arXiv:2304.01189v2 [math.CO] 2 Mar 2024

和集中的局部性。

PETER VAN HINTUM 和 PETER KEEVASH

ABSTRACT. 受多项式 Freiman-Ruzsa（PFR）猜想的启发，我们建立了和集局部性的理论，并将其应用于 John 型近似以及小倍增集合的稳定性。一个亮点是：如果 $A \subset \mathbb{Z}$ 满足 $|A+A| \leq (1-\epsilon)2^d|A|$ 非退化，那么 A 可由 $O(2^d)$ 个某个 d 维广义算术级数（d-GAP）的平移覆盖，P 其中 $|P| \leq O_{d,\,\epsilon}(|A|)$；因此，在 A 不被 $O_{d,\,\epsilon}(1)$ 个平移高效覆盖这一非退化假设下，我们得到了 PFR 所需的多项式界之一，即一个 $(d-1)$-GAP。

我们还证明了一个稳定性结果：对于任意 ϵ、$\alpha > 0$，如果$A \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $|A+A| \leq (2-\epsilon)2^d|A|$ 非退化，那么某个 $A' \subset A$ 满足 $|A'| > (1-\alpha)|A|$，并且可由一个 $(d+1)$-GAP 或$O_\alpha(1)$ 个 d-GAP 的平移高效覆盖。这一关于逼近覆盖的“与维度无关”界，与精确覆盖形成了令人意外的对比：在精确覆盖中，所需的平移数量不仅随 d 增长，而且还是指数增长。另一个亮点是：如果 $A \subset \mathbb{Z}$ 满足 $|A+A| \leq (2^d+\ell)|A|$ 非退化，且 $\ell \leq 0.1 \cdot 2^d$，那么 A 可由 $\ell+1$ 个 d-GAP 的平移覆盖，P 其中 $|P| \leq O_d(|A|)$；这是紧的，因为 $\ell+1$ 不能替换为任何更小的数。

上述结果也适用于 $A \subset \mathbb{R}^d$：我们用 GAP 与凸体的一种适当的共同推广来替代 GAP，并将其称为广义凸数列。在这一情形下，非退化条件自动成立，因此无需对 A作任何额外假设，即可得到本质上最优的界。这里我们证明，若 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足$|\frac{A+A}{2}| \leq (1+\delta)|A|$ 且 $\delta \in (0,1)$，则 $\exists A' \subset A$ 满足 $|A'| \geq (1-\delta)|A|$，使得 $|\mathrm{co}(A')| \leq O_{k,\,1-\delta}(|A|)$。这是关于相同集合的布伦-明可夫斯基不等式的一个维度无关的尖锐稳定性结果，也提示了普雷科帕-莱因德勒不等式可能存在类似结果。

这些结果均由一套统一理论推导而来。在这套理论中，我们为任意集合引入一种新的内在结构逼近，称为“加法包络”，并通过改进 Freiman 定理、加入额外的分离性质来发展其理论。另一项后续应用将另行发表，即证明 Ruzsa 离散 Brunn-Minkowski 猜想。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11P70, 52A40, 49Q20, 52A27。英国牛津大学新学院。电子邮件：peter.vanhintum@new.ox.ac.uk。英国牛津大学数学研究所。获欧洲研究理事会高级资助项目883810资助。

Contents

1. 引言 2 2. 加法包络与 Freiman 分离 11 3. 预备知识 14 4. 连续 Freiman 定理 21 5. 合并 23 6. 吸附 29 7. 近似结构 32 8. 精确结果 I：基本情形 39 9. 精确结果 II：锥形情形 43 10. 超越 $3k-4$ 46 11. 对不同集合求和 54 12. 问题与方向 57 参考文献 58

1. Introduction

《加法组合学》中的一项基础性结果是 Freiman 定理[Fre59] ：任意一个 A 整数子集，只要其加倍有界，便是某个 P 有界维度广义算术级数的稠密子集（定义和背景见 Tao 和 Vu 的著作 [TV06] ）。这为 A提供了令人满意的定性描述：它可以由某个P 近似，而该集合属于加倍有界的简单集合类。然而，从定量角度看，这种描述可能非常宽松，因为 P 的加倍可能远大于 A的加倍，因此，寻求更定量版本的 Freiman 定理一直是推动《加法组合学》发展的重要动力。稍加思考便会发现，必须允许 P 来自比广义算术级数更广泛的集合类。一个自然的尝试是用满足 $|X|$ 有界的集合 $X+P$来逼近 A ，即由有界个 P的平移构成的并集。我们或许希望找到具有多项式界的此类逼近，也就是说，如果 $|A+A| \leq e^{O(d)}|A|$，那么我们就能找到这样的 X、 P，使得 $\dim(P) = O(d)$，$|X| \leq e^{O(d)}$ 且 $|X+P| \leq e^{O(d)}|A|$。然而，Lovett 和 Regev 的一个例子 [LR17] 表明，这并非总是可行。改进 Freiman 定理中的界一直是大量研究的主题 [Ruz94, Bil99, Cha02, GT06, San08, Sch11]。目前已知的此类逼近的最佳界由 Sanders 给出 [San12], ，其中 $\dim(P)$ 和 $\log(|X+P|/|A|)$ 均约为 $O(d^6)$ 。

多项式 Freiman-Ruzsa（PFR）猜想（参见 [Gre07]）尝试另一种类型的逼近，人们有理由相信这种逼近可能存在多项式界（因此得名）。这里尝试用凸进程的平移来进行逼近，即逼近某个形如 $\phi(C \cap \mathbb{Z}^k)$ 的集合 P，其中 $C \subset \mathbb{R}^k$ 是某个凸集， $\phi\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ 是线性映射。该猜想指出

如果 $|A+A| \le e^{O(d)}|A|$，那么可以找到这样的 P，使得 $k = O(d)$，并且 $|P| \le e^{O(d)}|A|$，从而对某个满足 $|X| \le e^{O(d)}$ 的 X，有 $A \subseteq X + P$。下文将从三个角度阐述 PFR 猜想，以概述本文的研究成果：(1) John 型近似；(2) 稳定性；(3) 局部性。本文主要聚焦第三个主题——局部性，这也体现在文章标题中：大部分技术工作都用于发展局部性理论，并以此推导出前两个主题——John 型近似和稳定性——中的相关结果。我们的结果既适用于 PFR 所研究的离散情形 $A \subseteq \mathbb{Z}$，也适用于连续情形 $A \subseteq \mathbb{R}^k$。目前我们将继续聚焦于离散情形（从某种意义上说，这是最难的情况；在连续情形下，我们可以得到更好的界）。

我们的第一个视角是将 PFR 理解为一种 John 型近似。一般而言，John 型定理指出，某一类中的任意对象都可以由某个更简单类别中的对象高效地逼近（即误差至多为某个常数因子）。例如，John 定理用椭球逼近凸体，Freiman 定理用广义算术级数逼近小倍增集合，以及 Tao 和 Vu 的一个定理用广义算术级数逼近凸级数。

主题 1：John 型近似。本文探讨的一个问题是，是否存在适用于 P 有界加倍集合 A的 John 型近似。例如，如果 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 非退化（见方程 (1)），且 $|A+A| \le (2^d+\ell)|A|$，并且 $\ell \le 0.1 \cdot 2^d$，我们证明 A可被一个 d-广义算术级数 P的 $\ell+1$个平移所覆盖，其中 $|P| \le O_d(|A|)$。这里，$\ell+1$ 个平移是最优的（如向一个 d-广义算术级数中添加 ℓ 个分散点即可证明），因此，就 John 型近似而言，我们精确刻画了这类集合 A。我们还证明（见定理 1.5），如果 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $|A+A| \le (1-\epsilon)2^d|A|$ 且非退化，那么 A 包含于一个 d-维凸级数 P 的 $O(2^d)$个平移之中，并且$|P| \le O_{d,\,\epsilon}(|A|)$；由此我们得到 PFR 所需的多项式界之一。

我们的第二种视角将 PFR 视为一种稳定性陈述。在极值组合学中，这类陈述的一般形式是：如果某一类中的对象规模接近可能达到的最大值（或者更一般地说，在该类上接近某个函数的最大值），那么它在结构上必定接近某个极值例。陶哲轩的一些非正式术语很好地表达了“结构上接近”的不同可能含义：根据我们近似的是某个固定比例（1%）、除某个固定比例之外的全部（99%），还是全部（100%），分别称为 1%、99% 或 100% 稳定性。关于极值（超）图论中的稳定性示例，可参见综述 [Kee11]；关于等周稳定性（与此处的加性情形更为接近）的示例，可参见 [Mag08, BEKR20]。对于小倍增集合，只有当倍增非常接近可能达到的最小值时，才已知稳定性结果，例如著名的 Freiman $3k-4$ 定理（见

[Fre59]）以及下文介绍的若干关于小 δ时“非退化” A in $\mathbb{R}^k$or $\mathbb{Z}^k$ with $|A+A| \leq (2^k+\delta)|A|$ 的结果。在此背景下，一个广为人知的论证——鲁扎覆盖引理（例如见 [Ruz99]）——可以将任何 1% 稳定性定理转化为 100% 稳定性定理；也就是说，如果我们在 A 的某个固定比例中找到某种结构，就能用该结构的固定数量的平移覆盖 A 。不过，这种论证在定量上较弱，因此我们需要采用其他方法来获得最优界。

主题二：稳定性。我们将通过 99% 稳定性来实现 100% 稳定性，也就是说，我们首先为几乎所有的 A 寻求结构描述，然后利用它推导出剩余的结构。这种方法在极值组合学中广为人知（即“稳定性方法”），但据我们所知，此前没有文献将其应用于 Freiman 定理。我们的 99% 稳定性结果（见定理 1.6）表明，对于任意 $\epsilon, \alpha > 0$ ，若 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $|A+A| \leq (2-\epsilon)2^d|A|$ 非退化，则存在某个 $A' \subseteq A$ 满足 $|A'| > (1-\alpha)|A|$ ，它可以被一个 $(d+1)$-广义算术级数或 $O_{\epsilon,\ \alpha}$ 个 d-广义算术级数的平移高效覆盖。这个近似覆盖的“无关维度”界限与精确覆盖形成了出人意料的对比：后者所需的平移数量不仅随 d 增长，而且是指数级增长。

我们对 PFR 的第三种理解，是将其视为描述 A的局部性。我们将表述中的局部性 $|X|$ 理解为A的位置数量，并认为同一凸级数中的元素在加法意义下彼此接近，尽管它们在度量意义下未必接近。这一视角对于 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 的连续情形尤其清晰。在这里，经典的布伦-明可夫斯基不等式表明[1] $|A+A| \geq 2^k|A|$，当且仅当 A 在忽略一个零测集后为凸集时取等号。关于 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 以及当 $|A+A| \leq (2^k+\delta)|A|$ 较小时的 $\delta > 0$，已有大量文献研究。对于这样的A，Christ [Chr12a] 证明了凸包 co(A) 满足 $|\text{co}(A)| \leq (1+\epsilon(\delta))|A|$，其中 $\epsilon(\delta) \to 0$ as $\delta \to 0$。Figalli 和 Jerison [FJ15、FJ21], 取得了改进，最近 van Hintum、Spink 和 Tiba [vHST22]给出了具有最优参数的尖锐稳定性结果。因此，当 δ 较小时， A 的局部性就是其凸包；但当 δ较大时，情况会变得更加复杂。

主题 3：局部性。一个自然的出发点是考虑 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ with$|A+A| \leq (2^k+\delta)|A|$ ，并探讨 $\delta > 0$ 可以有多大，才能仍然高效地用一个凸集覆盖 A 。显然，对于 $\delta \geq 1$，这是不可能的：取一个凸集，再添加一个距离很远的点。我们的一般理论将得出一个推论：阈值恰好为 1；也就是说，如果 $\delta < 1$ then$|\text{co}(A)| < O_k(|A|)$，那么 $|\text{co}(A) \setminus A| \leq O_k(\delta|A|)$。对于这种情形，我们有一个独立的几何证明，将另行发表于 [vHK23]。随着 δ 逐渐增大，我们可以高效地用凸集的平移覆盖 A

[1]目前，我们对（离散）基数和（连续）测度都使用 $|\cdot|$ 符号；但为清晰起见，后文将用 $|\cdot|$ 表示测度，用 #(·) 表示基数。

集合；此外，当 $\delta < 0.1 \cdot 2^k$ 时，我们可以用 $\delta + 1$ 个平移来做到这一点，而且这是最优的（与上文提到的我们在 $\mathbb{Z}$ 中的类似结果相同；二者都包含在一个更一般的图景中）。然而，当 δ 达到 2^k时，任意固定数量的凸集平移都不够，因为 A 可能具有 $X + P$ 这样的形式，其中 P 是凸集，而 X 是任意长的等差数列。

广义凸数列。因此，我们引入凸级数和广义算术级数的一个共同推广：真凸（k，d）-进程是集合 $P = \phi(C \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^d))$，其中 $C \subset \mathbb{R}^{k+d}$ 是凸的，且 $\phi : \mathbb{R}^{k+d} \to \mathbb{R}^k$ 是在线性映射 $C \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^d)$ 上为单射的。在定理 8.1 中，我们考察满足 $|A + A| \le (2^{k+d} + \ell)|A|$ （ d、$\ell \ge 0$ ）的非退化 $A \subseteq \mathbb{R}^k$，并找到一个高效的覆盖，用 $X + P$ 覆盖 A，其中 P 是凸（k，d）-进程，而 $|X|$ 则可以根据 ℓ 得到严格控制；特别地，对于 $\ell \le 0.1 \cdot 2^{k+d}$，我们得到最优界 $|X| \le \ell + 1$。令 $d = 0$ 便可恢复上述关于 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 的结果。我们还将看到，$\mathbb{Z}$ 中的结果可由 $\mathbb{R}$ 中的结果推出。因此，在一般情形下，只要我们认为同一个广义凸数列中的元素在加法意义下彼此接近，即使它们在度量意义下并不接近，仍然可以将 $|X|$ 视为衡量局部性的量。

在下一小节中，我们将引入一些记号，以便在本引言余下部分形式化地阐述上述概念并陈述我们的精确结果。这些结果将按小节组织，围绕我们的核心主题——局部性展开，涵盖上文讨论的结果以及我们现在将概述的一些进一步结果。

- 我们的主要技术贡献是为任意集合引入一种新的内在结构逼近，我们称之为“加法包络”，并通过改进 Freiman 定理、加入额外的分离性条件来发展其理论（见定理 2.2）。
- 对于非退化的 $A \subseteq \mathbb{R}^k$，若满足 $|A + A| \le (2^{k+d} + \delta)|A|$，其中 $\delta \in (0, 1)$，我们可以找到一个凸的 (k, d)-进程 P，满足 $|P \setminus A| < O_{k,\, d}(\delta|A|)$（见定理 8.2）。令 $d = 0$，即可得到前文提到的 [vHST22] 关于 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 的尖锐稳定性结果；而令 $k = 0$，则可得到同一作者 [vHST23a] 关于非退化 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ 的尖锐稳定性结果。
- 我们获得了对 $A \subseteq \mathbb{R}$ 直线上加倍为 $4 - \epsilon$（见定理 1.8）的集合的非常精确的结构描述：要么 $|\mathrm{co}(A)| = O(|A|)$，要么 $A \subseteq \mathrm{co}_t(A)$，即一个由 $t < 2/\epsilon$ 区间组成的并集，并具有 $|\mathrm{co}_t(A)| < 2|A|$，具有线性稳定性 $|P \setminus A| \le O(\delta|A|)$，其关于 $\delta = |A + A|/|A| - (4 - 2/t)$，其中 P 是凸 $(1, 1)$-广义等差数列。

1.1. 概述与记号。以下凸包的广义概念将在全文中发挥关键作用。对于 $A \subset \mathbb{R}^k$，我们记 $\mathrm{co}_{\mathbb{R}^k,\, t}{}^{d}(A) = X + P$，其中 P 是一个真集凸（k，d）-进程，并且 $\# X \le t$；选择 X 和 P，使得 $A \subseteq X + P$，且 $|X + P|$ 最小；我们

固定任意一个选择，若 $X+P$ 不唯一。在某些情况下，如果 $d=0$，我们将省略 k、d；如果 $t=1$，则省略 t。例如，$\mathrm{co}(X)$ 应理解为 $\mathrm{co}^{\mathbb{R}^k,0,1}(X)$，其中 k 是 X 所在环境空间的维度，因此它与通常意义下的凸包一致。

我们还需要一个密切相关的概念 $\mathrm{gap}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)$，定义为包含 A 的最小体积集合 $X+P+Q$，使得 $\#X\le t$，P 是一个真集d-GAP，且 Q 是一个平行多面体。这大致等价于变体 $\mathrm{sco}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)$，其定义与 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)$ 完全相同，但额外要求满足对称性条件 $P=-P$。事实上，$|\mathrm{co}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)|\le|\mathrm{sco}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)|\le|\mathrm{gap}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)|$ 显然成立，而引理 3.6 将证明 $|\mathrm{gap}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)|=O_{d,k}(|\mathrm{sco}_t^{\mathbb{R}^k,d}(A)|)$。本文的大多数结果都将用 $\mathrm{gap}_t^{\mathbb{R}^k,d}$ 表述；它们等价于用 $\mathrm{sco}_t^{\mathbb{R}^k,d}$ 表述的相应结论，并蕴含用 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{R}^k,d}$ 表述的相应结论。不过，对于一些非常精确的结论，我们需要 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{R}^k,d}$。

为在 $\mathbb{Z}$ 中陈述我们的结果，令 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{Z},d}$、$\mathrm{sco}_t^{\mathbb{Z},d}$ 和 $\mathrm{gap}_t^{\mathbb{Z},d}$ 为相应的函数，用于 $\mathbb{Z}$ 的子集，并将“凸（k,d）-进程”替换为“凸d-进程”。具体而言，$\mathrm{co}_t^{\mathbb{Z},d}(A)=X+P$，其中 P 是凸 d-进程且 $\#X\le t$；选择 X 和 P，使得 $A\subset X+P$ 且 $\#(X+P)$ 最小。类似地定义 $\mathrm{sco}_t^{\mathbb{Z},d}(A)$ 和 $\mathrm{gap}_t^{\mathbb{Z},d}(A)$，并分别附加以下要求：$P$ 关于原点对称，以及 P 是广义算术级数。直观地说，在全文中，我们将 k 视为“连续维数”，将 d 视为“离散维数”。为强调这种联系，我们将 $\mathrm{co}_t^{k,d}$ 写作 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{R}^k,d}$，并将 $\mathrm{co}_t^{0,d}$ 写作 $\mathrm{co}_t^{\mathbb{Z},d}$。

作为这种记号的进一步示例，我们可以将 Freiman 定理和 PFR 重述如下。

$$\begin{aligned}&\text{Freiman's Theorem.}\qquad \text{If } A\subseteq\mathbb{Z} \text{ with } \#(A+A)\le K\#A,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{then } \#\left(\mathrm{co}_{O_K(1)}^{0,O_K(1)}(A)\right)\le O_K(\#A).\\ &\text{PFR.}\qquad \text{If } A\subseteq\mathbb{Z} \text{ with } \#(A+A)\le e^{O(d)}\#A,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{then } \#\left(\mathrm{co}_{e^{O(d)}}^{0,O(d)}(A)\right)\le e^{O(d)}\#A.\end{aligned}$$

我们的许多定理都包含一个非退化条件，其含义如下：

(1)
$$\#\left(\mathrm{gap}_{O_{d,\xi}(1)}^{0,d-1}(A)\right)\ge\Omega_{d,\xi}(\#A)\iff\forall d,\xi,\exists C,c:\#\left(\mathrm{gap}_c^{0,d-1}(A)\right)\ge C\#A,$$

也就是说，不存在由少数（c 仅取决于 d 和 ξ）个平移后的 $d-1$ 维广义算术级数，高效地覆盖 A（其大小至多超过 A 一个仅取决于 d 和 ξ 的因子 C）。

为此，我们称集合 $A\subset\mathbb{Z}$ 是 (d,t)-非退化的，如果 $\#\left(\mathrm{gap}_t^{0,d-1}(A)\right)\ge t\#A$，也就是说，如果 A 不被至多 t 个大小总和为 $t|A|$ 的 $d-1$ 维广义算术级数的平移所覆盖。

我们将在以下各小节中按照局部性的主题陈述结果，即针对 $\mathrm{co}_t^{k\ d}{}_{,}(A)$ 中参数 t 的界。其内容概述如下：

- 集合中的很大一部分集中在一个地方。
- 整个集合集中在少数几个地方。
- 几乎整个集合都集中在常数个地方。
- 倍增小于 4 的直线上的集合是近似凸的。
- 近似凸性的精确倍增条件。
- 加法包络。

和集理论已在多种群中得到发展。人们尤其关注 $\mathbb{R}^k$ 的连续情形（例如 [FMP09, FMP10, Chr12a, FJ15, FJ17, FJ21, vHST23c, vHST22, FvHT23]）以及 $\mathbb{Z}$ 的离散情形（例如 [Fre59, Ruz94, Bil99, Cha02, GT06, San08, Sch11]）。就本文而言，所处情形对我们的结果影响不大，因此，尽管下面有些结果是针对 $\mathbb{Z}$陈述的，在证明中我们通常更倾向于在 $\mathbb{R}^k$ 中进行讨论。这是合理的，因为 (a) 除了加法包络理论之外，证明都是相同的；(b) $\mathbb{Z}$ 中的结果可由 $\mathbb{R}$ 中的结果通过以下在第 5 节证明的命题推出。

命题 1.1. 对于任意 $A \subset \mathbb{Z}$和 d，$t \in \mathbb{N}$存在 $\epsilon = \epsilon(A, d, t) > 0$，使得 $B := A + [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R}$具有 $\left|\text{间隙}_t^{1\ d},\ (B)\right| = \Theta_{d,\ t}\left(\epsilon\#\left(\text{间隙}_t^{0\ d},\ (A)\right)\right)$.

1.2. 集合的一大部分集中在同一处。我们先讨论 $\mathbb{R}^k$ 的连续情形，在这里我们得到对本小节将要讨论的 1% 稳定性现象（一大部分集中在同一处）以及 $\delta \to 0$ 的 99% 稳定性现象（下面将介绍更精细的结果）的简洁统一表述。将 1% 稳定性与 Ruzsa 覆盖结合起来，可以得到 100% 稳定性（下面也将介绍更精细的结果）。此前关于布伦-明可夫斯基不等式的稳定性结果（见第 1.6 节）仅适用于小得多的 δ；尤其是，我们尚未发现任何此类先前结果能在维度增大时保持 δ 不减小。

定理 1.2. 设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $\left|\frac{A+A}{2}\right| \leq (1+\delta)|A|$，其中 $\delta \in$ 属于 (0, 1)。那么存在一个子集 $A' \subset A$，满足 $|A'| \geq (1 - \min\{\delta, \delta^2(1 + O(\delta))\})|A|$，并且 $|\mathrm{co}(A')| \leq O_{1-\delta,\ k}(|A|)$。

由于 A' 的大小也与维度无关，因此这一结果与相同函数情形下 Pr´ekopa-Leindler 不等式的稳定性问题密切相关；后者可视为布伦-明可夫斯基定理在维度上无关的版本。我们将在第 12.1 节进一步探讨这一联系，并提出定理 1.2 的一个猜想性推广。

现在我们考虑整数情形，其中弗雷曼-比卢定理[Bil99] 表明，对于小倍增的集合，其很大一部分包含在一个低维的小型广义算术级数中。Green 和 Tao 的定量版本 [GT06] 表明，对于满足 $A \subset \mathbb{Z}$ 的集合

#(A+A) $\leq 2^d(2-\epsilon)\#A$，存在某个满足 # $\left(\text{gap}^{0,\ d}(A')\right) \leq \#A$的 $A' \subset A$

$$\#A' \geq \exp\left(-O(8^d d^3)\right) \epsilon^{O(2^d)} \#A.$$

通过以下结果，我们建立了关于 $\#A'$ 的一个界，该界在低阶项意义下是最优的，但需要作出非退化假设，并按照约翰型主题的思路放宽对 $\#\text{gap}^{0,\ d}(A')$ 的界。我们强调，我们对 $\#A'$ 给出的界不依赖于维度。

定理 1.3。 $\forall d \in \mathbb{N}, \delta \in (0,1)\ \beta > 0, \exists t = t_{d,\ \delta,\ \beta}$，使得以下结论成立。设 $A \subset \mathbb{Z}$ 有限，令 $d := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\#(A+A)}{\#A} \right) \right\rfloor$，且 $\delta := \frac{\#(A+A)\, 2^d}{\#A} - 1$。若 A 是 (d,t)-非退化的，则存在一个 d-GAP $P \subset \mathbb{Z}$，满足 $\#P \leq t\#A$，从而

$$\frac{\#(A \setminus P)}{\#A} \leq \min\left\{(1+\beta)\delta, \delta^2 + 60\delta^3\right\}.$$

上述结果在 $\delta \to 0$ 较大时以及在 $\delta \to 1$ 时，都精确到低阶项。我们还得到了 $\delta \to 0$ 较小时的精确结果（见注 7.6）。对于 $\delta \to 0$，考虑两个体积分别为 δ^2 和 $1-\delta^2$ 的位似凸集的并集（见例 3.17）；对于 $\delta \to 1$，考虑由 $\frac{1}{1-\delta}$ 个相等凸集组成的等差数列（见例 3.18）。第二个例子暗示了一个 $(k+1)$ 维凸结构，我们将在第 1.4 节确立这一点。

1.3. 整个集合集中在少数几个位置。现在我们考虑 100% 稳定性问题：给定加倍量时，最大的“局部性”是多少？这里，我们的基本例子（见例 3.19）由一个广义算术级数（GAP）和一些分散点组成。考虑 $A = P \cup S \subseteq \mathbb{Z}$，其中 P 是一个真集 d 维广义算术级数，而 S 是“分散的”，满足 $|S| = \ell$。那么 $\#(A+A) \leq (2^d + \ell)\#A$，且 A 的局部性为 $\ell + 1$。

以下结果表明，对于非退化的 A，当 ℓ 取值范围较大时，这个例子恰好达到最优；当 $2^d - \ell \gg 2^{d/2}$时，则渐近最优。我们指出，即使局部性的界弱得多，只要达到 $O(2^d)$，就足以用加倍为 $O(2^{2d})$ 的 $X + P$ 覆盖 A；也就是说，我们的 John 型近似在加倍方面只损失一个平方，而 PFR 框架允许任意多项式级别的损失。

定理 1.4. $\forall d \in \mathbb{N}, \ell \in [0, 2^d) \exists t = t_{d,\ell}$ 使得以下结论成立。设 $A \subset \mathbb{Z}$，设 $d := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\#(A+A)}{\#A} \right) \right\rfloor$ 且 $\ell := \frac{\#(A+A)\,\#A}{2^d} - \#A$。若 A 是 (d,t)-非退化的，则 A 包含在 ℓ' 个 d维广义算术级数的平移中，其大小为 $t\#A$，其中

$$\ell' \leq \begin{cases} \ell + 1 & \text{for } \ell \in \mathbb{N} \text{ if } \ell \leq 0.1 \cdot 2^d, \\ & \text{or if } \ell \leq 0.315 \cdot 2^d \text{ and } d \geq 13, \\ \ell\left(1 + O\left(\sqrt[3]{\frac{2^d}{(2^d-\ell)^2}}\right)\right) & \text{if } 0.1 \cdot 2^d \leq \ell \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^d}}\right) 2^d, \\ (1+o(1))\frac{d+1}{2\epsilon} & \text{where } \epsilon = \frac{2^d - \ell}{2^d} \text{ and } o(1) \to 0 \text{ as } \epsilon \to 0. \end{cases}$$

定理 1.4 中的最终界给出了极限情形 $\epsilon = \frac{2^d-\ell}{2^d} \to 0$ 的渐近最优结果，即加倍趋近于 2^{d+1} 时的结果。此时，上述基本例子不再成立，取而代之的是一个新例子，可以将其视为广义算术级数上的一个锥（见例 3.20）；直观来说，它描述了“最具 d维度”的（$d+1$）维构造，并表明即使常数 $\frac{d+1}{2}$ 也是最优的。

上述结果对于非退化集合而言非常精确，但若要在 PFR 方面取得进一步进展，我们就需要放宽非退化条件。接下来的结果朝这个方向迈进了一步，但其适用性受到关于 d' 的双指数依赖的限制。

定理 1.5. $\exists c$ 和 $\forall d \in \mathbb{N}, \exists t = t_d$, 使得以下结论成立。令$A \subset \mathbb{Z}$，令 $d := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\#(A+A)}{\#A} \right) \right\rfloor + 1$ 且 $d' < d$。若 A 是 (d,t)-非退化的，则 A 可由至多 $d\exp\exp(cd')$ 个 d 维、大小为 $t\#A$ 的广义算术级数的平移覆盖。

1.4. 集合几乎全部位于有限个位置。现在我们考察 99% 稳定性。我们将看到，位置的数量可以用一个与加倍无关的常数来界定。这与上文讨论的 100% 稳定性问题形成了鲜明对比：除非集合的加倍接近可能的最小值，否则我们需要用指数数量的位置来覆盖该集合。我们的基本例子中有许多分散的点，但集合质量几乎全部集中在一个位置，这暗示着，如果能舍弃集合的一小部分，就应当能做得好得多。此外，随着加倍趋近于 2^{d+1}，接替其成为主要情形的第二个例子具有高度结构化的特征，因此 $\mathrm{co}^{0,\ d+1}(A)$ 很小。以下结果表明，任何非退化集合都可以近似地描述为这两种构型之一：它集中在一个 $(d+1)$-进程或少数几个 d 进程中，其中“少数”只取决于近似精度，而与 d无关。

定理 1.6. $\forall \epsilon > 0, d \in \mathbb{N}, \exists t = t_{d,\epsilon}$ 以及 $\forall \alpha > 0, \exists \ell = \ell_\alpha$ 使得以下成立。令 $A \subset \mathbb{Z}$，令 $d := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\#(A+A)}{\#A} \right) \right\rfloor$ 并且 $\epsilon := 2 - \frac{\#(A+A)}{2^d \#A}$。若 A 是 (d,t)- 非退化的，则存在一个 $A' \subset A$，满足 $\#A' \geq (1-\alpha)\#A$，使得 A' 被以下内容覆盖：

- 一个大小为 $t\#A'$ 的 $(d+1)$ 维广义算术级数，或者
- ℓ 个大小为 t 的 d 维广义算术级数的平移$\#A'$。

一个推论是，我们总能在集合中某个绝对常数比例的部分找到算术结构。这在 ϵ 较小时改进了定理 1.3。

推论 1.7。 $\forall \epsilon > 0, d \in \mathbb{N}, \exists t = t_{d,\,\epsilon}$ 使得下述结论成立。设 $A \subset \mathbb{Z}$，令 $d := \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\#(A+A)}{\#A} \right) \right\rfloor$ 且 $\epsilon := \frac{2}{\#(A+A)2^d \#A}$。若 A 是 ~~(d,t)~~-非退化的，则存在一个 $(d+1)$ 维广义算术级数 P，满足 $\#P \le t\#A$ 且 $\#(A \cap P) \ge \frac{1}{30000}\#A$。

1.5. 加倍小于 4 的直线上的集合几乎是凸的。对于小倍增集合而言，可以说最精确的稳定性结果是 Freiman 的 $3\#A - 4$ 定理，它指出，对于 $A \subset \mathbb{Z}$，我们有

$$\#(A+A) \ge 2\#A - 1 + \min\left\{ \#\left(\mathrm{co}^{0,1}(A) \setminus A\right), \#A - 3 \right\},$$

而对于连续集合 $A \subset \mathbb{R}$，我们有 [FJ15]

$$|A+A| \ge 2|A| + \min\{|\,\mathrm{co}(A) \setminus A|, |A|\},$$

参见引理 10.5。这些结果是最优的，因为这些常数都无法改进。关于如何取得超越加倍为三的结果，已有大量研究。Jin [Jin07] 稍稍超越了 3，证明存在 $\Delta, N > 0$，使得若 $A \subset \mathbb{Z}$ 满足 $\#A > N$ 且 $\#(A+A) \le (3+\delta)\#A - 3$，并且 $\delta \le \Delta$，那么要么 $\#\left(\mathrm{co}^{0,1}(A)\right) \le 2(1+\delta)\#A - 1$，要么 A 包含于两个步长相同的等差数列 I 和 J 中，且 $\#I + \#J \le (1+\delta)\#A$。Eberhard、Green 和 Manners [EGM14] 针对加倍小于 4 的集合证明了若干 Freiman-Bilu 型结论，其中与本文最相关的是 [EGM14, Theorem 6.4], : 如果 $\#(A-A) \le (4-\epsilon)\#A$，那么存在 $A' \subset A$，使得 $\#A' = \Omega_\epsilon(\#A)$，且 $\#\left(\mathrm{co}^{0,1}(A')\right) = (2 - \Omega(\epsilon))\#A'$。 [2]

我们证明了关于 $A \subset \mathbb{R}$ 与 $|A+A| < 4|A|$的以下锐利刻画；与上述连续情形的结果相比，该刻画得出了强得多的结构结论。为了理解定理的陈述，举例来说，假设 $|A+A| < 3.3334|A|$。定理蕴含， A 可由 2 个或 3 个区间覆盖，区间总长度为 $< 2|A|$ （因为 $\delta > 0$）。此外，若需要 3 个区间，那么 A 可由 3 个区间紧密逼近（误差为 < 0.02）；这 3 个区间的起点和长度分别构成等差数列。一般而言，我们令 $\mathrm{ap}_t(A)$ 表示包含 A 的最小规模集合，其中 A 是由 t 个区间组成的等差数列，且这些区间的长度构成等差数列，例如 $[0,1] \cup [10,12] \cup [20,23]$。于是，该定理给出了 t 关于加倍的一个界；此界是锐利的，并且相对于这个极值例具有线性稳定性。

定理 1.8。存在一个绝对常数 $C > 0$，使得以下结论成立。设 $A \subset \mathbb{R}$ 满足 $|A+A| < 4|A|$ 且 $|\mathrm{co}(A)| \ge C|A|$。令 t 为使 $|\mathrm{co}_t(A)| < 2|A|$ 成立的最小值，并令 $\delta := \frac{|A+A|}{|A|} - (4 - 2/t)$。那么 $|\mathrm{co}^{1,1}(A) \setminus A| \le |A|$。此外，若 $\delta \le (2t)^{-2}$，则 $|\,\mathrm{co}^{1,1}(A) \setminus A| \le 150\delta|A|$，且 $|\mathrm{ap}_t(A) \setminus A| \le 500t\delta|A|$。

界 t in ap_t 的估计中是必要的，例 3.21 表明了这一点。

[2]虽然并不直接等价，但数量 $\#(A-A)/\#A$ 与加倍 $\#(A+A)/\#A$ 密切相关。

1.6. 近似凸性的尖锐倍增条件。对于 $A \subset \mathbb{R}^k$，我们有 $|A+A| \geq |2A| = 2^k|A|$；凸集时取等号（这是布伦-明可夫斯基不等式的一个平凡特例）。Christ [Chr12a, Chr12b] 得到了该不等式的一个稳定性结果，即若 $|A+A| \leq (2^k+\delta)|A|$，则 $|\mathrm{co}(A) \setminus A| \leq \epsilon|A|$，其中 $\epsilon \to 0$ 如 $\delta \to 0$。Figalli 和 Jerison 在 [FJ15, FJ21] 中给出了定量估计；van Hintum、Spink 和 Tiba [vHST22],证明，对于某个 $\Delta_k > 0$，若 $|A+A| \leq (2^k+\delta)|A|$ 且 $\delta < \Delta_k$，则$|\mathrm{co}(A) \setminus A| \leq O_k(\delta)|A|$。

这引出了一个问题：确定 Δ_k 的阈值，也就是能够保证通过凸包逼近 A 的加倍上界。我们下面更一般结果的推论表明，答案是 1；显然这是最优的，因为可以考虑一个凸体和一个远处的点。这个特例有一个几何证明，并可推广到不同加数；相关内容将另行发表于 [vHK23]。

推论 1.9. 若 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| = (2^k+\delta)|A|$，其中 $\delta < 1$，则$|\mathrm{co}(A) \setminus A| \leq O_k(\delta)|A|$.

在离散情形 $A \subset \mathbb{Z}^k$ 中，van Hintum、Spink 和 Tiba [vHST23a] 得到了其在 $\mathbb{R}^k$中的结果的一个类比，即对于满足 $\#(A+A) \leq (2^k+\delta)\#A$ 且非退化（不被 $O_{k,\ \delta}(1)$ 个超平面覆盖）的集合$A \subset \mathbb{Z}^k$，得到了一个线性稳定性结果；同样假设 $\delta < \Delta_k$，其中某个 $\Delta_k > 0$ 足够小（见定理 3.10）。我们的下一个结果从两个方面扩展了这一结论，扩大了其适用范围。我们证明该结果对 $\mathbb{Z}$ 中的集合成立，并将其推广到最优范围 $\delta < 1$。

定理 1.10. 对任意 $d \in \mathbb{N}$, $\gamma, \epsilon > 0$, $\delta \in [0, 1-\epsilon)$，若 $A \subset \mathbb{Z}$ with $\#(A+A) \leq (2^d+\delta)\#A$ and $\#\left(\mathrm{gap}^{0\ d-1}_{O_d\ \ \epsilon,\ ,\ \gamma,\ (1)}(A)\right) = \Omega_d(\#A)$，则 $\#(\mathrm{co}^{0,\ d}(A) \backslash A)/\#(A) \leq O_d(\{v35)$。

2. 加法包络与 Freiman 分离

本节概述我们采用的新技术，以及如何运用这些技术证明主定理。我们首先介绍一种称为“加法包络”的结构。这一术语侧重直观而非严格定义，因为实际上我们将描述一族由参数刻画的包络；每个包络最好结合其商来理解，而这个商是集合 $\mathbb{Z}$ 上的一个权函数，在某种意义上刻画了原集合的加倍性质。

下面定义的动机，是寻求一种集合包络的内在概念，以刻画其加法性质。我们的 co 到 $\mathrm{co}^{k\ d}_{t\ ,}$ 的改进在一定程度上已经实现了这一点，但其中的参数并非集合的内在属性，且无法捕捉加倍性质，甚至无法进行定性描述：如果 $^{|co^k}{}_{,\ t}{}^{d}\left(\frac{A|}{|A|} \longrightarrow \infty\right)$，我们无法推断出 $\frac{|A+A|}{|A|} \to \infty$。可以将我们的另一种结构理解为：从用凸体覆盖 A开始，然后反复合并彼此“接近”（在度量意义或加法意义上）的成对覆盖集，

。例如，在 $s = 2$ 情形下（即研究$A + A$所需的情形），当合并过程完成后，如果我们的覆盖 $\{X_i\}$ 包含形如 $(X_{ij}\colon j \in [4])$ 的集合，并且 $(X_{i^1} + X_{i^2}) \cap (X_{i^3} + X_{i^4}) \neq \emptyset$，那么 $i^1 + i^2 = i^3 + i^4$。我们还要指出，我们的定义与可整直性的概念有些相似（如果一个集合与 $\mathbb{Z}$ 的某个子集 Freiman 同构，则称该集合具有可整直性）。

现在给出定义。设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 和 $s \in \mathbb{N}$。A 的凸连续包络（convex-continuity hull），参数为 s，记作 $\mathrm{coco}_s(A)$，是由互不相交的凸集 X_i 构成的、体积最小的并集 $\bigcup_i X_i$，满足 $A \subset \bigcup_i X_i$，并且存在一个 Freiman s-同态 $f_A\colon \bigcup_i X_i \to \mathbb{Z}$，使得 $f_A(x) = f_A(y)$ 当且仅当 x、$y \in X_i$ 对于相同的 i 成立。A 在参数 s 下的共凸连续商记作 $\mathrm{cococo}_s(A) := (\mathrm{im}(f_A)\ \mu_A)$，其中 μ_A 是 $\mathrm{im}(f_A)$ 上定义的测度，满足 $\mu_A(i) = |A_i|$，其中 $A_i := A \cap f_A^{-1}(i)$（因此 $\mu(A)(\mathrm{im}(f_A)) = |A|$）。

以下结果表明，$\mathrm{coco}_s(A)$ 的定义满足我们上述针对内在加法包的直观检验。

定理 2.1。对于所有的 s、$k \in \mathbb{N}$ 和 $M > 0$，都存在 $N > 0$，使得如果 $A \subset \mathbb{R}^k$ 具有 $|\mathrm{coco}_s(A)| > N|A|$，那么 $|A + A| > M|A|$。

我们将 $\mathrm{cococo}_s(A)$ 视为除去 A 的连续凸结构。需要注意的是，从连续结构转向离散结构所捕捉到的现象，与通过考察大型有限结构的极限（例如借助陶哲轩普及的非标准分析）所揭示的现象有本质区别。

A 的加倍下界可由最大卷积刻画

$$(\mu_A \star_k \mu_A)(i) := \max_{x+y=i} \left(|\mu_A(x)|^{1/k} + |\mu_A(y)|^{1/k}\right)^k.$$

事实上，除非 $x + y = x' + y'$，否则 $A_x + A_y$ 和 $A_{x'} + A_{y'}$ 不相交，因此根据布伦-明可夫斯基不等式

$$|A + A| \geq (\mu_A \star_k \mu_A)(\mathbb{Z}).$$

我们的许多证明都可以理解为应用这个不等式，然后分析 $\mu_A \star_k \mu_A$，这也解释了为什么这些结果不受环境群的影响。不过，为了具体起见，我们将在 $\mathbb{R}^k$ 的设定下给出证明。

本文中支撑上述结构和证明的主要技术工具是 Freiman 定理的一个分离版本。其陈述需要一些额外的定义。给定阿贝尔群 G 和子集 A、$P \subset G$，其中 $0 \in P = -P$，若对所有互不相同的 a、$a' \in A$ 都有 $a - a' \notin P$，则称 A 是 P-分离的。若凸级数 $P = \phi(C \cap \mathbb{Z}^d)$ 在每个方向上都包含长度至少为 n 的纤维，则称其为 n-饱满；也就是说，对每个 $i \in [d]$，都存在 $x \in \mathbb{Z}^d$，使得 $\#(C \cap (x + \mathbb{Z}e_i)) \geq n$。

与 Freiman 定理类似，后者用正确维度、大小适当的广义算术级数的常数个平移覆盖有界加倍的集合，下面的结果则用常数个大小适当的 $P + Q$ 的平移覆盖有界加倍的 $A \subset \mathbb{R}^k$，其中 P 是维度适当的广义算术级数，Q 是平行多面体。到目前为止，这个陈述

可以通过离散化从 Freiman 定理不难推出（不过要保持维度适当，需要一个非平凡的论证）。然而，正如上文所述，这个结果的主要价值在于其分离性质，即 P 的迭代和集对于 Q 具有适当的分离性，而 X 的迭代和集对于 $P+Q$ 具有适当的分离性。

定理 2.2。设 $k, d, \ell_i, n_i \in \mathbb{N}$ for $1 \le i \le d$, $\epsilon > 0$ 和 $A \subset \mathbb{R}^k$。若 $|A+A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$，则 $A \subset X + P + Q$，其中

- $P = -P$ 是一个 $\ell_{d'}$-真集 $n_{d'}$-满的 d'-广义算术级数，且 $d' \le d$，
- $Q = -Q$ 是一个平行多面体，
- $\#X = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d'+1},\ \ldots\ldots n_d}(1)$
- $\#P \cdot |Q| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \ell_{d'},\ \ldots\ldots \ell_d,\ n_{d'+1},\ \ldots\ldots n_d}(|A|)$，
- $\ell_{d'} \cdot X$ 对所有 $1 \le \ell \le \ell_{d'}$，均为 $\ell_{d'} \ell \cdot (P+Q)$ ℓ-分离的，并且
- $\ell_{d'} \cdot P$ 是 $\ell_{d'} Q$-分离的。

注意，定理 2.2 中 $d' = 0$ 可能是一种结果，这意味着 P 只包含一个点，因此它显然是非常真且非常充满的。为说明定理 2.2 的威力，我们将迅速推导出定理 2.1。定理 2.2 适用性的另一个例证是 Ruzsa 离散 Brunn-Minkowski 猜想（猜想3.9）的证明，该证明将另行发表 [vHKT 23]。

定理 2.1 的证明。我们将证明其逆否命题。假设 $|A+A| \le 2^{k+d}|A|$ 对某个 d 成立。我们应用定理 2.2，取 $k = k$、$d = d$、$\ell_i = 2s$、$\epsilon = 2^{k+d}$ 以及任意 n_i，从而得到一个覆盖 $\{x+P+Q : x \in X\}$，其体积为 $O_{k,\ d,\ s}(|A|)$。我们将证明此覆盖属于 $\mathrm{coco}_s(A)$ 定义中所考虑的覆盖，因此 $|\mathrm{coco}_s(A)| \le \#X \cdot \#P \cdot |Q| = O_{k,\ d,\ s}(|A|)$，如所需。

为此，考虑任意一个单射 Freiman s-同态 $f'_A : X+P \to \mathbb{Z}$。为说明 f'_A 存在，注意到 $X+P$ 生成一个有限生成自由阿贝尔群，即一个格；而对格中的任意有界子集，构造这样的映射都很容易。现在定义 $f_A : X+P+Q \to \mathbb{Z}$ by $f_A(x+p+q) = f'_A(x+p)$；由于 P 是 $2Q$-分离的，这一定义是良定的。显然，$f_A(y) = f_A(y')$ 当且仅当 y、y' 属于同一个平移 $x+P+Q$。

剩下要证明的是 f_A 是一个 Freiman s-同态。考虑满足 $\sum_{i=1}^s x_i + p_i + q_i = \sum_{i=1}^s x'_i + p'_i + q'_i$ 的 $i \in [s]$，以及 x_i、$x'_i \in X$、p_i、$p'_i \in P$、q_i、$q'_i \in Q$。我们有 $\sum_{i=1}^s x_i - \sum_{i=1}^s x'_i \in 2s \cdot (P+Q)$，因此由 $s \cdot X$ 的分离性可得 $\sum_{i=1}^s x_i = \sum_{i=1}^s x'_i$。这进一步推出 $\sum_{i=1}^s p_i + q_i = \sum_{i=1}^s p'_i + q'_i$，于是 $\sum_{i=1}^s p_i - \sum_{i=1}^s p'_i \in 2sQ$。现在由 $s \cdot P$ 的分离性可得 $\sum_{i=1}^s p_i = \sum_{i=1}^s p'_i$。我们得到 $\sum_{i=1}^s x_i + p_i = \sum_{i=1}^s x'_i + p'_i$；由于 f' 是一个 Freiman s-同态，因此有

$$\sum_{i=1}^s f(x_i+p_i+q_i) = \sum_{i=1}^s f'(x_i+p_i) = \sum_{i=1}^s f'(x'_i+p'_i) = \sum_{i=1}^s f(x'_i+p'_i+q'_i).$$

因此，f 是 Freiman s-同态，证毕。 □

前面的论证并未用到 P 的充满性，但在分析 A 的加倍时，这一点将至关重要。事实上，记 $A_x = A \cap$

$(x+P+Q)$为 $x \in X$，如同我们讨论 $\mathrm{coco}_s(A)$ 时那样，我们可以利用每个 $|A_x + A_y|$的界来给$|A+A|$ 一个下界。当 P对于较大的 n是 n-充满时，这些界满足一个近似的布伦-明可夫斯基不等式，其误差项为$O(1/n)$。要使这一点奏效，定理 2.2 中对 $\#X$ 和 $\#P \cdot |Q|$ 的界所含的隐含常数不依赖于 $n_{d'}$，这一点至关重要，这样我们才能使所有误差项的总和为 $o(|A|)$。这表明了我们将如何从定理 2.2 推导出以下推论，并在全文中加以应用。

命题 2.3。设 k、$d \in \mathbb{N}$、η、$\epsilon > 0$和 $A \subset \mathbb{R}^k$。若 $|A+A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$，则 $A \subset X + P + Q$，其中 P 是一个 d'-广义算术级数，且 $d' \le d$，而Q 是一个平行多面体，则我们有 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \eta}(1)$。记 $A_x := A \cap (x+P+Q)$ 为 $x \in X$，则对所有 x、y、z、$w \in X$，我们有

- $|A_x + A_y| \ge \left(|A_x|^{1/(k+d')} + |A_y|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - \eta(\#X)^{-2}|A|$, and
- if $(A_x + A_y) \cap (A_z + A_w) \neq \emptyset$ then $x + y = z + w$.

2.1. 论文结构。下一节将汇集一些预备工具，随后我们将在第 4 节确立 Freiman 定理的连续形式。本文的技术核心将于第 5 节和第 6 节呈现，我们将在其中证明定理 2.2 并推出命题 2.3。前一节包含一些几何合并论证，用以实现定理 2.2 中对 P 的分离性；这些论证也将用于确立前文提到的两个等价关系（$\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{R}$，以及 gap 与 sco）。后一节则包含一个代数论证，通过将点吸附到正确位置，实现对 X 的分离性。本文余下部分将运用这些工具，推出引言中陈述的定理。主要的近似结构结果将在第 7 节证明。第 8 节将运用这些结果，确立基本情形下的精确结果以及凸性的倍增阈值。锥形情形下的精确结果将在第 9 节证明。第 10 节将自成一体地论述我们关于 $A \subset \mathbb{R}$ 和 $|A+A| < 4|A|$的结果。最后，我们将在第 12 节提出一些未来研究问题。

3. Preliminaries

这里汇集了各种定义，并进一步详述了引言中简要提及的一些例子。我们还整理了若干背景结果，这些结果大多引自或改编自现有文献。我们省略了陶哲轩和 Vu 的著作 [TV06] 中可能找到的一些标准定义。通常，我们讨论有限子集 $A \subseteq \mathbb{Z}$，此时用 $\#A$ 表示集合 A的基数；或者讨论测度有限的子集 $A \subseteq \mathbb{R}^k$，此时用 $|A|$ 表示集合 A的测度。后一种情形不会带来测度论方面的困难，因为通过标准的逼近论证（见引理 3.14），可以将问题归约为有限个立方体的并。

3.1. 和集与覆盖。设 G 为阿贝尔群，$S \subset G$ 和$k \in \mathbb{N}$。我们记 $kS = \{kx\colon x \in S\}$，并用 $k \cdot S$ 表示 k重迭和集$\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i\colon x_i \in S\right\}$。我们主要关注 $2 \cdot S = S + S$。我们还记 $\frac{S}{k} = \{x \in G\colon kx \in S\}$。

以下 Freiman 定理的定量版本出自 Green 和 Tao [GT06，定理 1.7 和注 1.10]。

定理 3.1. 设 A 是无挠阿贝尔群的有限子集，且 $\#(A+A) = 2^d(2-\epsilon)\#A$ and $\#A \geq 2$。那么 $A \subseteq X + P$，其中某个 X 满足$|X| \leq \exp(C8^d d^3)/\epsilon^{C2^d}$，且 $\exp(C8^d)$-真 d-广义算术级数 P 满足 $\#P \leq \#A$。

我们还将使用 Ruzsa 覆盖引理的以下连续情形 [Ruz99], ，其证明与离散情形的证明完全相同。

引理3.2. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^k$满足 $|A+B| \leq \lambda|B|$。那么 $A \subset X+B-B$，其中某个 $X \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $\#X \leq \lambda$。

3.2. 等差数列。对于 $a = (a_1, \ldots, a_d) \in G^d$和 $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$，我们用 $P(a; \ell)$ 表示 d-GAP $\left\{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i a_i\colon \lambda_i = 1, \ldots, \ell_i\right\}$。该定义适用于任意阿贝尔群 G; 特别地，也适用于 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}^k$。

凸 d-进程是形如 $\phi(C \cap \mathbb{Z}^d)$ 的集合，其中 $C \subset \mathbb{R}^k$ 是凸集，并且$\phi\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ 是一个线性映射。注意，与许多文献不同，我们不假设 $C = -C$。还要注意，d-GAP 是一种凸 d-进程，其中 C是一个轴对齐盒。进一步地，我们可以将 $\mathbb{Z}^d$ 替换为任意 d 维格 $L = \psi(\mathbb{Z}^d)$，因为 $\phi(C \cap L) = (\phi \circ \psi)(\psi^{-1}(C) \cap \mathbb{Z}^d)$。

设 $P = \phi(C \cap \mathbb{Z}^d)$ 和 $s, n \in \mathbb{N}$。我们称 P为 s-真集，当且仅当 $\#\phi(sC \cap \mathbb{Z}^d) = \#(sC \cap \mathbb{Z}^d)$。若对于每个 $i \in [d]$，都存在 $x \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $\#(C \cap (x + \mathbb{Z}e_i)) \geq n$，则称 P 为 n-满的。

由 [TV06 的引理 3.24 和 3.26] 推出的以下推论表明，中心对称凸等差数列的大小与其凸包的体积相差一个常数因子。

命题 3.3。设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 是一个凸体，且满足 $C = -C$。那么 $\#(C \cap \mathbb{Z}^d) = \Theta_d(|C|)$。

对于任意凸体的大倍数，高斯的经典结果（见 [TV06，引理 3.22]）给出如下渐近近似。

命题 3.4。设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 是一个凸体。那么对于较大的 n，$\#(nC \cap \mathbb{Z}^d) = |C|n^d + O_C(n^{d-1})$。

该命题可直接推广到凸体的有限并。

3.3. 广义进程。凸(k, d)-进程是集合 $P = \phi(C')$，其中 $C \subset \mathbb{R}^{k+d}$ 是凸的，$C' = C \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^d)$，且 $\phi\colon \mathbb{R}^{k+d} \to \mathbb{R}^k$是线性映射。我们称 P为真集，当且仅当 $|P| = |C'| := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |C'_x|$，其中每个$C'_x = C' \cap (\mathbb{R}^k \times \{x\})$。

注意，凸$(1,d)$-进程可通过在凸 d-进程的每个点附加区间得到。如果这些区间足够小，那么就我们的用途而言，这些结构大致等价（见命题 1.1）。与命题 3.3 类似，若 $C=-C$ ，则上述 P和 C 的体积相差至多一个常数因子。

命题 3.5. 假设 $C\subset\mathbb{R}^{k+d}$ 是一个具有 $C=-C$的凸体。那么$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|C_x|=\Theta_{d,\ k}(|C|)$。

证明. 令 $\Lambda=(n^{-1}\mathbb{Z})^k\times\mathbb{Z}^d$，其中 n 足够大。由命题 3.4，$|\Lambda\cap C|=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|C_x\cap(n^{-1}\mathbb{Z})^k|=O_C(n^{k-1})+n^k\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|C_x|$。另一方面，$|\Lambda\cap C|=|\mathbb{Z}^{d+k}\cap C'|$，其中 C' 由 C 经过n倍扩张 $\mathbb{R}^k$ 得到。因此，由命题 3.3 $|\Lambda\cap C|=\Theta_{d,\ k}(|C'|)=\Theta_{d,\ k}(|C|n^k)$。结论得证。□

3.4. 通过（广义）递进集进行覆盖。令 $A\subset\mathbb{R}^k$。我们令 $\mathrm{gap}_t^{k,d}(A)$ 为包含 A 的最小体积集合 $X+P+Q$，使得 $\#X\le t$, P 是 $\mathbb{R}^k$ 中的真集 d-广义算术级数，且 $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ 是一个平行多面体。我们令 $\mathrm{co}_t^{k,d}(A)$ 为包含 A 的最小体积集合 $X+P$，使得 $\#X\le t$且 P 是一个真凸（k,d）-进程；我们类似地定义 $\mathrm{sco}_t^{k,d}(A)$，并额外要求 $P=-P$。如前所述，我们将使用 sco 和 gap 之间的以下粗略等价关系。

引理 3.6. 对任意 $A\subset\mathbb{R}^k$，我们有 $\left|\mathrm{sco}_t^{d,k}(A)\right|=\Theta_{d,\ k}\left(\left|\mathrm{gap}_t^{d,k}(A)\right|\right)$。

要证明引理 3.6，只需证明：对于任意真凸 (k,d)-进程P'，若满足 $P'=-P'$，则存在真 d-广义算术级数 P 和平行多面体 Q，使得 $|P+Q|=O_{d,\ k}(|P'|)$。这可以看作一种 John 型定理，它结合了用平行多面体逼近凸集的连续逼近（可由 John 定理实现）与用广义算术级数逼近凸进程的离散逼近。我们将在第 5 节通过一种合并论证推出这一结果，该论证将其归约为 Tao 和 Vu 的以下离散 John 型定理 [TV08, Theorem 1.6]，并由本文作者进行了定量优化 [vHK24, Corollary 1.2]。

定理 3.7. 设 P是一个真集凸 d-进程，且 $P=-P$。则存在一个真集 d-广义算术级数 P'，满足 $P\subset P'$，且 $\#P'=O(d)^{3d}\#P=O_d(\#P)$。

3.5. 分离提升。给定一个阿贝尔群 G 和一个集合 A、$B\subset G$，满足 $0\in B=-B$，我们称 A 是 B-分离的，如果 $a-a'\notin B$ 对于所有不同的 a、$a'\in A$。这种分离性概念将在全文中发挥基础性作用。这里我们利用它来证明以下提升构造的合理性：通过 Freiman 同构，将广义算术级数定义中出现的结构 $P+Q$ 嵌入其“自然环境”中。

命题 3.8. 设 $Q\subseteq\mathbb{R}^k$是一个平行多面体，$P=P(a;\ell)\subseteq R^k$是一个 2-真集 $4Q$-分离 d-广义算术级数。定义 $f_{P,Q}:\ P+Q\to\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}^k$ 到$f_{P,Q}$，使得$p+q(=)\lambda(q,p=\sum_i\lambda_ia_i)$。那么 $f_{P,Q}$ 是 $P+Q$ 到其像的良定义 Freiman 同构。

证明. 由于 P 是真集，$f_{P,Q}$ 是良定义的。考虑 $p^j \in P$ 和 $q^j \in Q$，其中 $j \in [4]$。若 $f_{P,Q}(p^1+q^1)+f_{P,Q}(p^2+q^2)=f_{P,Q}(p^3+q^3)+f_{P,Q}(p^4+q^4)$，则显然 $p^1+q^1+p^2+q^2 = p^3+q^3+p^4+q^4$。反之，若 $p^1+q^1+p^2+q^2 = p^3+q^3+p^4+q^4$，则 $p^1+p^2-p^3-p^4 \in 4Q$，因此由分离性可得 $p^1+p^2 = p^3+p^4$。我们推得 $q^1+q^2 = q^3+q^4$，并且由于 $2P$也是真集，故 $\lambda^1+\lambda^2 = \lambda^3+\lambda^4$，其中每个 $p^j = \sum_i \lambda_i^j a_i$。因此$f_{P,Q}(p^1+q^1)+f_{P,Q}(p^2+q^2)=f_{P,Q}(p^3+q^3)+f_{P,Q}(p^4+q^4)$。□

3.6. 离散布伦-闵可夫斯基与稳定性。这里我们考察，对于$A,B\subseteq\mathbb{Z}^k$，$\#(A+B)$是否有一个类似于$\mathbb{R}^k$中的布伦-明可夫斯基定理的近似下界$((\#A)^{1/k}+(\#B)^{1/k})^k$。显然，必须满足某种非退化条件。自然的做法是考虑厚度 $h(A)$，其定义为使 A包含在 h 个平行超平面内的最小 h。Ruzsa [Ruz06, 猜想4.12] 提出了以下猜想，并指出情形 $A=B$ 由Freiman的一个结果成立（Bilu也给出了该结果 [Bil99]）。

猜想3.9. 若 $A,B\subset\mathbb{R}^k$ 满足 $h(B) > h(\epsilon,k)$充分大，则$\#(A+B) \geq ((\#A)^{1/k}+(1-\epsilon)(\#B)^{1/k})^k$。

如上所述，我们将从本文建立的理论中推导出这个猜想。我们需要 van Hintum、Spink 和 Tiba [vHST23a，推论 1.5] 给出的该不等式的以下稳定性版本，其中对于 $A\subset\mathbb{Z}^k$，我们将其离散凸包定义为 $\widehat{\text{co}}(A) := \text{co}(A)\cap\Lambda$，其中 Λ 是包含 A 的最小子格 $\mathbb{Z}^k$。

定理 3.10. 对任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $\Delta_k>0$，使得若 $\delta\in(0,\Delta_k)$ 且$A\subseteq\mathbb{Z}^k$ 满足 $\#(A+A) \leq (2^k+\delta)\#A$，并且 $h(A) \geq \Omega_{k,\,\delta}(1)$，则 $\#(\widehat{\text{co}}(A)\setminus A) \leq (4k)^{5k}\delta\#A$。

3.7. 分离提升的离散布伦-明可夫斯基。我们需要 Green 和 Tao [GT06, 引理 2.8] 给出的离散布伦-明可夫斯基不等式的以下推广。对于每个 $I\subseteq[d]$，我们令 $\pi'_I\colon \mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{Z}^{[d]\setminus I}\times\mathbb{R}^k$ 表示沿 I 中各方向的正交投影。在以下命题中，注意到 $\pi'_\emptyset(A+B) = A+B$，因此我们得到 $|A+B|$ 的一个下界，它接近 $(d+k)$ 维的布伦-明可夫斯基界，前提是我们对非平凡投影 $\pi'_I(A+B)$（其中 $I\neq\emptyset$）的体积有良好的上界。

引理 3.11。设 $A,B\subset\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}^k$。则

$$\sum_{I\subseteq[d]} |\pi'_I(A+B)| \geq \left(|A|^{1/(k+d)}+|B|^{1/(k+d)}\right)^{k+d}.$$

按照 Green 和 Tao 的做法，我们引入立方体加项并应用布伦-明可夫斯基不等式。

命题 3.12. 设 $A,B\subset\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}^k$。则

$$\left|A+B+(\{0,1\}^d\times\{0\}^k)\right|^{1/(k+d)} \geq |A|^{1/(k+d)}+|B|^{1/(k+d)}.$$

证明. 注意，对于任意 $X \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，若将 $X' := X + ([0,1]^d \times \{0\}^k)$ 视为 $\mathbb{R}^{d+k}$ 的子集，则 $|X|_{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k} = |X'|_{\mathbb{R}^{d+k}}$。由$\mathbb{R}^{d+k}$ 中的布伦-明可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\left|A + B + (\{0,1\}^d \times \{0\}^k)\right|^{1/(k+d)} &= \left|(A + ([0,1]^d \times \{0\}^k)) + (B + ([0,1]^d \times \{0\}^k))\right|^{1/(k+d)} \\ &\geq \left|A + ([0,1]^d \times \{0\}^k)\right|^{1/(k+d)} + \left|B + ([0,1]^d \times \{0\}^k)\right|^{1/(k+d)} \\ &= |A|^{1/(k+d)} + |B|^{1/(k+d)},\end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个表达式中的体积以 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$ 为单位，而第二个和第三个表达式中的体积以 $\mathbb{R}^{d+k}$ 为单位。□

现在我们通过压缩推导出该引理。

引理 3.11 的证明。对于每个 $i \in [d]$ 和 $A \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，我们将 i-压缩集 $C_i(A) \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$ 定义为：将每个 π_i'-纤维替换为 $\mathbb{N}$ 的一个初始段；对于任意满足 $|A \cap \pi_i'^{-1}(y)| = t$ 的 $y \in \pi_i'(A)$，令

$$C_i(A) \cap \pi_i'^{-1}(y) = \{x \in \pi_i'^{-1}(y) : 0 \leq x_i \leq t-1\}.$$

等价地，$\pi_i'(\{x \in C_i(a) : x_i = t\}) = \{y \in \pi_i'(A) : |A \cap \pi_i'^{-1}(y)| \geq t\}$，因此 $C_i(A)$ 是可测的。

现在我们考虑压缩集 $A' := C_1(\dots C_d(A)\dots)$ 和 $B' := C_1(\dots C_d(B)\dots)$。显然，$|A'| = |A|$ 和 $|B'| = |B|$。此外，可以证明每个 $|\pi_I'(A' + B')| \leq |\pi_I'(A + B)|$。因此，只需证明在假设 A 和 B 均为压缩集的情况下，该引理成立。在这种情况下，我们有恒等式

$$\sum_{I \subseteq [d]} |\pi_I'(A+B)| = |A + B - (\{0,1\}^d \times \{0\}^k)| = |A + B + (\{0,1\}^d \times \{0\}^k)|,$$

由于 $-(\{0,1\}^d \times \{0\}^k)$ 是 $\{0,1\}^d \times \{0\}^k$ 的平移，并且集合 $\pi_I'(A+B) - \sum_{i \in I} e_i$ 对于 $I \subseteq [d]$ 划分了 $A + B - (\{0,1\}^d \times \{0\}^k)$。引理现在由命题 3.12 得出。□

我们由此推导出以下针对分离提升的 $(d+k)$ 维近似布伦-闵可夫斯基界，如命题 3.8 所示。

推论 3.13. 假设 $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个平行多面体，且 $P = P(a; \ell) \subseteq \mathbb{R}^k$是一个 n-满的 2-真集 $4Q$-分离 d-广义算术级数（GAP）。那么对于任意的 Y、$Z \subset P + Q$，我们有

$$|Y + Z| \geq \left(|Y|^{1/(k+d)} + |Z|^{1/(k+d)}\right)^{k+d} - 2^{2d+k} n^{-1} \#P \cdot |Q|.$$

证明。考虑 $Y' = f_{P,\,Q}(Y)$ 和 $Z' = f_{P,\,Q}(Y)$ 属于 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，其中 $f_{P,\,Q}$ 是命题 3.8 中的 Freiman 同构。于是 $|Y| = |Y'| := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |Y_x|$，类似地 $|Z| = |Z'|$，并且 $|Y + Z| = |Y' + Z'|$。现在对 Y' 和 Z' 应用引理 3.11，即得结论。注意，由于 P 是 n-满的，对于任意非平凡投影 π_I，我们有 $|\pi_I(Y' + Z')| \leq |\pi_I(2 \cdot P + 2Q)| \leq n^{-1} \#(2 \cdot P) |2Q| \leq 2^{d+k} n^{-1} \#. P \cdot |Q|$□

3.8. 逼近。以下标准的逼近论证（例如参见 [FJ15]）将使我们能够用有限个立方体的并来逼近一般的可测集。若 $P \subseteq \mathbb{R}^k$ 对某个 $c > 0$ 和有限个 $S \subseteq c\mathbb{Z}^k$ 满足 $P = S + [0, c]^k$，则称其为多立方体。

引理 3.14。对于任意 $A \subseteq \mathbb{R}^k$（满足 $|A| < \infty$ 和 $\eta > 0$），存在一个多立方体 A'，使得 $|A \triangle A'| \le \eta|A|$，$|\mathrm{co}(A')| \ge |\mathrm{co}(A)| - \eta|A|$，并且 $|A' + A'| \le |A + A| + \eta|A|$。

证明。我们可以用一个紧集 $K \subset A$ 逼近 A，使得 $|A \setminus K| \le \frac{1}{2}\eta|A|$。此外，通过要求 K 包含 $\mathrm{co}(A)$ 的极点中的一个较大有限子集，还可以确保 $|\mathrm{co}(K)| \ge |\mathrm{co}(A)| - \eta|A|$。令

$$B_N := \left\{ x \in (\mathbb{Z}/N)^k : \left(x + [0, N^{-1}]^k \right) \cap K \neq \emptyset \right\} + [0, N^{-1}]^k.$$

于是 $K \subset B_N$，由于 K 是紧集，$|B_N \setminus K| \to 0$ 当 $N \to \infty$ 时成立。此外，由于 $K + K$ 是紧集，当 $N \to \infty$ 时，$|(B_N + B_N) \setminus (K + K)| \to 0$。显然，对于所有 N，$|\mathrm{co}(B_N)| \ge |\mathrm{co}(K)| \ge |\mathrm{co}(A)| - \eta|A|$。因此，取充分大的 N 并令 $A' := B_N$，结论即得。□

同样的证明可得以下变体，它将在下一小节中用到。这里，对于 $A \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，我们将其广义凸包定义为 $\widehat{\mathrm{co}}^{k,d}(A) := \mathrm{co}(A) \cap (\Lambda_A \times \mathbb{R}^k)$，其中 Λ_A 是满足 $A \subset \Lambda_A \times \mathbb{R}^k$ 的 $\mathbb{Z}^d$ 的最小子格。注意，对于 $A \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^0 = \mathbb{Z}^d$，有 $\widehat{\mathrm{co}}^{0,d}(A) = \widehat{\mathrm{co}}(A)$（即上文第 3.6 节定义的离散凸包）。

引理 3.15. 对任意满足 $|A| < \infty$ 且 $\eta > 0$ 的 $A \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，存在一个多立方体 A'，使得 $|A \triangle A'| \le \eta|A|$，$|\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(A')| \ge |\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(A)| - \eta|A|$，$h(A') = h(A)$，且 $|A' + A'| \le |A + A| + \eta|A|$。

3.9. 离散化。以下离散化引理将使我们能够从 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$ 中的分离提升，转到 $\mathbb{Z}^{d+k}$中的一个本质上等价的离散集。回顾一下，厚度 $h(A)$是满足以下条件的最小 h：A 包含在 h 个平行超平面内。

引理 3.16。对于任意 $A \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，若满足 $|A| < \infty$ 和 $\eta > 0$，则存在$A' \subset \mathbb{Z}^{d+k}$，使得 $h(A') = h(A)$，
$\#(A'+A')/\#A' \le (1+\eta)|A+A|/|A|$ 且 $|\widehat{\mathrm{co}}^{d,\,k}(A)|/|A| \le (1+\eta)\#\,\widehat{\mathrm{co}}(A')/\#A'$.

证明。由引理 3.15，我们可以用立方体逼近 A，再将其缩放至单位长度，从而得到某个 $Y \subseteq \mathbb{Z}^{d+k}$对应的 $A_1 = Y + (\{0\}^d \times [0,1]^k)$，其中 $h(Y) = h(A)$，使得

$$|A_1 + A_1|/|A_1| \le (1+\eta)|A + A|/|A| \text{ and}$$
$$|\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(A)|/|A| \le (1 + \eta/2)|\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(A_1)|/|A_1|.$$

我们考虑 $N \in \mathbb{N}$充分大，并令 $A' = NY + \{0\}^d \times \{0, \ldots, N-1\}^k$。注意到 $h(A') = h(A)$且 $NA_1 = A' + \{0\}^d \times [0,1]^k$，因此$\#A' = |NA_1| = N^k|A_1|$。此外，我们有

$$\#(A' + A') = |A' + A' + (\{0\}^d \times [0,1]^k)| \le |A' + A' + (\{0\}^d \times [0,2]^k)|$$

$$= |NA_1 + NA_1| = N^k |A_1 + A_1|,$$

因此$\#(A' + A')/\#A' \le |A_1 + A_1|/|A_1| \le (1+\eta)|A + A|/|A|$。还需估计$\# \widehat{\mathrm{co}}(A')$。注意到$\mathrm{co}(A') = \mathrm{co}(NY) + (\{0\}^d \times [0, \dots, N-1]^k)$，且$\mathrm{co}(NA_1) = \mathrm{co}(NY) + (\{0\}^d \times [0, \dots, N]^k)$。因此

$$\begin{aligned}
\#\widehat{\mathrm{co}}(A') &= \sum_{x \in N\mathbb{Z}^d} \#(\mathrm{co}(A')_x \cap \mathbb{Z}^k) = \sum_{x \in N\mathbb{Z}^d} (1 + o_N(1)) |\mathrm{co}(A')_x| \\
&= \sum_{x \in N\mathbb{Z}^d} (1 + o_N(1)) |\mathrm{co}(NA_1)_x| = (1 + o_N(1)) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N^k |\mathrm{co}(A_1)_y| \\
&= (1 + o_N(1)) N^k |\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(A_1)|.
\end{aligned}$$

我们推得$\# \widehat{\mathrm{co}}(A')/\#A' = (1 + o_N(1))|\widehat{\mathrm{co}}^{d,\,k}(A_1)|/|A_1|$，因此取 N充分大的 $|\widehat{\mathrm{co}}^{d,\,k}(A)|/|A| \le (1+\eta)\# \widehat{\mathrm{co}}(A')/\#A'$。□

3.10. 示例。我们通过汇集一些具有小倍增的集合示例来结束这一预备部分，这些示例说明了引言中所述各种结果的紧致性。

例 3.17（两个盒子）。考虑两个充分分离的盒子，其体积分别为δ^2 和 $1 - \delta^2$：令

$$A = [0, \sqrt[k]{1-\delta^2}]^k \cup ([0, \sqrt[k]{\delta^2}]^k + v), \text{ where } v \in \mathbb{R}^k \text{ with } \|v\| \text{ large.}$$

体积为 $O(|A|)$ 的凸集至多能覆盖 $1 - \delta^2$ 的 A体积。由于$k \to \infty$,

$$\left|\frac{A+A}{2}\right| = 1 + \left(\frac{\sqrt[k]{1-\delta^2} + \sqrt[k]{\delta^2}}{2}\right)^k \to 1 + \delta\sqrt{1-\delta^2} = 1 + \delta + O(\delta^2).$$

将盒子替换为广义等差数列的类似示例表明，当 k 趋于 $\delta \to 0$时，定理 1.3 是尖锐的。

例 3.18（盒子的等差数列）。令 $t \in \mathbb{N}$、 $v \in \mathbb{R}^k$，其中 $\|v\|$ 很大，并且

$$A = ([0,1]^{k-1} \times [0, 1/t]) + \{v, 2v, \dots, tv\}.$$

那么， $|A| = 1$、 $\left|\frac{A+A}{2}\right| = 2 - 1/t$ 和一个体积为 $O(|A|)$ 的凸集，最多可以覆盖 A 的 $1/t$ 体积。将盒子替换为广义等差数列的类似例子表明，定理 1.3 在 $\delta \to 1$ 的意义下是尖锐的。

例 3.19（凸集加散点）。设 $A = C \cup S \subseteq \mathbb{R}^k$，其中 C 是一个有界半径的凸体（因此具有正测度），且 S 是一个散布的有限集，即任意两个不同的 x、 $y \in S$ 之间的距离至少为 D，并且具有 $(x + C) \cap (y + C) = \emptyset$。那么，$|A + A| = (2^k + \#S)|A|$，且 A 不能被 $\#S$ 个体积为 $O(|A|)$ 的凸集覆盖，其中 $D \to \infty$。一个类似的例子，其中 $C \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个 k-广义算术级数，表明了定理 1.4 中第一个界的紧致性。

例 3.20（广义算术数列上的锥）。令 $t \in \mathbb{N}$、$v \in \mathbb{Z}^k$，其中 $\|v\|$ 很大，并且

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} ([0,i]^k + iv).$$

那么 $|A| = \sum_{i=1}^{t} i^k = (1+o_t(1))\frac{t^{k+1}}{k+1}$ 且

$$\begin{aligned} |A+A| &= \sum_{i=2}^{2t} i^k = 2^{k+1}\sum_{i=1}^{t} i^k - \sum_{i=1}^{t}\left[(2i)^k - (2i-1)^k\right] - 1 \\ &\le 2^{k+1}|A| - \frac{1}{2}(2t)^k = \left(2^{k+1} - (1+o(1))2^k\frac{k+1}{2t}\right)|A|. \end{aligned}$$

因此，$t \ge (1+o(1))\frac{k+1}{2\epsilon}$，其中 $|A+A| = 2^k(2-\epsilon)|A|$。对 $\mathbb{Z}$ 的一个子集应用 Freiman 同构，我们可知定理 1.4 中的最终界在渐近意义下是最优的。

例 3.21（房屋）。设 $t \in \mathbb{N}, v, \delta > 0$，其中 v 很大，δ 很小，且

$$A = \bigcup_{i=-t}^{t} iv + [0, 1+\delta(1-|i|/t)].$$

那么 $|A| = (2t+1) + \delta(t-1)$,

$$|A+A| = \sum_{i=-2t}^{i=2t} 2(1+\delta(2-|i|/t)) = 2(4t+1)+4\delta(t-1) = \left(4 - \frac{2}{2t+1}\right)|A| + O(\delta),$$

and

$$\mathrm{ap}_{2t+1}(A) = \bigcup_{i=-t}^{t} iv + [0, 1+\delta], \text{ so that } |\mathrm{ap}_{2t+1}(A) \setminus A| \ge \Omega(\delta t).$$

4. Continuous Freiman Theorem

在本节中，我们证明 Freiman 定理的以下连续版本，表明 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 有界加倍时，其广义凸包具有正确的维度，且体积与 A的体积相差至多一个常数因子。

定理 4.1. 对任意 d、$k \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，若 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$，则

$$\left|\mathrm{gap}^{k,d}_{O_{k,d,\epsilon}(1)}(A)\right| = O_{k,d,\epsilon}(|A|),$$

即 $A \subset X + P + Q$，其中 P 是一个真集 d-广义算术级数，Q 是一个平行多面体，且 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,\ d,\ \epsilon}(1)$。

证明需要以下引理。

引理 4.2. 设 P、$I \subset \mathbb{R}^k$，其中 P 是真集 d-广义算术级数，且 I 是凸的。那么

$$|P+I| \le \frac{2^{k+d}\#P \cdot |I|}{\max_{x\in\mathbb{R}^k} \#\{(p,i) \in P \times I : p+i = x\}}.$$

证明。假设分母中的最大值在某个x_0处取得。令 $x_0 = p_0 + i_0$，其中 $p_0 \in P$ 且 $i_0 \in I$。将 P替换为 $P - p_0$，并将I替换为 $I - i_0$后，我们可以假设 $0 \in P \cap I$，且#(P∩(−I))在 0 处取得最大值。引理由以下不等式得证。

$$\#(P+P)\cdot|I+I| = \int (P+P) * (I+I) \geq |P+I|\cdot\#(P\cap(-I)).$$

该不等式成立，因为对于每个 $x = p + i \in P + I$，至少有 #(P∩(−I)) 个解 (q, j) ∈(P + P) ×(I + I) 满足 $q + j = x$；事实上，对于每个 $y \in P \cap (-I)$，我们都有一个解 $(p + y, i - y)$。□

定理 4.1 的证明。我们首先应用引理 3.14，取充分小的 $\eta = \eta_{d,\ k,\ \epsilon} > 0$，得到 A'，它是有限个轴平行立方体的并，设边长为 $\beta > 0$，使得 $|A \triangle A'| \leq \eta|A|$ 且 $|A' + A'| \leq |A + A| + \eta|A|$。我们将在某个小尺度 $1/N$ 上离散化，其中 $N \in \mathbb{N}$，并将渐近记号视为 $N \to \infty$。令 $A_N \subset \mathbb{Z}^k$ 定义为

$$A_N := \{x \in \mathbb{Z}^k : (x + [0,1]^k) \cap NA' \neq \emptyset\}.$$

对于足够大的 N，由命题 3.4 可得 $\#A_N = N^k|A'| + O(N^{k-1})$ 且 #(A_N+A_N) $= N^k|A'+A'|+O(N^{k-1})$，因此当 N 足够大时，#(A_N+A_N) ≤(2^{d+k+1}−ϵ/2)#A_N。

由定理 3.1 可得 $A_N \subseteq X' + P'$，其中存在一个 (d + k)-广义算术级数 P'，满足 #P′ ≤#A_N，以及 X'，其中$|X'| = O_{d,\ k,\ \epsilon}(1)$。我们还可假设 $P' = -P'$，且 $2 \cdot P' = P' - P'$ 是真集。记 $P' = P(a;\ \ell)$，其中 $a \in (\mathbb{R}^k)^{d+k}$ 且 $\ell \in \mathbb{N}^{d+k}$。

断言 4.3. 在 a 中存在一组步长，记为 a_{d+1}、.....、 a_{d+k}，它们张成 $\mathbb{R}^k$，且都满足 $\|a_i\| = o(N)$。

命题证明。我们将找到这样的 a_i all，使得当N足够大时， $\|a_i\| \leq N^{1-1/2(k+d)}$ 成立。反设存在一个超平面 H，使得对任意$a_i \notin H$ 都有 $\|a_i\| > N^{1-1/2(k+d)}$。考虑投影 π：沿垂直于 H的方向将 $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 投影。由命题 3.4 可得 #(π(X′ + P′)) ≥#(π(A_N)) =Ω(N)，因此 #(π(P′)) =Ω(N)。于是存在某个 a_i，使得 $a_i \notin H$且 ℓ_i =Ω($N^{1/(k+d)}$)。由于 $a_i \notin H$，我们有 $\|a_i\| > N^{1-1/2}$(k+d)。我们将$P' = P(a', \ell')$写作 $+ P(a_i, \ell_i)$，其中(a', ℓ')由(a, ℓ)移除(a_i, ℓ_i)后得到。现在回想一下， A' 是由边长为 β 的立方体组成的。对于 A'中的任意一个这样的立方体 C， $P(a_i, \ell_i)$的任意平移与 NC（其半径为$\sqrt{k}\beta N$）相交的点数至多为 $M := \sqrt{k}\beta N/\|a_i\|$。因此，当 N 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\Omega(N^k) = \#(A_N \cap NC) &\leq \#((X'+P')\cap NC) = O_{d,k,\epsilon}(M\cdot\#P(a',\ell')) \\ &= O_{d,k,\epsilon}\left(\frac{\#P'\cdot N}{\ell_i\|a_i\|}\right) = o(N^k),\end{aligned}$$

由于 #P′ ≤#A_N = O(N^k)， $\|a_i\| > N^{1-1/2\ (k+d)}$ 且 ℓ_i =Ω($N^{1/(k+d)}$)。这个矛盾证明了该断言。□

现在我们写作 $P' = P^0 + P^*$，其中 $P^0 = P(a_1, \dots, a_k, \ell_1, \dots, \ell_k)$ 且 $P^* = P(a_{d+1}, \dots, a_{d+k}, \ell_{d+1}, \dots, \ell_{d+k})$。令 $I^* := \mathrm{co}(P^*) + [0,1]^k$，并注意到 $NA' \subseteq X' + P^0 + I^*$。

我们的下一个目标是证明 $|P^0 + I^*|$ 与 $\#P'$ 可比。我们考虑

$$T := \left\{ -\sum_{i=d+1}^{d+k} \lambda_i a_i : \lambda_i \in [0,1) \text{ for } d+1 \le i \le d+k \right\} \cap \mathbb{Z}^k.$$

根据标准铺砌论证，$\#T = |\mathrm{co}(T)| = \det(a_{d+1}, \dots, a_{d+k})$。由于 $\|a_i\| = o(N)$，对于 $d+1 \le i \le d+k$，我们可以进行平移，使得 $T \subset A_N$。显然，P^* 的任意平移与 T 至多相交于一点。由于 $T \subseteq A_N \subseteq X' + P' = X' + P^0 + P^*$，存在一个平移 $z + P^0$，使得 $\#((z+P^0) \cap T) \ge \#T/\#X'$。由于 $-T \subseteq I^*$，我们得到至少 $\#T/\#X'$ 个满足 $p + i = -z$ 且 $(p,i) \in P^0 \times I^*$ 的解。

由引理 4.2，这意味着

$$|P^0 + I^*| \le \frac{2^{d+k} \#P^0 \cdot |I^*|}{\#T/\#X'} = O_{d,k,\epsilon}(\#P'),$$

作为 $|I^*| = O(\#T \cdot \#P^*)$ 和 $\#P' = \#P^0 \cdot \#P^*$。

由于 $NA' \subseteq X' + P^0 + I^*$，我们可以固定 $x \in X'$ 使得 $A'_x := A' \cap (x + P^0 + I^*)/N$ 具有 $|A'_x| = \Omega_{d,\,k,\,\epsilon}(|A'|)$。回顾 $|A \triangle A'| \le \eta |A|$，当 η 充分小时，$A_x := A \cap (x + P^0 + I^*)/N$ 也具有 $|A_x| = \Omega_{d,\,k,\,\epsilon}(|A|)$。

由于 $|A + A_x| \le |A + A| = O_{d,k,\epsilon}(|A_x|)$，根据 Ruzsa 覆盖引理（引理 3.2），我们有 $A \subseteq X + A_x - A_x$，其中某个 $X \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $\#X = O_{d,k,\epsilon}(1)$。令 $P = (P^0 - P^0)/N$，并令 Q 为包含 $(I^* - I^*)/N$ 的最小平行多面体，于是由 $A_x \subseteq (x + P^0 + I^*)/N$ 可得 $A_x - A_x \subseteq P + Q$。因此 $A \subseteq X + P + Q$，其中 P 是一个真集 d-GAP，Q 是一个平行多面体，$\#X = O_{d,k,\epsilon}(1)$，且 $|P + Q| = O_{d,k}(N^{-k}|P^0 + I^*|) = O_{d,k,\epsilon}(|A|)$，因为 $|P^0 + I^*| = O_{d,k,\epsilon}(\#P')$ 且 $\#P' \le \#A_N = O(N^k|A|)$。证明完毕。□

5. Merging

本节将证明以下结果，它介于上一节的连续 Freiman 定理与下一节将证明的 Freiman 分离定理之间：我们确保 P 对于 Q 是分离良好的，但 X 对于 $P + Q$ 尚未达到分离良好的程度。

命题 5.1。设 k、d、ℓ_0、n_i、$s \in \mathbb{N}$，对于 $1 \le i \le d$、$\epsilon > 0$，以及 $A \subset \mathbb{R}^k$。若 $|A + A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$，则 $A \subset X + P + Q$，其中

- P 是一个具有 $d' \le d$ 的 s-真集 $n_{d'}$-满 d'-广义算术级数，
- Q 是一个平行多面体，
- $\#X = O_{k,\,d,\,\epsilon,\,n_{d'+1},\,\dots\dots n_d}(1)$，
- $\#P \cdot |Q| = O_{k,\,d,\,\epsilon,\,\ell_0,\,s}(|A|)$，以及
- $s \cdot P$ 是 $\ell_0 Q$-分离的。

本节的技术核心是一个合并过程，我们将用它来证明命题 5.1，以及引言中讨论的两个等价关系（$\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{R}$，以及广义算术级数与 sco）。

5.1. 几何预备知识。我们从一些几何知识开始。

命题 5.2。考虑一个凸体 $C \subset \mathbb{R}^d$ 和一个向量 $\rho \in \mathbb{R}^d$。令 $m := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C\colon\ x + m\rho \in C\}$。那么存在一个超平面 $H \subset \mathbb{R}^d$ 不包含 ρ，使得若 $\pi_\rho\colon \mathbb{R}^d \to H$ 是沿 ρ 投影到 H 上的投影，则 $C \subset \pi_\rho(C) + [0,m]\rho$。

命题 5.2 的证明。令 $x \in C$ 使得 $x + m\rho \in C$。记 C° 为 C 的内部。考虑 $C^\circ \cap (m\rho + C^\circ)$。由于 m 的极大性，这个交集显然为空。由于 C 和 $m\rho + C$ 都是凸的，存在一个分离超平面 H。现在注意到 C 位于超平面 H 和 $H - m\rho$ 之间，即 $C \subset H + [-m,0]\rho$。此外，$C \subset \pi_\rho(C) + [-m,0]\rho$，其中 $\pi_\rho\colon \mathbb{R}^k \to H$ 是沿 ρ 的投影。□

命题 5.3。设 $\ell > 0$ 和 $C \subset \mathbb{R}^k$ 是一个包含点 0 和 x 的凸体。那么 $|C + [-\ell,\ell]x| \le (2\ell k + 1)|C|$。

命题 5.3 的证明。我们可以假设 $x = ae_1$ 沿着方向 e_1。注意到 $|C + [-\ell,\ell]x| = |C| + 2\ell a|\pi_1(C)|$。接下来，对于投影边界 $\partial\pi_1(C)$ 上的任意 y 以及 $\lambda \in [0,1]$，我们注意到 $\lambda y \in \pi_1(C)$，并且其上方的 e_1-纤维长度至少为 $(1-\lambda)a$。因此，$|C|$ 至少等于高度为 a、底面为 $\pi_1(C)$ 的锥的体积，即 $\frac{1}{k}a|\pi_1(C)|$。结论得证。□

5.2. 合并引理。本小节证明以下合并引理，它在本节的结果中起着关键作用。我们注意到，Green 未发表的笔记中出现了一个针对 $\mathbb{Z}$ 中凸级数的类似论证。

引理 5.4。固定 ℓ_0、s、k、$d \in \mathbb{N}$。令 $P = \phi(C' \cap \mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{R}^k$ 为一个 n 满维凸 d 进程，且 $C' = -C'$，并令 $Q \subset \mathbb{R}^k$ 为一个凸体，满足 $Q = -Q$。假设存在互不相同的 ρ、$\rho' \in C := sC'$，满足 $\phi(\rho) \in \phi(\rho') + \ell_0 Q$。那么，对于某个 n 满维凸 $(d-1)$ 进程 P'，满足 $P' = -P'$，以及满足 $Q' = -Q'$ 的凸体 Q'，有 $P + Q \subseteq P' + Q'$，使得 $\#P' \cdot |Q'| = O_{k,\ d,\ \ell_0,\ s}(\#P \cdot |Q|)$。

证明。我们可以进行平移，使得 $\rho' = 0$，于是 $\phi(\rho) \in \ell_0 Q$。令 $m := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \exists x \in C\colon\ x + m\rho \in C\}$。由命题 5.2，存在一个不包含 ρ 的超平面 $H \subset \mathbb{R}^k$，使得 $C \subset \pi_\rho(C) + [0,m]\rho$，其中 $\pi_\rho\colon \mathbb{R}^k \to H$ 是沿 ρ 投影到 H 上的投影。

我们将证明 $P' := \phi(\pi_\rho(C) \cap \pi_\rho(\mathbb{Z}^d))$ 和 $Q' := Q + [-m,m]\phi(\rho)$ 满足引理的要求。显然，P' 是一个 n-满的凸（$d-1$）进程，且 $P' = -P'$（回想一下，用任意格与凸体相交都会得到一个凸级数），而 Q' 是一个凸体，且 $Q' = -Q'$。

接下来我们证明这些和集之间的包含关系。

断言 5.5. $P+Q\subset P'+Q'$.

命题证明。根据命题 5.2，$C\subset\pi_\rho(C)+[-m,m]\rho$。将其与 $\mathbb{Z}^k$ 相交即可推出

$$C\cap\mathbb{Z}^k\subset\pi_\rho(C\cap\mathbb{Z}^k)+[-m,m]\rho\subset\Big(\pi_\rho(C)\cap\pi_\rho(\mathbb{Z}^k)\Big)+[-m,m]\rho.$$

应用线性映射 ϕ，我们得到

$$\begin{aligned}P=\phi(C'\cap\mathbb{Z}^k)&\subset\phi(C\cap\mathbb{Z}^k)\\&\subset\phi\left(\Big(\pi_\rho(C)\cap\pi_\rho(\mathbb{Z}^k)\Big)+[-m,m]\rho\right)=P'+[-m,m]\phi(\rho).\end{aligned}$$

因此得出 $P+Q\subset P'+[-m,m]p+Q=P'+Q'$，从而证明了断言。 □

现在我们注意到，由于 $0,\frac{1}{\ell_0}\phi(\rho)\in Q$，根据命题 5.3，我们有 $|Q'|=O_{k,d,\ell_0}(m|Q|)$。为了完成证明，只需证明以下断言，即表明 $\#P'/\#P$ 平衡 $|Q'|/|Q|$。

断言 5.6. $\#P'=O_{k,d,s}(m^{-1}\#P)$.

为证明该断言，我们首先注意到，对于沿 ρ 投影到不包含 ρ 的超平面上的任意投影 π，$\#P'=\#(\pi(C)\cap\pi(\mathbb{Z}^d))$。为方便记号起见，我们考虑投影 π，其中该超平面为 $\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}$，并假设其不包含 ρ。记 $\rho=(\rho',r)$，其中 $\rho'\in\mathbb{Z}^{d-1}$，且 r 为正整数（必要时进行反射）。我们注意到，$\mathbb{Z}^{d-1}$ 是 $\pi(\mathbb{Z}^d)$ 中指数为 r 的子格。由于 $\pi(C)$ 关于中心对称，根据命题 3.3，我们有

$$\#P'=\#(\pi(C)\cap\pi(\mathbb{Z}^d))=\Theta_d(r|\pi(C)|).$$

为估计 $|\pi(C)|$，我们应用线性映射 T，其中 $Te_i=e_i$ 对于 $i<d$ 和 $Te_d=e_d-\rho'/r$，该映射具有 $T\rho=re_d$。由于 $0,m\rho\in C$，我们有 $0,mre_d\in T(C)$，因此通过考虑以 $\pi(C)$ 为底、高为 mr 的锥，得到 $|C|=|T(C)|\geq|\pi(C)|mr/d$。因此

$$\#P'=O_d(r|\pi(C)|)=O_d(m^{-1}|C|)=O_{d,s}(m^{-1}\#P),$$

其中最后一个估计使用了 $C=sC'$ 和命题 3.3。证明完毕。□

5.3. 具有部分分离性的 Freiman。现在我们证明本节的主要结果。

命题 5.1 的证明。我们首先应用定理 4.1，得到 $A\subset X_0'+P_0'+Q_0'$ 其中 P_0' 是真集 d-广义算术级数，Q_0' 是一个平行多面体，且 $\#X_0'+\#P_0'\cdot|Q_0'|/|A|=O_{k,d,\epsilon}(1)$。

接下来，我们将在 P_0' 中压缩一些方向，使其足够充实。记 $P_0'=P(a,m)$，其中 $a\in(\mathbb{R}^k)^d$ 且 $m\in\mathbb{N}^d$。令 d_0 取极大值，使得 $\#\{i:m_i\geq n_{d_0}\}\geq d_0$。记 $P_0'=P_0+P_0''$，其中 P_0 是由满足 $m_i\geq n_{d_0}$ 的那些 a_i 张成的广义算术级数，而 P_0'' 是由其余 a_i 张成的广义算术级数。注意，若 $d_0=d$，则 $P_0=P_0'$ 是 n_d-充实的。否则，

根据 d_0 的极大性， P_0'' 中的每一步 a_i 都满足 $m_i \le n_{d_0+1}$。现在我们有 $A \subset X_0' + P_0' + Q_0' = X_0 + P_0 + Q_0$，其中 $X_0 = X_0' + P_0''$ 且 $Q_0 = Q_0'$。因此，我们用 n_{d_0}-充实的 P_0 替换了 P_0'，代价是将 $\#X_0' = O_{k,\ d,\ \epsilon}(1)$ 增加到 $\#X_0 = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d_0+1}}(1)$（若 $d_0 = d$，则记 $n_{d+1} = 1$）。

现在，我们应用以下迭代过程：每当某个进程分离性较差或充实度不足时，就降低维度。

- 假设在第 i 步，我们有 $A \subseteq X_i + P_i + Q_i$，其中 $P_i \subset \mathbb{R}^k$ 是一个 n_{d_i}-充实的 d_i-广义算术级数，满足 $P_i = -P_i$，而 $Q_i \subset \mathbb{R}^k$ 是一个满足 $Q_i = -Q_i$ 的平行多面体。
- 若 P_i 是 s-真集，且 $s \cdot P_i$ 是 $\ell_0 Q_i$ 分离的，则停止。否则，引理 5.4 适用，从而得到某个 n_{d_i}-充实的凸 $(d_i - 1)$-进程 P_{i+1}^*（满足 $P_{i+1}^* = -P_{i+1}^*$）以及满足 $Q_{i+1} = -Q_{i+1}$ 的凸体 Q_{i+1}，使得 $\#P_{i+1}^* \cdot |Q_{i+1}| = O_{k,\ d,\ \ell_0,\ s}(\#P_i \cdot |Q_i|)$。
- 应用定理 3.7，找到一个 $(d_i - 1)$-广义算术级数 P_{i+1}'，满足 $P_{i+1}^* \subset P_{i+1}'$、$P_{i+1}' = -P_{i+1}'$ 且 $\#P_{i+1}' = O_d(\#P_{i+1}^*)$。
- 取 d_{i+1} 为极大的，使得 P_{i+1}' 中至少有 d_{i+1} 个方向各包含至少 $n_{d_{i+1}}$ 步。将 P_{i+1}' 分成 $P_{i+1} + P_{i+1}''$，其中 P_{i+1} 包含所有至少有 $n_{d_{i+1}}$ 步的方向。
- 转到步骤 $i+1$，取 $A \subseteq X_{i+1} + P_{i+1} + Q_{i+1}$，其中 $X_{i+1} = X_i + P_{i+1}''$ 有 $\#X_{i+1} \le n_{d_{i+1}+1}^d \#X_i$；这是由 d_{i+1} 的极大性得到的。

每一步中，广义算术级数的维度都会降低，因此该过程至多经过 d 步便会终止，此时对某个 n_{d_i}-满的 d_i-广义算术级数 P_i 和平行多面体 Q_i，有 $A \subseteq X_i + P_i + Q_i$，且 P_i 是 s-真集， $s \cdot P_i$ 是 $\ell_0 Q_i$ 分离的。至于界，我们有 $\#X_0' = O_{k、\ d、\ \epsilon}(1)$，且每一步中 $\#X_{j+1}/\#X_j \le n_{d_{j+1}+1}^d$，因此 $\#X_i = O_{k、\ d、\ \epsilon、\ n_{d_i+1}、\ \ldots、\ n_d}(1)$；注意，这个界不依赖于 n_{d_i}。我们还有 $\#P_0' \cdot |Q_0'| = O_{k、\ d、\ \epsilon}(|A|)$，且每一步中 $\#P_{j+1} \cdot |Q_{j+1}| = O_{k、\ d、\ \epsilon、\ \ell_0、\ s}(\#P_j \cdot |Q_j|)$，因此 $\#P_i \cdot |Q_i| = O_{k、\ d、\ \epsilon、\ \ell_0、\ s}(|A|)$。定理得证。□

5.4. gap 与 sco 的等价性。这里我们给出合并的另一个应用，它证明了广义凸包的 gap 版本与 sco 版本在常数因子意义下等价。

引理 3.6 的证明。回想一下，只需证明对于任意真凸的 (k,d)-进程 P'，若 $P' = -P'$，则存在某个 d-广义算术级数 P 和平行多面体 Q，使得 $|P+Q| = O_{d,k}(|P'|)$。

写成 $P' = \phi(C \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^d))$，其中 $C \subset \mathbb{R}^{k+d}$ 是凸的，具有 $C = -C$、$\phi : \mathbb{R}^{k+d} \to \mathbb{R}^k$ 是一个线性映射，且 $|P'| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |C_x|$，其中每个 $C_x = C \cap (\mathbb{R}^k \times \{x\})$。

断言 5.7。我们有 $C \subseteq Q \times C'$，其中 $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个平行多面体，$C' \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 C 在最后 d 个坐标上的投影，并且 $|Q| \#(C' \cap \mathbb{Z}^d) = O_{d,\ k}(|P'|)$。

我们首先假设这一断言成立，并说明如何由此推出该引理。根据定理 3.7，凸的 d-进程 $\phi(\{0\} \times (C' \cap \mathbb{Z}^d))$ 包含于一个真集 d-广义算术级数 P 中，且 $\#P = O_d(\#(C' \cap \mathbb{Z}^d))$。那么 $P' \subseteq P + \phi(Q)$，且 $|P + \phi(Q)| = O_{d,\ k}(|P'|)$，因此该引理得证。

剩下的工作是证明该断言。我们从 $C_1 = C$ 开始， $T_1 = I$ 然后对 $i = 1$，....., k 应用以下过程。在步骤 i 开始时，对于某个保体积线性变换 T_i 以及满足 $C_i = -C_i$ 的凸$C_i \subset \mathbb{R}^{k+d}$，我们有$T_i C \subset C_i$，其中 $C_i = -C_i$ 具有如下形式：对于某个盒子 $B_i \subseteq \mathbb{R}^{i-1}$ 和凸 $C_i' \subseteq V_i$， $C_i = B_i \times C_i'$，其中 V_i 是 $\{e_i, \dots, e_{k+d}\}$ 的张成空间。

令 m_i 为满足 $m_i e_i \in C_i'$ 的最大值。注意，当 $C_i' = -C_i'$ 时，沿 e_i 方向的 C_i' 中最长的向量从 $-m_i e_i$ 到 $m_i e_i$。根据命题 5.2，在 V_i 中存在一个不包含 e_i 的超平面 H_i，使得 $C_i' \subset \pi_i'(C_i') + [-m_i, m_i]e_i$，其中 π_i' 是沿 e_i 投影到 H_i 上的投影。根据命题 5.3，我们有 $|C_i' + [-m_i, m_i]e_i| = O_{d,\ k}(|C_i'|)$。令 $v^i \in V_i$ 为 H_i 的一个法向量，满足 $v_i^i = 1$。我们令

$$B_{i+1} = B_i \times [-m_i, m_i], \quad C_{i+1}' = \pi_i(C_i') \quad \text{and} \quad T_{i+1} = T_i' \circ T_i,$$

其中 $T_i'(e_j) = e_j$对于 $j \le i$，而 $T_i'(e_j) = e_j + v_j^i e_i$对于 $j > i$。

为分析这一过程，我们注意到 $T_i'(H_i) = \{x : x_i = 0\} \subseteq V_i$，并且 T_i' 保持体积不变且保持 π_i 的所有纤维不变。因此， T_{i+1} 保持体积不变，且 $T_{i+1}C \subseteq T_i' C_i = B_i \times T_i'(C_i') \subseteq B_i \times ([-m_i, m_i]e_i + C_{i+1}') = C_{i+1}$。这表明该过程可以完成，最终得到某个 $TC \subseteq B \times C'$，其中 $B \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个盒子，且 $C' \subseteq V_k$ 是凸的。此外，我们有 $|B \times C'| = O_{d,\ k}(|C|)$，因此根据命题 3.5，$|B|\#(C' \cap \mathbb{Z}^d) = O_{d,\ k}(|P'|)$。证明完毕。□

5.5. 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{R}$的约化。我们通过合并的又一个应用结束本节，该应用确立了从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{R}$的约化。

命题 1.1 的证明。设 $A \subset \mathbb{Z}$ 和 $B := A + [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R}$，其中 $\epsilon = \epsilon(d, t, A)$ 足够小。显然 $|B| = 2\epsilon \# A$ 且 $|B + B| = 4\epsilon \#(A + A)$。我们还注意到 $B \subset \mathrm{gap}_t^{0,d}(A) + [-\epsilon, \epsilon]$，因此 $|\mathrm{gap}_t^{1,d}(B)| \le \epsilon \#(\mathrm{gap}_t^{0,d}(A))$。剩下要证明的是 $\epsilon \#(\mathrm{gap}_t^{0,d}(A)) = O_{d,\ t}(|\mathrm{gap}_t^{1,d}(B)|)$。

将 $\mathrm{gap}_t^{1,d}(B) = X + \phi(P \times [-\eta, \eta])$ 写成某个线性映射 $\phi: \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$、盒子 $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ 和 $\#X \le t$。为方便记号，假设 $\phi(e_{d+1}) = 1$，从而 $|\phi(P \times [-\eta, \eta])| = 2\eta \# P$。注意

$$2\eta \# P = |\phi(P \times [-\eta, \eta])| \le \left|\mathrm{gap}_t^{1,d}(B)\right| \le \epsilon \# \left(\mathrm{gap}_t^{0,d}(A)\right) = O_{A,d,t}(\epsilon).$$

接下来，我们应用合并，将 P 替换为某个分离良好的 P'。

断言 5.8。对于某个 $\eta' > 0$，我们有 $\phi(P \times [-\eta, \eta]) \subset \phi'(P' \times [-\eta', \eta'])$，盒子 $P' \subseteq \mathbb{Z}^{d'}$ 满足 $P' = -P'$，且线性映射 $\phi': \mathbb{R}^{d'+1} \to \mathbb{R}$ 满足 $\phi'(e_{d'+1}) = 1$，使得

- $|\phi'(P' \times [-\eta', \eta'])| \le O_{t,\ d}(|\phi(P \times [-\eta, \eta])|)$，以及
- $|\phi(p) - \phi(p')| \ge 4t\eta' \ge 2\epsilon$ 对所有互不相同的 p、$p' \in P'$均成立。

断言的证明。考虑以下从 P_0 开始的 $i \geq 0$ 过程：$=P$，$\eta_0 : = \eta$，$\phi_0 : = \phi$。

- 假设 $\phi(P \times [-\eta, \eta]) \subseteq \phi_i(P_i \times [-\eta_i, \eta_i])$，对于某个 $\eta_i > 0$，盒子 $P_i \subseteq \mathbb{Z}^{d-i}$ 满足 $P_i = -P_i$，且线性映射 $\phi_i : \mathbb{R}^{d-i+1} \to \mathbb{R}$ 满足 $\phi_i(e_{d-i+1}) = 1$。

- 如果对于所有互不相同的 $p, p' \in P_i$，都有 $|\phi(p) - \phi(p')| \geq 4t\eta_i$，则停止该进程。否则，由引理 5.4 可知，对于某个凸 $(d-i-1)$-进程 P^*_{i+1}，满足 $P^*_{i+1} = -P^*_{i+1}$，并且存在区间 Q_{i+1}，满足 $Q_{i+1} = -Q_{i+1}$，使得 $\#P^*_{i+1} \cdot |Q_{i+1}| = O_{d,\, t}(\eta_i \# P_i)$。
- 应用定理 3.7，找到一个包含 P^*_{i+1} 的 $(d-i-1)$-广义算术级数，我们有 $\phi_i(P_i \times [-\eta_i, \eta_i]) \subseteq \phi_{i+1}(P_{i+1} \times [-\eta_{i+1}\eta_{i+1}])$，其中存在某个 $\eta_{i+1} > 0$、盒子 $P_{i+1} \subseteq \mathbb{Z}^{d-i-1}$ with $P_{i+1} = -P_{i+1}$，以及线性映射 $\phi_{i+1} : \mathbb{R}^{d-i} \to \mathbb{R}$ with $\phi_{i+1}(e_{d-i}) = 1$，使得 $\eta_{i+1} \# P_{i+1} = O_{d,\, t}(\eta_i \# P_i)$。

这个过程至多经过 d 步便会终止，并得到满足断言要求的某个 $P' = P_i$。还需证明 $4t\eta_i \geq 2\epsilon$。假设 $\eta_i < \epsilon/2t$。固定 $a \in A$。由于 $X + \phi(P_i + [-\eta_i, \eta_i])$ 覆盖 $A + [-\epsilon, \epsilon]$，存在 $x \in X$，使得 $|(a + [-\epsilon, \epsilon]) \cap (x + \phi_i(P_i + [-\eta_i, \eta_i]))| \geq 2\epsilon/t$。因此 $\#\{p \in P_i : \phi_i(p) \in a - x + [-\epsilon - \eta_i, \epsilon + \eta_i]\} \geq \lceil \epsilon/t\eta_i \rceil \geq 2$，所以存在互不相同的 p、$p' \in P_i$，使得 $|\phi(p) - \phi(p')| \leq \frac{2(\epsilon+\eta_i)}{\lceil \epsilon/t\eta_i \rceil} < 4t\eta_i$。然而，这与该过程在 P_i 处终止相矛盾，因此断言得证。□

回想 $\eta \# P = O_{A,t,d}(\epsilon)$，我们看到 $\eta' = O_{t,d}(\#P \cdot \eta) = O_{A,t,d}(\epsilon)$，并且

$$\#P' = O_{t,d}(\#P \cdot \eta/\eta') = O_{A,t,d}(\epsilon/\eta') = O_{A,t,d}(1).$$

现在，对每个 $x \in X$，我们注意到 $(x + \phi'(P' \times [-\eta', \eta'])) \cap \mathbb{Z} \subseteq \phi'(H_x)$，其中 $H_x := \phi'^{-1}(\mathbb{Z} - x) \cap (P' \times [-\eta', \eta'])$。我们可以假设 $H_x \neq \emptyset$（或者可以从 X 中移除 x），固定 $p_x \in H_x$，并注意到 $H_x - p_x \subseteq \phi'^{-1}(\mathbb{Z}) \cap (2P' \times [-2\eta', 2\eta'])$。以下断言将给出一个超平面 H，使得 $H_x - p_x \subseteq P^\dagger := H \cap (2P' \times [-2\eta', 2\eta'])$，它是一个 d'-GAP，且使得 $A \subseteq \bigcup_{x \in X} \phi'(H_x) \subseteq X' + \phi'(P^\dagger)$，其中 $X' = \{\phi'(p_x) : x \in X\}$。这将完成证明，因为它意味着

$$\begin{aligned} \#\operatorname{gap}_t^{0,d}(A) &\leq \#(X' + \phi'(P^\dagger)) \leq \frac{t|\phi'(P' \times [-\eta', \eta'])|}{\eta'} \\ &= O_{d,t}\left(\frac{|\phi(P \times [-\eta, \eta])|}{\epsilon}\right) = O_{d,t}\left(\frac{\left|\operatorname{gap}_t^{1,d}(B)\right|}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

断言 5.9. 存在一个超平面包含 $\phi'^{-1}(\mathbb{Z}) \cap (2P' \times [-2\eta', 2\eta'])$。

为了证明该断言，考虑任意 $x, x_1, \ldots, x_{d'} \in \phi'^{-1}(\mathbb{Z}) \cap (2P' \times [-2\eta', 2\eta'])$，使得 x_i 张成一个超平面 H。我们将证明 $x \in H$。设 $x = (y, z)$ 和 $x_i = (y_i, z_i)$，其中 $y, y_i \in 2P'$ 和 $z, z_i \in [-2\eta', 2\eta']$。根据克拉默法则，我们有 $\lambda y = \sum \lambda_i y_i$，其中 $\lambda := \det(y_1, \ldots, y_{d'})$，并且

$\lambda_i := \det(y_1, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_{d'})$。注意到 λ, λ_i 是整数，

其绝对值是包含在 $2dP'$的连续凸包中的平行多面体的体积，因此根据命题 3.3，它们是 $O_d(\#P')$ $= O_{A,\ d,\ t}(1)$。

此外， $\phi'(x)$ 和 $\phi'(x_i)$ 都是整数，因此 $\lambda\phi'(x)-\sum_i \lambda_i\phi'(x_i) = \lambda z-\sum \lambda_i z_i$ 也是整数，其中等式由 ϕ' 的线性性以及 $\lambda y = \sum \lambda_i y_i$ 和 $\phi'(e_{d'+1}) = 1$ 得出。然而，我们还有 z，$z_i \in [-2\eta', 2\eta']$，因此当 ϵ 足够小时， $|\lambda z - \sum \lambda_i z_i| = O_{A,\ d,\ t}(\epsilon) < 1$。由此可得 $\lambda z - \sum \lambda_i z_i = 0$，所以 $x \in H$。这就完成了断言的证明，也完成了命题的证明。□

6. 吸附

本节中，我们将得到关于平行多面体级数 $P + Q$ 的平移集合 X 的分离性质，从而完成我们的 Freiman 分离定理的证明。其思路是，我们把集合 $s \cdot X$ 中不同的 x、x' 所对应的 $x - x' \in P + Q$ 视为 $P + Q$ 局部性意义下的近似重合，再通过稍微移动集合 X 中的元素（按 $P + Q$ 的意义），将其转化为等式（精确重合）；这与计算机图形学中将对象吸附到网格上的过程类似。

6.1. 分离 Freiman 定理的证明。

本小节中，我们假设本节的以下主引理成立，并据此证明定理 2.2 及其更具适用性的形式——命题 2.3。该引理将在下一小节中证明。全文中，我们令 $G = \mathbb{R}^k$，其中 $k \in \mathbb{N}$（我们的界对 k 一致）。

引理 6.1. 对任意 t、μ、$s \in \mathbb{N}$，存在 $c = c_{6.1}(s, t)$ $\gamma = \gamma_{6.1}(t, \mu, s) \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $\#X = t$ 的 $X \subset G$，以及满足 $L = -L$ 的 $0 \in L \subset G$，都存在 $c' \le c$ 和 $f\colon X \to c^2 c!\gamma^2 \cdot L/(c'c!\gamma)$，并具有以下性质：对于任意满足 $\sum x_i - \sum y_i \in c\mu^2\gamma^2 \cdot L/(c'\mu\gamma)$ 的 x_1、……、x_s、y_1、……、$y_s \in X$，我们有 $\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。

定理 2.2 的证明。假设 $A \subset \mathbb{R}^k$ with $|A+A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$。我们按照以下层级固定参数，层级应从左向右理解，即每个后续参数相对于前一个参数都足够大。

$$s_d \ll s_{d-1} \ll \cdots \ll s_1 \ll s_0.$$

我们还要求 s_i 按照下面的层级（2）相对于 ℓ_i 足够大，并且相对于 n_{i+1} 足够大。我们注意到，该定理的结论关于参数 ℓ_i 和 n_i 是单调的，即增大任一参数都会得到更强的结论。

对于每个 i，我们用 (s_i, s_i) 替代 (s, ℓ_0) 应用命题 5.1，从而得到某个 $A \subset X_i + P_i + Q_i$，其中 Q_i 是一个平行多面体， P_i 是一个 s_i-真集 n_{d_i}-满 d_i-广义算术级数，$\#X_i = O_{k,d,\epsilon,n_{d_i+1},\ldots,n_d}(1)$，$\#P_i \cdot |Q_i| = O_{k,d,\epsilon,s_i}(|A|)$，且 $s_i \cdot P_i$ 是 $s_i Q_i$-分离的。注意，在命题 5.1 的证明中，每个以参数 s_i 执行的合并操作也可以用参数 s_{i-1} 执行，因此 $d_i \ge d_{i-1}$。于是对于 $i^* = \min\{i : i \ge d_i\}$，我们有 $i^* = d_{i^*}$。我们记 $P' = P_{i^*}$, $Q' = Q_{i^*}$, $X' = X_{i^*}$, $d' = d_{i^*}$, $s' = s_{i^*}$,

使得 P' 是一个 s'-真集 $n_{d'}$-满 d'-广义算术级数，$\#X' \le t = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d'+1},\ \dots,\ n_d}(1)$，$\#P' \cdot |Q'| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ s'}(|A|) = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \ell_{d'},\ \dots,\ \ell_d,\ n_{d'+1},\ \dots,\ n_d}(|A|)$，且 $s' \cdot P'$ 是 $s'Q'$-分离的。我们根据层级进一步固定参数

$$t, \ell_{d'} \ll c \ll \mu \ll \gamma \ll s'. \tag{2}$$

取 $c \ge c_{6.1}(t)$、$\mu = c!$ 和 $\gamma \ge \gamma_{6.1}(t, \mu, \ell_{d'})$，我们可以用 $(X', P' + Q')$ 替代 (X, L) 应用引理 6.1，从而得到某些 $c' \le c$ and $f\colon X' \to c^2 c! \gamma^2 \cdot (P' + Q')/(c' c! \gamma)$，使得对于任意 $x_1, \dots, x_{\ell_{d'}}, y_1, \dots, y_{\ell_{i^*}} \in X$ with $\sum x_i - \sum y_i \in c\mu^2\gamma^2 \cdot (P' + Q')/(c'\mu\gamma)$，都有 $\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。我们将证明，对于 $X := \{x' + f(x') : x' \in X'\}$, $P := 2c^2 c! \gamma^2 \cdot P'/(c' c! \gamma)$ 和 $Q = 2c^2\gamma Q'$，定理的结论成立。

我们首先注意到 $\#X = \#X' = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d'+1},\ \dots\dots n_d}(1)$ 和 $\#P \cdot |Q| = O_\gamma(\#P' \cdot |Q'|) = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \ell_{d'},\ \dots\dots \ell_d,\ n_{d'+1},\ \dots\dots n_d}(|A|)$。接下来，我们有 $A \subseteq X' + P' + Q' \subseteq X + P + Q$，因为对于每个 $x' \in X'$，我们都有

$$\begin{aligned} x' + P' + Q' &\subseteq x' + f(x') + P' + c^2 c! \gamma^2 \cdot P'/(c' c! \gamma) + Q' + c^2 c! \gamma^2 \cdot Q'/(c' c! \gamma) \\ &\subseteq x' + f(x') + P + Q. \end{aligned}$$

此外，$\ell_{d'} \cdot P$ 是 $\ell_{d'}Q$-分离的，因为如果我们有 $x, y \in \ell_{d'} \cdot P$，满足 $x - y \in \ell_{d'} Q$，那么 $x' = c' c! \gamma x$ 和 $y' = c' c! \gamma y$ 与 $s' \cdot P'$ 是 $s'Q'$-分离的相矛盾，前提是 $s' \ge 2c^2 c! \gamma^2$。

还需证明，对于所有 $1 \le \ell \le \ell_{d'}$，$\ell_{d'} \cdot X$ 都是 $\ell_{d'}\ell \cdot (P + Q)/\ell$-分离的。为此，任取 $x_1, \dots, x_{\ell_{d'}}, y_1, \dots, y_{\ell_{d'}} \in X$，使得 $\sum x_i - \sum y_i \in \ell_0 \ell \cdot (P + Q)/\ell$。记 $x_i = x_i' + f(x_i')$ 和 $y_i = y_i' + f(y_i')$，其中 $x_i', y_i' \in X'$。由于 $f(x_i')\ f(y_i') \in c^2 c! \gamma^2 \cdot (P' + Q')/(c' c! \gamma)$，我们有

$$\begin{aligned} \sum x_i' - \sum y_i' &\in \ell_0 \ell \cdot (P + Q)/\ell + 2\ell_{d'} c^2 c! \gamma^2 \cdot (P' + Q')/(c' c! \gamma) \\ &\subseteq c\mu^2\gamma^2 \cdot (P' + Q')/(c'\mu\gamma), \end{aligned}$$

只要 $c! \mid \mu$。根据上述对引理 6.1 的应用，这意味着 $\sum x_i' + f(x_i') = \sum y_i' + f(y_i')$，即 $\sum x_i = \sum y_i$，符合要求。□

命题 2.3 的证明。设 $k, d \in \mathbb{N}, \eta, \epsilon > 0$ 和 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A + A| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$。我们取足够大的 $n_d = n_d(k, d, \eta, \epsilon)$，并结合 $\ell_i = 4$ 和满度参数 $n_d \ll n_{d-1} \ll \cdots \ll n_0$ 应用定理 2.2。由此得到 $A \subset X + P + Q$，其中 P 是某个 $d' \le d$ 的真 $n_{d'}$-满度 d'-广义算术级数，且 Q 是一个平行多面体，并满足 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,d,\epsilon,n_{d'+1},\dots,n_d}(1)$，且 $P + P$ 是 $4Q$- 分离的，$X + X$ 是 $4(P + Q)$- 分离的。记 $A_x := A \cap (x + P + Q)$ 表示 $x \in X$。由 $X + X$ 的分离性，若 $(A_x + A_y) \cap (A_z + A_w) \ne \emptyset$，则 $x + y = z + w$。此外，根据推论 3.13，对于任意 $x, y \in X$，我们有

$$\begin{aligned} |A_x + A_y| &\ge \left(|A_x|^{1/(k+d')} + |A_y|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - n_{d'}^{-1} 2^{2d'+k} \#P \cdot |Q| \\ &\ge \left(|A_x|^{1/(k+d')} + |A_y|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - \eta(\#X)^{-2}|A|, \end{aligned}$$

由于 $n_d = n_d(k, d, \eta, \epsilon)$ 很大且 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d'+1},\ \dots\dots n_d}(1) \ll n_{d'}$。□

6.2. 主引理的证明。我们首先证明本节主引理的以下一个版本，其参数略弱；然后我们将通过提升论证推出主引理。

引理 6.2. 对任意 $s,t \in \mathbb{N}$，存在 $c = c_{6.2}(s,t)$，使得对于任意满足 $\#X = t$ 的 $X \subset G$ 以及满足 $L = -L$ 的 $0 \in L \subset G$，都存在 f：对于某个满足以下性质的 $c' \le c$，$X \to c\cdot L/c'$：对于任意满足 $\sum x_i - \sum y_i \in L$ 的 $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_s \in X$，我们有 $\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。

证明. 我们考虑变量 $(p_x : x \in X)$ 上的线性方程组，这些变量取值于 G。对于每个满足 $\sum x_i - \sum y_i = p \in L$ 的 $2s$ 元组 $(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_s) \in X^{2s}$，我们都纳入方程 $\sum p_{x_i} - p_{y_i} = p$。显然，这个方程组是相容的，因为 $p_x = x$ 是一个解。

下面的断言将给出方程的一个解，其中所有 $p_x \in c\cdot L/c'$ 都适用于某个 $c' \le c$。那么， $f(x) := -p_x$ 将满足证明引理所需的条件，因为对于任意 $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_s \in X$，若 $\sum x_i - \sum y_i = p \in L$，则有 $\sum p_{x_i} - \sum p_{y_i} = p$，因此 $\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。由此，只需证明下面的断言。

断言 6.3. 对任意 $k,m,n \in \mathbb{N}$，存在 $c = c_{k,m,n} \in \mathbb{N}$，使得变量为 $x_1,\dots,x_k$ 的任意相容线性方程组（每个方程均形如 $\sum e_i x_i = \ell$，其中每个 $e_i \in Q_{m,n} := \{-m/n,-(m-1)/n,\dots,m/n\}$，且 $\ell \in L$）都有一个解，其中 $x_i \in c\cdot L/c'$，对某个 $c' \le c$ 成立。

我们对 k （变量的数量）使用归纳法证明该断言。对于$k = 1$，我们可以取 $c = c_{1,m,n} =$ 最大值$\{m,n\}$，因为任何相容的系统都等价于单个方程 $c'/nx = \ell \in L$，其中有 $c' \in \{-m,\dots,m\}$，其解为 $x = n\ell/c' \in n\cdot L/c' \subseteq c\cdot L/c'$。

在归纳步骤中，我们首先注意到，如果 x_k 不出现在任何方程中，那么令 $x_k = 0$即可立即将问题归约为含 $k-1$ 个变量的问题。否则，我们选择任意一个涉及 x_k的方程，将其改写为把 x_k表示成 x_1、……、x_{k-1}的线性形式，然后将此表达式代入其他方程，以消去 x_k。记 m_0/n 为所选方程中 x_k 的系数，我们得到关于 x_1、……、x_{k-1}的相容方程组，其中每个方程都具有 $\sum e_i x_i = \ell$ 的形式，且 $\ell \in L + Ln/m_0 \subset (m+n)\cdot L/m_0$ 以及$e_i \in Q_{m,n} + Q_{m,n}n/m_0 \subseteq Q_{m(m+n),nm_0}$。

应用归纳假设，以 $L' = (m+n)\cdot L/m_0$ 替代L，我们得到一个解，其中 $x_1,\dots,x_{k-1} \in d\cdot L'/d'$ 对于某个 $d' \le d := c_{k-1,m(m+n),nm_0}$。将其代入关于 x_k 的方程，我们得到 $x_k \in (k-1)md\cdot L'/d'm_0 \subseteq km(m+n)d\cdot L/d'm_0^2$。这证明了 $c_{k,m,n} = km(m+n)c_{k-1,m(m+n),nm_0}$的归纳步骤。这就完成了该断言的证明，从而也完成了该引理的证明。□

我们将使用以下引理来增强引理 6.2 的力度。

引理 6.4。对于任意 $t,\lambda \in \mathbb{N}$，存在 $\gamma^* = \gamma^*_{6.4}(t,\lambda) := \lambda(2^t)$，使得对于任意满足 $\#Y = t$ 的 $Y \subseteq G$，以及满足 $L = -L$ 和 $c \in \mathbb{N}$ 的 $0 \in L \subset G$，存在 $\gamma = \gamma(Y,L,c) \le \gamma^*$，具有以下性质：对于任意 $x,y \in Y$，满足

$x-y \in c\lambda^2\gamma^2 \cdot L/(c'\lambda\gamma)$ 对某个 $c' \le c$，我们事实上有 $x-y \in c\gamma^2 \cdot L/(c''\gamma)$ 对某个 $c'' \le c$。

证明。对于每一对不同的 x、$y \in Y$，令 $d(x,y) \ge 1$ 为满足以下条件的最小 ℓ：对某个 $c' \le c$，有 $x-y \in c\ell^2 \cdot L/(c'\ell)$；如果不存在这样的 ℓ，则令其为 ∞。我们考虑由不同的 x、$y \in Y$ 所对应的所有可能的 $d(x,y)$ 构成的集合 Y'，并将其排序为 $Y' = \{d_1 < \cdots < d_\ell\}$，其中 $\ell \le \binom{t}{2}$。如果 $d_1 > \lambda$，我们可以取 $\gamma = 1$。如果 $d_\ell \le \lambda^\ell$，我们可以取 $\gamma = \gamma^*$。否则，存在某个 i 满足 $d_{i+1} > \lambda d_i$，因此我们可以取 $\gamma = d_i$。□

现在我们推导本节的主引理。

引理 6.1 的证明。假设 $X \subset G$ 满足 $\#X = t$，且 $0 \in L \subset G$ 满足 $L = -L$。令 $Y = s \cdot X$、$t' = \#Y$、$c = c_{6.2}(s,t')$ 和 $\gamma^* = \gamma^*_{6.4}(t',\mu)$。应用引理 6.4，可找到 $\gamma = \gamma(Y,L,c) \le \gamma^*$，使得对于任意 x、$y \in Y$，如果存在某个 $c' \le c$ 使得 $x-y \in c\mu^2\gamma^2 \cdot L/(c'\mu\gamma)$，那么事实上存在某个 $c'' \le c$ 使得 $x-y \in c\gamma^2 \cdot L/(c''\gamma)$。现在对 X 应用引理 6.2，以 $L' := c!c\gamma^2 \cdot L/(c!\gamma)$ 代替 L，可找到 $f: X \to c \cdot L'/c'$，其中 $c' \le c$ 满足：对于任意满足 $\sum x_i - \sum y_i \in L'$ 的 $x_1,\dots,x_s, y_1,\dots,y_s \in X$，都有 $\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。

现在考虑任意的 $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s \in X$，满足 $\sum x_i - \sum y_i \in c\mu^2\gamma^2 \cdot L/(c'\mu\gamma)$。令 $x = \sum x_i$ 和 $y = \sum x_i$。于是 x，$y \in Y$ 满足 $x-y \in c\mu^2\gamma^2 \cdot L/(c'\mu\gamma)$，因此实际上，对于某个 $c'' \le c$，有 $x-y \in c\gamma^2 \cdot L/(c''\gamma)$。由此推出 $x-y \in L'$，因此根据引理 6.2，$\sum x_i + f(x_i) = \sum y_i + f(y_i)$。于是 c' 和 f 具有所需的性质。□

7. 近似结构

本节证明定理 1.2（简单的 1% 稳定性），并给出以下关于 $\mathbb{R}^k$ 的其他近似结构结果。这些结果蕴含 $\mathbb{Z}$ 中相应的结论，即定理 1.3（尖锐的 1% 稳定性）、定理 1.5（较弱的非退化假设）、推论 1.7（绝对常数比例中的结构）以及定理 1.6（99% 稳定性）。

定理 7.1. 对于任意 k、$d \in \mathbb{N}$ 和 β、$\delta \in (0,1)$，存在 $C > 0$，使得对于任意满足 $|A+A| \le 2^{k+d}(1+\delta)|A|$ 且 $|\text{间隙}_C^{k\,d-1}(A)| \ge C|A|$ 的 $A \subseteq \mathbb{R}^k$，存在满足 $|\text{间隙}_1^{k\,d}(A')| \le C|A|$ 的 $A' \subseteq A$，并且

$$\frac{|A \setminus A'|}{|A|} \le \min\left\{(1+\beta)\delta, \delta^2 + 60\delta^3\right\}.$$

定理 7.2. 对于任意满足 $|A+A| < 2^{k+d}|A|$ 且 $d^* < d$ 的 $A \subset \mathbb{R}^k$，我们有

$$\min\left\{\left|\mathrm{gap}^{k,d^*}_{O_{k,d}(1)}(A)\right|, \left|\mathrm{gap}^{k,d}_{O(2^{k+d}\exp O(9^{d-d^*}))}(A)\right|\right\} < O_{k,d}(|A|).$$

定理 7.3。对于任意 $\alpha > 0$，存在 $t = t_\alpha \in \mathbb{N}$，使得对于任意 k、$d \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $C > 0$，使得如果 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| \le 2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$，那么存在 $A' \subset A$，使得 $|A'| \ge (1-\alpha)|A|$，并且

$$\min\left\{\left|\mathrm{gap}^{k,d-1}_C(A)\right|, \left|\mathrm{gap}^{k,d}_t(A')\right|, \left|\mathrm{gap}^{k,d+1}_1(A')\right|\right\} \le C(|A|).$$

推论 7.4。假设 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| \leq 2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$ 和间隙$^{k\ d-1}_{O_{k\ d\ 1}}$，$()(A)| > \Omega_{d,\ k,\ \epsilon}(|A|)$。那么存在 $A' \subset A$，具有 $|A'| \geq \frac{1}{30000}|A|$和 间隙$^{k}_{d+1}(A')| \leq O_{d,\ k,\ \epsilon}(|A'|)$。

我们首先由定理 7.1 推出定理 1.3（其他类似的推导从略）。

定理 1.3 的证明。设 $\beta, \delta \in (0,1)$，$d \in \mathbb{N}$和 $C = C_{\beta,\delta,d}$充分大。假设 $A \subset \mathbb{Z}$满足 $\#(A+A) \leq 2^d(1+\delta)\#A$ 且 $\#(\mathrm{gap}^{0\ d-1}_{C}, (A)) \geq C\#A$。考虑 $B = A + [-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathbb{R}$，其中 $\epsilon > 0$ 如命题 1.1 所述。注意到 $|B| = 2\epsilon\#A$ 且 $|B+B| = 4\epsilon\#(A+A) \leq 2^d(1+\delta)2|B|$。由命题 1.1 还可得 $\#(\mathrm{gap}^{1\ d-1}_{C}, (B)) = \Omega_{d,t}(\epsilon\#(\mathrm{gap}^{0\ d}_{t}, (A))) = \Omega_{d,t}(C|B|)$。因此，由定理 7.1 可知，存在 $B' \subseteq B$，使得 $|\mathrm{gap}^{1,d}(B')| \leq O_d(|B|)$ 且$|B \setminus B'|/|B| \leq \min\{(1+\beta)\delta, \delta^2 + 60\delta^3\}$。

令 $A' = \{x \in A : B' \cap (x + [-\epsilon, \epsilon]) \neq \emptyset\}$。显然 $\#A' \geq \#A \cdot |B'|/|B|$，因此只需证明 $\#\left(\mathrm{gap}^{0,\ d}(A')\right) \leq O_d(\#A)$。由于 $A' + [-\epsilon, \epsilon] \subseteq B' + [-2\epsilon, 2\epsilon]$，由命题 1.1 可得

$$\epsilon \cdot \#\left(\mathrm{gap}^{0,d}(A')\right) \leq O_d(|\,\mathrm{gap}^{1,d}(A' + [-\epsilon,\epsilon])|) \leq O_d(|\,\mathrm{gap}^{1,d}(B') + [-2\epsilon, 2\epsilon]|).$$

由断言 5.8 可得 $\mathrm{gap}^{1,\ d}(B') \subseteq P + [-\eta, \eta]$，其中 $|P + [-\eta,\eta]| = O_d(|\mathrm{gap}^{1,\ d}(B')|)$，且存在某个 d'-广义算术级数 P，满足 $d' \leq d$ 和 $\eta \geq \epsilon$。因此

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{gap}^{1,d}(B') + [-2\epsilon, 2\epsilon]| &\leq |P + [-3\eta, 3\eta]| \leq 3|P + [-\eta, \eta]| \\ &= O_d(|\,\mathrm{gap}^{1,d}(B')|) = O_d(|B|), \end{aligned}$$

因此 $\#$ (广义算术级数$^{0,\ d}(A')$ $) \leq O_d(\#A)$。 □

本节中，我们采用由应用命题 2.3 得到的以下设定。

设定 7.5.

- $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 与 $|A+A| < 2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$,
- $A \subseteq X + P + Q$ 对于某个 d'-广义算术级数 P 和平行多面体 Q，满足 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \eta}(1)$,
- $A_x := A \cap (x + P + Q)$ 对于 $x \in X$和 $A^s := \{x \in X : |A_x| \geq s\}$,
- $(A+A)_z := (A+A) \cap (z + P + P + Q + Q)$ 和 $(A+A)^s := \{z \in X + X : |(A+A)_z| \geq s\}$,
- $A_0 = (P+Q) \cap A$有 $0 \in X$ 和 $|A_0| =$最大值$_{x \in X} |A_x|$,
- 全部 $|A_x + A_y| \geq \left(|A_x|^{1/(k+d')} + |A_y|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - \eta(\#X)^{-2}|A|$,
- 若 $(A_x + A_y) \cap (A_z + A_w) \neq \emptyset$ 则 $x + y = z + w$。

这里我们假设，通过平移 A，A_0 是最大的平移。在除定理 7.2 之外的所有证明中，我们还可以通过选择大于 $\#X + \#P \cdot |Q|/|A| = O_{k,d,\epsilon,\eta}(1)$ 的 C，假设 $d' = d$。在定理 1.2 的证明中，我们将有 $d' = d = 0$，因此根据布伦-明可夫斯基，我们可以假设 $A \subseteq X + Q$ 和 $\eta = 0$。为了估计上述 $|A_x + A_y|$的表达式，

我们通常采用幂平均记号 $M_p(a,b) := \left(\frac{1}{2}(a^p+b^p)\right)^{1/p}$，其中$p = 1/(k+d')$，并使用不等式 $M_p(a,b) \geq \sqrt{ab}$。

7.1. 1% 稳定性。我们先在最简单的情形下证明 1% 稳定性，这一情形展示了我们将在一般情形中使用的论证。

定理 1.2 的证明。设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $\left|\frac{A+A}{2}\right| \leq (1+\delta)|A|$，其中 $\delta \in (0,1)$。我们需要找到满足 $|A'| \geq (1-\delta)|A|$ 且 $|\mathrm{co}(A')| \leq O_{\delta,k}(|A|)$ 的 $A' \subset A$。根据设定 7.5，我们有 $\delta = 1-\epsilon$ 和 $d' = d = 0 = \eta$。注意，如果 $x, y \in A^s$，那么 $|A_x|, |A_y| \geq s$，因此由布伦-明可夫斯基不等式可得 $|(A+A)_{x+y}| \geq |A_x + A_y| \geq 2^k s$。于是 $A^s + A^s \subseteq (A+A)^{2^k s}$。我们还注意到 $|A| = \sum_x |A_x| = \int_s 1_{0 \leq s \leq |A_x|} = \int_s \#A^s$。类似地，利用不同 $z \in X+X$对应的 $(A+A)_z$ 两两不交，可得 $|A+A| = \sum_{z \in X+X} |(A+A)_z| = \int_s \#(A+A)^s = 2^k \int_s \#(A+A)^{2^k s}$。由于 $|A_0| = \max\{s : \#A^s > 0\}$，我们推得

$$\begin{aligned} |A+A| &= 2^k \int_s \#(A+A)^{2^k s} \geq 2^k \int_s \#(A^s + A^s) \\ &\geq 2^k \int_s (2\#A^s - 1) = 2^k (2|A| - |A_0|). \end{aligned}$$

因此 $|A \setminus A_0| \leq 2^{-k}|A+A| - |A| \leq \delta|A|$。由于 $|\mathrm{co}(A_0)| \leq |Q| = O_{k,\,\epsilon}(|A|)$，该定理对 $A' = A_0$成立。□

接下来，我们证明 1% 稳定性结果；该结果在 $\delta \to 0$ 或 $\delta \to 1$ 时是渐近紧的。

定理 7.1 的证明。论证与前一个证明（即定理 1.2 的证明）类似，但现在 $d' = d \geq 0$ 和 $\eta > 0$ 足够小。根据设定 7.5，对于任意 x，$y \in A^s$（即 $|A_x|$, $|A_y| \geq s$），满足 $|A_x + A_y| \geq 2^{k+d}s - \theta$，其中 $\theta := \eta(\#X)^{-2}|A|$，因此 $A^s + A^s \subseteq (A+A)^{2^{k+d}s-\theta}$。我们注意到 $2^{k+d}\int_{s \geq 0} \#(A+A)^{2^{k+d}s-\theta} = \int_{s \geq 0} \#(A+A)^{s-2^{-k-d}\theta} = 2^{-k-d}\theta \#(X+X) + \int_{s\ 0} \#(A+A)^s \leq \eta|A| + |A+A|$。因此

$$|A+A| + \eta|A| \geq 2^{k+d} \int_s \#(A^s+A^s) \geq 2^{k+d} \int_s (2\#A^s - 1) = 2^{k+d}(2|A| - |A_0|). \tag{3}$$

我们推导出 $|A \setminus A_0| \leq 2^{-k-d}|A+A| + \eta|A| - |A| \leq (\delta+\eta)|A|$。取 $\eta < \beta\delta$得到定理中的线性界。现在我们将证明二次界。我们注意到

$$2^{-(d+k)}|A+A| \geq 2^{-(d+k)} \sum_{x \in X} |A_0 + A_x| \geq \sum_{x \in X} M_{1/(d+k)}(|A_0|, |A_x|) - \eta|A| \tag{4}$$

$$\geq \sum_{x \in X} \sqrt{|A_0||A_x|} - \eta|A|. \tag{5}$$

对于给定的 $|A_0|$，根据凹性，当 $|A_x|$ 对于某个 x 取值为 $|A|-|A_0|$，而其他情况下为 0 时，最后这个和达到最小。记 $\alpha := 1-|A_0|/|A|$，我们得到
$\delta+\eta \geq 2^{-(d+k)}|A+A|/|A|-1 \geq -\alpha+\sqrt{\alpha(1-\alpha)} = (\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha}.$
我们推导出 $1-2\sqrt{(1-\alpha)\alpha}\alpha \leq (\delta+\eta)^2$。

从这里开始，经过一些计算即可得到所需的界 $\alpha \leq \delta^2+60\delta^3$，其中 η 足够小。事实上，首先注意到我们可以假设 $\delta^2+60\delta^3<1$，因此 $\delta<1/4$（否则平凡界 $\alpha \leq 1$ 即可满足要求）。由线性界 ~~$\alpha<\delta$~~ $+\eta$，我们计算得到 $(1-2\sqrt{(1-\alpha)\alpha})^{-1}<7.5<8$，当 η 足够小时成立，因此$\alpha \leq 8\delta^2$。代入此界可得 $\alpha \leq (\delta+\eta)^2+2\alpha^{3/2} < \delta^2+60\delta^3$，当 η 足够小时成立，正如所需。□

注 7.6。在方程 (4) 中，我们使用界 $M_{1/(d+k)}(x,y) \geq \sqrt{xy}$ 以获得简洁的结果。由于 $M_{1/(d+k)}$ 也是凹函数，论证的其余部分并不依赖于这一简化；使用 $M_{1/(d+k)}$ 将对所有 d,k 给出最优结果，正如定理 1.3 之后所述。

现在，我们调整上述论证，在较弱的非退化假设下提取结构。

定理 7.2 的证明。令 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ with $|A+A|<2^{k+d}|A|$ and $d^*<d$。根据设定 7.5，我们有 $\epsilon=1$ and $\eta<\eta(k,d)$ 足够小，现在还可能有 $d'<d$。我们需要证明

$$\min\left\{\left|\mathrm{gap}^{k,d^*}_{O_{k,d}(1)}(A)\right|,\left|\mathrm{gap}^{k,d}_{O(2^{k+d}\exp O(9^{d-d^*}))}(A)\right|\right\} < O_{k,d}(|A|).$$

由于 $\#X+\#P\cdot|Q|/|A| = O_{k,d,\eta}(1)$，若 $d' \leq d^*$，则结论成立，因此我们可以假设 $d'>d^*$。

断言 7.7。存在某个 s_0，使得 $\#(A^{s_0}+A^{s_0}) \leq 2^{d-d'+1/2}\#A^{s_0}$ and$|A\cap(A^{s_0}+P+Q)| \geq \frac{1}{4}|A|$。
命题证明。如同 (3) 中那样，我们有 $|A+A|+\eta|A| \geq 2^{k+d'}\int_s \#(A^s+A^s)$。

令 s_0 取最小值，使得 $\#(A^{s_0}+A^{s_0}) \leq 2^{d-d'+1/2}\#A^{s_0}$。我们注意到

$$\int_{s=0}^{s_0}\#A^s = \int_{s=0}^{s_0}\sum_{x\in X}1_{|A_x|\geq s} \geq |A|-|A\cap(A^{s_0}+P+Q)|,$$

因此，$\int_s \#(A^s+A^s) \geq \int_0^{s_0}2^{d-d'+1/2}\#A^s \geq 2^{d-d'+1/2}(|A|-|A\cap(A^{s_0}+P+Q)|)$。

$$2^{k+d}|A| > |A+A| \geq 2^{k+d+1/2}(|A|-|A\cap(A^{s_0}+P+Q)|)-\eta|A|$$

对于较小的 η，我们推得$|A\cap A^{s_0}+P+Q| \geq \frac{1}{4}|A|$。 □

现在我们将定理 3.1（定量弗雷曼）应用于 A^{s_0}，得到$A^{s_0} \subseteq X'+P'$，其中 $\#X' \leq \exp O\left(9^{d-d'}\right)$，以及某个 $(d-d')$-广义算术级数 P'，满足 $\#P' \leq \#A^{s_0}$。我们注意到 $P^* := P+P'$ 是一个 d-广义算术级数。根据鸽巢原理，我们可以固定某个 $x\in X'$，使得

$$|A\cap(x+P^*+Q)| \geq |X'|^{-1}|A\cap(A^{s_0}+P+Q)| \geq |A|/\exp O\left(9^{d-d'}\right).$$

应用 Ruzsa 覆盖引理（引理3.2），我们可以用 $(P^*+Q)-(P^*+Q)$ 的 $O\left(9^{d-d'}\right)$ 个平移覆盖 A by$O\left(2^{k+d}\right.$exp，如所需。□

7.2. 99% 稳定性。这里我们将通过以下命题证明我们的 99% 稳定性结果；正如我们将看到的，我们可以取 $t^*_{7.8}(\gamma,\beta) := \underline{\beta^{\frac{252}{\gamma-\beta()}}+\frac{2520}{(\gamma-\beta)^2}+\frac{21}{\beta}}$，该命题也蕴含绝对常数结果。

命题 7.8. 对于任意 $\gamma>\beta>0$，存在 $t^*=t^*_{7.8}(\gamma,\beta)\in\mathbb{N}$，使得对于任意 d、$k\in\mathbb{N}$ 和 $\epsilon>0$，存在 $C=C_{\epsilon,d,k}$ 和 $\eta=\eta_{\epsilon,d,k}$，使得以下结论成立。设 $A\subset\mathbb{R}^{k+d}$ 满足 $|A+A|<2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$ 且 $\left|间隙^{k\,d-1}_{C}(A)\right|\geq C|A|$。在设定 7.5 中，令 t 为满足存在 $X^\dagger\subset X$ 且 $\sum_{x\in X\setminus X^\dagger}|A_x|\leq\beta|A|$ 和 $\#X^\dagger=t$ 的最小值。若 $t\geq t^*$，则存在 $X'\subset X$ 满足 $\sum_{x\in X\setminus X'}|A_x|\leq\gamma|A|$，并且存在一个等差数列 T，使得 $\#T\leq 3\#X'$，从而 $X'\subset T+P+Q$。

首先假设命题 7.8 成立，并据此推导出定理 7.3 和推论 7.4。

定理 7.3 的证明。设 $t_\alpha=t^*_{7.8}(\alpha,\alpha/2)$，并按命题 7.8 找到 t, $X^\dagger$。若 $t\leq t_\alpha$，则 $A':=\bigcup_{x\in X^\dagger}A_x$ 有 $|A\setminus A'|\leq\alpha|A|$ 和|间隙$^{k\,d}_{t_\alpha}$，$(A')|\leq\#X^\dagger\cdot\#P\cdot|Q|=O_{\epsilon,d,k}(|A|)$。或者，若 $t>t^*$，则按命题 7.8 找到X', T，并令 $A':=\bigcup_{x\in X'}A_x$。那么 $|A\setminus A'|\leq\alpha|A|$且 |间隙$^{k,d+1}(A')|\leq|T+P+Q|\leq 3\#X\cdot\#P\cdot|Q|=O_{\epsilon,d,k}(|A|)$。□

推论 7.4 的证明。设 $A\subseteq\mathbb{R}^k$ with $|A+A|\leq 2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$and $\left|间隙^{k\,d-1}_{O_{k\,d\,\epsilon}(1)}(A)\right|>\Omega_{d,k,\epsilon}(|A|)$。我们对 $\gamma=0.5$and $\beta=0.1$ 应用命题 7.8，并计算得 $t^*(0.5,0.1)<25000$。如果 $t\geq t^*$，则得到 $A'\subseteq A$ with $|A'|\geq|A|/2$ and $A'\subseteq T+P+Q$，其中某个等差数列为 T with $\#T\leq 3\#X'$，因此 |间隙$^{k,d+1}(A')|\leq O_{d,k,\epsilon}(|A'|)$。如果$t<t^*$，则得到 $A^*\subseteq A$ with $|A^*|\geq 0.9|A|$ and $A^*\subseteq X^\dagger+P+Q$ with $\#X^\dagger<t^*$。于是，某个平移 $A'=A\cap(x+P+Q)$ 满足 $|A'|\geq\frac{1}{30000}|A|$and |间隙$^{k,d+1}(A')|\leq$|间隙$^{k,d}(A')|\leq|P+Q|=O_{d,k,\epsilon}(|A'|)$。□

还需证明该命题。证明的思路是找出 X 的一个大子集，该子集具有小倍增性质，因而接近一个算术级数，并且还具有包含所有较大的 A_x 的额外性质。为了控制这个算术级数之外的 A 的数量，我们注意到，其中大多数点都会对倍增贡献一个大小至少为 $2^{k+d}\sqrt{|A_x||A_0|}$ 的集合。由于 $|A_x|$ 远小于 $|A_0|$，这一贡献非常大，因此所有这些 A_x 的总权重必须很小。

命题 7.8 的证明。假设 $A\subseteq\mathbb{R}^k$ 有 $|A+A|\leq 2^{k+d}(2-\epsilon)|A|$。

令 $s_0:=\min\{s:\#(A^s+A^s)\leq 3\#A^s-4\}$，或者如果不存在这样的 s，则为 $s_0=|A_0|=\max_{x\in X}|A_x|$。

根据 Freiman 的 $3k-4$ 定理 [Fre59]，存在一个等差数列$T \subset \mathbb{R}^k$，满足 $A^{s_0} \subset T$ 且 $\#T \le 2\#A^{s_0}$。我们令 $X' = A^{s_0}$ 和 $A' = (X'+P+Q)\cap A$。

我们假设 $\#X^\dagger = t \ge t^*$，并需要证明 $|A\setminus A'| \le \gamma|A|$。我们将 X 划分为 (X', X^+, X^-)，其中 $X^+ = X^\dagger \setminus X'$ 且 $X^- = X\setminus X^\dagger$。记 $s_1 := \min\{|A_x|:\ x\in X^\dagger\}$。因此

$|A_x| \ge s_0$ 对于 $x\in X'$, $|A_x|\in[s_1, s_0)$ 对于 $x\in X^+$，而 $|A_x|\le s_1$ 对于 $x\in X^-$.我们将 A 的相应划分记为 (A', A^+, A^-)。根据 $X^\dagger$ 的定义，我们有

$$\#X^+ + \#X' = \#X^\dagger = t \ge t^* \quad \text{and} \quad \beta|A| - s_1 \le |A^-| \le \beta|A|. \tag{6}$$

剩下要证明 $|A^+| \le (\gamma-\beta)|A|$。我们先计算

$$\int_{s=0}^{s_0} \#(A^s + A^s) \ge \int_{s=0}^{s_0} (3\#A^s - 3) = 3\left(\int_{s=0}^{s_0} \#A^s\right) - 3s_0, \text{ and}$$

$$\int_{s>s_0} \#(A^s + A^s) \ge \int_{s=s_0}^{|A_0|} (2\#A^s - 1) = 2|A| - 2\left(\int_{s=0}^{s_0} \#A^s\right) - |A_0| + s_0.$$

求和，并使用 (3) 中的 $|A+A| + \eta|A| \ge 2^{k+d}\int_s \#(A^s + A^s)$，再令 η充分小，得到

$$2|A| + \int_{s=0}^{s_0} \#A^s - |A_0| - 2s_0 \le \int_s \#(A^s+A^s) \le 2^{-k-d}(|A+A|+\eta|A|) < 2|A|.$$

因此 $\int_{s=0}^{s_0} \#A^s \le |A_0| + 2s_0$。由于 $\int_{s=0}^{s_0} \#A^s = \int_{s=0}^{s_0}\sum_{x\in X} 1_{|A_x|\ge s} = |A\setminus A'| + s_0\#A^{s_0}$，我们推得

$$|A\setminus A'| \le |A_0| + 2s_0 - s_0\#A^{s_0} \le 3|A_0|. \tag{7}$$

接下来我们断言

$$X^\circ := \left\{x\in X\setminus X' : (A_x + A_0)\cap(A'+A') \ne \emptyset\right\} \text{ satisfies } \#X^\circ \le 3\#X'. \tag{8}$$

事实上，我们可以假设 $X+X$ 是 $4\cdot(P+Q)$ 分离的，因此对任意 $x\in X^\circ$，都有 $x = x+0 \in X'+X' \subseteq T+T$，从而 $\#X^\circ \le \#((T+T)\setminus X') \le 2\#T - \#X' \le 3\#X'$。现在我们将证明

$$\sum_{x\in X\setminus X^\circ} \sqrt{|A_0||A_x|} \le 8|A_0|. \tag{9}$$

为说明这一点，我们首先注意到，与（3）中一样，利用（7）可得

$$\begin{aligned} 2^{-k-d}(|A'+A'| + \eta|A|) &\ge \int_s \#(A'^s + A'^s) \ge \int_s (2\#A'^s - 1) \\ &= 2|A'| - |A_0| \ge 2|A| - 7|A_0|. \end{aligned}$$

我们还注意到，对于所有与 $A'+A'$ 不相交的 $X\setminus X^\circ$，$A+A$ 都包含满足 $2^{-k-d}(|A_x+A_0| + \eta(\#X)^{-2}|A|) \ge M_{1/(k+d)}(|A_x|, |A_0|) \ge \sqrt{|A_x||A_0|}$的两两不相交集合 $A_x + A_0$。取较小的 η 并使用 $|A+A| <$

$2^{k+d+1}|A|$ 我们推出（9）。现在，回想一下我们的最终目标是为 $|A^+|$ 给出一个界，我们接下来的目标是以下关于 $\#X^+$ 和 $\#X'$ 的界：

$$\#X^+ \le 6\#X' + 2 + 16/\beta \quad \text{and} \quad \#X' \ge t^*/7 - 3/\beta. \tag{10}$$

为证明这些界，我们分别考察式 (9) 左侧来自 X^- 和 X^+ 的贡献。根据凹性，给定 $|A^-|$ 时，来自 X^- 的贡献在令每个 $|A_x|$ 为零或 s_1（可能的最大值）时达到最小。利用 (6) 和 (8)，我们推得

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X^-\setminus X^\circ} \sqrt{|A_0||A_x|} &\ge \left(\left\lfloor \frac{\beta|A|}{s_1}\right\rfloor - 1 - \#X^\circ\right)\sqrt{|A_0|s_1} \\ &\ge \left(\frac{\beta|A|}{s_1} - 2 - 3\#X'\right)\sqrt{|A_0|s_1}.\end{aligned}$$

利用 $|A_x| \ge s_1$ 对所有 $x \in X^+$ 成立以及 (9)，我们得到

$$\left(\beta|A|/s_1 + \#X^+ - 2 - 6\#X'\right)\sqrt{s_1|A_0|} \le \sum_{x\in X\setminus X^\circ}\sqrt{|A_x||A_0|} \le 8|A_0|.$$

使用算术-几何平均不等式

$$\beta|A|/s_1 + \#X^+ - 2 - 6\#X' \ge 2\sqrt{(\#X^+ - 2 - 6\#X')\beta|A|/s_1}$$

我们得到

$$2\sqrt{(\#X^+ - 2 - 6\#X')\beta|A|} \le 8\sqrt{|A_0|}.$$

这意味着 (10) 中 $\#X^+$ 的界。接着利用 $\#X^+ + \#X' \ge t^*$ 即可得到 $\#X'$ 的界。

为了推导出关于 $|A^+|$ 的界，我们还需要以下关于 s_0的界。

$$s_0 \le \frac{5|A|^2}{(\#X')^2|A_0|} \quad \text{and} \quad s_0 \le |A|/\#X'. \tag{11}$$

为说明这一点，我们回顾 $|A_x| \ge s_0$ 对所有 $x \in X'$ 均成立，并计算

$$2^{d+k+1}|A| \ge |A+A| \ge \sum_{x\in X'}|A_x + A_0| \ge 2^{d+k}\#X'\sqrt{|A_0|s_0} - \eta|A|.$$

这就得到了 η较小时的第一个界。当$|A| \ge \sum_{x\in X'}|A_x| \ge s_0\#X'$ 时，第二个界成立。

结合 (10) 和 (11)，对所有 $x \in X^+$ 使用 $|A_x| \le s_0$，我们得到

$$\begin{aligned}|A^+| \le s_0\#X^+ &\le \left(\frac{16}{\beta} + 2\right)s_0 + 6\#X'\frac{5|A|^2}{(\#X')^2|A_0|} \\ &\le \left(\frac{16}{\beta} + 2\right)\frac{|A|}{\#X'} + \frac{30|A|^2}{\#X'\cdot|A_0|}.\end{aligned}$$

最后，根据 (7) 回忆起 $|A^+| \le |A \setminus A'| \le 3|A_0|$，因此由不等式 $\min\{x+y,z\} \le x+\sqrt{yz}$，我们得到

$$\begin{aligned}|A^+| &\le \left(\frac{16}{\beta}+2\right)\frac{|A|}{\#X'} + \sqrt{3|A_0|\cdot\frac{30|A|^2}{\#X'\cdot|A_0|}} \\ &= \left[\left(\frac{16}{\beta}+2\right)\frac{1}{\#X'} + \sqrt{\frac{90}{\#X'}}\right]|A|.\end{aligned}$$

将 (10) 中的 $\#X' \ge t^*/7 - 3/\beta$ 代入并取

$$t^* \ge t^*_{7.8}(\gamma,\beta) := \frac{252}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{2520}{(\gamma-\beta)^2} + \frac{21}{\beta}$$

我们便得到所需的界 $|A^+| \le (\gamma-\beta)|A|$。 □

8. Exact results I: basic regime

现在，我们将证明基本情形下的精确结果（100% 稳定性）：此时，极值例或渐近极值例由一个较大的广义凸数列和若干零散点构成；而离散锥渐近极值的情形将在后续章节讨论。特别地，下面的第二个结果确立了近似凸性的倍增阈值。照例，本节我们在 $\mathbb{R}^k$ 而非 $\mathbb{Z}$ 中工作，目标如下。

定理 8.1. 设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| \le (2^{k+d}+\ell)|A|$，其中 $\ell \in (0, 2^{k+d})$ 且 $|间隙_{O_{k\ d\ \ell}^{k\ d-1},\ ,,(1)}(A)| \ge \Omega_{k,\ d,\ \ell}(|A|)$。则 $\left|间隙_{\ell'}^{k\ d},\ (A)\right| \le O_{k,\ d,\ \ell}(|A|)$，其中

$$\ell' \le \begin{cases} 1 & \text{if } \ell \in (0,1), \\ \ell+1 & \text{for } \ell \in \mathbb{N} \text{ if } \ell \le 0.1\cdot 2^{k+d} \\ & \text{or if } \ell \le 0.315\cdot 2^{k+d} \text{ and } k+d \ge 13, \\ \ell\left(1+O\left(\sqrt[3]{\frac{2^{k+d}}{(2^{k+d}-\ell)^2}}\right)\right) & \text{if } 0.1\cdot 2^{k+d} \le \ell \le \left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{k+d}}}\right)2^{k+d}. \end{cases}$$

定理 8.2. 对任意 $k,d \in \mathbb{N}$, $\gamma,\epsilon > 0$, $\delta \in [0, 1-\epsilon)$，若 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ with $|A+A| \le (2^{k+d}+\delta)|A|$ 且 $|广义算术级数_{O_{k\ d}^{k\ d-1},\ ,\ ,\ \gamma,\ \epsilon(1)}(A)| = \Omega_{k,\ d}(|A|)$，则 $|co^{k,\ d}(A)\ \backslash A|/|A| \le O_{k,\ d}(\gamma+\delta)$。

定理 8.1 的证明。我们采用带有 $\epsilon = 1-\ell/2^{k+d}$ 的设定 7.5，该设定是通过在 η 足够小时应用命题 2.3 得到的。由于 $\ell \le \left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{k+d}}}\right)2^{k+d}$，我们发现 $\epsilon = \Omega_{k,\ d}(1)$，因此应用命题 2.3 不依赖于 ℓ。由定理 7.1 可得 $|A_0| = \max_{x\in X}|A_x| \ge (1-\eta)\epsilon|A|$。我们计算

(12)
$$(2^{k+d}+\ell)|A| \ge |A+A| \ge \sum_{x\in X}|A_x+A_0| \ge -\eta|A| + 2^{k+d}\sum_{x\in X} M_{1/(k+d)}(|A_x|,|A_0|).$$

根据凹性，注意到 $\sum_{0\neq x\in X}|A_x|=|A|-|A_0|$ 和所有 $|A_x|\le|A_0|$，(12) 式右边在 $|A_x|$ 对 m 个值取 $|A_0|$、对一个值取 $|A|-m|A_0|<|A_0|$ 时达到最小值（这定义了 $m\in\mathbb{N}$，即 $m=\lfloor|A|/|A_0|\rfloor$）。由于 $M_{1/(k+d)}(|A_0|,|A_0|)=|A_0|$，$M_{1/(k+d)}(|A_0|,0)=2^{-k-d}|A_0|$ 且 $M_{1/(k+d)}(x,y)\ge\min\{x,y\}$，我们推得

(13)
$$\begin{aligned}(2^{k+d}+\ell+\eta)|A|&\ge 2^{k+d}(m|A_0|+M_{1/(k+d)}(|A_0|,|A|-m|A_0|))+(\#X-m-1)|A_0|\\&\ge 2^{k+d}|A|+(\#X-m-1)|A_0|.\end{aligned}$$

取较小的 $\eta<\eta(k,d,\epsilon)$，即可得到初步界

$$\#X\le(\ell+\eta)|A|/|A_0|+m+1\le\epsilon^{-1}\ell+m+2. \tag{14}$$

现在我们考虑在什么条件下可以证明 $\#X$ 的紧确界。

命题 8.3. 若 $\ell\in(0,1)$，则 $\#X=1$。

为此，我们首先注意到 $\epsilon>1-2^{-k-d}$，因此 $m=1$，而 (14) 中的第一个界表明，当 η 较小时，$\#X\le 3$。接下来我们证明 $\#X=2$ 不可能成立。事实上，若 $X=\{x,y\}$，则

$$\begin{aligned}(2^{k+d}+\ell)|A|&\ge|A+A|\ge|A_x+A_x|+|A_y+A_y|+|A_x+A_y|\\&\ge 2^{k+d}(|A_x|+|A_y|)+|A|-\eta|A|,\end{aligned}$$

利用 $(|A_x|^{1/(k+d)}+|A_y|^{1/(k+d)})^{k+d}\ge|A|$。然而，当 $\eta<1-\ell$ 时，这与矛盾相悖。类似地，我们将证明 $\#X=3$ 不可能成立。事实上，设 $X=\{x,y,z\}$。若存在任意一个非平凡恒等式 $a+b=c+d$，其中有$a,b,c,d\in X$，则该恒等式唯一，因此我们重新标记，使其为 $y+y=x+z$。于是计算得

$$\begin{aligned}(2^{k+d}+\ell)|A|&\ge|A+A|\\&\ge|A_x+A_x|+|A_y+A_y|+|A_z+A_z|+|A_x+A_y|+|A_x+A_z|\\&\ge 2^{k+d}|A|+(|A_x|+|A_y|)+(|A_x|+|A_z|)-\eta|A|,\end{aligned}$$

这再次导致 $\eta<1-\ell$矛盾。因此 $\#X=1$。

现在假设 $\ell\in\mathbb{N}$ 满足 $1\le\ell\le 0.315\cdot 2^{k+d}$，即 $\epsilon\ge 0.685$，因此$|A_0|>0.68|A|$ 且 $m=1$。

若 $k+d<13$，我们假设 $\ell\le 0.1\cdot 2^{k+d}$，并注意到 $\ell\ge 1$ 蕴含$k+d\ge 4$。令

$$\alpha:=1-|A_0|/|A|\quad\text{and}\quad\alpha^*:=\left(\frac{0.9(k+d)}{2^{k+d+1}}\right)^{(k+d)/(k+d-1)}.$$

注意，$\alpha<1-(1-\eta)\ell 2^{-(k+d)}$ 且 $\alpha^*<0.1$。

命题 8.4. 若 $\alpha<\alpha^*$ 则 $\#X\le\ell+1$。

由 (13)，由于 $2^{k+d}M_{1/(k+d)}(1-\alpha,\alpha) \geq (1-\alpha)(1+(k+d)\alpha^{1/(k+d)})$，且由 (14) 得 $\#X-1 \leq 2^{k+d}$，

$$\begin{aligned}2^{k+d}+\ell+\eta &\geq 2^{k+d}(1-\alpha+M_{1/(k+d)}(1-\alpha,\alpha)) + (\#X-2)(1-\alpha)\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-2-(2^{k+d}+\#X-2)\alpha +(1-\alpha)(1+(k+d)\alpha^{1/(k+d)})\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-1-2^{k+d+1}\alpha+0.9(k+d)\alpha^{1/(k+d)}\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-1 \text{ （使用 } \alpha<\alpha^*\text{）。}\end{aligned}$$

因此，当 η 较小时，$\#X \leq \lfloor \ell+\eta \rfloor + 1 \leq \ell+1$。现在我们可以假设 $\alpha \geq \alpha^*$。

命题 8.5. 若 $\ell < 0.1\cdot 2^{k+d}$，则 $\#X \leq \ell+1$。

按上述方法计算，现在使用 $M_{1/(k+d)}(1-\alpha,\alpha) \geq \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$，以及由 (14) 得到的 $\#X-2 \leq 0.2\cdot 2^{k+d}$，

$$\begin{aligned}2^{k+d}+\ell+\eta &\geq 2^{k+d}+\#X-2-(2^{k+d}+\#X-2)\alpha+2^{k+d}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-2+2^{k+d}\sqrt{\alpha}(\sqrt{1-\alpha}-1.2\sqrt{\alpha})\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-1,\end{aligned}$$

其中，当 $\alpha \geq \alpha^*$ 且 $k+d \geq 4$ 时，最后一个不等式由 $\sqrt{\alpha}(\sqrt{1-\alpha}-1.2\sqrt{\alpha}) \geq \sqrt{\alpha}(\sqrt{1-0.1}-1.2\sqrt{0.1}) > 2^{-k-d}$ 得出。与上文一样，这意味着当 η 足够小时，$\#X \leq \lfloor \ell+\eta \rfloor + 1 \leq \ell+1$。

因此，我们进入证明精确上界 $\#X \leq \ell+1$ 的最后一种情形。

命题 8.6. 若 $0.1 \leq \ell/2^{k+d} \leq 0.315$、$\alpha \geq \alpha^*$ 和 $k+d \geq 13$，则 $\#X \leq \ell+1$。

按上述方法计算，现在使用来自 (14) 的 $\#X-2 \leq \frac{0.315}{1-0.315}\cdot 2^{k+d} \leq 0.46\cdot 2^{k+d}$，

$$\begin{aligned}2^{k+d}+\ell+\eta &\geq 2^{k+d}+\#X-2-(2^{k+d}+\#X-2)\alpha+2^{k+d}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-2+2^{k+d}\sqrt{\alpha}(\sqrt{1-\alpha}-1.46\sqrt{\alpha})\\ &\geq 2^{k+d}+\#X-1,\end{aligned}$$

其中，当 $\alpha \geq \alpha^*$ 且 $k+d \geq 13$ 时，最后一个不等式由 $\sqrt{\alpha}(\sqrt{1-\alpha}-1.46\sqrt{\alpha}) \geq \sqrt{\alpha}(\sqrt{1-0.315}-1.46\sqrt{0.315}) > 2^{-k-d}$ 成立。与上述情况一样，这意味着当 η 足够小时，$\#X \leq \lfloor \ell+\eta \rfloor + 1 \leq \ell+1$。

最后，我们证明平移个数的渐近上界。

命题 8.7. 若 $0.1\cdot 2^{k+d} \leq \ell \leq \left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{k+d}}}\right)2^{k+d}$，则 $\#X \leq \ell(1+O(\gamma))$，其中 $\gamma := \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^{-(k+d)}\epsilon^{-2}}$。

注意，$\epsilon := 1-\ell/2^{k+d} \in \left(\frac{1}{\sqrt{2^{k+d}}}, 0.9\right)$。我们按照 $|A_i|$ 的非递增顺序将 X 排列为 $x_1,\dots,x_{\#X}$，其中 $A_i := (x_i+P+Q)\cap A$。令 $t = \max\left\{t\colon \sum_{i=1}^{t}|A_i| \leq (1-\gamma)|A|\right\}$，且 $\xi = |A_{t+1}|/|A|$。由 (14) 可得

$$\gamma \leq \xi(\#X-t) \leq \xi\epsilon^{-1}(\ell+2) \leq \xi\epsilon^{-1}2^{k+d}. \tag{15}$$

注意，$\xi \le \gamma \le 1/2$。若 $t = 0$，则 $|A_1| > (1-\gamma)|A|$，因此，由于 $(2^{k+d}+\#X-1)|A_1| \le |A+A|+\eta|A| \le (2^{k+d}+\ell+\eta)|A|$，我们有 $\#X \le \ell(1+O(\gamma))$。因此可以假设 $t \ge 1$。

我们写作 $A_{\le t} = \bigcup_{i\le t} A_i$，并注意到 $|A_{\le t}|/|A| \ge 1-\gamma-\xi \ge 1-2\gamma$。接下来，我们给出 $|A+A|$ 的上界：

(16)
$$|A+A|+\eta|A| \ge \max\left\{2^{k+d}t\sqrt{\xi(\epsilon-\eta)}|A|,\ 2^{k+d+1}|A_{\le t}| + (\#X - 2t - 2^{k+d})|A_1|\right\}.$$

对于第一个上界，由定理 7.1 得 $|A_1| \ge (\epsilon-\eta)|A|$，并根据 ξ 的定义，对所有 $i \le t$，都有 $|A_i| \ge \xi|A|$，

$$|A+A| \ge \sum_{i=1}^{t} |A_i+A_1| \ge 2^{k+d}t\sqrt{|A_i||A_1|} - \eta|A| \ge 2^{k+d}t\sqrt{\xi(\epsilon-\eta)}|A| - \eta|A|.$$

对于第二个上界，注意到 $|X \setminus \{x_1+x_1, x_1+x_2, x_2+x_2, \dots, x_t+x_t\}| \ge \#X - 2t$。利用 $|A_i+A_{i+1}| \ge 2^{k+d}|A_{i+1}| - (\#X)^{-2}\eta|A|$ 和 $|A_1+A_i| \ge |A_1|$，我们得到

$$\begin{aligned}|A+A| &\ge |A_1+A_1| + |A_1+A_2| + \cdots + |A_t+A_t| + (\#X-2t)|A_1| \\ &\ge 2^{k+d+1}|A_{\le t}| + \left(\#X - 2t - 2^{k+d}\right)|A_1| - \eta|A|.\end{aligned}$$

这就证明了 (16)。由 (15)、(16) 以及 $|A+A| < 2^{k+d+1}|A|$，我们推出

$$t < 2/\sqrt{\xi(\epsilon-\eta)} \le 2^{1+(k+d)/2}/(\epsilon-\eta)\sqrt{\gamma}. \tag{17}$$

我们还可推出 $(2^{k+d}+\ell+\eta)|A| \ge 2^{k+d+1}(1-2\gamma)|A| + (\#X - 2t - 2^{k+d})|A_1|$；当 η 和 γ 较小时，这意味着 $\#X - 2t - 2^{k+d} \le 0$。由于 $|A_1| \le |A_{\le t}|$，我们得到

$$(2^{k+d}+\ell+\eta)|A| \ge (2^{k+d}+\#X-2t)(1-2\gamma)|A| \ge (2^{k+d}+\#X-2t-2^{k+d+2}\gamma)|A|,$$

因此 $\#X \le \ell + 2t + 2^{k+d+2}\gamma + \eta$。利用 (17) 并回想起 $\gamma = \frac{1}{2}\epsilon^{-2/3}2^{-(k+d)/3}$，我们看到 $\#X \le \ell(1+O(\gamma))$。这就完成了断言的证明，也就完成了定理的证明。□

定理 8.2 的证明。设 $k, d \in \mathbb{N}$, $\gamma, \epsilon > 0$, $\delta \in (0, 1-\epsilon)$，且 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| \le (2^{k+d}+\delta)|A|$ 和 $|$ 间隙 $_{O_{k\ d}}^{k\ d-1}, , ,_{\gamma,\epsilon}(1)(A)| = \Omega_{k,d}(|A|)$。我们需要证明 $|\mathrm{co}^{k,d}(A) \setminus A|/|A| \le O_{k,d}(\gamma+\delta)$。我们可以假设 $\gamma < \gamma_0(k,d,\epsilon)$ 很小，并进一步固定满足 $t > t_0(k,d,\epsilon)$ 很大的参数 $t \ll \gamma^{-1} \ll n$。

根据定理 8.1，我们有 $A \subseteq P+Q$ 对于某个 d-广义算术级数 P 和平行多面体 Q，其中根据定理 2.2，我们可以假设 P 是 n-满的、2-真集且 $4Q$-分离的，并满足 $|\mathrm{co}^{d,k}(A)| \le |P+Q| = O_{k,d,\epsilon}(|A|)$。我们可以假设 $\delta < t^{-1}$，否则由于 $|\mathrm{co}^{k,d}(A) \setminus A| \le |\mathrm{co}^{d,k}(A)| = O_{k,d}(|A|) = O_{k,d}(\delta|A|)$，结论已经成立。

由命题 3.8，我们得到一个分离提升 $B = f_{P,\ Q}(A) \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^k$，它与 A Freiman 同构，因此 $|B| = |A|$ 和 $|B+B| = |A+A|$。我们

注意到 $|\widehat{\mathrm{co}}^{d,\,k}(B)| \geq |\mathrm{co}^{d,\,k}(A)|$，且 B 的厚度为 $h(B) = \Omega_{k,\,d,\,\epsilon,\,\gamma}(n)$，这是由 P 的充满性所致。由引理 3.16，存在 $B' \subseteq \mathbb{Z}^{d+k}$，使得 $h(B') = h(B)$，

$$\#(B'+B')/\#B' \leq (1+n^{-1})|B+B|/|B| \text{ and}$$

$$|\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(B)|/|B| \leq (1+n^{-1})\#\widehat{\mathrm{co}}(B')/\#B'.$$

那么 $\#(B'+B')/\#B' \leq (2^{k+d}+O_{k,d}(\delta))\#B'$，并且由于 $h(B') = \Omega_{k,d,\epsilon,\gamma(n),\delta} < t^{-1}$ 且 t 很大，定理 3.10 给出 $\#(\widehat{\mathrm{co}}(B') \setminus B') \leq O_{k,d}(\gamma+\delta)\#B'$。最后，$|\mathrm{co}^{k,d}(A) \setminus A|/|A| \leq |\widehat{\mathrm{co}}^{d,k}(B) \setminus B|/|B| \leq \#(\widehat{\mathrm{co}}(B') \setminus B')/\#B' + O_{k,d,\epsilon}(n^{-1}) \leq O_{k,d}(\gamma+\delta)$。□

9. 精确结果 II：锥情形

还需证明我们的精确结果适用于离散锥在渐近意义下达到最优的情形。

定理 9.1. 假设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| \leq (2^{k+d}+\ell)|A|$，其中 $\ell = 2^{k+d}(2-\epsilon)$，其中 $\epsilon > 0$，且 $|\mathrm{gap}^{k\,d-1}_{O_{k\,d\,\epsilon},,,(1)}(A)| \geq \Omega_{k,d,\epsilon}(|A|)$。那么 $|\mathrm{gap}^{k\,d}_{\ell',}(A)| \leq O_{k,d,\epsilon}(|A|)$，且 $\ell' \leq (1+o_{\epsilon\to 0}(1))\frac{k+d+1}{2\epsilon}$。

9.1. 预备引理。我们首先证明两个简单的解析引理和一个压缩引理。

引理 9.2. 设 c、$N > 0$ 和 $f\colon \{0,1,\dots,L\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，其中对所有 $0 \leq i < L$ 都有 $f(i+1)-f(i) \geq -c$。设 $I = \{i\colon f(i+1) - f(i) \geq N \text{ 且 } i \leq L - N/c\}$。则 $\sum_{i=0}^{L} f(i) \geq \frac{N}{4c}\sum_{i\in I}(f(i+1) - f(i))$。

证明。对每个 $i \in I$，我们通过以下方式定义 $g_i\colon \{0,1,\dots,L\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$g_i(j) := \begin{cases} 0 & \text{if } j \leq i \text{ or } j - i \geq \left\lceil \frac{f(i+1)-f(i)}{c} \right\rceil \\ f(i+1) - f(i) - (j-i)c & \text{otherwise.} \end{cases}$$

记 $g := \sum_{i\in I} g_i$。则 $g(i+1) - g(i) \leq f(i+1) - f(i)$ 成立，除非 $g(i+1) = 0$；在后一种情况下，$f(i+1) \geq g(i+1)$ 显然成立，因此由归纳法，对所有 $j = 0$、……、L，都有 $f(j) \geq g(j)$。对于每个 $i \in I$，我们有 $g_i(j) \geq {}^{f(i+1)-f(i)}2$（当 $1 \leq j - i \leq N/2c$ 时），所以 $\sum_{j=0}^{L} f(j) \geq \sum_{j=0}^{L} g(j) \geq \frac{N}{4c}\sum_{i\in I}(f(i+1) - f(i))$。□

引理 9.3. 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $x \leq y$，则

$$(x^{1/\ell} + y^{1/\ell})^\ell \geq 2^\ell x + 2^{\ell-1}(y-x) - O_\ell(y-x)^2/x.$$

证明. 设 $\delta = \frac{y-x}{x}$，$\theta = (1+\delta)^{1/\ell}$，并考虑

$$\begin{aligned}(1+\theta)^\ell - 2^\ell &= (1+\theta-2)((1+\theta)^{\ell-1} + 2(1+\theta)^{\ell-2} + \cdots + 2^{\ell-1}) \\ &\geq (\theta-1)\ell 2^{\ell-1} \geq 2^{\ell-1}\delta - O_\ell(\delta)^2.\end{aligned}$$

由于 $(x^{1/\ell} + y^{1/\ell})^\ell = x(1 + (1+\delta)^{1/\ell})^\ell$，引理得证。 □

引理 9.4. 在设定 7.5 下，按照 X 将 $d' = d$ 排序为 $\{x_1, \dots, x_{\#X}\}$，其中每个 $|A_{x_i}| \geq |A_{x_{i+1}}|$，考虑由 $A' = \bigcup_{i=1}^{\#X} A'_i \times \{i\}$ 定义的 $A' \subseteq \mathbb{R}^{k+d} \times \mathbb{Z}$，其中每个 $A'_i = [0, |A_{x_i}|^{1/(k+d)}]^{k+d}$。

那么 $|A| = |A'|$、$|A'+A'| \leq |A+A| + \eta|A|$ 和 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')| \leq |\mathrm{co}^{k,\ d+1}(A)| + \eta|A|$。

证明。显然 $|A| = |A'|$。接下来，类似于设定 7.5 中的记号 A_x、A^s 等，我们写出

$$A'^s := \{i \in \mathbb{Z} : |A'_i| \geq s\} = \{i : x_i \in A^s\} \text{ and}$$
$$(A'+A')^s := \{i \in \mathbb{Z} : |(A'+A') \cap \mathbb{R}^{k+d} \times \{i\}| \geq s\}.$$

对于任意 s 记 $T_s = \{(t,t') : (t^{1/(k+d)} + t'^{1/(k+d)})^{k+d} = s\}$。令 $\theta = \eta(\#X)^{-2}|A|$。

根据命题 2.3 和 A' 的定义，我们有

$$(A+A)^s \supset \bigcup_{(t,t') \in T_{s+\theta}} (A^t + A^{t'}) \text{ and } (A'+A')^s = \bigcup_{t,t' \in T_s} (A'^t + A'^{t'}), \text{ so}$$
$$\#(A+A)^s \geq \max_{(t,t') \in T_{s+\theta}} (\#A^t + \#A^{t'} - 1) \text{ and}$$
$$\#(A'+A')^s = \max_{t,t' \in T_s} (\#A'^t + \#A'^{t'} - 1).$$

由此可得$\#(A+A)^{s-\theta} \geq \#(A'+A')^s$。对 s 积分可得 $|A'+A'| \leq |A+A| + \eta|A|$。

类似的论证可得 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')| \leq |\mathrm{co}^{k,\ d+1}(A)| + \eta|A|$。 □

9.2. 锥形情形的证明。现在我们证明本节的主要结果。

定理 9.1 的证明。假设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| \leq (2^{k+d} + \ell)|A|$，其中 $\ell = 2^{k+d}(2-\epsilon)$，且 $\epsilon > 0$，并且 $\|$广义算术级数$O_{k\ d\ \epsilon}^{k\ d-1}(1)(A)| \geq \Omega_{k,\ d,\ \epsilon}(|A|)$。根据设定 7.5，我们需要证明 $\#X \leq (1 + o_{\epsilon \to 0}(1))^{\frac{k+d+1}{2\epsilon}}$。

我们考虑引理 9.4 中定义的 $A' \subseteq \mathbb{R}^{k+d} \times \mathbb{Z}$，其由 $A' = \bigcup_{i=1}^{\#X} A'_i \times \{i\}$ 定义，且对每个 $A'_i = [0, h(i)]^{k+d}$，其中 $h(i) = |A_{x_i}|^{1/(k+d)}$，满足 $|A| = |A'|$、$|A'+A'| \leq |A+A| + \eta|A|$ 和 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')| \leq |\mathrm{co}^{k,\ d+1}(A)| + \eta|A|$。注意，$\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')_i = [0, h^*(i)]^{k+d}$，其中 h^* 是h的上凹包络，即满足 $h^* \geq h$ 的最小凹函数。我们引入满足以下条件的参数

$$(k+d)^{-1} \gg \zeta \gg \rho \gg \gamma \gg \epsilon \gg \eta > 0 \quad \text{and} \quad t := \lfloor (1-\rho)\#X \rfloor.$$

我们可以假设 $\#X \geq \epsilon^{-1} \geq \Omega_{k,d,\gamma}(1)$，否则结论已得，因此由定理 8.2（以 $(d+1, 1/2)$ 替代 (d, ϵ)），可得 $|\mathrm{co}^{k,d+1}(A) \setminus A|/|A| \leq O_{k,d}(\gamma)$，于是 $|\mathrm{co}^{k+d,1}(A') \setminus A'|/|A'| \leq O_{k,d}(\gamma)$。

我们将推出关于 $|A'_0|$ 和 $|A'_t|$的以下界：

$$|A'_0| \leq 2(k+d+1)\epsilon|A'| \quad \text{and} \quad |A'_t| \geq \frac{1}{2(k+d)}\rho^{k+d}|A'_0|. \tag{18}$$

$|A'_0| = h(0)^{k+d} = h^*(0)^{k+d}$ 的估计由 $h^*(i) \geq h^*(0)(1-i/\#X)$推出（这是由 h^* 的凹性得到的），从而得到 $2|A'| > |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')| = \sum_i h^*(i)^{k+d} \geq |A'_0|\#X/($ $k+d+1)$。现在反设关于 $|A'_t|$ 的界不成立。那么 $\sum_{i=t}^{\#X} |A'_i| \leq \#_{2\ k+d}$ ( ) $\rho^{k+d}|A'_0|$，而由 h^* 的凹性可得 $\sum_{i=t}^{\#X} |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_i| = \sum_{i=t}^{\#X} h^*(i)^{k+d} \geq \#X \int_{s=0}^{\rho} (sh^*(0))^{k+d} = \#\frac{X}{k+d+1}\rho^{k+d+1}|A'_0|$。然而，由于 $|A'_0|\#X \geq |A|$ 且 $\gamma \ll \rho$，这与$|\mathrm{co}^{k+d,1}(A') \setminus A'|/|A'| \leq O_{k,d}(\gamma)$矛盾，因此（18）成立。

接下来注意，对于任意 $0 \leq i \leq t$，由凹性可得 $h^*(i) \geq (1-i/t)h^*(0) + (i/t)h^*(t)$，因此 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')_i| \geq (1-i/t)^{k+d}|A'_0| + (i/t)^{k+d}|A'_t|$。于是

$$|\mathrm{co}^{k+d,1}(A')| \geq \sum_{i=0}^{t} |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_i| \geq (|A'_0| + |A'_t|) \sum_{i=0}^{t} (i/t)^{k+d} \tag{19}$$

$$\geq (|A'_0| + |A'_t|)t/(k+d+1). \tag{20}$$

下面对 $|A'_0| + |A'_t|$ 的估计将完成证明。事实上，将其与 (19) 及 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')| \leq (1 + O_{k,\ d}(\gamma))|A'|$ 结合，即可得到所需的界 $\#X \leq (1 + o_{\epsilon\to 0}(1))\frac{k+d+1}{2\epsilon}$。

断言 9.5。 $|A'_0| + |A'_t| \geq (1 - o_{\epsilon\to 0}(1))2\epsilon|A'|$。

剩下的工作是证明该断言。我们首先证明，$|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')_i| = h^*(i)^{k+d}$ 不会下降得太快，即

$$|\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_i| - |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_{i+1}| \leq |A'_0|/(\rho^2\#X) \text{ for } 0 \leq i \leq t-1. \tag{21}$$

为此，考虑满足所需不等式的最大 $t' \geq 0$，其中 $0 \leq i \leq t'-1$。反设 $t' < t$。由于对所有 i，$h^*(i) \leq h^*(0) = h(0) = |A'_0|^{1/(k+d)}$，我们有

$$|A'_0|/(\rho^2\#X) < h^*(t')^{k+d} - h^*(t'+1)^{k+d} \leq (k+d)(h^*(t') - h^*(t'+1))h(0)^{k+d-1},$$

由凹性可知，$h^*(i) - h^*(i+1)$ 随 i 增大，因此

$$h(0) = h^*(0) \geq \sum_{i>t} (h^*(i) - h^*(i+1)) \geq \frac{(\#X - t' - 1)h(0)}{(k+d)\rho^2\#X}.$$

我们推出 $\#X - t' - 1 \leq (k+d)\rho^2\#X$，但这与 $t' < t = \lfloor (1-\rho)\#X \rfloor - 1$ 矛盾，因此 (21) 成立。

我们将利用关于 $|\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')_i|$ 的变化率估计来控制 $|A'_i|$ 的变化率。我们考虑 $f(i) := |\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A')_i| - |A'_i|$，它满足$\sum_i f(i) \leq |\mathrm{co}^{k+d,\ 1}(A') \setminus A'| \leq O_{k,\ d}(\gamma)|A'|$ 以及

$$f(i+1) - f(i) \geq |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_{i+1}| - |\mathrm{co}^{k+d,1}(A')_i| \geq -c,$$

其中 $c := |A'_0|/(\rho^2\#X)$。令 $I = \{i \leq t : |A'_i| - |A'_{i+1}| \geq \zeta|A'_0|\}$ 并注意到 $f(i+1) - f(i) \geq N := \zeta|A'_0| - c$ 对所有 $i \in I$均成立。应用引理 9.2，该引理在 $t \leq (1-\rho)\#X \leq L - N/c = \#X + 1 - \zeta\rho^2\#X$ 时有效，我们得到

$\sum_i f(i) \geq \frac{N}{4c}\sum_{i\in I}(f(i+1)-f(i))$，因此 $\gamma \ll \rho$，

$$\sum_{i\in I}(f(i+1)-f(i)) \leq O_{k,d}(\gamma c/N)|A'| < \sqrt{\gamma}|A'_0|. \tag{22}$$

接下来，我们将估计 $|A'+A'|$，使用 $A'+A' \supset \bigcup_{i=0}^{\#X}(A'_i+A'_i)\cup(A'_i+A'_{i+1})$。我们使用界 $|A'_i+A'_i| \geq 2^{k+d}|A'_i|$和 $|A'_i+A'_{i+1}| \geq 2^{k+d}|A'_{i+1}|$，但对于满足 $i \notin I$ 的 $i<t$，我们使用引理 9.3，它给出了更强的界

$$|A'_i+A'_{i+1}| \geq 2^{k+d}|A'_{i+1}|+2^{k+d-1}(|A'_i|-|A'_{i+1}|)-O_{k,d}(|A'_i|-|A'_{i+1}|)^2/|A'_{i+1}|.$$

结合这些界，我们得到

$$|A'+A'| \geq 2^{k+d+1}|A'|-2^{k+d}|A'_0|+\sum_{i<t:i\notin I}\left(2^{k+d-1}(|A'_i|-|A'_{i+1}|)-O_{k,d}(|A'_i|-|A'_{i+1}|)^2/|A'_{i+1}|\right). \tag{23}$$

由 (18)，$|A'_i| \geq |A'_t| \geq 2^{-(k+d)}\rho^{k+d}|A'_0|$，对于 $i \notin I$有 $|A'_i|-|A'_{i+1}| < \zeta|A'_0|$，且$\rho \ll \zeta$，因此我们有

$$\sum_{i\notin I} O_{k,d}(|A'_i|-|A'_{i+1}|)^2/|A'_{i+1}|) \leq O_{k,d}(\zeta\rho^{-k-d})\sum(|A'_i|-|A'_{i+1}|) \leq \sqrt{\zeta}|A'_0|.$$

此外，由 (22) 可得 $\sum_{i<t:\ i\notin I}(|A'_i|-|A'_{i+1}|) \geq |A'_0|-|A'_t|-\sqrt{\gamma}|A'_0|$，因此由 (23) 可得，

$$|A'+A'| \geq 2^{k+d+1}|A'|-2^{k+d}|A'_0|+2^{k+d-1}(|A'_0|-|A'_t|-\sqrt{\gamma}|A'_0|)-\sqrt{\zeta}|A'_0|.$$

将此与 $|A'+A'| \leq |A+A|+\eta|A| \leq 2^{k+d}(2-\epsilon+\eta)|A'|$ 结合，并利用由 (18) 和 $\eta \ll \epsilon \ll \zeta$ 得到的$|A'_0| = O_{k,\ d}(\epsilon|A|)$，我们推得 $|A'_0|+|A'_t| \geq 2(\epsilon-\eta)|A'|-2\sqrt{\zeta}|A'_0| \geq (1-\zeta^{1/3})2\epsilon|A'|$。

由此完成了该断言的证明，也就完成了定理的证明。 □

10. Beyond $3k-4$

本节将证明定理 1.8，该定理对满足 $A\subset\mathbb{R}$ with $|A+A|<4|A|$ 的集合给出了精确的结构刻画。

10.1. 预备知识。一个关键要素将是 Moskvin、Freiman 和 Yudin [MFY74] 关于圆上的 Cauchy-Davenport 不等式的以下稳定性结果（另见 [Bil98]）。

定理 10.1（Moskvin、Freiman、Yudin，1973）。存在一个普适常数 $c=c_{10.1}>0$，使得如果 $A\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with $|A|\leq c$ and $|A+A|\leq 3|A|$，那么存在一个区间 J 和 $n\in\mathbb{N}$，使得 $nA\subset J$ and $|J\setminus nA| \leq |A+A|-2|A|$。

我们指出，陶哲轩 [Tao18]证明了紧致连通阿贝尔群中的一般稳定性结果。然而，这一结果不是定量的，因此人们非常关注在特定情形下改进常数（例如 [GR06, CGSG19, CDR19, LS23]）。特别是，改进 c 定理 10.1中的常数将改进定理 1.8中的常数，并且这与 Bilu [Bil98]的一个猜想密切相关。

我们在证明定理 1.8 时的首要任务，是证明存在满足陈述中条件的 t，也就是说，如果 $|\mathrm{co}(A)|/|A|$ 足够大且 $|A+A|<4|A|$，那么我们就能通过一个区间的等差数列高效地覆盖 A。我们将从上述定理迅速推导出这一结论。

命题 10.2。存在一个普适常数 $C=C_{10.2}>0$，使得若 $A\subset\mathbb{R}$ 满足 $|\mathrm{co}(A)|\geq C|A|$，且 $|A+A|=(3+\theta)|A|$ 满足 $\theta<1$，则存在一个等差数列 X 和一个区间 I，满足 $A\subset X+I$ 且 $|(X+I\cap\mathrm{co}(A))\setminus A|\leq\theta|A|$。

证明。我们对 A 进行平移和缩放，使得 $\mathrm{co}(A)=[0,1]$ 且 $|A|<c_{10.1}$。令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为典范商映射。对任意 $a\in A$，有 $|f^{-1}(a)\cap(A+A)|\geq 2$，因为 $\{0,1\}+A\subset A+A$。由此推出 $|f(A)+f(A)|=|f(A+A)|\leq|A+A|-|A|=(2+\theta)|f(A)|$，因此根据定理 10.1，我们找到一个区间 J 和 $n\in\mathbb{N}$，使得 $nf(A)\subset J$ 且 $|J\setminus nf(A)|\leq\theta|A|$。将其拉回到 $\mathbb{R}$，得到所需形式的 $A\subset X+I$。□

我们注意到以下有用的推论。

推论 10.3. 设 $A\subset\mathbb{R}$ with $|\mathrm{co}(A)|\geq C_{10.2}|A|$. 若 $|\mathrm{co}^{1,1}(A)|>2|A|$，则 $|A+A|\geq 4$。

接下来，我们陈述本节的主引理，并将在下一小节中证明。

引理 10.4. 设 $A\subset\mathbb{R}$ with $|\mathrm{co}(A)|>C_{10.2}|A|$. 假设 $|A+A|=(4-2/t+\delta)|A|$，其中 t 是使得 $|\mathrm{co}_t(A)|<2|A|$ 成立的最小值，且 $\delta<\Delta_t:=(2t)^{-2}$. 则 $|\mathrm{co}^{1,1}(A)\setminus A|\leq 150\delta|A|$。

本节的主定理将由推论 10.3 与引理 10.4 之间的插值推出。

我们通过记录一些将在主引理证明中使用的“$3k-4$ 型”不等式，结束预备工作。

引理 10.5. 设 X，$Y\subset\mathbb{R}$ 满足 $|\mathrm{co}(Y)|\geq|\mathrm{co}(X)|$，则有以下下界：

$$|X+Y|\geq\begin{cases}2|X|\\ |X|+|\mathrm{co}(Y)|+\min\{0,|X|-|\mathrm{co}(Y)\setminus Y|\}\\ |\mathrm{co}(X)|+|Y|+\min\{0,|X|-|\mathrm{co}(Y)\setminus Y|\}\end{cases}$$

证明。对于第一个界，只需注意到 $(\min Y)+X$ 与 $(\max Y)+X$ 不相交。对于第二个界，考虑典范商映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/|\mathrm{co}(Y)|$。根据 Cauchy-Davenport 不等式，有

$$|f(X+Y)|\geq\min\{|\mathrm{co}(Y)|,|f(X)|+|f(Y)|\}=\min\{|\mathrm{co}(Y)|,|X|+|Y|\}.$$

因此，我们得到：

$$\begin{aligned}|X+Y|&\geq|(X+Y)\cap f^{-1}(X)|+|(X+Y)\setminus f^{-1}(X)|\\&\geq|(X+\{\min Y,\max Y\})\cap f^{-1}(X)|+|f(X+Y)\setminus X|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq 2|X| + \min\{|\operatorname{co}(Y)|, |X| + |Y|\} - |X| \\ &= |X| + |\operatorname{co}(Y)| + \min\{0, |X| - |\operatorname{co}(Y) \setminus Y|\}.\end{aligned}$$

对于第三个界，注意我们可以进行平移，使得 $\min X = \min Y$。将 Y 划分为 $Y_1 := Y \cap \operatorname{co}(X)$ 和 $Y_2 = Y \setminus \operatorname{co}(X)$。注意，$Y_2 + \max X$ 与 $Y_1 + X$ 不相交。因此，我们得到（将前一个界应用于集合 Y_1 和 X），

$$\begin{aligned}|X + Y| &\geq |(\max X) + Y_2| + |X + Y_1| \\ &\geq |Y_2| + |Y_1| + \min\{|\operatorname{co}(X)|, |Y_1| + |X|\} \\ &\geq |Y| + |\operatorname{co}(X)| + \min\{0, |X| - |\operatorname{co}(Y) \setminus Y|\}\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $|Y_1| = |\operatorname{co}(X)| - |\operatorname{co}(X) \setminus Y_1| \geq |\operatorname{co}(X)| - |\operatorname{co}(Y) \setminus Y|$. □

10.2. 主引理的证明。本节余下部分用于证明主引理，它蕴含定理 1.8。

引理 10.4 的证明。令 $A \subset \mathbb{R}$ with $|\operatorname{co}(A)| > C_{10.2}|A|$。假设 $|A + A| = (4 - 2/t + \delta)|A|$，其中 $t \geq 2$ 取为使 $|\operatorname{co}_t(A)| < 2|A|$ 成立的最小值，其中 $\delta < \Delta_t := (2t)^{-2}$。由命题 10.2 可知，对某个等差数列 X 和区间 I，有 $A \subset X + I$，且 $|(X + I \cap \operatorname{co}(A)) \setminus A| \leq |A + A| - 3|A| = (1 - 2/t + \delta)|A|$。

设 $X = \{x_1, \dots, x_{t'}\}$ 和 $A_i := A \cap (x_i + I)$。我们可以假设 A_1 和 $A_{t'}$ 非空。下文将证明 $t' = t$，但目前我们还不知道这一点，因为某些 A_i 可能为空。

接下来，我们将问题平移到恰当的背景中：二维。仿照命题 3.8，令

$$B := \bigcup_{i=1}^{t'} B_i \subset [t'] \times I, \text{ where each } B_i := \{i\} \times (A_i' - x_i).$$

注意到 $|B| = |A|$ 和 $|B + B| = |A + A|$，利用 $|x_{i+1} - x_i| \geq 2|I|$，这由 $|\operatorname{co}(A)| > 4|A|$ 推出。此外，$|\operatorname{co}^{1,1}(A)| \leq |\operatorname{co}^{1,1}(B)|$，因为对于线性映射 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，有 $A \subseteq \phi(\operatorname{co}^{1,1}(B))$，该映射由 $\phi(i, y) = x_1 + (i - 1)(x_2 - x_1) + y$ 定义。

我们将通过以下压缩集 B' 的结构来研究 B。记 $\{x \in X : x + I \cap A \neq \emptyset\} = \{y_1, \dots, y_t\}$，以及 $A_i' := A \cap (y_i + I)$，并按 $|A_1'| \geq \cdots \geq |A_t'|$ 排序。令

$$B' := \bigcup_{i=1}^{t} B_i', \text{ where each } B_i' := \{i\} \times [0, |A_i'|].$$

断言 10.6. $|B'| = |B| = |A|$ 和 $|B' + B'| \leq |B + B| = |A + A|$。

命题证明。我们考虑 $|B| = \int_s \#B^s$，其中 $B^s := \{i : |B_i| \geq s\}$，对于 $|B + B|$ 和 $|B' + B'|$ 也有类似的表达式。我们有 $(B + B)^s \supset \bigcup_{x+y=s} (B^x + B^y)$，因此 $\#(B + B)^s \geq \max_{x+y=s} \#(B^x + B^y)$。每个 B'^s 都是一个

$\mathbb{N}$的初始段，具有 $\#B'^s = \#B^s$，因此 $\#(B'+B')^s = \max^{x+y=s} \#(B'^x + B'^y)$ $\leq \#(B+B)^s$。对 s 积分可得 $|B'+B'| \leq |B+B|$，断言得证。□

接下来我们考虑 $\mathrm{co}^{1,1}(B') = C \cap (\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$，其中 $C = \mathrm{co}(B')$ 是 B' in $\mathbb{R}^2$ 的连续凸包。我们将 C 的顶点记为 $V(C) = \{(1,0),(t,0),(i_1,|A_{i_1}|)\ldots,(i_s,|A_{i_s}|)\}$，其中 $s\in\mathbb{N}$。

我们证明了以下关于用 $\mathrm{co}^{1,1}(B')$ 逼近 B' 的稳定性结果，它可视为[vHST23b 定理 1.1]中一维结果的离散版本。

命题 10.7. $|\mathrm{co}^{1,1}(B')\setminus B'| \leq {}_2\,\frac{t}{(t-1)}\delta|B'|$ (因此 $\delta\geq 0$)。

命题证明。我们首先注意到以下两个包含关系（记$B'_{t+1} := \emptyset$）：

$$T'_1 := T_1(B') := \bigcup_{i=1}^{t}(B'_i + B'_i)\cup(B'_i + B'_{i+1}) \subset B'+B', \text{ and}$$

$$T'_2 := T_2(B') := \bigcup_{i=1}^{t}(B'_1 + B'_i)\cup(B'_i + B'_t) \subset B'+B'.$$

由于 $|T'_1| = 4|B'| - (|B'_1|+|B'_t|)$ 和 $|T'_2| = 2|B'| + (t-1)(|B'_1|+|B'_t|)$，我们有

(24)
$$(4-2/t+\delta)|B'| \geq |B'+B'| \geq \frac{t-1}{t}|T'_1| + \frac{1}{t}|T'_2| = (4-2/t)|B'|, \text{ so } \delta\geq 0.$$

现在我们考虑第三个包含关系，它强调了 $\mathrm{co}^{1,1}(B')$ 的顶点：

$$T'_3 := \bigcup_{j=1}^{s-1}\bigcup_{k=0}^{i_{j+1}-i_j}(B'_{i_j}+B'_{i_j+k})\cup(B'_{i_{j+1}}+B'_{i_j+k}) \subset B'+B'.$$

比较 T'_3 和 T'_1 时，我们发现

(25)
$$|T'_3| - |T'_1| = \sum_{j=1}^{s-1}\left((i_{j+1}-i_j-1)\left(|B'_{i_j}|+|B'_{i_{j+1}}|\right) - 2\sum_{k=1}^{i_{j+1}-i_j-1}|B'_{i_j+k}|\right)$$

(26)
$$= 2|\mathrm{co}^{1,1}(B')\setminus B'|,$$

其中第二个等式成立是因为

$$|\mathrm{co}^{1,1}(B')\setminus B'| = \sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{i_{j+1}-i_j-1}\left(|\mathrm{co}^{1,1}(B')_{i_j+k}| - |B'_{i_j+k}|\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{i_{j+1}-i_j-1}\left(\left(\frac{k}{i_{j+1}-i_j}|B'_{i_{j+1}}| + \left(1-\frac{k}{i_{j+1}-i_j}\right)|B'_{i_j}|\right) - |B'_{i_j+k}|\right).$$

由（24）和（25）可推出以下不等式，从而证明该断言

$$(4-2/t+\delta)|B'| \geq |B'+B'| \geq \frac{t-1}{t}|T_3'| + \frac{1}{t}|T_2'|$$
$$= (4-2/t)|B'| + \frac{2(t-1)}{t}|\operatorname{co}(B') \setminus B'|. \qquad \square$$

对 B' 的 $\operatorname{co}^{1,1}(B')$ 逼近蕴含以下大小估计。

命题 10.8. $|B_1'|+|B_t'| \geq (\frac{2}{t}-\Delta_t)|B'|$ 且 $|B_i'| \geq \left(\frac{2}{t}\ \underline{(t-1)}\ -\Delta_t\right)|B'|$ 对所有$2 \leq i \leq t-1$均成立。

命题证明。由 $|T_1'| = 4|B'| - (|B_1'|+|B_t'|) = |T_1'| \leq |B'+B'| \leq (4-2/t+\Delta_t)|B'|$，可得第一个界。对于第二个界，只需证明 $h(i) := |\operatorname{co}^{1,1}(B_i')| \geq \frac{2}{t}\ \overline{(t-1)}\ |B'|$ 对 $2 \leq i \leq t-1$成立。可以假设 $t \geq 3$（否则命题显然成立）。由于 h 是凹函数，只需证明 $i=2$和 $i=t-1$的情形。

反设 $h(2) < \frac{2}{t}\ (t-1)|B'|$。由凹性可知，$h(i) - h(i+1)$ 关于 i 单调不减，因此对 $i \geq 2$，我们得到

$$h(i) \leq h(1) - (i-1)(h(1)-h(2)) < \frac{2(i-1)}{t(t-1)}|B'| - (i-2)h(1).$$

然而，对 $i \geq 2$ 求和可得 $|\operatorname{co}^{1,1}(B')| - h(1) < |B'| - h(1)\binom{t-2}{2}$，因此 $|\operatorname{co}^{1,1}(B')| < |B'|$，这就产生了矛盾。类似地，若 $h(t-1) < \frac{t}{t-1()}|B'|$，则对 $i \geq 1$，我们得到

$$h(t-i) \leq h(t) + (t-i)(h(t-1)-h(t)) < \frac{2(t-i)}{t(t-1)}|B'| - (t-i-1)h(t),$$

因此 $|\operatorname{co}^{1,1}(B')| - h(t) < |B'| - h(t)\binom{t-2}{2}$，再次产生矛盾。 $\square$

现在我们把注意力转回 B，而不是 B'，便可推出所有 B_i 都非空。仿照命题 10.7，我们写作

$$T_1 := T_1(B) := \bigcup_{i=1}^{t'} (B_i+B_i) \cup (B_i+B_{i+1}) \subset B+B, \text{ and}$$
$$T_2 := T_2(B) := \bigcup_{i=1}^{t'} (B_1+B_i) \cup (B_i+B_t) \subset B+B.$$

命题 10.9。我们有 $t=t'$，即所有 $B_i \neq \emptyset$。

命题证明。反设 $t' > t$。令 $\{p_1 < \cdots < p_t\} = P := \{i : B_i \neq \emptyset\} = \pi_1(B)$ 为 B 在第一坐标上的投影。由于 $\#P = t$ 且 $\#\operatorname{co}(P) = t' > t$，我们有 $\#(P+P) \geq 2t$。由于 $\#\pi_1(T_1) = 2t-1$，我们可以找到 (i,j)，使得 $T_1 \cap (B_{p_i}+B_{p_j}) = \emptyset$。由于 $|T_1| \geq 4|B| - (|B_1|+|B_{t'}|)$ 且 $|T_2| \geq 2|B'| + (t-1)(|B_1|+|B_{t'}|)$，类似于 (24)，我们有

$$(4-2/t+\Delta_t)|B| \geq \frac{t-1}{t}(|T_1| + |B_{p_i}+B_{p_j}|) + \frac{1}{t}|T_2|$$

$$\geq (4-2/t)|B| + \frac{t-1}{t}\left(\frac{2}{t(t-1)} - \Delta_t\right)|B|,$$

由命题 10.8 得出。这与 $\Delta_t = (2t)^{-2}$ 矛盾，因此确实有 $t' = t$。 □

现在我们已经证明 $\pi_1(B)$ 是一个区间。接下来，我们将把它与以下集合 D 进行比较，其中每条 B_i 都替换为包含它的区间 $\mathrm{co}(B_i)$。令

$$D := \bigcup_{i=1}^{t} D_i, \text{ where each } D_i := \mathrm{co}(B_i).$$

断言 10.10。 $|D \setminus B| \leq 6\delta|B|$。

命题证明。我们先证明

$$\sum_{i\in I} |D_i \setminus B_i| \leq \frac{t}{t-1}\delta|B|, \text{ where } I = \left\{i : |B_i| \geq \frac{t}{t-1}\delta|B|\right\}. \tag{27}$$

对于任意 $i \in I$，我们断言 $|B_i + B_i| < 3|B_i|$。事实上，否则 $|T_1| \geq |B_i| + 4|B| - (|B_1| + |B_{t'}|)$，因此仿照 (24) 可得

$$(4 - 2/t + \delta)|B| \geq \frac{t-1}{t}|T_1| + \frac{1}{t}|T_2| \geq (4-2/t)|B| + \frac{t-1}{t}|B_i|,$$

根据 I 的定义，这就产生了矛盾。由于 $|B_i + B_i| < 3|B_i|$，由 Freiman 的 $3k-4$ 定理可得 $|B_i + B_i| \geq 2|B_i| + |\mathrm{co}(B_i) \setminus B_i|$，因此 $|T_1| \geq 4|B| - (|B_1| + |B_{t'}|) + \sum_{i\in I} |D_i \setminus B_i|$。重复前面的计算即可得到 (27)。

由命题 10.8 和 $\Delta_t = (2t)^{-2}$ 可得 $|[t] \setminus I| \leq 1$。设 $[t] \setminus I = \{x\}$。固定 $x' \in \{x-1, x+1\} \cap [t]$，并比较 $|D_x \setminus B_x|$ 与 $|D_{x'} \setminus B_{x'}|$。首先考虑 $|\mathrm{co}(B_x)| \geq |\mathrm{co}(B_{x'})|$ 的情形。于是由引理 10.5 可得 $|B_x + B_{x'}| \geq 2|B_{x'}|$，因此 $|T_1| \geq 4|B| - (|B_1| + |B_{t'}|) + (|B_{x'}| - |B_x|)$；又如式 (24) 所示，可得 $\frac{t}{t-1}(|B_{x'}| - |B_x|) \leq \delta|B|$。然而，由命题 10.8 和 $\delta \leq \Delta_t = (2t)^{-2}$，这意味着 $|B_x| \geq |B_{x'}| - \frac{t}{t-1}\delta|B| > \frac{t}{t-1}\delta|B|$，所以 $x \in I$，这就产生了矛盾。

由此我们推出 $|\mathrm{co}(B_{x'})| \geq |\mathrm{co}(B_x)|$，因此根据引理 10.5

$$\begin{aligned} |B_x + B_{x'}| &\geq |\mathrm{co}(B_x)| + |B_{x'}| + \min\{0, |B_x| - |\mathrm{co}(B_{x'}) \setminus B_{x'}|\} \\ &\geq |\mathrm{co}(B_x)| + |B_{x'}| - |\mathrm{co}(B_{x'}) \setminus B_{x'}|. \end{aligned}$$

现在 $|T_1| \geq 4|B| - (|B_1| + |B_{t'}|) + |\mathrm{co}(B_x) \setminus B_x| - |\mathrm{co}(B_{x'}) \setminus B_{x'}|$，因此如同在 (24) 中那样，我们有 $|\mathrm{co}(B_x) \setminus B_x| \leq |\mathrm{co}(B_{x'}) \setminus B_{x'}| + \frac{t}{t-1}\delta|B|$。由于 $|\mathrm{co}(B_{x'}) \setminus B_{x'}| \leq \frac{t}{t-1}\delta|B|$，根据 (27)，断言得证。□

接下来我们将比较和集 $B_i + B_j$ 与 $D_i + D_j$。

断言 10.11。对于任意 i，$j \in [t]$ 我们有 $|(D_i + D_j) \setminus (B_i + B_j)| \leq 2|D_i \setminus B_i|$，至多有一个 i 满足 $|D_i| < 6\delta|B|$ 的情况例外；对于该情况，$|(D_i + D_j) \setminus (B_i + B_j)| \leq |D_i \setminus B_i| + 6\delta|B|$。

命题证明。如果 $|\mathrm{co}(B_i)| \geq |\mathrm{co}(B_j)|$，则根据引理 10.5，断言成立；该引理给出

$$\begin{aligned}|B_i + B_j| &\geq |\mathrm{co}(B_j)| + |B_i| + \min\{0, |B_j| - |\mathrm{co}(B_i) \setminus B_i|\\ &\geq |\mathrm{co}(B_j)| + |\mathrm{co}(B_i)| - 2|\mathrm{co}(B_i) \setminus B_i|.\end{aligned}$$

若 $|\mathrm{co}(B_i)| \leq |\mathrm{co}(B_j)|$，则由引理 10.5 和断言 10.10 可得该断言成立，其中

$$\begin{aligned}|B_i + B_j| &\geq |\mathrm{co}(B_j)| + |B_i| + \min\{0, |B_i| - |\mathrm{co}(B_j) \setminus B_j|\}\\ &\geq |\mathrm{co}(B_j)| + |\mathrm{co}(B_i)| - |\mathrm{co}(B_i) \setminus B_i| + \min\{0, |B_i| - 6\delta|B|\}. \square\end{aligned}$$

接下来，我们将 $\mathrm{co}(D) = \mathrm{co}(B)$ 的顶点记为 $\{\min B_{i_1^-}, \ldots, \min B_{i_{s^-}^-}, \max B_{i_1^+}, \ldots, \min B_{i_{s^+}^+}\}$，其中这些最小值/最大值是 $\mathrm{co}(D)$ 下包络/上包络上的顶点。

与命题 10.7 类似，对于 $X \in \{B, D\}$，我们现在引入第三类参照集

$$T_3^{\pm}(X) := \bigcup_{j=1}^{s^{\pm}-1} \bigcup_{k=0}^{i_{j+1}^{\pm} - i_j^{\pm}} \left(X_{i_j^{\pm}} + X_{i_j^{\pm}+k}\right) \cup \left(X_{i_{j+1}^{\pm}} + X_{i_j^{\pm}+k}\right) \subset X + X.$$

对于 $D + D$，我们将组合参照集记为 $T(D) = T_1(D) \cup T_2(D) \cup T_3^-(D) \cup T_3^+(D)$（其中 $T_1(\cdot)$、$T_2(\cdot)$ 如上所述）。我们将用它通过广义凸包来近似 D，如下所示。

命题 10.12。我们有 $2^{(t-1)/t}|\mathrm{co}^{1,1}(D) \setminus D| \leq |T(D)| - (4 - 2/t)|D|$。

命题证明。考虑 $T'(D) := T_1(D) \cup T_3^-(D) \cup T_3^+(D)$。首先，我们证明每个 $T'(D)_i$ 都是一个区间。事实上，如果对某个 i不成立，那么 $T'(D)_i$ 的某个区间将包含区间 $T_1(D)_i$，而另一个区间将包含某个与 $T_1(D)$不相交的区间 $D_p + D_q$。然而，这意味着 $(B_p + B_q) \cap T_1(B) = \emptyset$，依照命题 10.9 的证明，这将导致矛盾。

现在我们将证明 $|T'(D) \setminus T_1(D)| = 2|\mathrm{co}^{1,1}(D) \setminus D|$。利用 $|T(D)| \geq \frac{t-1}{t}|T'(D)| + \frac{1}{t}|T_2(D)|$ 和 $\frac{t-1}{t}|T_1(D)| + \frac{1}{t}|T_2(D)| \geq (4 - 2/t)|D|$，即可轻易推出该断言。

我们记作 $|T'(D)_i| = F(i) + G(i)$，其中 $\min T'(D)_i = \min T_3^-(D)_i = (i, -F(i))$，且 $\max T'(D)_i = \max T_3^+(D)_i = (i, G(i))$。类似地，我们记作 $|D_i| = f(i) + g(i)$，其中 $\min D_i = (i, -f(i))$，且 $\max D_i = (i, g(i))$；还记作 $|T_1(D)_i| = f_1(i) + g_1(i)$，其中 $\min T_1(D)_i = (i, -f_1(i))$，且 $\max T_1(D)_i = (i, g_1(i))$。

如同命题 10.7 的证明中一样，我们有

$$\sum_i (G(i) - g_1(i)) = 2\sum_i (\mathrm{co}(g)(i) - g(i)),$$

其中 $\mathrm{co}(g)$ 是 g 的上凹包络（我们可以通过向所有函数添加某个正的常数，假设 g、G、g_1 均为非负，因为这不会

不会影响该恒等式）。为 f 添加类似的恒等式可得 $|T'(D)| - |T_1(D)| = 2|\mathrm{co}^{1,1}(D) \setminus D|$，这正是证明该断言所需的结果。□

关于 $|T(D) \setminus (B+B)|$ 的以下界将使命题 10.12 中的逼近变得有效。

命题10.13。我们有 $|T(D) \setminus (B+B)| \le 48\delta|B| + 16|D \setminus B|$。

证明。这成立，因为对于每个 $X \in \{T_1(D)\ T_2(D)\ T_3^+(D)\ T_3^-(D)\}$，我们有$|X \setminus (B+B)| \le 12\delta|B| + 4|D \setminus B|$。为此，请考虑以下不等式和断言 10.11。

$$|T_1(D) \setminus (B+B)| \le \sum_{i=1}^{t} |(D_i + D_i) \setminus (B_i + B_i)| + |(D_i + D_{i+1}) \setminus (B_i + B_{i+1})|,$$

$$|T_2(D) \setminus (B+B)| \le \sum_{i=1}^{t} |(D_1 + D_i) \setminus (B_1 + B_i)| + |(D_i + D_t) \setminus (B_i + B_t)|,$$

$$\begin{aligned} |T_3^{\pm}(D) \setminus T_3^{\pm}(B)| &\le \sum_{j=1}^{s^{\pm}-1} \sum_{k=0}^{i_{j+1}^{\pm}-i_j^{\pm}} \left| \left(D_{i_j^{\pm}} + D_{i_j^{\pm}+k}\right) \setminus \left(B_{i_j^{\pm}} + B_{i_j^{\pm}+k}\right) \right| \\ &\quad + \left| \left(D_{i_{j+1}^{\pm}} + D_{i_j^{\pm}+k}\right) \setminus \left(B_{i_{j+1}^{\pm}} + B_{i_j^{\pm}+k}\right) \right| \\ &\le \sum_{j=1}^{s^{\pm}-1} \sum_{k=0}^{i_{j+1}^{\pm}-i_j^{\pm}} 4 \left| D_{i_j^{\pm}+k} \setminus B_{i_j^{\pm}+k} \right|. \end{aligned}$$

将上述界相加即可证明该断言。 □

结合命题 10.12、命题10.13 和 $|\mathrm{co}^{1,1}(D) \setminus D| = |\mathrm{co}^{1,1}(B) \setminus B| - |D \setminus B|$，我们得到

$$\begin{aligned} |B+B| &\ge |T(D)| - |T(D) \setminus (B+B)| \\ &\ge (4 - 2/t)|B| + \frac{2(t-1)}{t} |\mathrm{co}^{1,1}(B) \setminus B| - 48\delta|B| - 15|D \setminus B|. \end{aligned}$$

回顾断言 10.10 中的 $|D \setminus B| \le 6\delta|B|$， $|A| = |B|$ 以及 $|A+A| = |B+B| \le (4 - 2/t + \delta)|B|$，我们得出 $|\mathrm{co}^{1,1}(A) \setminus A| \le |\mathrm{co}^{1,1}(B) \setminus B| \le 150\delta|A|$。□

定理 1.8 的证明。设 $A \subset \mathbb{R}$ 满足 $|A+A| < 4|A|$ 且 $|\mathrm{co}(A)| \ge C_{10.2}|A|$。由命题 10.2，我们可以定义 t 为最小值，使得 $|\mathrm{co}_t(A)| < 2|A|$。令 $\delta := \frac{|A+A|}{|A|} - (4 - 2/t)$。若 $\delta < (2t)^{-2}$，则由引理 10.4 得到$|\mathrm{co}^{1,1}(A) \setminus A| \le 150\delta|A|$。

还需比较 $\mathrm{co}^{1,1}(A)$ 与 $\mathrm{ap}_t(A)$。我们沿用前一个证明中的设置。我们的目标是证明 $(|\mathrm{co}^{1,1}(B)_1|, \ldots, |\mathrm{co}^{1,1}(B)_t|)$ 接近一个等差数列。令 $L(x) = (x-1)|\mathrm{co}^{1,1}(B)_t| + t - x|\mathrm{co}^{1,1}(B)_1|$ 为满足 $L(1) = |\mathrm{co}^{1,1}(B)_1|$ 且 $L(t) = |\mathrm{co}^{1,1}(B)_t|$ 的线性函数。令

$c = \max\{|\operatorname{co}^{1,1}(B)_i| - L(i) : i \in [t]\}$。那么 $|\operatorname{ap}_t(A) \setminus A| \le ct + |\operatorname{co}^{1,1}(B) \setminus B|$以及 $|\operatorname{co}^{1,1}(B)| \ge ct/2 + \sum_{i=1}^t L(i) = ct/2 + (|\operatorname{co}^{1,1}(B)_1| + |\operatorname{co}^{1,1}(B)_t|)t/2$。根据命题10.13的证明，并且同样利用 $D_1 = \operatorname{co}^{1,1}(B)_1$ 和 $D_t = \operatorname{co}^{1,1}(B)_t$，我们有

$$|B+B| + 36\delta|B| \ge |T_1(D)| = 4|D| - (|D_1| + |D_t|) \ge 4|D| - |\operatorname{co}^{1,1}(B)|2/t + c,$$

其中 $|\operatorname{co}^{1,1}(B)| \le |B| + 150\delta|B|$，因此 $(4 - 2/t + \delta)|B| + 36\delta|B| \ge 4|D| - (|B| + 150\delta|B|)2/t + c$，即 $c \le (37 + 300/t)\delta|B|$。我们推得 $|\operatorname{ap}_t(A) \setminus A| \le ct + |\operatorname{co}^{1,1}(B) \setminus B| \le (37t + 450)\delta|B| \le 500t\delta|B|$。□

11. 不同集合求和

尽管本文始终聚焦于形如 $A + A$ 的和集，但许多结果也适用于 $A + B$ 这类和集。关于不同集合求和的许多相应证明，与将集合自身相加的证明基本类似；不过，为了便于阅读，我们选择不将其纳入本文。本节将探讨其中一些结果，并概述证明中所需的额外步骤。我们聚焦于 $|A| = |B|$ 的情形；一般情形可参见猜想3.9。

本文的主要技术工具——定理 2.2 及其推论命题 2.3——可推广到不同集合的情形如下。

定理11.1。设 $k, d, \ell_i, n_i \in \mathbb{N}$ for $1 \le i \le d$, $\epsilon > 0$, and $A, B \subset \mathbb{R}^k$, with $|A| = |B|$。若 $|A + B| \le (2^{k+d+1} - \epsilon)|A|$，则 $A, B \subset X + P + Q$，其中

- $P = -P$是一个 $\ell_{d'}$-真集 $n_{d'}$-满的 d'-广义算术级数，且 $d' \le d$,
- $Q = -Q$ 是一个平行多面体,
- $\#X = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ n_{d'+1},\ \ldots\ldots n_d}(1)$
- $\#P \cdot |Q| = O_{k,\ d,\ \epsilon,\ \ell_{d'},\ \ldots\ldots \ell_d,\ n_{d'+1},\ \ldots\ldots n_d}(|A|)$,
- $\ell_{d'} \cdot X$对所有 $1 \le \ell \le \ell_{d'}$均为 $\ell_{d'}\ell \cdot (P+Q)\ell$-分离的，并且
- $\ell_{d'} \cdot P$是 $\ell_{d'}Q$-分离的。

对所有 $\eta > 0$，都可以选择 ℓ_i 和 n_i，使得记 $A_x := A \cap (x+P+Q)$ 以及 $B_x := B \cap (x + P + Q)$ 为 $x \in X$，则对所有 x、y、z、$w \in X$，我们有

- $|A_x + B_y| \ge \left(|A_x|^{1/(k+d')} + |B_y|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - \eta(\#X)^{-2}|A|$, and
- if $(A_x + B_y) \cap (A_z + B_w) \ne \emptyset$ then $x + y = z + w$.

证明略。令 $S = \operatorname{co}(A \cup B)$，我们得到 $S + S = (A + A) \cup (A + B) \cup (B + B)$。由 Pl¨unnecke 不等式 $|A + B| = O_{k,\ d}(|A|)$ 蕴含 $|A + A|$、$|B + B| = O_{k,\ d}(|A|)$，从而 $|S + S| \le O_{k,\ d}(|S|)$。因此，应用带有适当参数的定理 2.2，我们可以找到 X、P、Q 以及 $d' = O_{d,\ k}(1)$，如陈述中所示。沿用命题 2.3 的证明，我们可以在此处得到关于 $A_x + B_y$的相应结论，因此只需在 η 足够小时推出 $d' \le d$。

令（如常） $A_x := (x+P+Q) \cap A$ 和 $B_x := (x+P+Q) \cap B$，其中 $x \in X$，求出（不失一般性） $x_0 \in X$，使得 $|A_{x_0}| = \max\{|A_x|, |B_x| : x \in$

$X\}$。然后我们可以估计

$$\begin{aligned}|A+B| &\geq \bigcup_{x\in X} A_{x_0}+B_x = \sum_{x\in X}|A_{x_0}+B_x| \\ &\geq \sum_{x\in X}\left(|A_{x_0}|^{1/(k+d')}+|B_x|^{1/(k+d')}\right)^{k+d'} - \eta(\#X)^{-2}|A| \\ &\geq \sum_{x\in X} 2^{k+d'}|B_x| - \eta(\#X)^{-2}|A| \geq (2^{k+d'}-\eta)|A|.\end{aligned}$$

因此，选择足够小的 η，我们得到 $d'\leq d$。 □

这个证明更详细的版本收录于 [vHKT23]。

由于这一框架可推广到本文中的许多证明，因此无需太多概念上的困难即可完成平移，尽管计算细节可能复杂得多。作为示例，我们将证明定理 1.2 对较小 δ 一侧的相应结果。

定理 11.2. 设 $A, B\subset\mathbb{R}^k$ 体积相等，且满足 $|\frac{A+B}{2}|\leq(1+\delta)|A|$，其中 $\delta\leq 0.01$。那么存在子集 $A'\subset A$ 和 $B'\subset B$，使得 $|A\backslash A'|, |B\backslash B'|\leq\delta^2(1+O(\delta))|A|$，并且（经过平移） $|\mathrm{co}(A'\cup B')|\leq O_k(|A|)$。

定理 11.2 的证明。按照设定 7.5，类似地定义 $A_x, B_x, (A+B)_x, A^s, B^s, (A+B)^s$，令 $|A_0|=\max\{|A_x|:x\in X\}$ 且 $|B_0|=\max\{|B_x|:x\in X\}$，这可以通过分别平移 A 和 B 来实现。设 $s_A=|A_0|$和 $s_B=|B_0|$，不失一般性，设 $s_A\geq s_B$。

注意，如果 $x\in A^s$，$y\in B^s$，那么 $|A_x|, |B_y|\geq s$，因此由布伦-明可夫斯基不等式可得 $|(A+B)_{x+y}|\geq|A_x+B_y|\geq 2^k s$。于是 $A^s+B^s\subseteq(A+B)^{2^k s}$。回顾一下，$|A|=|B|=\int_s \#B^s$ 且 $2^k(1+\delta)|A|\geq|A+B|=\int_s\#(A+B)^s=2^k\int_s\#(A+B)^{2^k s}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}|A+B| &= 2^k\int_s \#(A+B)^{2^k s} \geq 2^k\int_s \#(A^s+B^s) \\ &\geq 2^k\int_{s=0}^{s_B}(\#A^s+\#B^s-1) = 2^k|B|+2^k\int_{s=0}^{s_B}(\#A^s-1).\end{aligned}$$

令 $A':=A\cap(A^{s_B}+Q)$ 为 A 中的子集，其中这些局部区域内的 A 至少与 B 的所有局部区域一样大。由此可见 $|A\setminus A'|\leq\int_{s=0}^{s_B}(\#A^s-1)\leq\delta|A|$，因此 A 的大部分质量都集中在较大的局部区域中。

另一方面，我们发现

$$\begin{aligned}|A+B| &\geq \sum_{x\in X}|A_0+B_x| \geq 2^k\sum_{x\in X}\sqrt{|A_0|\cdot|B_x|} \\ &= 2^k|B|+2^k\sum_{x\in X}|B_x|\left(\sqrt{\frac{|A_0|}{|B_x|}}-1\right),\end{aligned}$$

因此，若令 $B' := B \cap (B^{2s_A/3} + Q)$，则

$$|B \setminus B'| \le \sum_{x \in X} |B_x| \frac{\sqrt{\frac{|A_0|}{|B_x|}} - 1}{\sqrt{3/2} - 1} \le \frac{\delta}{\sqrt{3/2} - 1} |B| \le 5\delta |B|.$$

换句话说： B 的大部分位于并没有比 A_0小很多的局部区域中。

根据定义， $|A'| \le |A^{s_B}| \cdot s_A$ 和 $|B'| \ge |B^{2s_A/3}| \cdot 2s_A/3$，所以

$$\left|B^{2s_A/3}\right| \le \frac{|B'|}{2s_A/3} \le \frac{|B|}{2s_A/3} \le \frac{|A'|}{(1-\delta)2s_A/3} \le \frac{3}{2(1-\delta)} |A^{s_B}|.$$

因此，我们先前的界给出

$$\delta |A| \ge \int_{s=0}^{s_B} (\#A^s - 1) \ge s_B(|A^{s_B}| - 1) \ge s_B \left(\frac{2(1-\delta)}{3} \left|B^{2s_A/3}\right| - 1 \right).$$

假设 $|B^{2s_A/3}| > 1$ 成立，且与之矛盾，这将意味着（使用 δ small）

$$\delta |A| \ge s_B \left|B^{2s_A/3}\right| \left(\frac{2(1-\delta)}{3} - \frac{1}{\left|B^{2s_A/3}\right|} \right) \ge |B'| \left(\frac{2(1-\delta)}{3} - \frac{1}{2} \right) \ge \frac{1}{7}|B|,$$

这当然是荒谬的。因此，我们得出 $B^{2s_A/3}$ 是单元素集，且 $s_B = |B'| = |B_0|$。显然也可推出 A^{s_B} 是单元素集，且 $s_A = |A'| = |A_0|$。

我们再次考虑这个界。

$$(1+\delta)|A| \ge \sum_{x \in X} \sqrt{|A_0| \cdot |B_x|}$$

在满足 $|B_x| \le |A_0|$、 $|A_0| \ge 0.9|A|$ 和 $\sum_x |B_x| = |B|$ 的条件下，利用凹性可发现，当 $|B_0| = |A_0|$ 且 B 的其余部分包含在同一个局部性中时，这个和取得最小值。一些计算表明，我们确实必须有 $|A \setminus A'| = |A \setminus A_0| \le \delta^2(1+O(\delta))|A|$ （详情请参见定理 7.1 的证明）。事实上，进行一个非常相似的优化，将 $|A_0|$ 和 $|B_0|$ 都固定为大于 $0.9|A|$ 的常数，可以表明，当除了 B_0 之外的所有 B 都包含在同一个局部性中时， $\sum_{x \in X} \sqrt{|A_0| \cdot |B_x|}$ 取得最小值。因此，

$$(1+\delta)|A| \ge \sqrt{|A_0| \cdot |B_0|} + \sqrt{|A_0| \cdot (|B \setminus B_0|)},$$

利用 $|A_0|$ 上的界，可将其化简为

$$1 + \delta \ge \sqrt{\frac{1}{1 - \delta^2(1+O(\delta))}} \left(\sqrt{\frac{|B_0|}{|B|}} + \sqrt{1 - \frac{|B_0|}{|B|}} \right)$$

因此，我们发现确实也有 $|B \setminus B'| = |B \setminus B_0| \le \delta^2(1+O(\delta))|B|$。 □

12. Questions and directions

我们从 John 型逼近的视角研究多项式 Freiman-Ruzsa 猜想，得到关于稳定性和局部性的极精确估计，但代价是非退化假设和接近性概念中的常数。这提示了通向 PFR 的另外两个中间猜想：去除这两个假设中的一个，但不同时去除两者。

猜想 12.1. 假设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| < 2^{k+d}|A|$。那么

$$\left|\mathrm{co}^{k,d}_{\exp(O(k+d))}(A)\right| \leq O_{k,d}(|A)|.$$

猜想 12.2. 假设 $A \subset \mathbb{R}^k$ 具有 $|A+A| < 2^{k+d}|A|$。如果 $\left|\mathrm{co}^{k\ d-1}_{O_{k\ d}\ 1,\ ,\ ()}(A)\right| > \Omega_{k,\ d}$ (1)$|A|$ 那么

$$\left|\mathrm{co}^{k,d}_{\exp(O(k+d))}(A)\right| \leq \exp(O(k+d))|A|.$$

类比命题 7.8，在猜想 12.2 中，位置的数量有可能是 $O(2^{k+d})$，而不是 $\exp(O(k+d))$，也就是说，对加倍的多项式依赖实际上可能是线性的。

即使在本文的假设下，仍有一些未解决的问题。我们提出以下线性稳定性陈述，它将推广定理 1.8、定理 1.10 和定理 8.2。

猜想 12.3。对于任意 k、$d \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $t_{k,d,\epsilon} > 0$，使得如果$A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| = \left(2^{k+d-1}(2 - \frac{k+d}{2t}) + \delta'\right)|A| < \left(2^{k+d} + 1 - \epsilon\right)|A|$，且对于某个 $t \geq t_{k,d,\epsilon}$，那么

$$\left|\mathrm{co}^{k,d-1}_t(A)\right| = O_{k,d}(|A|) \quad \text{or} \quad \left|\mathrm{co}^{k,d}(A) \setminus A\right| \leq O_{k,d}\left(\delta'\right)|A|.$$

在 $|A+A| \leq 2^{k+d}|A|$ 所在的范围内，这将推出下面这个较弱的猜想；即便如此，它也已经是一个有趣的结果。

猜想 12.4。对于任意 k、$d \in \mathbb{N}$，存在 $t_{k,d} > 0$ （或许是 $t_{k,d} = \exp(O(k+d))$? ），使得如果 $A \subset \mathbb{R}^k$ 满足 $|A+A| \leq 2^{k+d}|A|$，那么对于所有$t \geq t_{k,d}$，我们都有

$$\left|\mathrm{co}^{k,d-1}_t(A)\right| = O_{k,d}(|A|) \quad \text{or} \quad \left|\mathrm{co}^{k,d}(A) \setminus A\right| \leq O_{k,d}\left(t^{-1}\right)|A|.$$

12.1. 定理 1.2 与 Pr´ekopa-Leindler 不等式稳定性之间的联系。B¨or¨ocky、Figalli 和 Ramos[BFR22] 最近取得了突破，证明了任意可´测函数情形下 Pr´ekopa-Leindler 不等式的首个稳定性结果，并对这些函数与某个对数凹函数之间的对称差进行了定量控制。给定参数$\lambda \in (0,1)$，考虑可测函数 f、g、h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它们满足以下性质：对于所有 x、$y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\int f = \int g = 1$，均有 $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$。他们的结果表明，若 $\int h \leq 1+\delta$，且 δ关于 λ充分小，

则（对 f 和 g作平移后）存在一个对数凹函数ℓ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\int |h-\ell| + |f-\ell| + |g-\ell| \leq \delta^{O_{\lambda,\ n}(1)}$。

考虑特殊情形，其中 $n = 1$、$\lambda = 1/2$ 和 $f = g$。对于任意满足 $\int f = 1$的函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们都可以找到 f 的一个限制 f'，其支撑集位于某个闭区间上，使得 $\int f' > 1 - \delta$。令$h'(z) := \sup_{x+y=2z} \sqrt{f'(x)f'(y)}$，则显然 $\int h' \leq \int h \leq (1+\delta) \int f \leq (1+3\delta) \int f'$。令 $h_k(z) := \sup_{x+y=2z} \left(f'(x)^{1/k} + f'(\frac{y}{2})^{1/k} \right)^k$，并注意到 h_k逐点收敛到 h'。类似地，令 ℓ 为使 $\int |h-\ell| + 2|f-\ell|$ 最小的对数凹函数，并令 ℓ_k为一列 $1/k$-凹函数，使得 ℓ_k 在 f'的支撑集上逐点收敛到 ℓ。现在可得 $\lim_{k\to\infty} \int |h_k - h'| = 0$，且 $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathrm{supp}(f)} |\ell_k - \ell| = 0$。

B¨or¨ocky、Figalli 和 Ramos 的定理表明，对于一个支撑有界的函数f'，如果 $\lim_{k\to\infty} \int h_k \leq (1+\delta') \int f'$，那么就存在 $1/k$-凹函数 ℓ_k，使得 $\lim_{k\to\infty} \int |h_k - \ell_k| + 2|f' - \ell_k| \to \delta' O(1) \int f'$。对于逆向推论，考虑 ℓ_k 的一个收敛子列。

这个定理的等价形式有如下几何解释。给定 $k \in \mathbb{Z}$ 和一个可测函数 f': $[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，其中$\int f' = 1$，考虑集合 $A_{f',\ k} := \bigcup_x \{x\} \times [0, f'(x)^{1/k}]^k$，使得$|A_{f',\ k}| = 1$。注意，$\left(\frac{A_{f',\ k} + A_{f',\ 2}}{2}\right)^k = A_{h_k,\ k}$。因此，该定理等价于：如果 $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{A_{f',\ k} + A_{f',\ 2}}{2} \right|^k \leq 1 + \delta$（其中 δ 足够小），那么就存在凸集 $A_{\ell_k,\ k}$，使得 $\lim_{k\to\infty} |A_{\ell_k,\ k} \triangle A_{f',\ k}| + |A_{\ell_k,\ k} \triangle A_{h_k,\ k}| \leq \delta^{O(1)}$。这表明，或许在每个维度中都有类似的推论：

猜想 12.5. 存在一个绝对常数 $\Delta > 0$，使得若 $\delta < \Delta$且 $A \subset \mathbb{R}^k$，其中 $\left|\frac{A+A}{2}\right| \leq (1+\delta)|A|$，那么存在某个凸的 $K \subset \mathbb{R}^k$，使得 $|K \triangle A| \leq O_\delta(1)|A|$。

在这里，B¨or¨ocky、Figalli 和 Ramos 的结果所暗示的 $O_\delta(1)$ 界是 $\delta^{O(1)}$，但我们怀疑这个界可能与 $O(\delta^2)$ 一样强。注意到 $|K \triangle A| = |A \setminus K| + |K \setminus A|$，定理 1.2（另见定理 11.2）解决了这个问题的一半，给出了最优界 $|A \setminus K| \leq \delta|A|$。

References

[BEKR20] Ben Barber、Joshua Erde、Peter Keevash 和 Alexander Roberts。《格中的等周稳定性》。*Forthcoming in Proceedings of the American Mathematical Society* 2020。[BFR22] K´aroly J B¨or¨oczky、Alessio Figalli 和 Jo˜ao PG Ramos。《任意可测函数的 Pr´ekopa-Leindler 不等式的定量稳定性结果》。*arXiv preprint arXiv:2201.11564*，2022年。[Bil98] Yuri Bilu。《环面上的 ($\alpha + 2\beta$)-不等式》。*Journal of the London Mathematical Society* 57 3 513 528, 1998。[Bil99] Yuri Bilu。《小和集的结构》。*Astérisque* 258 77 108, ,（xi）: –。[CDR 1999 19] Pablo Candela 和 Anne De Roton。《圆上的小和集》。*The Quarterly Journal of Mathematics*, 70(1):49–69，2019年。

[CGSG19] Pablo Candela、Diego Gonz´alez-S´anchez 和 David Joseph Grynkiewicz。《迈向 $3k-4$ 猜想的一步及其在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 和自由集中的应用》。 *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*，88(3):521–525，2019年。[Cha02] Mei-Chu Chang。《Freiman 定理中的一个多项式上界》。 *Duke mathematical journal* 113 3 399 419, 2002 ，（）：–。[Chr12a] Michael Christ。《布伦–明可夫斯基不等式中的近似等号情形》。 *arXiv preprint arXiv:1207.5062* 2012 ，。[Chr12b] Michael Christ。《二维布伦–明可夫斯基不等式中的近似等号情形》。 *arXiv preprint arXiv:1206.1965*，2012年。[EGM14] Sean Eberhard、Ben Green 和 Freddie Manners。《没有大和自由子集的整数集》。 *Annals of Mathematics*，第621–652页，2014年。[FJ15] Alessio Figalli 和 David Jerison。《 $\mathbb{R}^n$中的和集定量稳定性》。 *Journal of the European Mathematical Society*，17(5):1079–1106，2015年。[FJ17] Alessio Figalli 和 David Jerison。《布伦 – 明可夫斯基不等式的定量稳定性》。 *Advances in Mathematics*，314:1–47，2017年。[FJ21] Alessio Figalli 和 David Jerison。《二维和三维欧几里得空间中半和集的一个精确 Freiman 型估计》。*Normale Supérieure* 54 4 235 257, 2021 ，（）：–。[FMP09] Alessio Figalli、Francesco Maggi 和 Aldo Pratelli。《凸集的一个精细布伦–明可夫斯基不等式》。*C Analyse non linéaire* 26 6 2511 2519, 2009 ，（）：–。[FMP10] Alessio Figalli、Francesco Maggi 和 Aldo Pratelli。《定量等周不等式的质量输运方法》。 *Inventiones mathematicae*，182 1 167 211，2010年（）：–。[Fre59] Gregory Freiman。《有限集的加法。i》。 *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika* 6 202 213, 1959 ，：–。[FvHT23] Alessio Figalli、Peter van Hintum 和 Marius Tiba。《布伦-明可夫斯基不等式的紧确界定量稳定性》。 *arXiv preprint arXiv:2310.20643*，2023年。[GR06] Ben Green 和 Imre Ruzsa。《小和集与整直化》。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 38 1 43 52, 2006 ，（）：–。[Gre07] Ben Green。《多项式 Freiman–Ruzsa 猜想》。 *Terence Tao's blog*，2007年。[GT06] Ben Green 和 Terence Tao。《压缩、凸几何与 Freiman–Bilu 定理》。 *Quarterly Journal of Mathematics* 57 4 495 504, 2006 ，（）：–。[vHK23] Peter van Hintum 和 Peter Keevash。《近似凸性的精确倍增阈值》。 *arXiv preprint arXiv:2304.01176*，2023年。[vHK24] Peter van Hintum 和 Peter Keevash。《离散约翰定理的紧确界》。 *Forthcoming in Combinatorics, Probability, and Computing*，2024+。[vHKT23] Peter van Hintum、Peter Keevash 和 Marius Tiba。《关于 Ruzsa 离散 Brunn-Minkowski 猜想》。 *arXiv preprint arXiv:2306.13225*，2023年。[vHST22] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。《位似区域的布伦–明可夫斯基不等式的精确稳定性》。 *Journal of the European Mathematical Society* 24 12 4207 4223, 2022 ，（）：–。[vHST23a] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。《 $\mathbb{Z}^k$ 中加倍为 $2^k+\delta$ 的集合接近凸级数》。 *Advances in Mathematics* 413 108830, 2023 ，：。[vHST23b] Peter van Hintum 、 Hunter Spink 和 Marius Tiba。《上卷积的精确 l^1 不等式》。 *Discrete Analysis*，7 2023年。[vHST23c] Peter van Hintum、Hunter Spink 和 Marius Tiba。《平面布伦–明可夫斯基不等式的紧确界定量稳定性》。 *Forthcoming in Journal of the European Mathematical Society* 2023+ ，。

[Jin07] Renling Jin. 具有小倍增性质的 Freiman 逆问题。 *Advances in Mathematics* 216 2 711 752, 2007 , ( ): – . [Kee11] Peter Keevash. 超图图兰问题。 *Surveys in combinatorics*, 392:83– 140, 2011年。[LR17] Shachar Lovett 和 Oded Regev. 欧几里得空间中多项式 Freiman-Ruzsa 猜想强变体的一个反例。 *Discrete Analysis*, 8 379 388, 2017年 : – . [LS23] Vsevolod F Lev 和 Oriol Serra. 关于 $3n-4$ 素数阶群中的猜想。*arXiv preprint arXiv:2302.08465*, 2023年。[Mag08] Francesco Maggi. 研究等周型问题稳定性的一些方法。 *Bulletin of the American Mathematical Society* 45 3 367 408, , ( ): – .[MFY74] 2008 DA Moskvin、Gregory Freiman 和 Aleksandr Aleksandrovich Yudin. 集合加法的结构理论及独立格点随机变量的局部极限定理。 *Theory of Probability & Its Applications*, 19(1):53–64, 1974年。[Ruz94] Imre Ruzsa. 广义算术等差数列与和集。 *Acta Mathematica Hungarica* 8 4 1 6, 1994 , ( ): – . [Ruz99] Imre Ruzsa. 群中的 Freiman 定理的一个类比。 *Astérisque*, 258 199 323 326, 1999年 ( ): – . [Ruz06] Imre Ruzsa. 加法组合学与数的几何。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 3, 911 930 , 卷页码 –。 Citeseer, 2006年。[San08] Tom Sanders. J. Bourgain《重探 Roth 等差数列定理》的附录。 *Journal d'Analyse Mathématique*, 1(104):193–206, 2008年。[San12] Tom Sanders. 关于 Bogolyubov–Ruzsa 引理。 *Analysis & PDE*, 5(3):627– 655, 2012年。[Sch11] Tomasz Schoen. Freiman 定理中的近最优界。 *Duke Mathematical Journal* 158 1 1 12, 2011 , ( ): – . [Tao18] Terence Tao. Kneser 不等式的一个逆定理。 *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 303 1 193 219, 2018 , ( ): – . [TV06] Terence Tao 和 Van Vu. *Additive Combinatorics*, 第 105 卷。剑桥大学出版社, 2006年。[TV08] Terence Tao 和 Van Vu. 广义算术等差数列与迭代和集的 John 型定理。 *Advances in Mathematics* 219 2 428 449, , ( ): – . 2008