)})\ell^{-3/2}$ 在 $\ell \to \infty$时依分布收敛得到的，参见例如 [13]中的命题10.4。取 $t < 3/(4(1-q_1^2))$ 可确保 $\ell^{3/2}\mathbb{P}(R(E) \ge t$对数 $\ell|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}) \to \infty$在概率意义下当 $\ell \to \infty$成立，因此

$$\mathbb{P}\left(\exists i \le \ell^{3/2}, R(E_i) \ge t\log\ell \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{M}}^{(\ell)}\right) \xrightarrow[\ell\to\infty]{(\mathbb{P})} 1.$$

由此便得到了我们想要证明的结论。 □

6.3 图距离下直径的上界

接下来，我们给出 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 在图距离下的直径上界。下面的命题给出了定理1.2的第二个上界。与首次通过渗流距离的情形不同，图距离的上界是普适的（即不依赖于$\mathbf{q}$）。

命题 6.5。令 $\mathrm{Diam}_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\mathfrak{M}^{(\ell)})$ 表示 $\mathfrak{M}^{(\ell,\dagger)}$ 关于图距离的直径。那么对于所有$\delta > 0$，当 $\ell \to \infty$时，以概率 $1 - o(1)$，

$$\frac{\mathrm{Diam}_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(\mathfrak{M}^{(\ell)})}{(\log\ell)^2} \le 18 + \delta.$$

为了证明这一结果，我们需要使用分层剥离探索过程中的高度过程 H_ℓ，以及插值高度过程。我们首先回顾 [11]中插值高度过程的定义。在探索进行到时刻 n 时，令 D_n 表示边界 $\partial\mathfrak{e}_n$ 中高度为 $H_\ell(n)$ 的边数，因此其余 $2P_\ell(n) - D_n$ 条边的高度为$H_\ell(n) + 1$。若 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ 是一个非增函数，则在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，插值高度过程 $H_\ell^f(n)$ 及其在时刻 $n < \tau_{-\ell}$ 的增量定义为

$$H_\ell^f(n) := H_\ell(n) + f(D_n/2P_n) \qquad \text{and} \qquad \Delta H_\ell^f(n) := H_\ell^f(n+1) - H_\ell^f(n),$$

按约定，对 $n \ge \tau_{-\ell}$，令 $H_\ell^f(n) = H_\ell^f(\tau_{-\ell}-1)$。下一个引理是文献 [11]，中引理 6 的一个类比，它从上方界定插值高度的平均增量。

引理 6.6. 设 $0 < \varepsilon < 1$。若 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ 二阶连续可微，且 $f(0) = 1, f(1) = 0, f'(0) = f'(1) = f''(0) = f''(1) = 0$，并且对所有 $x \in [0,1]$，$0 \le -f'(x) \le 1+\varepsilon$，则存在 $C(\varepsilon,q)\ C'(\varepsilon,q) > 0$，使得对所有 $\ell_0 \ge 1, \ell \ge 1, n \ge 0$,

$$\mathbb{E}_\ell^{(\ell_0)}\left(\Delta H_\ell^f(n)\middle|\mathcal{F}_n\right) \le \frac{(1+3\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}\frac{\log(P_\ell(n)) + C(\varepsilon,\mathbf{q})}{P_\ell(n)} \quad and\ \mathbb{E}_\ell^{(\ell_0)}\left(\left(\Delta H_\ell^f(n)\right)^2\middle|\mathcal{F}_n\right) \le \frac{C'(\varepsilon,\mathbf{q})}{P_\ell(n)},$$

其中，$(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ 是与探索过程相关联的滤过。

证明。 证明与 [11], 中的引理 6 的证明基本相同，但稍微复杂一些。事实上，除了乘以因子 $(p+\ell)/(p+k+\ell)$外，出现的项都相同。下面详细说明证明。

我们通过令 $f(x) = 1$ （当 $x \le 0$ ）以及对所有 $x \ge 1$令 $f(x) = 0$，将 f 扩展到 $\mathbb{R}$。如同 [11], 中一样，根据探索的马尔可夫性质（命题 3.1），我们断言 $(H_\ell(n)\ P_\ell(n)\ D_n)_{n\ge 0}$ 是一个马尔可夫链，并且如果 $p \ge 1$ 且 $1 \le d \le 2p$，则

$$\mathbb{E}_\ell^{(\ell_0)}\left(\Delta H_\ell^f(n)\middle|\, P_\ell(n) = p, D_n = d\right) \tag{6.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k)\frac{p+\ell}{p+k+\ell}\frac{h^\uparrow(p+k)}{h^\uparrow(p)}\left[f\left(\frac{d-1}{2p+2k}\right) - f\left(\frac{d}{2p}\right)\right] \tag{6.4}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\nu(-k)}{2}\frac{p+\ell}{p-k+\ell}\frac{h^\uparrow(p-k)}{h^\uparrow(p)}\left[f\left(\frac{d-2k}{2p-2k}\right) - f\left(\frac{d}{2p}\right)\right] \tag{6.5}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\nu(-k)}{2}\frac{p+\ell}{p-k+\ell}\frac{h^\uparrow(p-k)}{h^\uparrow(p)}\left[f\left(\frac{d-1}{2p-2k}\right) - f\left(\frac{d}{2p}\right)\right]. \tag{6.6}$$

事实上，如果 $d = 1$，那么或者 $\Delta H_\ell(n) = 1$ 且 $D_{n+1} = 2P_\ell(n+1)$，因此 $\Delta H_\ell^f(n) = 1 - f(1/(2p))$，其概率为 $\sum_{k=-p+1}^{\infty} \nu(k)(h_\ell^\downarrow(p+k)/h_\ell^\downarrow(p))$; 或者 $\tau_{-\ell} = n+1$，在这种情况下 $\Delta H_\ell^f(n) = 0$，其概率为 $\nu(-p-\ell)/h_\ell^\downarrow(p)$。由于 $f(x) = 1$（并利用（2.1）中 $h^\uparrow$ 和 $h_\ell^\downarrow$ 的定义），这与各项求和一致。现在，在 $d \ge 2$ 的情况下，如果事件 C_{k+1} 发生，则 $P_\ell(n+1) = p+k$ 且 $D_{n+1} = d-1$，从而得到第一行（6.4）（再次利用（2.1））。如果对于 $1 \le k \le p-1$，事件 $G_{\square,k-1}$ 发生，即剥离边与其右侧的一条边重合，则 $P_\ell(n+1) = P_\ell(n) - k$，并且根据 $d-2k$ 的符号，要么 $D_{n+1} = d-2k$ 且 $\Delta H_\ell(n) = 0$，要么 $D_{n+1} = 2P_\ell(n+1)$ 且 $\Delta H_\ell(n) = 1$。由于对所有 $x \le 0$ 都有 $f(x) = 1$，这两种情况已计入第二行（6.5）。如果对于某个 $1 \le k \le p-1$，事件 $G_{k-1,\square}$ 发生，即剥离边与其左侧的一条边重合，则同样有 $P_\ell(n+1) = P_\ell(n) - k$，但 $\Delta H_\ell(n) = 0$，并且根据其中较小者，要么 $D_{n+1} = d-1$，要么 $D_{n+1} = 2P_\ell(n+1)$。这两种情形均已包含在最后一行（6.6）中。最后，如果事件 C_ℓ^{stop} 发生，则根据插值高度过程的定义，$\Delta H_\ell^f(n) = 0$。

为处理这三个和式，我们将使用记号 $y = d/(2p) \in (0,1]$。由泰勒定理，取 $c > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$，均有 $|f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)| \le c(x-y)^2$。我们还将用到以下不等式

$$\forall k > -p, \qquad \sqrt{1+k/p}(1-1/p) \le \frac{h^\uparrow(p+k)}{h^\uparrow(p)} \le \sqrt{1+k/p}(1+1/p).$$

由 (1.3)，取 $N>0$，使得对所有$k\geq N$，均有 $1-\varepsilon<k^2\nu(-k)/p_{\mathbf{q}}<1+\varepsilon$ 和 $1-\varepsilon<k\nu([k,\infty))/p_{\mathbf{q}}<1+\varepsilon$。将中值不等式应用于 f，可知每个和式的前 N 项的贡献为 $O(p^{-1})$，且此估计关于 d、ℓ 一致成立，因此只需对限制在 $|k|\geq N$ 范围内的和式给出上界。由于 $(p+\ell)/(p+k+\ell)\leq 1$，根据上述不等式，第一个和式从 N 到 ∞ 的部分仅含正项，且小于

$$\sum_{k=N}^{\infty}\nu(k)\sqrt{1+k/p}(1+1/p)\left[|f'(y)|\frac{1+yk}{p+k}+c\left(\frac{1+k}{p+k}\right)^2\right]$$

这里我们用到了

$$\frac{d}{2p}-\frac{d-1}{2p+2k}\leq\frac{1+yk}{p+k}\leq\frac{1+k}{p+k}.$$

因此，通过分部求和，并利用 $1-\varepsilon<k\nu([k,\infty))/p_{\mathbf{q}}<1+\varepsilon$ 对所有 $k\geq N$都成立，然后将其识别为黎曼和，第一项求和（6.4）的上界为

$$(1+\varepsilon)p_{\mathbf{q}}y\frac{1}{p}\int_{(N-1)/p}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}+O(p^{-1})\leq(1+\varepsilon)^2p_{\mathbf{q}}y\frac{\log p}{p}+O(p^{-1}),\tag{6.7}$$

其中 $O(p^{-1})$ 关于 d 和 ℓ是一致的。对于第二项求和（6.5），它同样只有正项，我们区分 $k\leq\varepsilon p$ 或 $k>\varepsilon p$ 的情形。若 $k\leq\varepsilon p$，$(p+\ell)/(p-k+\ell)\leq 1/(1-\varepsilon)$，因此应用这些不等式并利用 $1-\varepsilon<k^2\nu(-k)/p_{\mathbf{q}}<1+\varepsilon$ 对所有 $k\geq N$都成立，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\varepsilon p}\frac{\nu(-k)}{2}\frac{p+\ell}{p-k+\ell}\frac{h^{\uparrow}(p-k)}{h^{\uparrow}(p)}\left[f\left(\frac{d-2k}{2p-2k}\right)-f\left(\frac{d}{2p}\right)\right]&\\ \leq\sum_{k=N}^{\varepsilon p}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2k^2}(1+1/p)\sqrt{1-k/p}\left[|f'(y)|(1-y)\frac{k}{p}\frac{1}{1-\frac{k}{p}}+c\left(\frac{k}{p}\frac{1}{1-\frac{k}{p}}\right)^2\right],&\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\frac{d}{2p}-\frac{d-2k}{2p-2k}=(1-y)\frac{k}{p}\frac{1}{1-\frac{k}{p}}\leq\frac{k}{p}\frac{1}{1-\frac{k}{p}}.$$

因此，b 通过将其识别为黎曼和，我们可以将 $k\leq\varepsilon p$ 的求和上界估计为

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}p_{\mathbf{q}}\frac{1-y}{2}|f'(y)|\frac{1}{p}\int_{(N-1)/p}^{\varepsilon+1/p}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx+O(p^{-1})\leq\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}p_{\mathbf{q}}\frac{1-y}{2}|f'(y)|\frac{\log p}{p}+O(p^{-1}).$$

如果 $\varepsilon p\leq k\leq p-1$，则有

$$1\leq\frac{p+\ell}{p-k+\ell}\leq\frac{p}{p-k}$$

and

$$\frac{\nu(-k)}{2}\frac{h^{\uparrow}(p-k)}{h^{\uparrow}(p)}\left[f\left(\frac{d-2k}{2p-2k}\right)-f\left(\frac{d}{2p}\right)\right]\leq\nu(-k)\frac{h^{\uparrow}(p-k)}{h^{\uparrow}(p)}\leq\sqrt{(p-k)/p}O(p^{-2}).$$

因此，利用黎曼和，$k\geq\varepsilon p$ 的和有上界 $O(p^{-1})$。因此，第二个和（6.5）有界于

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}p_{\mathbf{q}}\frac{1-y}{2}|f'(y)|\frac{\log p}{p}+O(p^{-1}).\tag{6.8}$$

对于最后一个和（6.6），我们先关注正项，即满足 $kd \le p$的那些项。如果 $d \ge 2$，那么这意味着$(p+\ell)/(p-k+\ell) \le 2$。此外，对于所有 $1 \le k \le p-1$，

$$\frac{d}{2p} - \frac{d-1}{2p-2k} \le \frac{1}{2p},$$

从而，正项之和有一个 $O(p^{-1})$。若 $d = 1$，则由泰勒定理，$f(0) - f(1/(2p)) = O(p^{-2})$，因此正项之和有一个 $O(p^{-2})$。在这两种情况下，(6.6) 的正项之和有一个 $O(p^{-1})$作为上界。在 $0 < y < \varepsilon$ 的情况下，正项的上界已足以得出结论，因为将 (6.7)、(6.8) 与$O(p^{-1})$相加，可得一致有界性

$$\frac{(1+\varepsilon)^3}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}\frac{\log p}{p} + O(p^{-1}) \le \frac{(1+3\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}\frac{\log p}{p} + O(p^{-1}).$$

在 $y \ge \varepsilon$的情况下，我们假设已选择 $N > 1/\varepsilon$，使得 $N \ge 2p/d$，因此 (6.6) 中 $N \le k \le \varepsilon p$ 对应的所有项均为负。利用$(p+\ell)/(p-k+\ell) \ge 1$，(6.6) 中满足 $N \le k \le \varepsilon p$ 的负项之和可由以下式子作上界

$$-\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=N}^{\varepsilon p}\frac{p_{\mathbf{q}}}{k^2}(1-1/p)\sqrt{1-k/p}\left[|f'(y)|\left(y\frac{k}{p}-\frac{1}{2p}\right) - c(2k/p)^2\right],$$

其中我们用到了

$$\frac{d-1}{2p-2k} - \frac{d}{2p} \ge \frac{dk-p}{2p^2} = y\frac{k}{p} - \frac{1}{2p} \qquad \text{and} \qquad \left|\frac{d}{2p} - \frac{d-1}{2p-2k}\right| \le \frac{k}{(1-\varepsilon)p}.$$

因此，再次利用黎曼和，和式（6.6）有如下上界

$$-(1-\varepsilon)p_{\mathbf{q}}\frac{y}{2}|f'(y)|\frac{\log p}{p} + O(p^{-1}). \tag{6.9}$$

最后，将上界（6.7）、（6.8）、（6.9）以及 $O(p^{-1})$相加，即可在 $\varepsilon \le y \le 1$ 的情形下，以及在 $\mathbb{E}^{(\ell_0)}{}_{\ell}\left(\Delta H_\ell^f(n)\middle|\mathcal{F}_n\right)$的情形下，得到所需结果。对于平方的期望，可以对三个和式（6.4）、（6.5）、（6.6）进行相同的计算，只需将括号内的表达式平方即可。利用相同的思路可以验证，每个和式均为 $O(p^{-1})$（关于 d，ℓ一致），从而得到第二个上界。 □

我们将利用引理 6.6的一个直接推论。

推论 6.7. 对于所有 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $\lambda(\varepsilon)$，其取值不依赖于$\mathbf{q}$，以及 $C(\varepsilon、\mathbf{q}) > 0$，使得对于所有 $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$，对于所有 $\ell \ge 1$ 和 $n \ge 0$，

$$\mathbb{E}_\ell^{(1)}\left(e^{\lambda\Delta H_\ell^f(n)}\middle|\mathcal{F}_n\right) \le 1 + \lambda\left(\frac{(1+3\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}\frac{\log(P_\ell(n))}{P_\ell(n)} + \frac{C(\varepsilon,\mathbf{q})}{P_\ell(n)}\right),$$

其中，$(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ 是与探索（使用分层剥离算法）相关联的滤过。

证明。只需令 $\lambda(\varepsilon)$ 足够小，使得对于所有 $0 < \lambda < c(\varepsilon)$，不等式$e^{\lambda\Delta H_\ell^f(n)} \le 1 + \lambda\Delta H_\ell^f(n) + \lambda^2(\Delta H_\ell^f(n))^2$ (存在这样的 $\lambda(\varepsilon)$，因为 $-1 \le \Delta H_\ell^f(n) \le 1$)。 □

因此，我们可以定义另一族上鞅。

推论 6.8。令 $\varepsilon \in (0,1)$。令 $\lambda < \lambda(\varepsilon)$ 其中 $\lambda(\varepsilon)$ 由推论 6.7给出。对于所有 $\ell \geq 1$ 对于所有 $n \geq 0$，令

$$M_n^{\varepsilon,\lambda,\ell} = \exp\left(\lambda H_\ell^f(n) - \lambda \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(1+3\varepsilon)^3}{1-\varepsilon}\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}\frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} + \frac{C(\varepsilon,\mathbf{q})}{P_\ell(k)}\right)\right).$$

那么，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，$\left(M_n^{\varepsilon,\lambda,\ell}\right)_{n\geq 0}$ 是关于与探索相关的滤过 $(\mathcal{F}_n)n\geq 0$ 的一个超鞅。

我们还将使用引理 6.2 的一个变体，其证明类似，留给读者完成。

引理 6.9。若 $\varepsilon > 0$，令 k_0 使得 $e^{(p_{\mathbf{q}}-\varepsilon)/k} \leq 1 + (\nu((-\infty,-k]) - \nu(-\ell-k))$ 对所有 $k \geq k_0$ 和 $\ell \geq 1$ 均成立。对所有 $\ell \geq 1$、$n \geq 0$，令

$$M_n^{\varepsilon,k_0,\ell} = \frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(P_\ell(n))}\exp\left((p_{\mathbf{q}}-\varepsilon)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{P_\ell(j)}\mathbf{1}_{P_\ell(j)\geq k_0}\right).$$

那么，对所有 $\ell \geq 1$，在 $\mathbb{P}_\ell^{(1)}$ 下，$(M^{\varepsilon}_{\cdot,\ k_0\,\ell,})n\geq 0$ 是关于与剥离探索相关的滤过 $(\mathcal{F}_n)n\geq 0$ 的一个超鞅。

随后，根据上述结果，我们得到 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 中随机均匀边的高度的大偏差不等式。

推论 6.10。设 $c > 0$。设 $\delta > 0$ 且

$$K = \frac{1}{2}(c+3)\left(c+\frac{5}{2}\right) + \delta.$$

设 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 服从分布 $\mathbb{P}^{(\ell)}$，令 E 为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$ 的均匀随机边。则，

$$\mathbb{P}\left(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E) \geq K(\log\ell)^2\right) = O(\ell^{-c}) \text{ when } \ell \to \infty.$$

证明。首先，由于到边的距离小于到通过解开该边所得到的 2-面 的距离，并且根据（3.4），

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E) \geq K(\log\ell)^2\right) &\leq \frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{E}_1^{(\ell)}\left(\frac{1}{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{m}_\square)-1}\mathbf{1}_{d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\square)\geq K(\log\ell)^2}\right)\\ &\leq \frac{W_1^{(\ell)}}{W^{(\ell)}}\mathbb{P}_1^{(\ell)}\left(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\square) \geq K(\log\ell)^2\right).\end{aligned}$$

但是，由于 $W_{(\ell)1}\ /W_{(\ell)}$ 是一个 $O(\ell^{3/2})$ 由（3.3）给出的，只需证明若 $K' = \frac{1}{2}\left(c+\frac{3}{2}\right)(c+1) + \delta$，则

$$\mathbb{P}_1^{(\ell)}(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\square) \geq K'(\log\ell)^2) = O(\ell^{-c}).$$

由于对于所有 $n \le \tau_{-\ell}-1$, $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r, \square) \le H_\ell(\tau_{-\ell}-1)+1$ 和 $H_\ell(n) \le H_\ell^f(n)$，稍微减小 δ a 后，只需证明

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(H_\ell^f(\tau_{-\ell}-1) \ge K'(\log \ell)^2\right) = O(\ell^{-c}) \text{ when } \ell \to \infty.$$

为了证明这一点，我们首先可以从推论 6.8 得知，如果 $\varepsilon \in (0,1)$，如果 $0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$ 且 $\mu = \frac{(1+3\varepsilon)^3 p_{\mathbf{q}}}{1-\varepsilon}$，那么对所有 $\ell \ge 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\ell^{(1)} \exp\left(\lambda H_\ell^f(\tau_{-\ell}-1) - \lambda\mu \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-2} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} - \lambda C(\varepsilon,\mathbf{q}) \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-2} \frac{1}{P_\ell(k)}\right) &= \mathbb{E}_\ell^{(1)} M_{\tau_{-\ell}-1}^{\varepsilon,\lambda,\ell} \\ &\le \mathbb{E}_\ell^{(1)} M_0^{\varepsilon,\lambda,\ell} \\ &= 1.\end{aligned}$$

因此，如果 $A>0$ 满足 $\lambda A > c$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(H_\ell^f(\tau_{-\ell}) \ge \mu \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} + C(\varepsilon,\mathbf{q}) \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{1}{P_\ell(k)} + A\log \ell\right) \\ &\le \mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\exp\left(\lambda H_\ell^f(\tau_{-\ell}) - \lambda\mu \sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\left(\frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} + \frac{1}{P_\ell(k)}\right)\right) \ge \ell^{A\lambda}\right) \le \frac{1}{\ell^{A\lambda}} = O(\ell^{-c}).\end{aligned}$$

由（6.2），$\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{1}{P_\ell(k)}$ 可由常数乘以 $\log \ell$ 控制。因此，只需证明

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} \mathbf{1}_{P_\ell(k)\ge k_0} \ge \frac{K'}{\mu}(\log \ell)^2\right) = O(\ell^{-c}), \tag{6.10}$$

其中 $k_0>0$ 将在证明中稍后选取。然而，注意到由于 $x \mapsto x/\log x$ 在 $[e,\infty)$ 上递增，我们有

$$\sum_{k=3}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} \mathbf{1}_{P_\ell(k)\ge k\log k} \le \sum_{k=3}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log k + \log\log k}{k\log k} \le 2\log \tau_{-\ell}$$

此外，利用 引理 2.5 再由 $\mathbb{E}_\infty^{(1)}(\ell/P_\infty(\ell)) = O(1)$ 由 的引理 4 [11] 得 $\ell \to \infty$ ，

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}(\tau_{-\ell} > \ell^{c+1}) = \mathbb{E}_\infty^{(1)} \frac{1+\ell}{P_\infty(\lfloor \ell^{1+c} \rfloor)+\ell} \le 2\mathbb{E}_\infty^{(1)} \frac{\ell}{P_\infty(\lfloor \ell^{c+1} \rfloor)} = O(\ell^{-c}). \tag{6.11}$$

因此，

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} \mathbf{1}_{P_\ell(k)\ge k\log k} \ge 2(c+1)\log \ell\right) = O(\ell^{-c}).$$

因此，为了证明（6.10），只需证明

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1} \frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)} \mathbf{1}_{k\log k \ge P_\ell(k)\ge k_0} \ge \frac{K'}{\mu}(\log \ell)^2\right) = O(\ell^{-c}).$$

但可以给出上界

$$\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{\log(P_\ell(k))}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{k\log k\geq P_\ell(k)\geq k_0}\leq\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{\log k+\log\log k}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{k\log k\geq P_\ell(k)\geq k_0}$$
$$\leq(\log\tau_{-\ell}+\log\log\tau_{-\ell})\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{k\log k\geq P_\ell(k)\geq k_0}.$$

因此，再次利用（6.11），然后将 ε 取得足够小，使得 $\mu=\frac{(1+3\varepsilon)^3 p_{\mathbf{q}}}{1-\varepsilon}\frac{}{2}$ 接近 $\frac{p_{\mathbf{q}}}{2}$，我们只需证明对所有 $p_{\mathbf{q}}>\delta>0$,

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{P_\ell(k)\geq k_0}\geq\frac{c+\frac{3}{2}}{p_{\mathbf{q}}-\delta}(\log\ell)^2\right)=O(\ell^{-c}).\tag{6.12}$$

为了证明这一点，我们将使用引理 6.9 中的超鞅 $M^{\delta,\ k_0,\ \ell}$，其中 k_0 取足够大。应用马尔可夫不等式和法图引理，我们得到，对于 $K''=(c+3/2)\ /\ (p_{\mathbf{q}}-\delta)$，

$$\mathbb{P}_\ell^{(1)}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{P_\ell(k)\geq k_0}\geq K''\log\ell\right)\leq\ell^{-(p_{\mathbf{q}}-\delta)K''}\mathbb{E}_\ell^{(1)}\exp\left((p_{\mathbf{q}}-\delta)\sum_{k=0}^{\tau_{-\ell}-1}\frac{1}{P_\ell(k)}\mathbf{1}_{P_\ell(k)\geq k_0}\right)$$
$$=\ell^{-(p_{\mathbf{q}}-\delta)K''}\mathbb{E}_\ell^{(1)}M_{\tau_{-\ell}}^{\delta,k_0,\ell}$$
$$\leq\ell^{-(p_{\mathbf{q}}-\delta)K''}\mathbb{E}_\ell^{(1)}M_0^{\delta,k_0,\ell}$$
$$=\ell^{-(p_{\mathbf{q}}-\delta)K''}\frac{1}{h_\ell^{\downarrow}(1)}$$
$$=O(\ell^{3/2-(p_{\mathbf{q}}-\delta)K''})=O(\ell^{-c}),$$

因此（6.12）。 □

命题 6.5 的证明与命题 6.1 的证明完全相同，只需使用推论 6.10：

命题 *6.5* 的证明。由于直径有上界，且该上界为最大高度的两倍，因此只需证明对所有 $\delta>0$

$$\mathbb{P}\left(\exists e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)}),\ d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,e)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2\right)\underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

因为对于所有 $f\in$面$(\mathfrak{M}^{(\ell)})$，如果 e是围绕 f的一条边，那么 $d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\ f)\leq d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,\ e)+1$。接下来，我们区分边数是否过大：令 $\varepsilon>0$。

$$\mathbb{P}\left(\exists e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)}),\ d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,e)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2\right)$$
$$\leq\mathbb{E}\left(\#\left\{e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)});\ d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,e)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2\right\}\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\leq\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\geq\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\right),$$

并且最后一项足够小于 ε，当 ℓ 足够大时，由（3.3）可得。此后我们关注第一项。给定 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$，令 E 为 $\mathfrak{M}^{(\ell)}$的一条均匀边。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\#\left\{e\in\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)});\ d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,e)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2\right\}\mathbf{1}_{\#\mathrm{Edges}(\mathfrak{M}^{(\ell)})\leq\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}}\right)\\
&\leq\mathbb{E}\left(\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\mathbb{P}(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2|\mathfrak{M}^{(\ell)})\right)\\
&=\frac{2b_{\mathbf{q}}}{\varepsilon}\ell^{3/2}\mathbb{P}(d_{\mathrm{gr}}^{\dagger}(f_r,E)\geq(9+\delta)(\log\ell)^2).
\end{aligned}$$

最后一行的表达式根据推论 6.10 趋于零，因为 $\ell\to\infty$ 由于 $c=3/2$ 我们有 $(c+3)(c+5/2)/2=9$。□

致谢 感谢 Cyril Marzouk 和 Nicolas Curien 一直以来的支持，以及他们对早期版本提出的深刻意见。我也感谢审稿人细致的审阅。

参考文献

[1] O. Angel. 均匀无限平面三角剖分上的增长与渗流。《几何、泛函分析》, 13(5):935–974, 2003.[2]J. Bertoin, T. Budd, N. Curien, and I. Kortchemski. 自相似增长碎裂中的鞅及其与随机平面图的联系。《概率论及相关领域》, 172(3-4):663–724, 2018.[3] J. Bertoin 和 I. Kortchemski. 正整数上的马尔可夫链的自相似标度极限。《应用概率年刊》, 26(4):2556–2595, 2016.[4] J. Bertoin and M. Yor. 自相似马尔可夫过程的进入定律与莱维过程的指数泛函。《潜在分析》, 17(4):389–400, 2002.[5] G. Borot, J. Bouttier, and E. Guitter. 通过嵌套环研究随机地图上的 $O(n)$模型。《物理学杂志 A：数学与理论》, 45(4):38, 2012. 编号 045002.[6] J. Bouttier, P. Di Francesco, and E. Guitter. 作为带标记移动树的平面图。《电子组合学杂志》, 11(1):研究论文 r69, 27, 2004.[7]T. Budd. 随机平面图剥离（讲义）. http://hef.ru.nl/tbudd/docs/mappeeling.pdf.[8] T. Budd. 无限玻尔兹曼平面图的剥离过程。《电子组合学杂志》, 23(1):研究论文 p1.28, 37, 2016.[9] T. Budd. 随机平面图上与 o(n) 环模型耦合的剥离过程（附录由 Linxiao Chen 撰写）, 2018.[10] T. Budd and N. Curien. 高次数无限平面图的几何。《电子概率杂志》, 22:37, 2017. 编号 35.

[11] T. Budd, N. Curien, and C. Marzouk. 与柯西过程相关的无限随机平面图。《综合理工学院数学杂志》, 5:749–791, 2018.[12] F. Caravenna and L. Chaumont. 条件为保持正值的随机游走的不变性原理。《亨利·庞加莱研究所年刊》, 概率与统计, 44(1):170–190, 2008.[13] N. Curien. 随机平面图剥离。圣弗卢尔概率暑期学校 *XLIX – 2019*，载于《数学讲义》第 2335 卷。沙穆瓦：施普林格，2023.[14]R. A. Doney. 渐近稳定随机游走的条件极限定理。《概率论及其应用领域杂志》, 70:351–360, 1985.[15] R. A. Doney and M. S. Savov. 与稳定过程上确界相关的密度的渐近行为。《概率年刊》, 38(1):316–326, 2010.[16] G. Elek and G. Tardos. 有限树的收敛与极限。《组合数学》, 42(6):821–852, 2022.[17] S. Janson. 关于格罗莫夫-普罗霍罗夫距离. arXiv:2005.13505 [math.PR], 2020.[18] S. Janson. 树的极限与随机树的极限。《组合数学、概率与计算》, 30(6):849–893, 2021.[19] S. Janson and S. Ö. Stefánsson. 具有唯一大面的随机平面图的缩放极限。《概率年刊》, 43(3):1045–1081, 2015.[20] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo, and V. Rivero. 首次与末次穿越时 n-元组的精确律与渐近律。《应用概率年刊》, 20(2):522–564, 2010.[21] J.-F. Le Gall and G. Miermont. 具有大面的随机平面图的缩放极限。《概率年刊》, 39(1):1–69, 2011.[22] J.-F. Marckert and G. Miermont. 随机二部平面图的不变性原理。《概率年刊》, 35(5):1642–1705, 2007.[23] S. Sheffield. 探索树与共形环系。《杜克数学杂志》, 147(1):79–129, 2009.[24] S. Sheffield and W. Werner. 共形环系：马尔可夫特征刻画与环汤构造。《数学年刊》 (2), 176(3):1827–1917, 2012.[25] M. Talagrand. 某些典范过程的上确界。《美国数学杂志》, 116(2):283–325, 1994.[26] V. A. Vatutin and V. Wachtel. 条件为保持正值的随机游走的局部概率。《概率论及相关领域》, 143(1-2):177–217, 2009.[27] Y. Watabiki. 在动力学三角剖分中通过转移矩阵形式构造非临界弦场论。《核物理 *B*》, 441(1-2):119–163, 1995.