近似凸性的精确倍增阈值

Peter van Hintum*，Peter Keevash†

2023年4月4日

摘要

我们证明，对于体积相等的 A和 $B \subset \mathbb{R}^d$，若 $t \in (0, 1/2]$，且 $|tA + (1-t)B| < (1 + t^d)|A|$，则（经过平移后） $|\mathrm{co}(A \cup B)|/|A|$ 有界。这确立了 Figalli 和 Jerison 关于布伦-明可夫斯基不等式的定量稳定性结果中的精确阈值。此外，我们还为迭代和集确立了类似的精确阈值。

arXiv:2304.01176v1 [math.MG] 3 Apr 2023

1 引言

布伦—明　　科夫斯基不等式断言，对于体积相等的集合 A、$B \subset \mathbb{R}^d$，且 $t \in (0, 1/2]$，我们有　　e

$$|tA + (1-t)B| \geq |A|,$$

当且仅当 $A = B$ 是凸集时取等号。该不等式的稳定性引发了大量研究（例如 [FMP09, FMP10, Chr12, EK14, FJ15, FJ17, FMM18, FJ21, vHST22, vHST23a, vHST23b]）。这些结果分别用参数控制（至平移） $|A \triangle B|$, $|\mathrm{co}(A) \setminus A|$，以及 $|\mathrm{co}(A \cup B) \setminus A|$：

$$\delta_t(A, B) := \frac{|tA + (1-t)B|}{|A|} - 1 \geq 0.$$

在 [FJ17], 中，Figalli 和 Jerison 证明存在 $a_{d,t}$,$c_{d,t}$, $\Delta_{d,t} > 0$，使得若 $\delta = \delta_t(A, B) \leq \Delta_{d,t}$，则（至平移）

$$|\operatorname{co}(A \cup B) \setminus A| \leq c_{d,t}\delta^{a_{d,t}}|A|.$$

对于若干特定类别的集合 A, B，$a_{d,t}$ 和 $c_{d,t}$ 的最优值已得到确定。一般 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 的最优值预计为 $a_{d,t} = 1/2$ 和 $c_{d,t} = O\left(t^{-1/2}\right)$，不过对于 $A = B$，已证明更强的结果：$a_{d,t} = 1$ 和 $c_{d,t} = t^{-1}\exp(O(d\log(d)))$ [vHST22]。

本文确定了这一结果中 $\Delta_{d,t}$ 的最优值。我们对一般的 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 以及迭代和集都证明了这个界。两者都可以推广为定量稳定性结果，适用于所有低于这一阈值的倍增情形。

定理 1.1. 对所有 $d \in \mathbb{N}, t \in (0, 1/2]$，存在 $C_{d,t} > 0$，使得若相同体积的 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $|tA + (1-t)B| < (1 + t^d)|A|$，则（经过适当平移后） $|\mathrm{co}(A \cup B)| \leq C_{d,t}|A|$。

事实上，我们可以取 $C_{d,\ t} = t^{-O(d^2)}$。第二个定理确定了迭代和集的这一阈值。对于 $X \subset \mathbb{R}^d$和 $k \in \mathbb{N}$，我们记 $k \cdot X := \underbrace{X + \cdots + X}_{k \text{ 项}}$。

定理 1.2。对于所有 d、$k \in \mathbb{N}$，存在 $C_{d,\ k} > 0$ 使得若 $A \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $|k \cdot A| < (1^d + \cdots + k^d)|A|$，则 $|\mathrm{co}(A)| \leq C_{d,\ k}|A|$。

注 1.3。Cole Hugelmeyer、Hunter Spink 和 Jonathan Tidor 独立建立了定理 1.2。对于 $t = 1/2$，定理 1.1 与对于 $k = 2$ 的定理 1.2 一致。我们还通过独立的方法在 [vHK23 中建立了这一结果以及对于 $t = 1/2$ 的推论 1.5，即推论 1.9]。

结合定理 1.1 与 [FJ17] 中的主要结果（此处列为定理 5.1），我们得到 Brunn-Minkowski 不等式的以下定量稳定性结果。

*英国牛津大学新学院。电子邮箱：peter.vanhintum@new.ox.ac.uk

†英国牛津大学数学研究所。获 ERC 高级资助 883810 资助。

推论 1.4. 对于所有 $d \in \mathbb{N}$、$t \in \in (0,1)$，存在 $a_{d,t}$、$C_{d,t} > 0$，使得如果 A、$B \subset \mathbb{R}^d$ 具有相同体积并满足 $\delta := \delta_t(A, B) < t^d$，那么（除平移外）有

$$|\operatorname{co}(A \cup B) \setminus A| \leq C_{d,t} \delta^{a_{d,t}} |A|.$$

将定理 1.1 与 [vHST22] 的主要结果（作为定理 5.2 收录）结合起来，并证明了 [FJ21], 中的一个猜想，我们得到位似集的布伦-明可夫斯基不等式的如下稳定性结果。

推论 1.5. 对所有 $d \in \mathbb{N}, t \in (0, 1/2]$，存在 $C_{d,t}$，使得若 $A \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $\delta := \delta_t(A, A) < t^d$，则

$$|\operatorname{co}(A) \setminus A| \leq C_{d,t} \delta |A|.$$

如 $A = [0,1]^d$ 和 $B = A \cup \{v\}$ 所示，所有这些结果都是锐的，其中 $v \in \mathbb{R}^d$ 是一个任意大的向量。对于这些 A, B，我们有

$$tA + (1-t)B = A \cup [0,t]^d + (1-t)v,$$

因此 $\delta_t(A, B) = t^d$，而当 $||v||_2 \to \infty$ 时，$\frac{|\operatorname{co}(A \setminus A|}{|A|} \to \infty$）。

在第 2 节中，我们建立了关于 $d = 1$ 的强化版本，这些结果对一般结果的证明至关重要。在第 3 节中，我们证明定理 1.1。在第 4 节中，我们证明定理 1.2。最后，在第 5 节中，我们给出各项推论的证明。

这两个证明的思路都是：对于每个坐标方向，在 A (或 B) 中找出两个相距很远的点；结合引理 3.2，通过增大 $|\operatorname{co}(A)|$ 即可做到。随后我们区分两种情况： A 在所有坐标方向上都含有较长的纤维，或者并非如此。在前一种情况下，由于这些长纤维之和较大，我们利用普朗尼克不等式得到倍增的一个下界（见断言 3.3）。在后一种情况下，我们固定一个纤维较短的方向，并证明可以利用最优传输映射，将 A 和 B 中的纤维配对；这些纤维的（加权）和构成一个大小为 $|A|$ 的参考集（见引理 3.1）。最后，我们证明，将 B 的纤维与 A 中那两个相距甚远的点相加，所得集合与参考集不相交，且大小达到所需值（见引理 2.1）。

2 Freiman 的 3k − 4 定理的强版本

我们将使用以下引理的两个版本。该引理推出了 Freiman 关于不同集合的 $3k-4$定理的连续版本。

引理 2.1. 给定子集 $X, Y, Z \subset [0,1]$，有

$$|(X+Y) \cup (\{0,1\}+Z)| \geq \min\{1, |X|+|Y|\} + |Z|.$$

证明. 令 $S := X + Y \cup \{0,1\} + Z$。令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}; x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ 为从直线到环面的标准商映射。注意，对于 $z \in Z$，有 $|f^{-1}(z) \cap S| \geq 2$。此外，注意到根据柯西-达文波特定理，$|f(X+Y)| \geq \min\{1, |f(X)| + |f(Y)|\}$，因此得到：

$$\begin{aligned}
|S| &\geq |S \cap f^{-1}(Z)| + |S \setminus f^{-1}(Z)| \\
&\geq |(\{0,1\}+Z) \cap f^{-1}(Z)| + |(X+Y) \setminus f^{-1}(Z)| \\
&\geq 2|Z| + |f(X+Y) \setminus Z| \\
&\geq 2|Z| + \big(\min\{1, |X|+|Y|\} - |Z|\big) \\
&= \min\{1, |X|+|Y|\} + |Z|.
\end{aligned}$$

引理得证。 □

我们只会在满足 $|X|, |Y|, |Z| \leq \frac{1}{2}$ 的集合上应用引理 2.1，因此该界给出 $|X|+|Y|+|Z|$。注意，对于满足 $|\operatorname{co}(A)| \geq |\operatorname{co}(B)|$ 的集合 $A, B \subset \mathbb{R}$，我们可以令 $X = A$ 和 $Y = Z = B$，使得

$$|A+B| \geq |B| + \min\{|\operatorname{co}(A)|, |A|+|B|\} = |A| + |B| + \min\{|\operatorname{co}(A) \setminus A|, |B|\},$$

这可以看作定理 1.1 的一维情形的加强版本。

对于迭代和集，我们有以下这个引理的一个版本。

[1] Plünnecke's inequality [Plü70] states that $|X+Y| \leq \lambda |Y|$ implies $|d \cdot X| \leq \lambda^d |Y|$.

引理 2.2. 设 $Y_i \subset [0,1]$（对于 $1 \le i \le k$），使得 $|Y_i| \le 1/k$，并设 $S := \bigcup_{i=1}^{k} \{0,1,\dots,(k-i)\} + i \cdot Y_i$，则有 $|S| \ge \sum_i i|Y_i|$

证明。令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}; x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ 为从直线到环面的典范商映射。注意，对于 $y \in f(i \cdot Y_i)$，我们有 $|f^{-1}(y) \cap S| \ge k - i + 1$。此外，由 Cauchy-Davenport 定理可知 $|f(i \cdot Y_i)| \ge i|Y_i|$。令 $Z_i := f(i \cdot Y_i) \setminus \bigcup_{j<i} f(j \cdot Y_j)$。稍加思考（例如对 k 使用归纳法），可得 $\sum_i (k-i+1)|Z_i| \ge \sum_i |f(i \cdot Y_i)| \ge \sum_i i|Y_i|$。结合这些结果可得

$$\begin{aligned} |S| &\ge \sum_i |S \cap f^{-1}(Z_i)| \\ &\ge \sum_i \left|(\{0,1,\dots,(k-i)\} + i \cdot Y_i) \cap f^{-1}(Z_i)\right| \\ &\ge \sum_i (k-i+1)|Z_i| \\ &\ge \sum_i i|Y_i|. \end{aligned}$$

引理得证。 □

这个证明给出了以下结果，它可视为 [Lev96] 中推论 1 的连续版本。对于 $A \subset \mathbb{R}$，若令 $\ell := \min\left\{\left\lfloor \frac{|A|}{|\mathrm{co}(A)|} \right\rfloor, k\right\}$，那么

$$|k \cdot A| \ge \binom{\ell+1}{2}|A| + (k-\ell)\,|\mathrm{co}(A)|.$$

在最稠密的情形（即 $\ell = 1$）下，这意味着若 $|k \cdot A| \le (k+1)|A|$，则 $|\mathrm{co}(A) \setminus A| \le \frac{1}{k-1}(|k \cdot A| - k|A|)$。在最稀疏的情形（即 $\ell = k$）下，这是单维情形中定理 1.2 的一个尖锐版本。对于 $k = 2$，这就归结为 Freiman $3k-4$ 定理的连续版本。这些结果是尖锐的，一个区间与一个点的并集即可说明这一点。

3 不同集合：定理 1.1

我们使用以下标准引理，它说明存在 $tA + (1-t)B$ 的一个大子集。相关论述可参见 [中第 3 节第 1 步；关于这一特定引理的证明，参见 [McC94] 中的附录 D。

引理 3.1（[McC94]）。设 $\mu_A, \mu_B\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 是两个概率测度，且 $T\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ 是最优传输映射，使得对于所有可测的 $X \subset \mathbb{R}^{d-1}$，都有 $\mu_A(X) = \mu_B(T(X))$。对于 $t \in (0,1)$，令 $\rho_t\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 由 $\rho_t(x) := t\mu_A(y) + (1-t)\mu_B(T(y))$ 定义，其中 $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ 是唯一满足 $x = ty + (1-t)T(y)$ 的元素。则 $\int \rho_t \ge 1$。

引理 3.2。给定凸集 $X, Y \subset \mathbb{R}^d$，存在一个平移 $v \in \mathbb{R}^d$ 和一个仿射变换 $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得若令 $U := T(X)$ 和 $V := v + T(Y)$，则存在点 $p^i \in U \cup V$，$\lambda_i \in \mathbb{R}^d$ 和超平面 $H_i \subset \mathbb{R}^d$（对于 $1 \le i \le d$），使得：

1. 若 $p^i \in U$，则 $p^i + \lambda_i e_i \in U$，而若 $p^i \in V$，则 $p^i + \lambda_i e_i \in V$，
2. $U \cup V \subset H_i + [0, \lambda_i]e_i$，且
3. $\left|\bigcap_i H_i + [0,\lambda_i]e_i\right| = \prod_i \lambda_i$

证明。我们对 k 使用归纳法；假设经过仿射变换和平移后，存在（对于 $1 \le i \le k$）$p^i \in X \cup Y$，$\lambda_i \in \mathbb{R}^d$ 和超平面 $H_i \subset \mathbb{R}^d$，使得：

1. 若 $p^i \in X$，则 $p^i + \lambda_i e_i \in X$；若 $p^i \in Y$，则 $p^i + \lambda_i e_i \in Y$；
2. $X \cup Y \subset H_i + [0, \lambda_i]e_i$；3. $\left|\mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k} \cap \bigcap_{1 \le i \le k} H_i + [0,\lambda_i]e_i\right| = \prod_{1 \le i \le k} \lambda_i$

将其中一个集合沿 e_{k+1} 的某个倍数平移后，我们可以假设使 $\langle e_{k+1}$ 最小的点 $q, r \in X \cup Y$，以及使 $\langle e_{k+1}, r\rangle$ 最大的点属于同一个集合 X 或 Y。注意，沿 e_{k+1} 平移不会影响 p^i, λ_i 和 H_i（其中 $i \le k$）的任何性质（只需作相应的平移即可）。为方便记号，将两个集合都平移 $-q$（即假设 $q = 0$）。令 H_{k+1}：$= \mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-k-1}$ 和 $\lambda_{k+1} := \langle e_{k+1}, r\rangle$。显然，我们有 $X \cup Y \subset H_{k+1} + [0, \lambda_{k+1}]e_{k+1}$，并且

$$\left|\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}^{d-k-1} \cap \bigcap_{1\le i\le k+1} H_i + [0,\lambda_i]e_i\right| = \left|\mathbb{R}^k \times \{0\}^{d-k} \cap \bigcap_{1\le i\le k} H_i + [0,\lambda_i]e_i\right| \cdot |\lambda_{k+1}e_{k+1}| = \prod_{1\le i\le k+1} \lambda_i.$$

唯一的问题是，尽管 $r \in H_{k+1} + \lambda_{k+1}e_{k+1}$，它可能与 $\lambda_{k+1}e_{k+1}$ 不重合。因此，我们将仿射变换 T：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, x \mapsto x - \langle x, e_{k+1}\rangle(\lambda_{k+1}^{-1}r - e_{k+1})$ 应用于 X, Y, p^i，以及 H_i（对于 $i \le k$）。T 保持所有平行于 $\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-k-1} = H_{k+1}$ 的平面不变，并将 r 映射到 $\lambda_{k+1}e_{k+1}$。由于基向量 $e_i (i \ne k+1)$ 在 T 下保持不变，归纳假设不会受到影响。选择 $p^{k+1} = (0, \dots, 0)$ 即可完成归纳。 □

定理 1.1 的证明。设 $C_{d,t} := L^d$，其中 $L = L_{d,t} := \left(\frac{2}{1-t()t}\right)^{4d}$。我们将证明其逆否命题，因此设 $|\mathrm{co}(A \cup B)| \ge C_{d,t}|A|$。进行归一化，使得 $|A| = |B| = 1$。

对于 $i = 1, \dots d$，令 π^i：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为坐标投影，π_i：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ 为余投影。

首先，将引理 3.2 应用于 $\mathrm{co}(tA)$ 和 $\mathrm{co}((1-t)B)$，并施加一个仿射变换，使得所有 λ_i 都相等且至少为 L。对于 $i = 1, \dots, d$，令 $x^i \in \mathbb{R}^{d-1}$，使得

$$\begin{aligned}\max\left\{|\mathrm{co}(\pi_i^{-1}(x^i) \cap tA)|, |\mathrm{co}(\pi_i^{-1}(x^i) \cap (1-t)B)|\right\} &= \max\left\{|\pi_i^{-1}(x^i) \cap \mathrm{co}(tA)|, |\pi_i^{-1}(x^i) \cap \mathrm{co}((1-t)B)|\right\}\\ &= \max_{x\in\mathbb{R}^{d-1}}\left\{|\pi_i^{-1}(x) \cap \mathrm{co}(tA)|, |\pi_i^{-1}(x) \cap \mathrm{co}((1-t)B)|\right\}\\ &= L' > L.\end{aligned}$$

令 $a^i, b^i \in \mathbb{R}^d$ 满足

$$|\pi_i^{-1}(a^i) \cap tA| \ge \max_{a\in\mathbb{R}^d} |\pi_i^{-1}(a) \cap tA| \text{ and } |\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B| \ge \max_{b\in\mathbb{R}^d} |\pi_i^{-1}(b) \cap (1-t)B|.$$

断言 3.3. 若对所有 $i = 1, \dots, d$，都有 $\max\left\{|\pi_i^{-1}(a^i) \cap tA|, |\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B|\right\} \ge \sqrt{L}$，则 $|tA + (1-t)B| \ge 2|A|$。

Pro。为导出矛盾，假设 $|tA + (1-t)B| < 2|A|$。分两种情况讨论：要么对所有 i，

$$\min\left\{|\pi_i^{-1}(a^i) \cap tA|, |\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B|\right\} \ge 1$$

是否如此。

在后一种情况下，考虑 i_0 使得 $\min\left\{|\pi_{i_0}^{-1}(a^{i_0}) \cap tA|, |\pi_{i_0}^{-1}(b^{i_0}) \cap (1-t)B|\right\} \le 1$。假设 $|\pi_{i_0}^{-1}(a^{i_0}) \cap tA| \le 1$（另一种情况可类似推出）。由于 $|tA| = t^d$，这意味着 $|\pi_{i_0}(tA)| \ge t^d$，因此

$$|tA + (1-t)B| \ge |\pi_{i_0}(tA)| \cdot \left|\left(\pi_{i_0}^{-1}(b^{i_0}) \cap (1-t)B\right)\right| \ge t^d\sqrt{L} > 2,$$

矛盾。

因此，我们可以假设对所有 i，$\min\left\{|\pi_i^{-1}(a^i) \cap tA|, |\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B|\right\} \ge 1$。注意，根据 Pl¨unnecke 不等式，$|tA + (1-t)B| < (1 + (1-t)^d)|A| < 2t^{-d}|tA|$ 意味着

$$\left|d \cdot (1-t)B\right| \le (2t^{-d})^d |tA| < \left(\frac{2}{(1-t)t}\right)^{d^2}.$$

类似地，我们得到关于 $\left|d \cdot A\right|$ 的相同界。另一方面，我们得到

$$\left|d \cdot (1-t)B\right| \ge \left|\sum_{i=1}^d \left(\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B\right)\right| = \prod_{i=1}^d \left|\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B\right|,$$

以及类似的 结果适用于 tA。结合关于 tA 和 $(1-t)B$ 的迭代和集的这些界，我们得 d

$$\left(1 \cdot \sqrt{L}\right)^d \le \prod_{i=1}^d \left|\pi_i^{-1}(a^i) \cap tA\right| \cdot \left|\pi_i^{-1}(b^i) \cap (1-t)B\right| \le \left|d \cdot tA\right| \cdot \left|d \cdot (1-t)B\right| < \left(\frac{2}{(1-t)t}\right)^{2d^2},$$

这就导致矛盾。 □

因此，我们可以假设存在一个坐标方向 i，使得对所有 $y \in \mathbb{R}^{d-1}$，$|\pi_i^{-1}(y) \cap tA|$，$|\pi_i^{-1}(y) \cap (1-t)B| \le \sqrt{L}$。必要时旋转一下，我们可以假设 $i = 1$。为记号方便，记 $A_x := \pi_1^{-1}(x) \cap A$，$B_x := \pi_1^{-1}(x) \cap B$，以及 $S_x := \pi_1^{-1}(x) \cap (tA + (1-t)B)$。

由引理 3.2 可知，$|\mathrm{co}(tA_{x^1})|$和 $|\mathrm{co}((1-t)B_{x^1})|$中至少有一个大于 $L > 2\max_{x\in\mathbb{R}^{d-1}}\{t|A_x|,(1-t)|B_x|\}$。以下假设后者成立[2]。

进行平移 B，使得 $x^1 = 0$和 $(1-t)\,\mathrm{co}(B_0) = [0, L'] \times (0, \dots, 0)$。

记 $\mu_A\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}, x \mapsto |A_x|$，并类似地定义 μ_B。令 $T\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ 为将 μ_A 映射到 μ_B的最优传输映射。定义

$$S^1 := \bigcup_{x\in\pi(A)} tA_x(+)(1-t)B_{T(x)},$$

其中，对于 A_x的两个子集 $B_y \subset \mathbb{R}^{d-1}$,

$$tA_x(+)(1-t)B_y := (t\min(I) + (1-t)J) \cup (tI + (1-t)\max(J)) \times \{tx + (1-t)y\},$$

其中 $I, J \subset \mathbb{R}$ 满足 $A_x = I \times \{x\}$ 和 $B_y = J \times \{y\}$。注意，$|S_x^1| = t\mu_A(y) + (1-t)\mu_B(y)$，其中$y \in \mathbb{R}^{d-1}$是满足 $x = ty+(1-t)T(y)$的唯一元素。因此，由引理 3.1 可得 $|S^1| = \int |S_x^1|dx \ge |A|$。定义 $S^2 := tA + \{(0, \dots, 0), (L', 0, \dots, 0)\}$，并注意到 $S^1, S^2 \subset tA + (1-t)B$。

对于任意 $x \in \mathbb{R}^{d-1}$，我们发现

$$S_{tx} \supset S_{tx}^1 \cup S_{tx}^2 = tA_y + (1-t)B_{T(y)} \cup tA_x + \{(0, \dots, 0), (L', 0, \dots, 0)\}$$

whe关于 y，存在这样的 $ty + (1-t)T(y) = tx$（如果这样的 y存在），由引理 2.1 可知

$$|S_{tx} \setminus S^1| \ge |tA_x|.$$

对所有 x 积分，我们得到

$$\begin{aligned}
|tA + (1-t)B \setminus S^1| &= \int_{x\in\mathbb{R}^{d-1}} |S_x \setminus S^1| \\
&\ge t^{d-1} \int_{x\in\mathbb{R}^{d-1}} |S_{tx} \setminus S^1| \\
&\ge t^{d-1} \int_{x\in\mathbb{R}^{d-1}} |tA_x| \\
&= t^d \int_{x\in\mathbb{R}^{d-1}} |A_x| \\
&= t^d |A|.
\end{aligned}$$

至此，定理的证明完成。 □

4 迭代和集：定理 1.2

定理 1.2 的证明。设 $L = L_{d,\,k}$ 相对于 k 和 d 足够大。

首先，对 $X = Y = \mathrm{co}(A)$ 应用引理 3.2，并对 $i = 1, \dots, d$，令 $x^i \in \mathbb{R}^{d-1}$，使得 $|\pi_i^{-1}(x^i) \cap \mathrm{co}(A)| = \max_{x\in\mathbb{R}^{d-1}} |\pi_i^{-1}(x) \cap \mathrm{co}(A)| = L' > L$。

断言 4.1. 如果对所有 i，都存在一个 $y_i \in \mathbb{R}^{d-1}$，使得 $|\pi_i^{-1}(y_i) \cap A| \ge L/k$，那么 $|k \cdot A| \ge (1^d + 2^d + \cdots + k^d)|A|$

证明。反设 $\left|k \cdot A\right| < (1^d + 2^d + \cdots + k^d)|A|$，以导出矛盾。于是，由 Pl¨unnecke 不等式可得$\left|d \cdot A\right| < (1^d + 2^d + \cdots + k^d)^d|A|$。然而，

$$\left|d \cdot A\right| \ge \left|\sum_{i=1}^{d} \left(\pi_i^{-1}(y_i) \cap A\right)\right| \ge (L/k)^d > (1^d + 2^d + \cdots + k^d)^d.$$

这一矛盾证明了该结论。 □

[2]尽管另一种情形可以类似地处理，但 t 与 $1-t$ 之间存在不对称性，因此在另一种情形下可以得到更强的结果。

因此，我们可以假设存在一个坐标方向 i，使得对于所有 $y_i \in \mathbb{R}^{d-1}$，都有 $|\pi_i^{-1}(y_i) \cap A| \leq L/k$。如有必要，经过旋转后，我们可以假设 $i = 1$。为方便记号，记 $A_x := \pi_1^{-1}(x) \cap A$ 以及$S_x := \pi_1^{-1}(x) \cap (A + A)$。

平移 A 使得 $x^1 = 0$，且 $A_0 \supset \{0, L'\} \times (0, \ldots, 0)$。现在我们发现

$$S_x \supset \bigcup_{i=1}^{k} i \cdot A_{x/i} + (k-i) \cdot A_0$$

由引理 2.2 可知

$$|S_x| \geq \sum_{i=1}^{k} i|A_{x/i}|.$$

我们得出结论：

$$\begin{aligned} |A + A| &= \int_{x \in \mathbb{R}^{d-1}} |S_x| dx \\ &\geq \int_{x \in \mathbb{R}^{d-1}} \sum_{i=1}^{k} i|A_{x/i}| dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} i^d \int_{x \in \mathbb{R}^{d-1}} |A_x| dx \\ &= (1^d + \cdots + k^d)|A|. \end{aligned}$$

定理的证明至此完成。 □

5 推论的证明

首先回顾 [FJ17] 和 [vHST22] 中的主要定理。

定理 5.1（[FJ17]）。对所有 $d \in \mathbb{N}, t \in (0, 1)$，存在 $a_{d,t}, C_{d,t}, \Delta_{d,t} > 0$，使得若 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 具有相同体积且满足 $\delta := \delta_t(A, B) < \Delta_{d,t}$，则（经过平移后）有

$$|\operatorname{co}(A \cup B) \setminus A| \leq C_{d,t} \delta^{a_{d,t}} |A|.$$

定理 5.2（[vHST22]）。对所有 $d \in \mathbb{N}, t \in (0, 1/2]$，存在 $C_d, \Delta_{d,t} > 0$，使得若 $A \subset \mathbb{R}^d$ 满足$\delta := \delta_t(A, A) < \Delta_{d,t}$，则

$$|\operatorname{co}(A) \setminus A| \leq C_d t^{-1} \delta |A|.$$

推论很快即可得出。

推论 1.4 的证明。令 $C_{d,t} := \max\{C_{d,t}^{1.1}(\Delta_{d,t}^{5.1})^{-a_{d,t}}, C_d^{5.1,t}\}$ 以及 $a_{d,t} := a_{d,t}^{5.1}$，其中 $a_{d,t}^{5.1}, C_{d,t}^{5.1}$ 和 $\Delta_{d,t}^{5.1}$是定理 5.1 中的常数，而 $C_{d,t}^{1.1}$是定理 1.1 中的常数。

区分两种情况：$\delta < \Delta_d^{5.1,t}$ 或 $\Delta_d^{5.1,t} \leq \delta < t^d$。在前一种情况下，定理 5.1 给出（平移后）

$$|\operatorname{co}(A \cup B) \setminus A| \leq C_{d,t}^{5.1} \delta^{a_{d,t}^{5.1}} |A| \leq C_{d,t} \delta^{a_{d,t}} |A|.$$

在后一种情况下，由定理 1.1 可得

$$|\operatorname{co}(A \cup B) \setminus A| \leq |\operatorname{co}(A \cup B)| \leq C_{d,t}^{1.1} |A| \leq C_{d,t} (\Delta_{d,t}^{5.1})^{a_{d,t}} |A| \leq C_{d,t} \delta^{a_{d,t}} |A|.$$

综合这两种情况，即得推论。 □

推论 1.5 的证明类似。

致谢

第一作者谨此感谢 Anne de Roton 和 Pablo Candela 让他关注到这个问题。

参考文献

[Chr12] Michael Christ. 布伦–明可夫斯基不等式中的近等情形。arXiv 预印本 arXiv:1207.5062，2012 年。[EK14] Ronen Eldan 和 Bo'az Klartag。布伦–明可夫斯基不等式的维数与稳定性。比萨高等师范学院年刊，科学辑，13(4):975–1007，2014 年。[Fig15] Alessio Figalli。布伦–明可夫斯基不等式的稳定性结果。载于《德乔治研讨会 2013 和 2014》，第 119–127 页。施普林格，2015 年。[FJ15] Alessio Figalli 和 David Jerison。$\mathbb{R}^n$中的和集定量稳定性。《欧洲数学学会杂志》，17(5):1079–1106，2015 年。[FJ17] Alessio Figalli 和 David Jerison。布伦–明可夫斯基不等式的定量稳定性。《数学进展》，314:1–47，2017 年。[FJ21] Alessio Figalli 和 David Jerison。二维和三维欧几里得空间中半和的尖锐 Freiman 型估计。《法国高等师范学院科学年刊》，54(4):235–257，2021 年。[FMM18] Alessio Figalli、Francesco Maggi 和 Connor Mooney。尖锐的定量欧几里得集中不等式。《剑桥数学杂志》，6(3):59–87，2018 年。[FMP09] Alessio Figalli、Francesco Maggi 和 Aldo Pratelli。凸集的精细布伦–明可夫斯基不等式。《亨利·庞加莱研究所年刊 C：非线性分析》，26(6):2511–2519，2009 年。[FMP10] Alessio Figalli、Francesco Maggi 和 Aldo Pratelli。定量等周不等式的质量输运方法。《数学新进展》，182(1):167–211，2010 年。[vHK23] Peter van Hintum 和 Peter Keevash。和集中的局部性。手稿，2023 年。[vHST22] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。位似区域的布伦–明可夫斯基不等式的尖锐稳定性。《欧洲数学学会杂志》，24(12):4207–4223，2022 年。[vHST23a] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。上卷积的尖锐 l^1 不等式。即将在《离散分析》发表， 2023+。[vHST23b] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。平面布伦–明可夫斯基不等式的尖锐定量稳定性。即将在《欧洲数学学会杂志》发表，2023+。[Lev96] Vsevolod F Lev。多重加法与弗罗贝尼乌斯问题的结构定理。《数论杂志》，58(1):79–88，1996 年。[McC94] Robert John McCann。相互作用气体与平衡晶体的凸性理论（博士论文）。普林斯顿大学，1994 年。[Pl¨u70] Helmut Pl¨unnecke。图论的一个数论应用。《纯粹与应用数学杂志》，243:171–183，1970 年。