arXiv:2304.01229v2 [math.DS] 5 Apr 2023

阿尔及利亚语言移位元胞自动机模型的动力学性质

AIT SADI Nassima[1] CHEMLALRezki[21,2]贝贾亚大学应用数学实验室，阿尔及利亚

2023年4月7日

摘要

本文研究一种模拟阿尔及利亚语言移位的二维元胞自动机的动力学性质。除其他性质外，我们还将研究该元胞自动机的满射性以及等度连续点的存在性。

通过计算机模拟，我们获得了若干不动点的吸引域的一些性质。这些实验结果也附有解析证明。

K关键词： 元胞自动机，拓扑动力学 ics.

1 引言

元胞自动机被应用于各种建模场景。其历史可追溯至 20 世纪 40 年代末的冯·诺伊曼，最初的模型以生物学为研究动机。近年来，元胞自动机已被用于对许多不同领域的复杂系统建模，例如物理学、生物学和社会选择[3, 7]。

元胞自动机是一种在空间和时间中演化的离散计算模型。它由规则的细胞网格构成，每个细胞在每个时间单位只能取一个给定的状态。每个细胞的状态由将元胞自动机相应的局部规则应用于该细胞当前的状态及其邻域内细胞的状态来确定。构型是格点中所有自动机状态的快照。格点通常为 $\mathbb{Z}^n$ ，其中 n表示元胞自动机的维度。

研究元胞自动机复杂性的一种方法是为构型空间赋予积拓扑，并将元胞自动机视为离散动力系统。

本文重点研究一 2–维 l
用于模拟阿尔及利亚语言移位的元胞自动机 [2]。第一部分研究周期点的存在性、阻塞词的存在性以及该元胞自动机的满射性。

第二部分借助计算机模拟推导并展示固定点 $3^{\infty\times\infty}$ 的吸引域在参数 P_z 和 P_e 取不同值时的一些性质。

2 基本定义

设 A 是一个字母表。图案 w 是取自 A 、定义在坐标 $E \subset \mathbb{Z}^2$. 的有限连通子集上的一组值。图案 $w \in A^{n\times m}$ 的长度为 $|w| = (|w|_1,\ |w|_2) = (n,\ m)$。我们用 $A^{\mathbb{Z}^2}$ 表示以字母表 A 构造的 $\mathbb{Z}^2$ 中所有构型的集合。

$$\begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & x_{(-1,1)} & x_{(0,1)} & x_{(2,0)} & \\ \cdots & x_{(-1,1)} & x_{(0,0)} & x_{(1,0)} & \cdots \\ & x_{(-1,1)} & x_{(0,-1)} & x_{(1,-1)} & \\ & & \vdots & & \end{array}$$

对于任意图案 w ，我们定义位置 $(i,\ j)$ 处的柱集 $[w]$ ：

$$[w]_{(i,j)} = \{x \in A^{\mathbb{Z}^2} : x_{[i,i+|w|_1]\times[j,j+|w|_2]} = w\}$$

赋予如下距离

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}^2}, d(x,y) = 2^{-\min\{||\overrightarrow{i}||_\infty : x_i \neq y_i, i=(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}^2\}} \text{where } ||\overrightarrow{i}||_\infty = \max_{j=\overline{1,2}}\{i_j\}$$

空间 $A^{\mathbb{Z}^2}$ 在积拓扑下是紧致的、完美的且全不连通的。任意向量 $\overrightarrow{i} \in \mathbb{Z}^2$ 都确定一个连续的移位映射 $\sigma^{\rightarrow}_{\overrightarrow{i}}$: $A^{\mathbb{Z}^2} \to A^{\mathbb{Z}^2}$ ，其定义为 $\sigma^{\rightarrow}_{\overrightarrow{i}}(x)_{\overrightarrow{j}} = x_{\overrightarrow{j}+\overrightarrow{i}}$ ，$\forall \overrightarrow{j} \in \mathbb{Z}^2$. 集合 $\{\sigma^{\rightarrow}_{\overrightarrow{i}}\}_{\overrightarrow{i}\in\mathbb{Z}^2}$ 简记为 σ.

2.1 作为动力系统的元胞自动机：

设 E 是 $\mathbb{Z}^2$ 和 f 中的一个子集： $A^{\mathbb{k}} \to A$ 是一个称为局部规则的函数。由 f 确定的元胞自动机是函数 F: $A^{\mathbb{Z}^2} \to A^{\mathbb{Z}^2}$ ，定义为 $F(x)_m = f(x_{m+\mathbb{k}})$，对所有 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$ 以及所有 $m \in \mathbb{Z}^2$. 均成立。Curtis-Hedlund 和 Lyndon[5] 证明，元胞自动机恰好是与所有移位可交换的 $A^{\mathbb{Z}^2}$ 的连续变换。我们将 $\mathbb{k}$ 称为 F. 的邻域。一般而言，在二维中我们使用冯·诺依曼邻域或摩尔邻域。

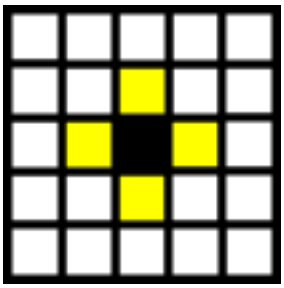


图 1：冯·诺伊曼

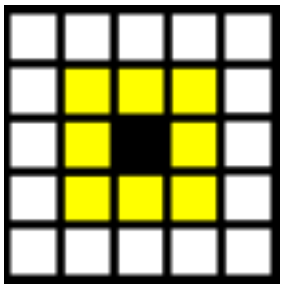


图 2：摩尔

点 $r \in A^{\mathbb{Z}^2}$ 是不动点，如果 $F(r) = r$，其吸引域是集合 $B(r) = \{x \in A^{\mathbb{Z}^2} : \lim_{n\to+\infty} F^n(x) = r\}$.

点 x 是周期为 p 的周期点，当且仅当 $F^p(x) = x$ 且 $\forall i < p,\ F^i(x) \neq x$。若存在整数 m，使得 $F^m(x)$ 是周期点，则称 x 为最终周期点。

将移位的周期点称为特殊周期点；对于 F 而言是周期点、但对于移位而言不是周期点的点，称为严格时间周期点 [4]。

若存在非负整数 $p \leq k-r$ 和 $q \leq l-s$，使得对于所有 $x,\ y \in [w]_{(0,0)}$ 和所有 $n \geq 0$，均有：$F^n(x)_{[p,p+r)\times[q,q+s)} = F^n(y)_{[p,p+r)\times[q,q+s)}$，则称大小为 $k \times l$ 的图案 w 是具有偏移量 $(p,\ q)$ 的 $(r,\ s)$ 阻塞图案。当偏移量 $(p,\ q) = (0,\ 0)$ 时，称图案 w 为完全阻塞图案。

若点 x 满足以下条件，则它是元胞自动机 $(A^{\mathbb{Z}^2}, F)$ 的等度连续点：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y, d(x,y) < \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) < \varepsilon$$

若所有点都是等度连续点，则元胞自动机 F 是等度连续的；若等度连续点集包含一个稠密开集的可数交集，则它是几乎等度连续的。

若 F 对初始条件敏感，则

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A^{\mathbb{Z}^2}, \forall \delta > 0, \exists y : d(x,y) < \delta, \exists n \in \mathbb{N} : d(F^n(x), F^n(y)) \geq \varepsilon$$

Kurka [6] 根据等度连续性和敏感性，对一维元胞自动机进行了分类。

定理 1 设 F 是一个半径为 $r.$ 的一维元胞自动机。以下性质等价：

1. F 不敏感。
2. F 接受一个 $r - blocking$ 词。
3. F 是几乎等度连续的。

这种等价关系在更高维度下并不成立。Gamber [1] 证明，蕴含关系 $3 \Rightarrow 1$ 和 $1 \Rightarrow 2$ 在所有维度下均成立，而且完全阻塞模式的存在意味着该元胞自动机具有几乎等度连续性。

定理2（ [1]） 设 F： $A^{\mathbb{Z}^D} \to A^{\mathbb{Z}^D}$，半径为 $r.$。如果对于 F 存在一个大小为 $k \times k \times ... \times k$ 的完全阻塞模式，且 $k \geq r$，那么 F 几乎等度连续。

3 阿尔及利亚语言移位的元胞自动机模型

在 [2], 中，作者提出了一个阿尔及利亚语言移位的元胞自动机模型，其中两种主要语言是阿尔及利亚阿拉伯语和英语。个人可以从阿马齐格语移位到阿拉伯语状态，和/或从法语移位到英语状态。

可能有四种状态:

1. 状态 ′00′：使用阿马齐格语，并以法语为第二语言的人。2. 状态 ′01′：使用阿马齐格语，并以英语为第二语言的人。3. 状态 ′10′：使用阿拉伯语，并以法语为第二语言的人。4. 状态 ′11′：使用阿拉伯语，并以英语为第二语言的人。

每个状态（mn）由一个整数 p 编码，使得 $p = n \times 2^0 + m \times 2^1$。

00	01	10	11
0	1	2	3

表 1：四种状态的编码

记号 3 设 x 是 $A^{\mathbb{Z}^2}$.中的一个点

$_1 \quad _1$*1.* $\sum_{0_{i,\ j}} = \sum_{r=-1} \sum_{s=-1} \left[\frac{x_{i+r,j+s}}{2} \right]$ 其中 [] 是整数部分。$_1 \quad _1$*2.* $\sum_{1_{i,\ j}} = \sum_{r=-1} \sum_{s=-1} (x_{i+r,\ j+s} - 2. \left[\frac{x_{i+r,j+s}}{2} \right])$ 其中 [] 是整数部分。

---

3. $0 \leq P_z \leq 9$ 和 $0 \leq P_e \leq 9$ 分别是定义维持阿马齐格语和阿尔及利亚阿拉伯语倾向的参数。

考虑字母表 $A=\{0,1,2,3\}$。模拟阿尔及利亚语言移位的元胞自动机K：$A^{\mathbb{Z}^2} \to A^{\mathbb{Z}^2}$ 的局部规则总结如下图所示：

Initial state ↓ / New state →	0	1	2	3
0	$\sum_0 < P_z$ and $\sum_1 < P_e$	$\sum_0 < P_z$ and $\sum_1 \geq P_e$	$\sum_0 \geq P_z$ and $\sum_1 < P_e$	$\sum_0 \geq P_z$ and $\sum_1 \geq P_e$
1	...	$\sum_0 < P_z$	...	$\sum_0 \geq P_z$
2	...	...	$\sum_1 < P_e$	$\sum_1 \geq P_e$
3	...	...	...	$\forall \sum_0, \sum_1$

图3：局部规则

3.1 动力学性质

本节给出将元胞自动机 K视为动力系统时的一些动力学性质。

命题4 对于$(P_z, P_e) = (9,9)$，$(A^{\mathbb{Z}^2}, K)$ 中的所有点都是不动点。

证明。
假设$(P_z, P_e) = (9,9)$，并取一点$y \in A^{\mathbb{Z}^2}$。令$(i,j) \in \mathbb{Z}^2$。若 $y_{(i,j)} = 0$，则 $0 \leq \sum_0 (y_{[-i,i]\times[-i,i]}) \leq 8$ 且$0 \leq \sum_1 (y_{[-i,i]\times[-i,i]}) \leq 8$。因此，$K(y)_{(i,j)} = 0$.若 $y_{(i,j)} = 1$，则$0 \leq \sum_0 (y_{[-i,i]\times[-i,i]}) \leq 8$。因此，$K(y)_{(i,j)} = 1$若 $y_{(i,j)} = 2$，则$0 \leq \sum_1 (y_{[-i,i]\times[-i,i]}) \leq 8$。因此，$K(y)_{(i,j)} = 2$.当 $y_{(i,j)} = 3$ 时，情况显然。

■

命题5 对于任意不等于$(9,9)$的参数值 P_z, P_e，元胞自动机 K 不是满射。

证明。考虑 $P_z = 0$ 或 $P_e = 0$。对于所有 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$ 和所有 $k \in \mathbb{Z}$，我们有：$\sum_0 ($ $x_{[k-1,k+1]\times[k-1,k+1]}) \geq 0$或 $\sum_1 (x_{[k-1,k+1]\times[k-1,k+1]}) \geq 0$，这意味着 $K(x)$ $_k \in \{2,3\}$或 $K(x)_k \in \{1,3\}$，于是点 $0^{\infty\times\infty}$没有原像。现在，取如下定义的点 $y \in A^{\mathbb{Z}^2}$：

$$\begin{cases} y_{00} = 0 \\ \forall i \in \mathbb{Z}^2 : \left\| \overrightarrow{i} \right\|_\infty = 1, y_{\overrightarrow{i}} = 3 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

反设存在一点 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$ 使得 $K(x) = y$，那么根据构造，字母 0 要么会变成一个不同于 0 的其他字母，要么保持不变。因此我们有 $x_{00} = 0$，并且

$$\forall i \in \mathbb{Z}^2 : \left\| \overrightarrow{i} \right\|_\infty > 1, x_{\overrightarrow{i}} = 0$$

接下来，我们证明，对于 P_z 中任意取值的 $\{0, ..., 8\}$，点 y 在映射 K 下都没有原像，这与 P_e 的取值无关。

- 若 $P_z = 1$，则要使 $x_{00} = 0$ 保持不变，x 在位置 $i \in \mathbb{Z}^2$ 上的元素必须属于 $\{0, 1\}$，其中 $||\overrightarrow{i}|| = 1$；无论 x 在这些位置上包含多少个 $1's$，我们都将得到 $K(x) \neq y$。
- 若 $P_z = 2$，则 x 在其余尚未确定的位置上的元素至多包含一个 2 或一个 3，而所有可能情况均给出 $K(x) \neq y$.
- 若 $P_z = 3$，则至多存在两个整数 i_1，$i_2 \in \mathbb{Z}^2$，使得 $\left\| \overrightarrow{i_j} \right\|_\infty = 1$，$\forall j \in \{1, 2\}$ 且 $x_{i_j} \in \{2, 3\}$。类似地，我们得到 $K(x) \neq y$。
- 如果 $4 \leq P_z \leq 8$，那么为了得到 $K(x)_{||\overrightarrow{i}||_\infty = 1} = 3$，$x$ 在位置 $i \in \mathbb{Z}^2$ 必须有一个 3，使得 $||\overrightarrow{i}||_\infty = 1$。这与 $\sum_0 (x_{[-1,1]\times[-1,1]}) < P_z$ 这一事实矛盾。用同样的论证可以证明，对于 $P_z = 9$ 以及 $\{0, ..., 8\}$ 中的任意 P_e，同一个点 y 都没有原像。

■

命题 6 对于所有参数 $0 \leq P_z$，$P_e \leq 9$ 和 K 都没有严格周期点。

证明。用反证法，假设存在一点 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$，它对于 K 是严格周期的，即 $\exists p \in \mathbb{N}$：$K^p(x) = x$ 且 $\forall i < p\ K^i(x) \neq x$。由于：$\forall i < p\ K^i(x) \neq x$，不失一般性，$\exists k \in \mathbb{Z}$ 使得 $K^i(x)_{kk} \neq x_{kk}$。或者，根据构造，字母 0，1，2，3 按照图4所示的方案轮转，这与假设矛盾。■

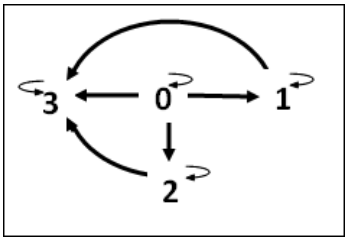


图 4：字母的行为

命题 7 对于所有参数 $0 \leq P_z, P_e \leq 9, k$，该系统几乎等度连续。

证明。根据 K的局部规则的定义，对于参数 P_z 和 P_e的任意取值，3都是一个完全的 (1，1)-阻塞词。由定理2可知， K几乎等度连续。 ■

3.2 不动点的吸引域

本节将重点讨论不动点的吸引域。
元胞自动机 K 有无穷多个不动点。除点$3^{\infty\times\infty}$，外，对于参数 P_z 和 P_e的所有取值，每个不动点的吸引域都不包含任何柱集。文献 [2] 已证明， $3^{\infty\times\infty}$ 的吸引域在 (P_z， P_e) =(9，9) 时包含柱集 [3]，而在 (P_z， P_e) =(1，1) 时不包含任何柱集。下文将研究该点在 P_z 和 P_e 取不同于 (1，1) 和 (9，9) 的其他值时的吸引域。

3.2.1 计算机模拟

为了描述参数 P_z和 P_e.取某些值时一个不动点的吸引域，我们有一个程序：它接收任意大小 $n \times m$的图案 P以及一组固定值 P_z， P_e，并返回所有可能的大小为 $(n+2) \times (m+2)$ 的图案 P' 的列表，使得 $K(P') = P$。

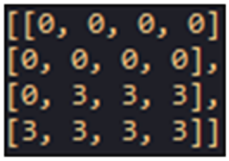
由于元胞自动机 K 不是满射，因此在某些情况下，程序会返回一个空列表。在程序中，我们需要对由数字 0、1、2 和 3 组成的所有可能的 3×3图案进行概括。为此，我们使用了一个命令，将这些图案作为一个集合返回。这意味着，例如，原本总共可以得到 9 个包含一个 1 的图案，但 $0's$除此之外，我们只得到一个图案。这不会影响我们的结果，因为只需将得到的图案向各个方向移位即可。

不动点的吸引域由在元胞自动机 K 的迭代过程中收敛到该不动点的点所构成。吸引域可能是无限的，因此我们的程序无法刻画整个吸引域，但可以提供足够的信息，以便推断其性质。

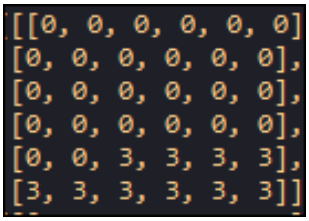
这个程序的思路是：接收一个属于 $3^{\infty\times\infty}$ 的图案 P 以及 P_z 和 P_e 的一个特定取值，并在可能的情况下给出 P 的原像列表。之后随机选取其中一些元素，并重复这一过程。

例 8 考虑 $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $(P_z, P_e) = (2,2)$。

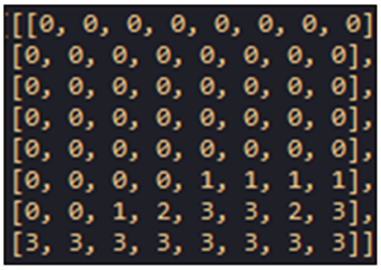
我们从 $K^{-1}(P)$ 的所有可能原像列表中随机选取一个图案，并使用新选取的图案重新执行程序。我们根据需要多次重复此过程。如果在步骤 $k+1$ 从未得到空列表，那么我们就从 $K^{-k}(P)$ 的列表中另选一个图案，直到得到一个具有原像的图案，或者尝试完前一个列表中得到的所有图案。下面我们展示一些得到的图案：



(a) $K^{-1}(P)$



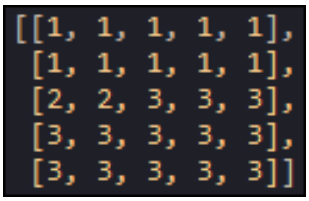
(b) $K^{-2}(P)$



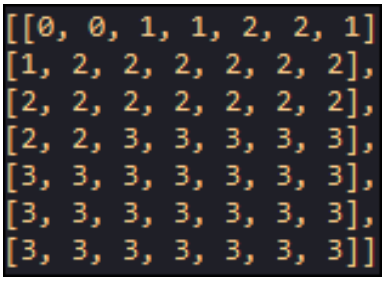
(c) $K^{-3}(P)$

通过这一过程，我们观察到，图案 P 的所有原像都至少包含以下图案之一：33 或 3 3 。

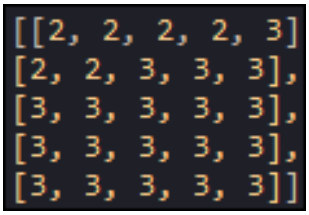
3 3 3现在，考虑 P =(3 3 3)和 (P_z, P_e) =(3,3)，则可得到3 3 3以下结果：



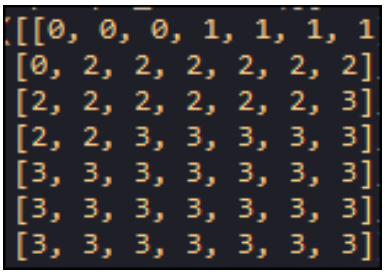
(a) $K^{-1}(P)$



(b) $K^{-2}(P)$



(a) $K^{-1}(P)$



(b) $K^{-2}(P)$

我们注意到，图案 P 的所有原像都至少包含以下图案之一3333、33

命题 9

不动点 $3^{\infty\times\infty}$ 的吸引域包含柱集 $[33],[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}]3$，对应于 $(P_z, P_e) = (2, 2)$；还包含柱集 $[333],[\ 3\ ]$，对应于 $(P_z, P_e) = (3,3)$。3

证明。

1. 考虑 $(P_z,\ P_e) = (2,\ 2)$，并设 x 是 $[33].$ 中的一点。不失一般性，假设 $x_{-10} = x_{00} = 3$。我们有 $K^2(x)_{[-1,1]\times[-2,1]} = 3^{3\times4}$。若假设 $K^{2n}(x)_{[-n,n]\times[-2-n+1,n]} = 3^{(2n+1)\times(2n+2)}$，则通过归纳可得 $\lim_{n\to+\infty} K^{2n}(x) = 3^{\infty\times\infty}$。2. 假设 $(P_z,\ P_e) = (3,\ 3)$，并考虑 $[333]_{-10}.$ 中的一点 x。我们有 $K^5(x)_{[-2,2]\times[-2,2]} = 3^{5\times5}$。若假设 $K^{5n}(x)_{[-n,n]\times[-n,n]} = 3^{(2n+1)\times(2n+1)}$，则通过归纳可得 $\lim_{n\to+\infty} K^{5n}(x) = 3^{\infty\times\infty}.$

■

命题 10 如果 P_z 或 P_e 大于 4，那么不动点 $3^{\infty\times\infty}$ 的吸引域不包含任何柱集。

证明。设 $[u]$ 是 $A^{\mathbb{Z}^2}$ 中的一个柱集，并注意到 u 的大小为 $(i, j) = size(u)$。我们可以假设 $i = j > 1.$。那么，图案 u 周围各元胞的 2^0 和 2^1 系数之和与 u 至多有 3 个共有元胞。

或者，由于 $P_z \geq 4$ 或 $P_e \geq 4$，点 $x \in [u]$ 的 $\lim_{n\to+\infty} K^n(x)$ 不依赖于柱集 $[u].$ ■

4 结论

我们研究了阿尔及利亚语言移位的二维元胞自动机模型在参数 P_z 和 P_e 取不同值时的拓扑性质，并证明对于 P_z 和 P_e 的任意取值，该元胞自动机都没有严格时间周期点；特别地，当 $(P_z, P_e) = (9,9)$ 时，所有点都是不动点。此外，我们还证明了该元胞自动机 K 几乎等度连续且非满射。

我们为元胞自动机不动点的吸引域构建了一种编码，并据此推导出：如果其中一个参数大于四，那么不动点 $3^{\infty\times\infty}$ 的吸引域不包含任何柱集；我们还确定了该不动点在 P_z 和 $P_e.$ 取特定值时的吸引域。

参考文献

[1]E. G Burkhead, 《*D* 维元胞自动机的拓扑分类》, 《动力系统》第 24 卷第 1 期, 2009 年 3 月, 45–61 页。[2] R. Chemlal, 《阿尔及利亚语言移位的元胞自动机模型》, 2022 年, 网址: https://www.researchgate.net/publication/366683723 A cellular automaton model for language shift in Algeria。预印本。[3] B. Chopard, 《物理系统的元胞自动机与格子玻尔兹曼建模》, 载于 G. Rozenberg 等人编, 《自然计算手册: 理论、实验与应用》, 施普林格, 2010 年。[4] A. Dennunzio, P.Di Lena, L. Margara, 《元胞自动机中的严格时间周期点》, 第 90 卷, AUTOMATA& JAC 2012 会议论文集, 225–235 页。[5]G. Hedlund, 《移位动力系统的自同态与自同构》, 《数学系统理论》第 4 卷 (1969 年), 第°3, 320–375 页。[6] P. Kurka, 《拓扑动力学与符号动力学》, 法国数学会专门课程, 第´ecialis´卷, 第´et´e 数学, 第´ematiques De France, 第°11期, 亨利·庞加莱研究所, 巴黎, 2003 年。[7] A. Nowak, M. Lewensein, 《用元胞自动机建模社会变迁》, 《从科学哲学视角看社会科学中的建模与模拟》, 第 23 卷, 1996 年, 249–285 页。