arXiv:2304.01175v2 [quant-ph] 8 May 2024

通过纠缠谱平坦度量化非稳定子性

Emanuele Tirrito, [1,2] *Poetri Sonya Tarabunga*, [1,2,3] *Gugliemo Lami*, [2] *Titas Chanda*, [1,4] *Lorenzo Leone*, [5] *Salvatore F.E. Oliviero*, [5] *Marcello Dalmonte*, [1,2] *Mario Collura*, [2,3] 和 *Alioscia Hamma*[6,7]

[1] *The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera 11, 34151 Trieste, Italy*
[2] *SISSA, Via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy*[3] *INFN, Sezione di Trieste, Via Valerio 2, 34127 Trieste, Italy*
[4] *Department of Physics, Indian Institute of Technology Indore, Khandwa Road, Simrol, Indore 453552, India*
[5] *Physics Department, University of Massachusetts Boston, 02125, USA*[6] *Dipartimento di Fisica 'Ettore Pancini', Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cintia 80126, Napoli, Italy*[7] *INFN, Sezione di Napoli, Italy*

非稳定子性（也常被俗称为魔性）是量子计算获得优势的一种资源，其关键在于能否使用非克利福德操作。要全面理解如何量化非稳定子性，以及它与其他量子资源的关系，对于研究和刻画量子复杂性的起源至关重要。在这项工作中，我们确立了纯量子态的非稳定子性与纠缠谱平坦度之间的直接联系。我们表明，即使存在噪声，也可以利用这一联系高效探测非稳定子性。我们的结果揭示了非稳定子性与纠缠响应之间的直接联系，并提出了一套明确的实验方案，可在冷原子和固态平台中探测非稳定子性。

引言——对经典计算机而言，模拟量子态通常非常困难。人们认为，对任意量子系统进行精确的经典模拟效率低下，因为所需资源会随着系统规模呈指数级增长 [1]。因此，费曼提出了量子计算机的概念 [2] ，因为只有量子设备才能高效模拟一般的量子系统，正如后来在 [3]中所证明的那样。

纠缠——作为量子处理和量子技术的重要特征与关键资源之一——已得到深入研究 [4–12]。然而，仅探测纠缠不足以实现量子优势，也不足以用单个数值刻画纠缠 [13–17]。例如，通过 Clifford 电路可以获得高度纠缠的量子态 [18] ，而这类电路可以高效地进行经典模拟 [19–22]；此外，纠缠复杂度还体现在纠缠谱统计的精细结构中[23–25]。不同类别的纠缠复杂度之间的转变由非 Clifford 资源驱动 [26–31]，而这些资源也正是实现量子优势所必需的[32]。

Clifford 电路的任何扩展（即仅包含 Hadamard 门、$\pi/2$ 相位门和受控非门的电路）都能通过允许输入量子态包含所谓的 魔态 [33–35]，实现通用计算。典型的魔态是 $|T\rangle = \left(|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle\right)/\sqrt{2}$，它使得能够应用单量子比特幺正算符 $T = \mathrm{diag}(1, e^{i\pi/4})$。由 Clifford 门集和 T 门集中的元素组成、作用于标准计算基输入的电路，足以实现通用量子计算。对这类电路进行经典模拟所需的运行时间随输入魔态量子比特的数量呈指数级增长，但仍随稳定子量子态比特的数量 [21] 呈多项式级增长。因此，对于任何一类近似稳定子电路，只要其使用的输入魔态量子比特 [36–38] 仅有对数级数量，就可以进行高效的经典模拟。

如上所述，非 Clifford 资源是实现任何量子优势的必要条件，因此它们是量子信息处理中珍贵的资源，通常称为非稳定子性，或更通俗地称为魔性 [35]。过去几年间，非稳定子性的资源理论得到了发展。提出的魔性度量通常纳入拟概率的概念，其中许多度量以离散 Wigner 形式为基础[39–44]。著名的例子包括魔的相对熵和 mana（适用于 qudit） [22], 、稳定子秩 [36, 37, 45], 、魔性的鲁棒性 [46, 47], 、thauma（适用于 qudit） [48], 以及稳定子延展度 [49]。这些非稳定子性量化指标中的大多数即使通过数值方法也难以计算。近期提出了一种可计算且重要的非稳定子性度量：稳定子 Rényi 熵（SRE）′，它可以针对矩阵乘积态高效计算 [50], ，适用于实验测量 [51，并且与量子验证和基准测试密切相关54], 。

在这封信中，我们确立了稳定子 Rényi 熵与子系统密度算符所对应的纠缠谱平坦度之间的深刻联系。从概念层面看，这一联系清晰地揭示了这种资源与纠缠结构的关联：非稳定子性与纠缠响应直接相关，而纠缠响应是热力学系统中"热容"的量子类比。与此同时，这也为重要的实际应用打开了大门。我们提出了一种简单的实

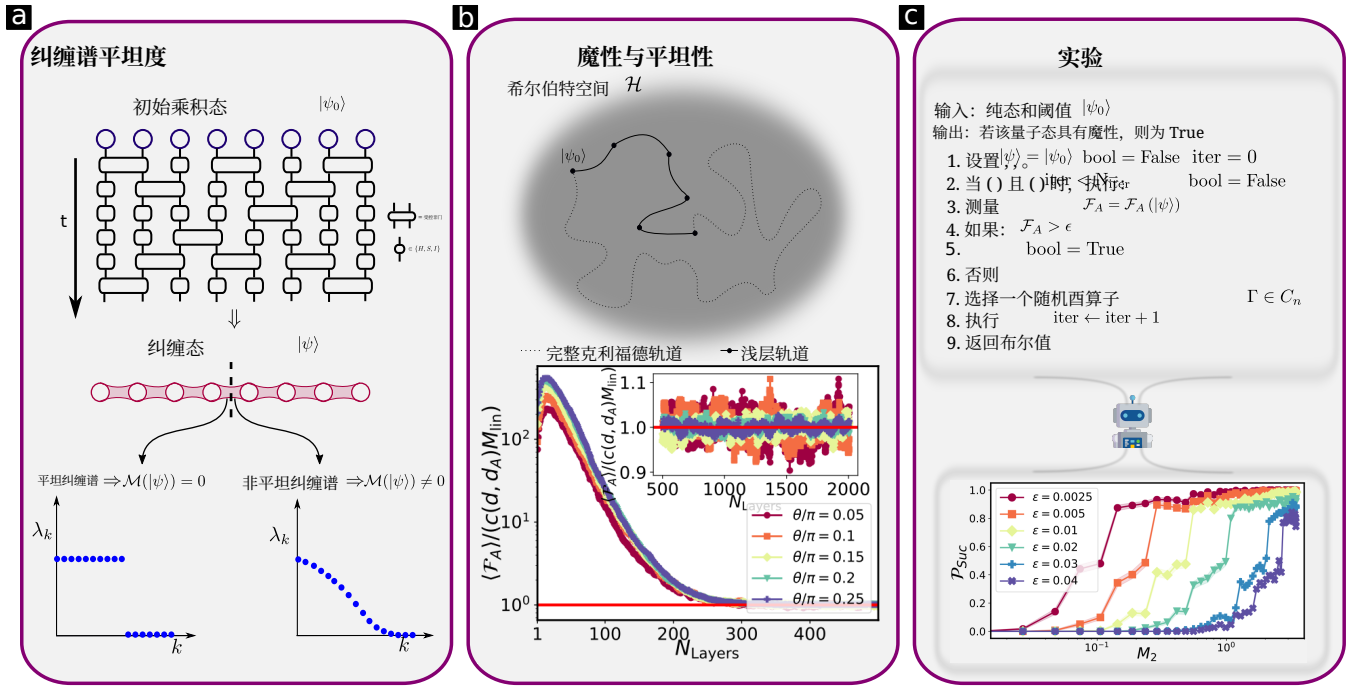

图 1. **结果概述：** (a) 用于量化纯态非稳定子性的示意图。我们从一个乘积态开始，然后施加随机 Clifford 门（包括单量子比特门和双量子比特门，见正文）。经过 N_{Layers} 后，量子态完全纠缠。检查任意二分划分下的纠缠谱，即可区分初始态是否具有非稳定子性。(b) 上图展示了纯态的 Clifford 轨道示意图。下图展示了反平坦度 $\mathcal{F}_A$ 与非稳定子性之间的关系，非稳定子性由 $c(d,d_A)M_{\text{lin}}$ 量化。对于不同的 θ 值，我们将系统初始化为乘积态 $|\psi(0)\rangle=\otimes_{i=1}^{n}|\psi_i\rangle$，其中 $|\psi_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+e^{i\theta}|1\rangle\right)$ 和 $n=14$。随后施加若干随机 Clifford 层 N_{Layers}。在电路非常深的极限下，该比值趋近于 1，这与定理的预测一致，如插图所示。(c) 用于判断量子态是稳定子态还是具有非稳定子性的算法。面板上部展示了伪代码，下部展示了检测到非稳定子性的概率。我们生成乘积态 $|\psi(0)\rangle=\otimes_{i=1}^{n}|\psi_i\rangle$，其中 $|\psi_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+e^{i\theta}|1\rangle\right)$，适用于 $n=12$ 个量子比特，并固定 Clifford 层数 $N_{\text{Layers}}=100$。经过 $N_R=1000$ 次实现后，我们计算不同阈值下的成功概率 $\mathcal{P}_{\text{suc}}$，并将其表示为初始态中非稳定子性初始值的函数；该初始值通过二阶稳定子 Rényi 熵计算。

验协议，可利用随机化测量技术高效地实验探测这一量。

我们的主要发现总结于图1中。在图1 (a) 中，我们展示了用于具体揭示非稳定子性与纠缠响应之间联系的实验设置：我们将初始态制备为乘积态，并通过随机 Clifford 门使其演化，随后测量纠缠谱平坦度。我们发现，一个量子态具有非稳定子性，当且仅当其纠缠谱不平坦。在第二个面板（图1 (b)）中，我们展示了一个纯态的 Clifford 轨道：其非稳定子性与该轨道上的平均平坦度成正比。最后，在第三个面板（图1(c)）中，我们介绍了一种检测非稳定子性的算法，并展示了成功概率随其非稳定子性程度变化的情况。

稳定子 R´enyi 熵与纠缠谱的平坦度。—在本节中，我们定义稳定子 Rényi 熵及其与纠缠谱平坦度的联系。特别是，我们将展示如何量化任意纯态的非稳定子性：计算其 Clifford 轨道上平坦度的平均值。

考虑由 n 个量子比特构成的 $d=2^n-$ 维希尔伯特空间 $\mathcal{H}\simeq \mathbb{C}^{\otimes 2n}$。$\Lambda$ 个 n 量子比特的子集（其中 $|\Lambda|=n_\Lambda$）定义了一个子系统，显然可由 $d_\Lambda=2^{n_\Lambda}-$ 维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\Lambda\simeq\mathbb{C}^{\otimes 2n_\Lambda}$ 表示。设 $P_i\in\{I,X,Y,Z\}$ 为第 $i-$ 个单量子比特空间 $\mathbb{C}^2$ 上的泡利算符。整个 $\mathcal{H}$ 上的泡利算符具有形式 $P=\otimes_i^n P_i$，局部泡利算符也可写作 $P_X=\otimes_{i\in\Lambda}P_i$。将所有相位为 1 的 n 量子比特泡利算符组成的群记为 $\mathcal{P}_n$，并定义 $\Xi_\psi(P)=d^{-1}\mathrm{Tr}(P\psi)$，作为纯态 $\psi\equiv|\psi\rangle\langle\psi|$ 中 P 的平方归一化期望值，其中 $d=2^n$ 是 n 个量子比特的希尔伯特空间维数。此外，Ξ_ψ 是在量子态 ψ 的表示中找到 P 的概率。现在，我们可以定义稳定子 Rényi 熵（SRE）为：

$$M_\alpha\left(|\psi\rangle\right)=E_\alpha(\Xi_\psi)-\log d \tag{1}$$

其中 $E_\alpha(\Xi_\psi)$ 是概率分布 E_α的 α-R´enyi 熵，

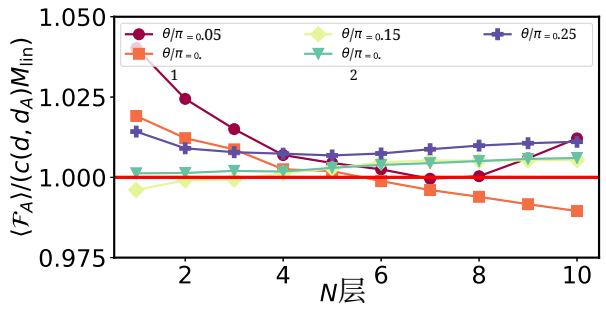

图2。 **浅层电路的数值模拟：** 我们将初始态制备在体积律相中，并绘制比值 $\mathcal{F}_A/c(d,d_A)M_{\text{lin}}$ 随浅层电路中 Clifford 层数 N_{Layers} 变化的曲线。如图所示，该比值很快趋近于 1，从而验证了公式 (5)。

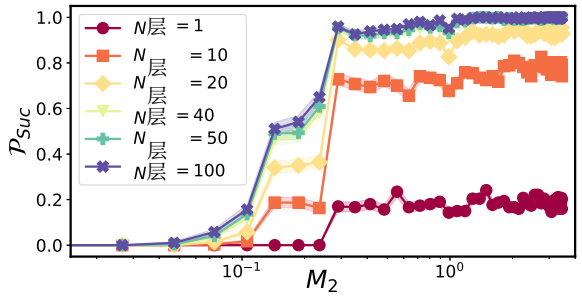

图3. **算法灵敏度：** 成功概率 $\mathcal{P}_{\text{Suc}}$，在阈值 $\epsilon = 0.005$ 固定且 N_{Layers} 取不同值时。收集 $N_{\text{R}} = 1000$ 次实现后，我们计算成功概率 $\mathcal{P}_{\text{Suc}}$，将其表示为使用二阶稳定子 Rényi 熵 $M_2(|\psi_0\rangle)$ 计算的非稳定子性初始值的函数。

概率分布 Ξ_ψ。从资源理论的角度来看，稳定子 Rényi 熵是一种很好的度量：它说明可以蒸馏出多少魔态，因此也是量子信息算法[50]的重要资源。稳定子 Rényi 熵具有以下性质：(i) 保真性$M_\alpha(|\psi\rangle) = 0$ 当且仅当 $|\psi\rangle \in$ STAB，否则 $M_\alpha(|\psi\rangle) > 0$；(ii) 在 Clifford 操作下保持稳定： $\forall \Gamma \in C_n$ 我们有 $M_\alpha(\Gamma|\psi\rangle) = M_\alpha(|\psi\rangle)$；以及 (iii) 可加性$M_\alpha(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = M_\alpha(|\psi\rangle) + M_\alpha(|\phi\rangle)$（证明见 [50]）。

另一个衡量非稳定子性的有用指标是稳定子线性熵，其定义为

$$M_{\text{lin}}(|\psi\rangle) = 1 - d\|\Xi_\psi\|_2^2, \tag{2}$$

它满足以下性质：(i) 保真性$M_{\text{lin}}(|\psi\rangle) = 0$ 当且仅当 $|\psi\rangle \in$ STAB，否则 $M_{\text{lin}}(|\psi\rangle) > 0$，(ii) 在 Clifford 操作下保持稳定： $\forall \Gamma \in C_n$ 我们有 $M_{\text{lin}}(\Gamma|\psi\rangle) = M_{\text{lin}}(|\psi\rangle)$，以及 (iii) 上界$M_{\text{lin}} < 1 - 2(d+1)^{-1}$。二阶稳定子 Rényi 熵 M_2 与线性非稳定子熵之间的关系可由下式直接得出

$$M_2(|\psi\rangle) = -\log\left[1 - M_{\text{lin}}(|\psi\rangle)\right]. \tag{3}$$

现在我们来讨论稳定子 Rényi 熵与纠缠谱平坦度之间的关系。考虑二分系统 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 中的一个纯态 ψ 及其约化密度算符 $\psi_A = \text{Tr}_B \psi$。其纠缠谱的（反）平坦度定义为

$$\mathcal{F}_A(\psi) := \text{Tr}\left(\psi_A^3\right) - \text{Tr}^2\left(\psi_A^2\right) \tag{4}$$

很容易验证，若纠缠谱是平坦的，即谱 $\lambda_\alpha = 1/\chi$ 对于某个整数 $1 \le \chi \le \min(d_A, d_B)$，则 $\mathcal{F}_A(\psi) = 0$；而在其他情况下， $\mathcal{F}_A(|\psi\rangle) > 0$。注意，要使 $\mathcal{F}_A(\psi) \neq 0$，该量子态必须不纠缠，或不含任何魔性。虽然不同矩的线性组合都可以作为（反）平坦度的合理度量，

但上文提出的度量最为自然，因为它是相应概率分布相对于自身的方差：若给定量子态 σ ，其谱分解为 $\sigma = \sum_i p_i \sigma_i$，则 $\mathcal{F}(\sigma) = \text{Var}(\{p_i\}) := \langle (p_i - \langle p \rangle_p)^2 \rangle_p$。

本文使用纠缠谱的平坦度来量化或见证纯态的非稳定子性。

定理： 纯态 $|\psi\rangle$ 的稳定子线性熵 M_{lin} 与其在 *Clifford* 轨道上取平均后的纠缠谱反平坦度成正比：

$$\langle \mathcal{F}_A(\Gamma|\psi\rangle) \rangle_{C_n} = c(d,d_A) M_{\text{lin}}(|\psi\rangle), \tag{5}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_{C_n}$ 表示对 *Clifford*轨道$\Gamma|\psi\rangle$ 取平均，而当 d较大时，比例常数为 $c(d,d_A) \sim (d^2 - d_A^2)d^{-3}$ ，证明见 *[58]* 。

请注意，上述结果对系统的任意二分划分均成立，这体现在常数$c(d,d_A)$中。我们看到，纯稳定子态在其整个 Clifford轨道上都具有平坦的纠缠谱，而且反平坦度在 Clifford 操作下保持稳定。此外，可以利用对反平坦度的测量来测量 M_{lin}。上述定理还揭示了纠缠与魔性之间的关系。事实上，若没有纠缠，约化密度算符中就不存在反平坦度。在 Clifford轨道上，纠缠接近最大值，这反映在 $c(d,d_A)$中。值得探究的是，对于等分二分划分，反平坦度是否呈现 $\mathcal{F}_A(|\psi\rangle) \sim g\ d_A \quad \beta\ \psi_A\ M_{\text{lin}}\ |\psi\rangle$ ( ) Pur ( ) ( )的形式，还是说这种关系仅对高度纠缠态成立。

数值实验。— 正如 [56], 所示，稳定子 Rényi 熵可通过随机化酉算符在实验中测量 [59], ，从而为评估量子电路的质量提供重要依据。然而，稳定子 Rényi 熵的测量成本非常高，通常需要指数级资源（尽管比量子态层析所需资源少）。该定理的结果为高效测量稳定子 Rényi 熵开辟了道路

。然而，事情并非如此简单。在最佳情况下，$c(d,\ d_A) = O(d^{-1})$，这意味着需要分辨一个指数级小的量，因而仍需指数级资源——尽管有一个显著优势：只需对一个小子集进行操作，从而放宽了以往方法中最具挑战性的要求之一。这是因为 ψ_A 通常在 C_n上高度纠缠，因此 $\mathcal{F}_A$ 非常接近平坦。另一个问题是，对于弱纠缠态，在实践中直接利用该定理极具挑战性，正如下文将通过数值实验所展示的。直观而言，对于纠缠极弱的态，纠缠谱中的本征值数量本来就很少。一个极端例子是，乘积态的纠缠谱绝对平坦，无论该态具有何种程度的非稳定子性。在这种情况下，需要使用非常长的电路（而这不可避免地对噪声极其敏感）。

关键在于，我们可以通过（数值上）分析中间区域，绕过必须考察完整 Clifford 轨道的要求。接近体积律时，或许可以观察到谱偏离平坦，而无需分辨指数级小的量。如果确实如此，我们便找到了一个可高效计算和测量的非稳定子性见证。此外，当纠缠相进入体积律区域后，即使不对整个 Clifford 轨道求平均，也应当能够准确评估 M_{lin} 的实际值。当然，在这种情况下，仍然需要分辨一个非常小的量。

我们考虑一个初始态，它是由n 个量子比特构成的乘积态，拓扑结构为线性 $|\psi_0\rangle = \otimes_{i=1}^{n}|\psi_i\rangle$，其中 $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)$。该量子态初始时具有可计算的非稳定子性（当 $\theta = 0$时为零，$\pi/2$）。注意，$\theta = \pi/4$ 对应于标准 T 态。随后，量子态 $|\psi_0\rangle$ 在深度为 N_{Layers} 的随机 Clifford 电路下演化，记为 $U_{\mathrm{Cl}} = \prod_k^{N_{Layers}} U_k$，其中 U_k 包含 $n-1$ Clifford 门（Hadamard 门、相位$e^{i\pi/2}$ 门和受控非门）[18]，作用于最近邻之间。

我们关注在随机 Clifford 电路演化下，纠缠谱（即约化密度矩阵的特征值）$\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$ （对于 $d_A = d_B = 2^{n/2}$ 和 $n = 14$ 个量子比特）如何演化。在图1（b）中，我们展示了反平坦度 $\langle\mathcal{F}_A\rangle$ 随电路深度 N_{Layers}变化的平均值。该平均值基于 $N_R = 1000$ 次不同的实现计算，并针对 θ的多个取值进行计算。对于较少的 Clifford 层，反平坦度会上升，并且对 θ呈现出显著依赖。当电路非常深时，系统会探索其 Clifford 轨道的很大一部分，平均反平坦度 $\langle\mathcal{F}_A\rangle$与 $c\ (2^n,\ 2^{n/2})$ M_{lin} 之比趋近于 1（图1插图中的红色实线），正如定理所预测的那样。

在图 2中，我们展示了可以准确估计 M_{lin} 即使使用浅层 Clifford 电路，只要初始态具有体积律纠缠即可。我们再次考虑一个$n = 14$ 处于体积律相的量子比特系统，将初始态 $|\psi_0\rangle$ 经过 $N_{\mathrm{Layers}} = 1500$ 层 Clifford 电路，其中 θ取不同值。随后，我们绘制比值$\langle\mathcal{F}_A\rangle/c(2^n, 2^{n/2})M_{\mathrm{lin}}$ 随 Clifford 层数 N_{Layers}变化的曲线。定理预测的理论曲线以红色实线表示。值得注意的是，我们观察到，即使电路仅有 $N_{\mathrm{Layers}} = 7$ 层 Clifford 电路，平均反平坦度也达到了定理预测的值 [60]。

通过平坦度探测非稳定子性。——如上所述，可以通过探测平坦度来探测非稳定子性，而平坦度适合在实验中测量 [61–63]。然而，直接应用定理会导致成本极高的操作流程。我们提出了一种算法，通过探索弱纠缠与体积律纠缠之间的中间区域中的 Clifford 轨道，高效地见证魔性 [60]。由于测量非稳定子性可能需要耗费大量资源，见证这一概念提供了一种可扩展的方法，用于评估稳定子操作的准确实现情况，或评估量子硬件是否适合制备魔态。

该流程如下：(1) 以 $|\psi_0\rangle$这一纯态为初始态。(2) 随机抽取一个 Clifford 门 Γ并将其作用于初始态：$|\psi_\Gamma\rangle \equiv \Gamma|\psi_0\rangle$。(3) 测量纠缠谱反平坦度 $\mathcal{F}_A(\psi_\Gamma)$ [1]。如果原始量子态 $|\psi_0\rangle$ 是稳定子态，那么电路的输出仍是稳定子态，其反平坦度为零。相反，如果 $|\psi_0\rangle$ 具有非零的非稳定子性，那么我们预期，即使只是对 Clifford 轨道进行适度探索，也会得到非平坦的纠缠谱。因此，如果经过若干个 Clifford 幺正算符后，我们测得 $\mathcal{F}_A > 0$，便可确定初始态具有非稳定子性。该算法总结于图1 (c) 中。在此算法中，我们设定迭代次数（决定 Clifford 层的数量）以及测量平坦度的阈值。

值得注意的是，我们提出的协议不需要对规模呈指数级增长的 Clifford 群进行穷尽式探索。相反，上一节的结果表明，只需将 Clifford 层的数量固定在一个相当小的值，由此生成的浅层量子电路就足以以较高概率检测非稳定子性。这一点在图1 (c) 中有所展示：我们给出了成功概率 $\mathcal{P}_{\mathrm{Suc}}$ （针对$n = 12$ 个量子比特）随非稳定子性的初始值变化的关系；该初始值使用式（1）中定义的二阶稳定子 Rényi 熵计算。为探讨误差在

[1] 对于小分区，可以通过量子态层析来完成，也可以利用随机酉算子工具箱 [59]

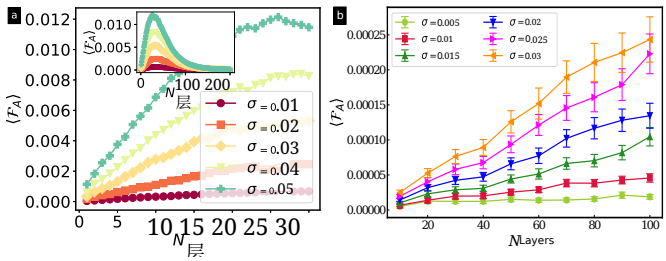

图 4. **含噪电路中的平坦度：**(a) 我们展示了 $N_{\mathrm{R}} = 1000$ 次实现中反平坦度的平均值随 N_{Layers} 的变化。我们从初始 STAB 态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 开始。我们使用经过修改的 CNOT门注入魔性，经过电路的几层后，反平坦度的平均值 $\mathcal{F}_A$ 增加。(b) 我们展示了 $N_{\mathrm{R}} = 1000$ 次实现中平坦度的平均值随 N_{Layers} 的变化。我们将系统初始化为环面码的基态，也就是一个 STAB 态，位于一个 4×2 晶胞（16 个自旋）上。我们展示了反平坦度随 Clifford 层 数量 N_{Layers} 几乎线性增加。误差棒对应 95% 置信区间。

对 $\mathcal{F}_A$ 进行测量中的作用，我们为测试引入一个阈值 ϵ。成功概率定义为：算法输出 True、从而检测到初始态非稳定子性的次数，除以迭代总次数。

图 1 面板 (*c*) 显示了成功概率 $\mathcal{P}_{\mathrm{Suc}}$ 随使用二阶稳定子 Rényi 熵计算的非稳定子性变化时出现的拐点效应，M_2该效应取决于阈值 ϵ。然而，正如前文所述，在偏离体积律的情况下，该算法的一般行为需要通过数值分析来研究；拐点则可以通过严格的解析方法加以解释：

命题： 定义 $\mathcal{S}_{\max}(\psi) := \max_{\sigma} |\langle \sigma|\psi\rangle|^2$ 与 σ 一个稳定子态的稳定子保真度。于是，如果$\mathcal{S}_{\max}(\psi) > 1 - \epsilon^2/7$，也就是说，如果该量子态过于接近一个稳定子态，那么成功概率为零，即$\mathcal{P}_{\mathrm{Suc}}(\epsilon) = 0$。

上述命题揭示了图1 所示算法对稳定子保真度 $\mathcal{S}_{\max}$ 的敏感性，而稳定子保真度与稳定子熵 M_{lin}密切相关。[58]证明见此处。

在图 3中，我们展示了不同 Clifford 层最大数量 $\mathcal{P}_{\mathrm{Suc}}$下（$n = 12$ 个量子比特）的成功概率 N_{Layers}。我们固定阈值 $\epsilon = 0.005$，并计算成功概率随初始态非稳定子性（由 $M_2(|\psi_0\rangle)$ 计算得出）的变化。图中显示，增加算法迭代次数 N_{Layers} 会使成功概率趋近于 1，无论非稳定子性的取值如何。

含噪*Clifford*电路——到目前为止，我们假设 Clifford 酉算子是理想的。实际上，由于 Clifford 电路经过精细调谐，它们会受到残余噪声的影响。在这种情况下，与其在量子态层面进行误差缓解，不如在通道层面进行。考虑一种简单的误差模型，其中每个双量子比特Clifford门$U(k)$都会独立受到幺正噪声的影响。具体而言，每个双量子比特门都会按如下方式变换：

$$\tilde{U}(k) = e^{-i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} U(k) e^{i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} \tag{6}$$

其中 ϵ_α 是从均值为零、标准差为 σ的高斯分布中随机选取的数值，此处表示噪声强度（详见 [58] ）。采用相干噪声是因为，只有对于纯态，稳定子 Rényi 熵才是可蒸馏魔性的恰当度量。对于混合态，它仍具有重要的操作意义，可用于量化 Clifford 之外的资源 [50]：例如，它是确定直接保真度估计 [57],净化算法和高效纯度估计成本的关键资源 [64]。非相干噪声影响的研究将留待未来工作。

向 Clifford 门引入噪声，相当于注入魔性态，这可以通过测量反平坦度来准确刻画 $\mathcal{F}_A$。在图4 (a)中，我们展示了含 $\mathcal{F}_A$ 个量子比特的含噪 Clifford 电路中反平坦度 $n = 14$ 平均值的演化。我们将系统初始化为稳定子态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$，随后在每个 Clifford 层之后测量反平坦度。此外，我们还研究了从环面码基态出发时噪声的影响；环面码是一种定义在正方晶格上的稳定子码 [65–68]。环面码的基本构造是在正方晶格的每条键上放置一个自旋1/2 自由度，即物理量子比特。该模型由哈密顿量$H = -\sum_\nu A_\nu - \sum_p B_p$给出，其中 p 遍历所有面元，ν 遍历所有顶点（格点）。环面码的基态是由集合 $\{A_\nu\}$和 $\{B_p\}$定义的稳定子态。应用带有变换后 CNOT 门的 Clifford 电路后，我们在每一层之后测量反平坦度 $\mathcal{F}_A$。在图4 (b)中，我们展示了$\mathcal{F}_A$ 在不同强度的含噪 σ下的演化。它随 Clifford 层数几乎线性增长。这些结果量化了：通过仔细考察微观缺陷，可以定义一个误差阈值，用以区分沿 Clifford 轨道由误差注入的魔性与原始量子态的内禀魔性。

结论。—我们展示了量子态的非稳定子性虽然与纠缠本身完全无关，却通过任意划分的纠缠谱平坦度，与纠缠响应存在深刻且精确的联系。基于这一联系，我们制定了一种简单的协议，可高效地见证并量化量子系统中的非稳定子性；该协议适用于可进行局域操作和探测的原子与固态系统。对于具有体积律纠缠的量子态，该协议尤其高效；正如我们通过随机态和环面码动力学所展示的，它也能应对不可避免的噪声。我们的

结果为在大规模实验中见证非稳定子性铺平了道路，这是展示计算优势的关键一步；同时也推动了对量子多体系统中非稳定子性的进一步研究，尤其是其与临界行为的联系，因为在这种情况下，纠缠响应预计尤为重要。

致谢。— M.D. 感谢 V. Savona 提出的富有启发性的讨论。M.D. 和 P.S.T. 的研究部分得到了欧洲研究委员会资助（项目编号 758329，AGEnTh）、MIUR FARE计划（MEPH）以及欧盟地平线2020研究与创新计划的资助（资助协议编号 817482，Pasquans）。P.S.T. 感谢西蒙斯基金会通过向国际理论物理中心提供的 284558FY19 号资助给予支持。本研究还得到了 PNRR MUR项目PE0000023-NQSTI 的支持（M.C.、M. D. 和 A.H.）。A.H.、L.L. 和 S.O. 感谢美国国家科学基金会 2014000 号资助。A.H. 感谢 PNRR MUR 项目 CN 00000013 -ICSC 提供的经费支持。T.C. 感谢 PL-Grid基础设施为本文所报告的部分数值模拟提供高性能计算设施。

[1] P. W. Shor，《SIAM计算杂志》26, 1484 (1997). [2] R. P. Feynman，《物理学基础》16, 507 (1986). [3] S. Lloyd，《科学》273, 1073 (1996). [4] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral，《现代物理评论》80, 517 (2008). [5] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio，《现代物理评论》82, 277 (2010). [6] J. I. Cirac and P. Zoller，《自然·物理》8, 264 (2012). [7] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimb`ene，《自然·物理》8, 267 (2012). [8] A. Aspuru-Guzik and P. Walther，《自然·物理》8, 285 (2012). [9] A. A. Houck, H. E. T¨ureci, and J. Koch，《自然·物理》8, 292 (2012). [10] L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang，《现代物理评论》76, 1037 (2005). [11] M. B. Plenio and S. S. Virmani，载于 *Quantum Informationand Coherence* (施普林格国际出版，2014) 第173–209页。[12] C. Chamon, E. R. Mucciolo, and A. E. Ruckenstein，物理学年鉴446, 169086 (2022). [13] G. Vidal，Phys. Rev. Lett. 91, 147902 (2003). [14] M. Van den Nest, W. D¨ur, G. Vidal, and H. J. Briegel，Phys. Rev. A 75, 012337 (2007). [15] M. Van den Nest, W. D¨ur, and H. J. Briegel，Phys. Rev. Lett. 100, 110501 (2008). [16] M. Van den Nest，Phys. Rev. Lett. 110, 060504 (2013). [17] G. D. las Cuevas, W. D¨ur, M. V. den Nest, and H. J. Briegel，《统计力学杂志：理论与实验》2009, P07001 (2009). [18] M. A. Nielsen and I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information* (剑桥大学出版社，2012). [19] D. Gottesman，《稳定子码与量子纠错》（1997），arXiv:quant-ph/9705052。[20] D. Gottesman, Phys. Rev. A 57, 127 (1998)。[21] S. Aaronson 和 D. Gottesman，Phys. Rev. A 70, 052328 (2004)。[22] V. Veitch、S. A. H. Mousavian、D. Gottesman 和 J. E merson，New Journal of Physics 16, 013009 (2014)。[23] C. Chamon、A. Hamma 和 E. R. Mucciolo，Phys. Rev. Lett. 112, 240501 (2014)。[24] D. Shaffer、C. Chamon、A. Hamma 和 E. R. Mucciolo，Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2014, P12007 (2014)。[25] Z.-C. Yang、A. Hamma、S. M. Giampaolo、E. R. Mucciolo 和 C. Chamon，Phys. Rev. B 96, 020408 (2017)。[26] S. Zhou、Z. Yang、A. Hamma 和 C. Chamon，SciPost Physics 9, 087 (2020)。[27] L. Leone、S. F. E. Oliviero、Y. Zhou 和 A. Hamma，Quantum 5, 453 (2021)。[28] S. F. Oliviero、L. Leone 和 A. Hamma，物理快报A 418, 127721 (2021)。[29] S. True 和 A. Hamma，Quantum 6, 818 (2022)。[30] S. Piemontese、T. Roscilde 和 A. Hamma，《Rokhsar-Kivelson 符号波函数的纠缠复杂性》（2022），arXiv:2211.01428。[31] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，熵 23, 1073 2021( )。[32] D. Gottesman，《量子计算机的海森堡表象》（1998），arXiv:quant-ph/9807006。[33] S. Bravyi 和 A. Kitaev，Phys. Rev. A 71, 022316 (2005)。[34] E. T. Campbell、B. M. Terhal 和 C. Vuillot，自然 549, 172 (2017)。[35] S. Bravyi 和 J. Haah，Phys. Rev. A 86, 052329 (2012)。[36] S. Bravyi 和 D. Gosset，Phys. Rev. Lett. 116, 250501 (2016)。[37] S. Bravyi、G. Smith 和 J. A. Smolin，Phys. Rev. X 6, 021043 2016( )。[38] H. J. Garcia、I. L. Markov 和 A. W. Cross，量子信息与计算 14, 683 (2014)。[39] E. Wigner，Phys. Rev. 40, 749 (1932)。[40] D. Gross，应用物理B 86, 367 (2006)。[41] V. Veitch、C. Ferrie、D. Gross 和 J. Emerson，New Journal of Physics 14, 113011 (2012)。[42] W. K. Wootters，Annals of Physics 176, 1 (1987)。[43] R. Hudson，数学物理报告 6, 249 (1974)。[44] V. Bu˘zek、A. Vidiella-Barranco 和 P. L. Knight，Phys. Rev. A 45, 6570 (1992)。[45] S. Bravyi、D. Browne、P. Calpin、E. Campbell、D. Gosset 和 M. Howard，Quantum 3, 181 (2019)。[46] M. Howard 和 E. Campbell，Phys. Rev. Lett. 118, 090501 2017( )。[47] M. Heinrich 和 D. Gross，Quantum 3, 132 (2019)。[48] X. Wang、M. M. Wilde 和 Y. Su，Phys. Rev. Lett. 124, 090505 2020( )。[49] A. Heimendahl、F. Montealegre-Mora、F. Vallentin 和 D. Gross，Quantum 5, 400 (2021)。[50] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，Phys. Rev. Lett. 128, 050402 (2022)。[51] S. F. E. Oliviero、L. Leone 和 A. Hamma，Phys. Rev. A 106, 042426 (2022)。[52] T. Haug 和 L. Piroli，Phys. Rev. B 107, 035148 (2023)。[53] T. Haug 和 L. Piroli，《稳定器熵与非稳定性单调量》（2023），arXiv:2303.10152。

[54]P. S. Tarabunga、E. Tirrito、T. Chanda 和 M. Dalmont e, 基于泡利-马尔可夫链的多体魔性——从临界性到规范理论（ 2023 2305 18541 ）, [ ] arXiv: . quant-ph . [55] T. Haug 和 M. Kim，PRX Quantum 4, 010301 (2023)。[56] S. F. E. Oliviero、L. Leone、A. Hamma 和 S. Lloyd，npj Quantum Information 8, 148 (2022)。[57] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，Phys. Rev. A 107, 022429 (2023)。[58] 形式证明见补充材料，其中包括参考文献 [28, 69, 70]。[59] A. Elben、S. T. Flammia、H.-Y. Huang、R. Kueng、J. Preskill、B. Vermersch 和 P. Zoller，Nature Reviews Physics 5, 9 (2023)。[60] 关于有限尺寸标度的详细讨论见 E. Tirrito 等人（准备中）。[61] H. Pichler、G. Zhu、A. Seif、P. Zoller 和 M. Hafezi，Phys. Rev. X 6, 041033 (2016)。[62] S. Johri、D. S. Steiger 和 M. Troyer，Phys. Rev. B 96, 195136 2017( )。[63] K. Choo、C. W. von Keyserlingk、N. Regnault 和 T. Neupert，Phys. Rev. Lett. 121, 086808 (2018)。[64] L. Leone、S. F. E. Oliviero、G. Esposito 和 A. Hamma，《稳定器熵中的相变与高效纯度估计》（2023），arXiv:2302.07895 [quant-ph]。[65] A. Kitaev，Annals of Physics 303, 2 (2003)。[66] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，Journal of Mathematical Physics 43, 4452 (2002)。[67] R. Raussendorf、J. Harrington 和 K. Goyal，New Journal of Physics 9, 199 (2007)。[68] A. G. Fowler、M. Mariantoni、J. M. Martinis 和 A. N. Cleland，Phys. Rev. A 86, 032324 (2012)。[69] H. Zhu，Phys. Rev. A 96, 062336 (2017)。[70] H. Zhu、R. Kueng、M. Grassl 和 D. Gross，《Clifford 群以渐进方式偏离幺正4-设计》（2016），arXiv:1609.08172。

补充材料

Emanuele Tirrito, [1,2] Poetri Sonya Tarabunga, [1,2,3] Gugliemo Lami, [2] Titas Chanda, [1,2] Lorenzo Leone, [4] Salvatore F.E. Oliviero, [4] Marcello Dalmonte, [1,2] Mario Collura, [2,3] 和 Alioscia Hamma[5,6]

[1] *The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera 11 34151 Trieste Italy „ , , ,* [3] *INFN, Sezione di Trieste, Via Valerio 2, 34127 Trieste, Italy* [4] *Physics Department, University of Massachusetts Boston, 02125, USA* [5] *Dipartimento di Fisica 'Ettore Pancini', Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cintia 80126, Napoli, Italy* [6] *INFN, Sezione di Napoli, Italy*

定理证明

回顾正文中对二分划分 $A \cup B$ 下纯态 $|\psi\rangle$ 的纠缠谱平坦度度量定义

$$\mathcal{F}_A(|\psi\rangle) = \mathrm{Tr}(\rho_A^3) - \mathrm{Tr}^2(\rho_A^2) \tag{S1}$$

其中 $\rho_A = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$。本节计算 Clifford 轨道 $\Gamma|\psi\rangle$ 上的平均值，其中 $\Gamma \in C_n$，即$\langle \mathcal{F}_A(\Gamma|\psi\rangle)\rangle_{C_n}$。注意，我们可以写成

$$\langle \mathcal{F}_A(\Gamma|\psi\rangle)\rangle_{C_n} = \langle \mathrm{Tr}(\rho_{\Gamma,A}^3)\rangle_{C_n} - \langle \mathrm{Tr}^2(\rho_{\Gamma,A}^2)\rangle_{C_n} \tag{S2}$$

其中 $\rho_{\Gamma,\ A} = \mathrm{Tr}_B(\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger)$。现在可以使用交换技巧，即 $\mathrm{Tr}(O^3) = \mathrm{Tr}(T_{(123)}O^{\otimes 3})$ 以及 $\mathrm{Tr}^2(O^2) = \mathrm{Tr}(T_{(12)(34)}O^{\otimes 4})$，将上述对 $|\psi\rangle$ 多个副本取平均的运算线性化

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_A(\Gamma|\psi\rangle)\rangle_{C_n} &= \mathrm{Tr}(T^A_{(123)} \langle (\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger)^{\otimes 3}\rangle_{C_n}) \\ &- \mathrm{Tr}(T^A_{(12)(34)} \langle (\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger)^{\otimes 4}\rangle_{C_n})\end{aligned} \tag{S3}$$

其中 $T^A{}_{(123)}$ 且 $T^A_{(12)(34)}$ 是仅对子系统 A 起非恒等作用的置换。对于公式（S3）右侧的第一个平均值，我们利用 Clifford 群是一个 3-设计这一事实 [S1, S2] 从而

$$\langle (\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger)^{\otimes 3}\rangle_{C_n} = \frac{\Pi^{(3)}_{sym}}{\mathrm{Tr}(\Pi^{(3)}_{sym})} \tag{S4}$$

其中 $\Pi^{(3)}_{sym} = \sum_{\pi_3 \in S_3} T_{\pi_3}/3!$ 是对称投影算子， S_3 是对称群，它作用于 n 量子比特的希尔伯特空间的 3 个副本上，而 T_{π_3} 是置换 $\pi_3 \in S_3$的酉表示。因此，方程（S3）中的第一项可计算为

$$\frac{1}{\mathrm{Tr}\,\Pi^{(3)}_{sym}} \mathrm{Tr}(T^A_{(123)}\Pi^{(3)}_{sym}) = \frac{\sum_{\pi\in S_3} \mathrm{Tr}_A(T^A_{(123)}T^A_\pi)\,\mathrm{Tr}_B(T^B_\pi)}{\mathrm{Tr}\,\Pi^{(3)}_{sym}} \tag{S5}$$

其中我们利用了以下事实：任意置换算符 T_π对于 $\pi \in S_3$ 满足$T_\pi = T^A_\pi \otimes T^B_\pi$。对于式（S3）右侧的第二个平均，我们使用了 [S3, S4]中给出的技术性结果，它表明

$$\langle (\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger)^{\otimes 4}\rangle_{C_n} = \alpha Q\Pi^{(4)}_{sym} + \beta\Pi^{(4)}_{sym} \tag{S6}$$

其中 $Q = d^{-2}\sum_{P\in\mathcal{P}_n} P^{\otimes 4}$和 $\Pi^{(4)}_{sym}$是作用于 S_4上的对称投影算子，定义为 $\Pi^{(4)}_{sym} \equiv \sum_{\pi_4\in S_4} T_{\pi_4}/4!$ 。然后我们定义

$$\begin{aligned}\alpha &:= \frac{\|\Xi_\psi\|_2^2}{(d+1)(d+2)/6} - \beta \\ \beta &:= \frac{1-\|\Xi_\psi\|_2^2}{(d^2-1)(d+2)(d+4)/24}\end{aligned} \tag{S7}$$

因此，方程（S3）中的第二项可计算为

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tr}^2(\rho^2_{\Gamma,A})\rangle_{C_n} &= \mathrm{Tr}[T^A_{(12)(34)}(\alpha Q + \beta I)\Pi^{(4)}_{sym}] \\ &= \sum_{\pi\in S_4} [\alpha\,\mathrm{Tr}_A(T^A_\pi T^A_{(12)(34)}Q^A)\,\mathrm{Tr}_B(T^B_\pi Q^B) \\ &+ \beta\,\mathrm{Tr}_A(T^A_\pi T^A_{(12)(34)})\,\mathrm{Tr}_B(T^B_\pi)]\end{aligned} \tag{S8}$$

这里我们用到了以下事实： $Q = Q_A \otimes Q_B$ 以及 $Q_X = d_X^{-2}\sum_{P\in\mathcal{P}_X} P_X^{\otimes 4}$对于 $X = A,\ B$。注意，$\mathrm{Tr}(QT_\pi)$ 是在 [S3] 中计算的，并列于 [S5]中。经过直接的代数运算，并回顾 $M_{lin}(|\psi\rangle) = 1 - d\|\Xi_\psi\|_2^2$，可得：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_A(\mathrm{Tr}_B(\Gamma|\psi\rangle\langle\psi|\Gamma^\dagger))\rangle_{C_n} &= \frac{(d^2-d_A^2)(d_A^2-1)}{(d^2-1)(d+2)d_A^2} M_{lin}(|\psi\rangle) \\ &\equiv c(d,d_A)M_{lin}(|\psi\rangle)\end{aligned} \tag{S9}$$

由此证明得证。 □

命题的证明

我们先回顾稳定子保真度的定义

$$\mathcal{S}_{\max}(\psi) = \max_{\sigma\in \mathrm{STAB}} |\langle\sigma|\psi\rangle|^2 \tag{S10}$$

首先证明以下引理。

引理： 给定一个纯态 $|\psi\rangle$和一个二分划分 $A|B$，则平坦度 $\mathcal{F}_A$ 的上界为

$$\mathcal{F}_A(\psi) \le 7\sqrt{1-\mathcal{S}_{\max}(\psi)} \tag{S11}$$

证明。—注意，对于每个稳定子态 σ，我们都有$\mathcal{F}_A(\sigma) = 0$。因此，我们得到以下不等式链 ——

性

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_A(\psi) = \mathcal{F}_A(\psi) - \mathcal{F}_A(\sigma) \\
&= \mathrm{Tr}[T^{(A)}_{123}(\psi^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 3})] - \mathrm{Tr}[T^{(A)}_{(12)(34)}(\psi^{\otimes 4} - \sigma^{\otimes 4})] \\
&\leq |\,\mathrm{Tr}[T^{(A)}_{123}(\psi^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 3})]| + |\,\mathrm{Tr}[T^{(A)}_{(12)(34)}(\psi^{\otimes 4} - \sigma^{\otimes 4})]| \\
&\leq \|T^A_{(123)}\|_\infty \|\psi^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 3}\|_1 + \|T^A_{(12)(34)}\|_\infty \|\psi^{\otimes 4} - \sigma^{\otimes 4}\|_1 \\
&= 7\|\psi - \sigma\|_1 = 7\sqrt{1 - |\,\langle\sigma|\psi\rangle\,|^2}
\end{aligned} \tag{S12}$$

在第二行中，我们使用了论文中所采用的平坦度定义。在第三行中，我们使用了三角不等式。在第四行中，我们使用了 Schatten p 范数的界，即对于 $p^{-1} + q^{-1} = 1$ 和所选的 $p = \infty$ 、 $q = 1$，有 $|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \|A\|_p \|A\|_q$。最后一行中，我们多次用到了以下不等式

$$\begin{aligned}
\|\psi^{\otimes 4} - \sigma^{\otimes 4}\| &= \|\psi^{\otimes 4} - \psi \otimes \sigma^{\otimes 3} + \psi \otimes \sigma^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 4}\| \\
&\leq \|\psi\|\|\psi^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 3}\| + \|\psi - \sigma\|\|\sigma^{\otimes 3}\| \\
&= \|\psi^{\otimes 3} - \sigma^{\otimes 3}\| + \|\psi - \sigma\| \\
&\leq 4\|\psi - \sigma\|
\end{aligned} \tag{S13}$$

然后在式（S13）中取最小值$_{\sigma\in\mathrm{STAB}}$，即可得到式（S11）。□

正文中的命题现在是上述引理的一个推论。事实上，给定图 1 面板（c）中算法的阈值 ϵ，那么如果 $\mathcal{S}_{\max} > 1 - \epsilon^2/7$，则 $\mathcal{F}_A(\psi) < \epsilon$，从而 $\mathcal{P}_{\mathrm{Suc}}(\epsilon) = 0$。□

Stabilizer fidelity and stabilizer entropy

现在我们来讨论上述结果的含义，以及稳定子保真度与稳定子熵之间的关系。稳定子保真度和稳定子熵通过不等式 [S6]$M_{lin} \leq 1 - \mathcal{S}^4_{\max}(\psi)$ 紧密相连，这种关系颇为有趣。然而，对于算法失效以及前文正文中提出的命题而言，这种关系并未提供显著帮助。我们只能推断，若 $\mathcal{S}_{\max} > 1 - \epsilon^2/7$，则 $M_{lin} \lesssim \frac{4}{7}\epsilon^2$。

有力的数值证据 [S6] 表明，对于 M_{lin}，以下不等式成立：

$$1 - \mathcal{S}^a_{\max} \leq M_{lin}, \tag{S14}$$

对于 $a \simeq 1.7$。这一发现为线性稳定子熵提供了一个有用的下界。因此，这些结果表明，协议失效与线性稳定子熵之间存在直接联系，这一点在图 1 的面板（c）的数值图中得到了展示。假设（S14），那么我们将有 $\mathcal{F}_A(\psi) \leq 7\sqrt{1 - (1 - M_{\mathrm{lin}})^{1/a}}$，因此直接揭示见证算法失效与线性稳定子熵之间的关系。

Clifford 电路

我们先来描述随机 Clifford 电路的架构，包括有噪声和无噪声两种情况。我们考虑一个由 n 个量子比特组成的系统，其希尔伯特空间为 $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2$。群 P_n 由所有带有相位 ± 1 和 $\pm i$的 n量子比特泡利串构成。Clifford 群 $C(d)$由能够将泡利串变换为泡利串的酉算符组成。换言之，对于任意 $\Gamma \in C(d)$，对所有 $P \in P_n$，都有 $\Gamma P \Gamma^\dagger \in P_n$。Clifford 群可由三个门生成：Hadamard 门、相位门 $e^{i\pi/2}$ （S 门）以及 CNOT门。由于相位门和 Hadamard 门能够构造所有泡利矩阵，因此每个泡利门也都是 Clifford 群的一个元素。

在无噪声的随机 Clifford 电路中，量子态 $|\psi_0\rangle$ 在深度为 N_{Layers} 的随机 Clifford 电路下演化，该电路记为 $U_{\mathrm{Cl}} = \prod_k^{N_{\mathrm{Layers}}} U_k$。其中， U_k包含 $n-1$ 个作用于最近邻之间的 Clifford 门（Hadamard 门、S 门和受控非门）。

此外，由于构造这些电路时涉及微调，Clifford 幺正算符会呈现残余噪声。为对此进行建模，我们考虑一种简单的误差模型：每个双量子比特Clifford门 U_k 都会受到幺正噪声的影响，如式（6）所述。具体而言，只有受控非门会受到误差影响。利用˜式（6），修正后的受控非门 C_{NOT} 可表示为：

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{\mathrm{NOT}} &= e^{-i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} e^{i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} X e^{i\sum_\alpha \epsilon_\alpha P^\alpha} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{S15}$$

存在噪声时，量子态 $|\psi_0\rangle$ 在深度为 N_{Layers}的随机电路下演化，该电路记为$\tilde{U} = \prod_k^{N_{\mathrm{Layers}}} \tilde{U}_k$。其中， $\tilde{U}k$ 由 $n-1$ 个 Clifford 门组成，这些门从 Hadamard 门、S˜门和C_{NOT}中随机选取。

[S1] H. Zhu, Phys. Rev. A 96, 062336 (2017).[S2] H. Zhu, R. Kueng, M. Grassl, 和 D. Gross, 《Clifford 群并非幺正4-设计》（2016），arXiv:1609.08172。[S3]L. Leone、S. F. E. Oliviero、Y. Zhou 和 A. Hamma，Quantum 5, 453 (2021).[S4] S. F. Oliviero、L. Leone 和 A. Hamma，物理快报A 418, 127721 (2021).[S5]L. Leone，适用于 Clifford 群及其扩展的 Mathematica 脚本。https://github.com/lorenzoleone/Clifford-group-and-beyond (2023).[S6] T. Haug 和 L. Piroli, 《稳定器熵与非稳定性单调量》（2023），arXiv:2303.10152。