# 冯·蔡佩尔–利多夫–科扎伊振荡的哈密顿量

Scott Tremaine[1]，2★[1]加拿大多伦多大学理论天体物理研究所，多伦多圣乔治街 60 号，ON M5S 3H8，
加拿大[2]自然科学学院，高等研究院，普林斯顿，NJ 08540，美国

接受日期 XXX。收到日期 YYY；原始版本日期 ZZZ

arXiv:2304.01257v1 [astro-ph.EP] 3 Apr 2023

**摘要**

经典分析中用于描述层级三体系统内冯·齐佩尔–利多夫–科扎伊（ZLK）振荡的哈密顿量，基于远处天体在固定轨道上产生的四极势，并对内外天体的轨道同时取平均（“双重平均”）。这种近似可能产生误导，因为相应的哈密顿量守恒内双星角动量在垂直于外双星轨道方向上的分量，从而限制了系统可到达的相空间体积。这一缺陷通常通过纳入八极势的影响，或允许外轨道响应内轨道的变化来弥补。然而，在各种各样的天体物理系统中，非线性摄动的影响可与这些效应相当，甚至更大。非线性摄动的长期效应由一个额外的哈密顿量描述，我们称之为 Brown 哈密顿量。文献中至少存在三种不同形式的 Brown 哈密顿量；我们表明，这三种形式都由规范自由度联系起来，尽管其中一种比其他形式简单得多。我们认为，对三体系统中 ZLK 振荡的研究应纳入 Brown 哈密顿量。

**关键词：**
天体力学　　学——行星和卫星：动力学演化与稳定性——恒星：运动学与动力学　　s

## 1 引言

冯·齐佩尔–利多夫–科扎伊振荡（简称 ZLK 振荡），有时也称为利多夫–科扎伊振荡或科扎伊振荡，发生于层级三体系统中，例如一颗恒星由一颗行星和一颗远处伴星环绕、行星及卫星绕其宿主恒星运行、三星系统，或绕超大质量黑洞运行的双星。在这些系统中，远处天体可以激发内双星的偏心率和倾角发生大幅振荡。ZLK 振荡的一个显著特点是，质量任意小或距离任意远的第三体都能激发大幅振荡：随着其质量减小或距离增大，振荡周期会变长，但振幅大致保持不变。ZLK 振荡最初由 von Zeipel（1910；另见Ito & Ohtsuka 2019）发现，后由 Lidov (1961年）重新发现，并由西方的Kozai (1962）推广。综述可参见Naoz (2016年）和Shevchenko(2017）。

在对 ZLK 振荡进行最简单的处理时，远处天体产生的引力势近似为：（i）势中只保留四极项；（ii）忽略外轨道的任何变化，这通常是合理的，因为外轨道的角动量远大于内轨道；（iii）对基于四极势的哈密顿量在内双星和外双星的轨道上取平均，这种近似有时称为“双重平均”。我们将采用这些近似的理论称为“经典”ZLK 理论。经典 ZLK 理论中的摄动哈密顿量由下方的方程（22）给出。

设 $a_1$ 和 $a_2$ 分别为内双星和外双星的半长轴，$m_0$ 和 $m_1$ 为内双星中天体的质量，$m_2$ 为远处天体的质量。那么，内双星中的典型引力势为 $\Phi_K \sim G(m_0+m_1)/a_1$（“K”代表“开普勒”），而远处天体的四极势为 $\Phi_{四极} \sim Gm_2a_1^2/a_2^3$。因此，经典 ZLK 理论中摄动的相对强度为

$$\epsilon^2 \sim \frac{\Phi_{\rm quad}}{\Phi_K} \sim \frac{m_2}{m_0+m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3. \tag{1}$$

此时 $m_2 \gtrsim m_0+m_1$，这一结果可简洁地用内双星和外双星的平均运动 $n_1$ 和 $n_2$ 表示：$n_1^2 = G(m_0+m_1)/a_1^3$, $n_2^2 = G(m_0+m_1+m_2)/a_2^3 \sim Gm_2/a_2^3$，因此

$$\epsilon \sim \frac{n_2}{n_1}. \tag{2}$$

经典 ZLK 理论有一个偶然的性质：扰动哈密顿量（22）与内双星在外轨道上的升交点经度无关，$\Omega_1$，即使外轨道是偏心的也如此。由于升交点经度是与内双星角动量的 $z$分量共轭的坐标，$L_{z1}$（式 21），因此我们得出 $L_{z1}$ 守恒。由此，经典 ZLK 理论的哈密顿量是自治的，且只有一个自由度：单一角度 $\omega_1$（近心点幅角）以及共轭作用量 $L_1$（内双星的角动量；式 21）。因此，经典 ZLK 理论中的轨迹是可积的，实际上还可以用雅可比椭圆函数解析表示（Kinoshita 和 Nakai 1999年）。

经典 ZLK 理论的可积性既是优点也是缺点——优点在于它使我们能够解析地推导出 ZLK 振荡的性质；缺点在于它将运动限制在

★ 电子邮箱：tremaine@ias.edu

© 2023 作者

相空间中的一个二维流形上（坐标为 $\omega_1$ 和 $L_{z1}$），并抑制了混沌等重要的动力学行为，而这类行为只有在自由度多于一个的系统中才会出现。举例来说，假设内双星中的两个天体最初位于圆轨道上，且轨道半径远大于任一天体的物理半径。由于 $L_{z1}$ 守恒，除非 $L_{z1}$ 接近零，否则这两个天体不会发生碰撞；而这又要求内双星与外轨道之间的初始倾角接近 90°。相比之下，更现实的 ZLK 振荡可使天体在广泛的初始倾角范围内发生碰撞。

这些考量促使人们进行比经典 ZLK 理论更精确的分析。一种方法是在远处天体产生的引力势中加入八极项，同时继续对内轨道和外轨道进行平均；这有时称为“偏心”ZLK 理论，因为轨道平均后的八极势只有在外轨道的偏心率非零时才不会消失，如方程（23）所示。八极势为 $\Phi_{\text{八极}} \sim Gm_2 a_1^3/a_2^4$，八极摄动的相对强度为

$$\frac{\Phi_{\text{oct}}}{\Phi_{\text{K}}} \sim \frac{m_2}{m_0+m_1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4, \tag{3}$$

比 $\epsilon^2$ 小，差值因子为 $a_1/a_2$。

第二种方法是允许外轨道对内轨道的变化作出响应。外轨道中的摄动通常比内轨道中的小，二者之比为角动量 $L_1/L_2$，因此根据方程（19），这些效应的相对强度为

$$\frac{\Phi_{\text{quad}}}{\Phi_{\text{Kep}}}\frac{L_1}{L_2} \sim \frac{m_0 m_1 (m_0+m_1+m_2)^{1/2}}{(m_0+m_1)^{5/2}} \frac{a_1^{7/2}}{a_2^{7/2}} \frac{(1-e_1^2)^{1/2}}{(1-e_2^2)^{1/2}}. \tag{4}$$

当然，在常见的情形下，这些效应可以忽略不计，即 $m_1 \ll m_0$, $m_2$（例如，卫星绕行星运行）。

提高精度的另一种途径，是考虑内双星轨道所受的非线性四极摄动。远处天体产生的四极哈密顿量可示意性地写成若干如下形式的项之和：$A_{k_1k_2}\exp[i(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)]$ 其中，$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 分别是内、外双星的平平均经度，$k_1$ 和 $k_2$ 是整数，而 $A_{k_1k_2}$ 是作用量及其他角变量的函数，其量级相对于开普勒哈密顿量为 $\epsilon^2$。$k_1 = 0$ 对应于对内双星轨道上的哈密顿量取平均，有时称为“单重平均”哈密顿量。$k_1 = k_2 = 0$ 对应于双重平均哈密顿量。在正则摄动理论中，周期项——即双重平均哈密顿量中各项的补项——通过正则变换被抑制；该变换将旧的作用量和角变量变为新的作用量和角变量，两者相差的比例量级为 $\epsilon^2 n_1/(k_1n_1+k_2n_2)$，其中 $n_1$ 和 $n_2$ 是平均运动。这种正则变换会产生一个新的哈密顿量，其中包含与平平均经度无关的项，这些项相对于开普勒哈密顿量的量级为 $\epsilon^4 n_1/(k_1n_1+k_2n_2)$。其中最大的项满足 $k_1 = 0$，因为 $n_1 \gg n_2$，这意味着最强的非线性效应可由单重平均哈密顿量推导出来。因此，这种摄动的相对强度为

$$\epsilon^4\frac{n_1}{n_2} \sim \frac{m_2^2}{(m_0+m_1)^{3/2}(m_0+m_1+m_2)^{1/2}}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{9/2}. \tag{5}$$

当 $m_2 \gtrsim m_0+m_1$ 这一表达式简化为

$$\frac{n_2^3}{n_1^3} \sim \epsilon^3. \tag{6}$$

层级系统的一个微妙之处在于，尽管这一阶的效应源自二阶摄动，但其振幅是 $\sim\epsilon^3$ 而不是 $\epsilon^4$。以这种方式推导出的哈密顿量有时称为“二阶”哈密顿量，尽管它的阶数为 $\epsilon^3$；为避免混淆，我们将其称为 Brown 哈密顿量，以纪念 E. W. Brown。Brown 首先研究了该哈密顿量在任意倾角和偏心率下的性质（Brown1936a，b，c）。Brown 哈密顿量见方程（50）。在许多层级三体系统中，Brown 哈密顿量的效应与八极哈密顿量的效应或外轨道的变化相当，甚至更强，因此在旨在改进经典分析的 ZLK 振荡研究中应将其纳入考虑。本文的主要目标是推导 Brown 哈密顿量，并探究其某些性质。

从历史上看，最初研究这些问题，是为了理解由地球（天体 0）、月球（天体 1）和太阳（天体 2）组成的三体系统中，月球近心点经度和升交点的平均进动速率，$\dot{\varpi}_1$ 以及 $\dot{\Omega}_1$。若忽略八极势，并假设月球偏心率及其相对于黄道的倾角较小，则有（Brouwer & Clemence 1961年）

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_1}\frac{d\varpi_1}{dt} &= \tfrac{3}{4}\epsilon^2 + \tfrac{225}{32}\epsilon^3 + \tfrac{4\,071}{128}\epsilon^4 + \tfrac{265\,493}{2\,048}\epsilon^5 + O(\epsilon^6),\\ \frac{1}{n_1}\frac{d\Omega_1}{dt} &= -\tfrac{3}{4}\epsilon^2 + \tfrac{9}{32}\epsilon^3 + \tfrac{273}{128}\epsilon^4 + \tfrac{9\,797}{2\,048}\epsilon^5 + O(\epsilon^6).\end{aligned} \tag{7}$$

仅在此方程中，$\epsilon$ 恰好等于 $n_2/n_1$，对于地月日系统，该值为 0.0748。与 $\epsilon^2$ 成正比的项对应于经典 ZLK 理论，而与 $\epsilon^3$ 成正比的项则源自 Brown 哈密顿量[1]。关于 $\dot{\varpi}$ 的级数展开至 $\epsilon^{11}$ 由Hill (1894) 给出；关于 $\dot{\Omega}$ 的级数展开至 $\epsilon^6$ 则由Delaunay (1860、1867) 给出。

Newton 已知 $\epsilon^2$ 阶项。不幸的是，$\dot{\varpi}$ 的级数收敛速度出了名地慢：尽管 $\epsilon \lesssim 0.1$，由级数首项得到的 $\dot{\varpi}$ 值仍比精确结果小 2.04257 倍。

过去已有多位作者研究过 Brown 哈密顿量。除了 E. W. Brown 最初受层级三合星系统启发撰写的论文（Brown1936a,b,c）外，Söderhjelm (1975)、Ćuk 与 Burns (2004)、Breiter 与 Vokrouhlický(2015)、Luo 等人(2016) 等也给出了哈密顿量的显式公式。然而，这些论文中的公式采用了不同的假设和不同的符号；有趣的是，即使消除了这些差异，公式往往仍不一致。本文的目标之一就是解决这些矛盾。

## 2 分析

### 2.1 轨道平均哈密顿量

我们研究一个层级三体系统，该系统由一个内双星和一个第三体组成：内双星的质量分别为 $m_0$ 和 $m_1$，第三体的质量为 $m_2$，并沿着一个大得多的轨道绕该双星运行。

令 $\mathbf{x}_i, i = 0, 1, 2$，表示三个天体在惯性参考系中的位置。我们使用雅可比坐标和动量（$\mathbf{r}_i$，$\mathbf{p}_i$），$i = 0, 1, 2$。坐标 $\mathbf{r}_0$ 表示三个天体的质心位置，$\mathbf{r}_1$ 是从 $m_0$ 到 $m_1$ 的矢量，而 $\mathbf{r}_2$ 是从

[1] 附录中对此进行了明确说明。

$m_0$ 和 $m_1$ 的质心到 $m_2$的矢量；因此

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_0\mathbf{x}_0 + m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_0+m_1+m_2},$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{m_0\mathbf{x}_0 + m_1\mathbf{x}_1}{m_0+m_1}. \tag{8}$$

共轭动量为

$$\mathbf{p}_0 = m_0\dot{\mathbf{x}}_0 + m_1\dot{\mathbf{x}}_1 + m_2\dot{\mathbf{x}}_2,$$
$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_0m_1}{m_0+m_1}(\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_0),$$
$$\mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{m_0+m_1+m_2}[m_0(\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_0) + m_1(\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1)]. \tag{9}$$

雅可比坐标下的哈密顿量为

$$H = \frac{\mathbf{p}_0^2}{2(m_0+m_1+m_2)} + \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2} - \frac{Gm_0m_1}{r_1} - \frac{Gm_0m_2}{|\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1/(m_0+m_1)|} - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - m_0\mathbf{r}_1/(m_0+m_1)|}, \tag{10}$$

其中 $r_1 = |\mathbf{r}_1|$，约化质量为

$$\mu_1 = \frac{m_0m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu_2 = \frac{(m_0+m_1)m_2}{m_0+m_1+m_2}. \tag{11}$$

由于哈密顿量与 $\mathbf{r}_0$ 无关，总动量 $\mathbf{p}_0$ 守恒，因此我们可以选择一个使其为零的参考系。

现在，我们利用以下关系展开最后两项

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\gamma), \quad r < R, \tag{12}$$

其中，$P_l(\cos\gamma)$ 是勒让德多项式，而 $\cos\gamma = \mathbf{r}\cdot\mathbf{R}/(rR)$ 是向量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{R}$之间的夹角。单极、偶极、四极和八极项的阶数分别为 $l = 0, 1, 2, 3$。保留至 $l = 3$ 阶的项，可得

$$\begin{aligned}
&- \frac{Gm_0m_2}{|\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{r}_1/(m_0+m_1)|} - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - m_0\mathbf{r}_1/(m_0+m_1)|} \\
&= -\frac{Gm_2(m_0+m_1)}{r_2} - \frac{Gm_0m_1m_2}{2(m_0+m_1)r_2^5}\left[3(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2 - r_1^2r_2^2\right] \\
&\quad + \frac{Gm_0m_1m_2(m_1-m_0)}{2(m_0+m_1)^2r_2^7}\left[5(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^3 - 3r_1^2r_2^2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

现在，我们将哈密顿量改写为

$$H = H_{\rm K,in} + H_{\rm K,out} + H_{\rm quad} + H_{\rm oct} \tag{14}$$

其中开普勒哈密顿量为

$$H_{\rm K,in} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} - \frac{Gm_0m_1}{r_1}, \quad H_{\rm K,out} = \frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2} - \frac{Gm_2(m_0+m_1)}{r_2}, \tag{15}$$

而四极和八极哈密顿量为

$$H_{\rm quad} = \frac{Gm_0m_1m_2}{2(m_0+m_1)r_2^5}[r_1^2r_2^2 - 3(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2], \tag{16}$$
$$H_{\rm oct} = \frac{Gm_0m_1m_2(m_1-m_0)}{2(m_0+m_1)^2r_2^7}[(5(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^3 - 3r_1^2r_2^2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)].$$

如果我们对内轨道上的哈密顿量取时间平均（“单次-平均”），则得到

$$\langle H_{\rm quad}\rangle_t = \frac{Gm_0m_1m_2a_1^2}{4(m_0+m_1)r_2^5}[3(\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2 - 15(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2 + (6e_1^2-1)r_2^2],$$
$$\langle H_{\rm oct}\rangle_t = \frac{5Gm_0m_1m_2(m_1-m_0)a_1^3}{16(m_0+m_1)^2r_2^7}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{r}_2 \times [15(\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2 - 35(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2 + (24e_1^2-3)r_2^2], \tag{17}$$

其中，$a_1$ 是内双星的半长轴，$\mathbf{e}_1$ 是偏心率矢量，它从原点 $m_0$ 指向$m_1$ 的近心点，大小为 $|\mathbf{e}_1| = e_1$；而$\mathbf{j}_1$ 是无量纲角动量，它平行于内双星的角动量矢量，大小为 $|\mathbf{j}_1| = (1-e_1^2)^{1/2}$。利用以下关系，可以将此处及下文中的类似表达式转换为相对于给定 $(x, y, z)$ 坐标系的轨道根数

$$\begin{aligned}
e_x &= e\cos\Omega\cos\omega - e\cos I\sin\Omega\sin\omega, \\
e_y &= e\sin\Omega\cos\omega + e\cos I\cos\Omega\sin\omega, \\
e_z &= e\sin I\sin\omega, \\
j_x &= (1-e^2)^{1/2}\sin I\sin\Omega, \\
j_y &= -(1-e^2)^{1/2}\sin I\cos\Omega, \\
j_z &= (1-e^2)^{1/2}\cos I,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\omega$ 是近心点幅角，$\Omega$ 是升交点经度，$I$ 是倾角。

在本文中，我们通常忽略外双星轨道的变化。只要外双星的角动量 $L_2$ 远大于内双星的角动量 $L_1$，这种近似就是合理的；这一判据可改写为

$$\frac{L_2^2}{L_1^2} = \frac{m_2^2(m_0+m_1)^3}{m_0^2m_1^2(m_0+m_1+m_2)}\frac{a_2}{a_1}\frac{1-e_2^2}{1-e_1^2} \gg 1. \tag{19}$$

由于 $a_2 \gg a_1$ 在任意层级三体系统中，除非 $m_2 \ll m_0+m_1$ 或 $1-e_2 \ll 1$，这一不等式通常都成立。关于不采用这一假设的处理方法，参见Ford 等人（2000）。

由于外双星轨道固定，我们采用一个惯性坐标系，其中正 $x$轴平行于$\mathbf{e}_2$，正$z$轴平行于$\mathbf{j}_2$。因此，外轨道平面就是赤道面，外双星的近心点位于 $x$轴上。

偏心率矢量$\mathbf{e}_1$ 和无量纲角动量矢量$\mathbf{j}_1$ 的运动方程为（Milankovich1939；Tremaine 等人 2009）

$$\frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = -\frac{1}{[G(m_0+m_1)a_1]^{1/2}}\left(\mathbf{j}_1\times\frac{\partial\langle H\rangle_t}{\partial\mathbf{j}_1} + \mathbf{e}_1\times\frac{\partial\langle H\rangle_t}{\partial\mathbf{e}_1}\right)$$
$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = -\frac{1}{[G(m_0+m_1)a_1]^{1/2}}\left(\mathbf{e}_1\times\frac{\partial\langle H\rangle_t}{\partial\mathbf{j}_1} + \mathbf{j}_1\times\frac{\partial\langle H\rangle_t}{\partial\mathbf{e}_1}\right). \tag{20}$$

其中，$\langle H\rangle_t$ 是相关的轨道平均哈密顿量，而 $a_1$内双星的半长轴在轨道平均近似下保持不变。

内开普勒哈密顿量 $H_{\rm K,}$ 的角-作用量变量为$l_1$，$\omega_1$，$\Omega_1$ 其共轭动量（德洛内变量）为

$$\Lambda_1 = \frac{m_0m_1}{m_0+m_1}[G(m_0+m_1)a_1]^{1/2},$$
$$L_1 = \Lambda_1(1-e_1^2)^{1/2},$$
$$L_{z1} = L_1\cos I_1. \tag{21}$$

如果我们还对哈密顿量沿外轨道进行时间平均

（“双重平均”），则有

$$\begin{aligned}\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t &= \frac{Gm_0m_1m_2a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^{3/2}}\\ &\quad\times\left[1-6e_1^2-3(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2\right] \qquad (22)\\ &= \frac{Gm_0m_1m_2a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^{3/2}}\\ &\quad\times\left(3\sin^2 I_1-2-3e_1^2-3e_1^2\sin^2 I_1+15e_1^2\sin^2 I_1\sin^2\omega_1\right).\end{aligned}$$

在这些方程中，$a_2$ 和 $e_2$ 分别是外双星的半长轴和偏心率。我们还引入了平行于外双星偏心率矢量和角动量矢量的单位向量 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{J}}_2$。

我们还将使用双重平均八极哈密顿量

$$\begin{aligned}\langle\langle H_{\rm oct}\rangle\rangle_t &= \frac{15Gm_0m_1m_2(m_0-m_1)a_1^3}{64(m_0+m_1)^2a_2^4(1-e_2^2)^{5/2}}e_2\\ &\quad\times\Big\{\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2\left[8e_1^2-1+5(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2-35(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2\right]\\ &\qquad+10(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\Big\}\\ &= \frac{15Gm_0m_1m_2(m_0-m_1)a_1^3}{64(m_0+m_1)^2a_2^4(1-e_2^2)^{5/2}}e_1e_2\\ &\quad\times\Big\{(\cos\Omega_1\cos\omega_1-\cos I_1\sin\Omega_1\sin\omega_1)\left[8e_1^2-1\right.\\ &\qquad\left.+5(1-e_1^2)\cos^2 I_1-35e_1^2\sin^2 I_1\sin^2\omega_1\right]\\ &\qquad+10(1-e_1^2)\sin^2 I_1\cos I_1\sin\omega_1\sin\Omega_1\Big\}. \qquad (23)\end{aligned}$$

请注意，当外双星处于圆轨道，或两个内层组成体的质量相等时，八极哈密顿量为零。

### 2.2 Brown 哈密顿量

我们的目标是评估单重平均四极哈密顿量 $\langle H_{\rm 四极}\rangle_t$（方程17）在摄动强度 $\epsilon$ 更高阶下远处天体摄动的长期效应。我们采用庞加莱–冯·齐佩尔摄动理论来处理这个问题，通过正则变换引入新的坐标和动量，从而消除运动方程中的长期项。

由于我们已经对内双星的轨道运动进行了平均，其半长轴是固定的，因此可以将研究范围限制在具有两个自由度的相空间中，其坐标为 $\omega_1$ 和 $\Omega_1$，共轭动量为 $L_1$ 和 $L_{z1}$。

为了尽可能一般地进行分析，引入虚时间 $\tau$ 很有用；在外双星的一个轨道周期内，它从 0 变化到 $2\pi$。因此，$\tau = l_2 + g(l_2)$，其中 $l_2$ 是外双星的平近点角，而 $g(l_2)$ 是周期为 $2\pi$ 的奇周期函数，且 $g'(l_2) > -1$。若将单重平均四极哈密顿量 $\langle H_{\rm quad}\rangle_t$ 替换为下式，则作用量和角变量在虚时间下满足哈密顿方程：

$$\epsilon^2 H_\tau(\mathbf{q},\mathbf{p},\tau)\equiv\epsilon^2 w(\tau)\langle H_{\rm quad}\rangle_t \text{ where } w(\tau)\equiv\frac{1}{n_2[1+g'(\ell_2)]}. \qquad (24)$$

这里，$\epsilon$ 是由方程（1）或（2）定义的阶次参数，稍后将设为单位值；$\langle H_{\rm quad}\rangle_t$ 通过外部天体位置随时间的变化而依赖于时间 $t$。$n_2 = [G(m_0+m_1+m_2)a_2^3]^{1/2}$（），而（）//是外双星的平均运动。

请注意，对于任意量 $X$，时间平均 $\langle X\rangle_t$ 与 $\tau$ 平均 $\langle w(\tau)X\rangle_\tau$ 之间的关系为

$$\langle w(\tau)X\rangle_\tau = \frac{1}{n_2}\langle X\rangle_t. \qquad (25)$$

设 $S(\mathbf{q},\ \mathbf{p}',\ \tau) = \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}' + \epsilon s(\mathbf{q},\ \mathbf{p}',\ \tau)$ 是变换到新变量 $(\mathbf{q}',\ \mathbf{p}')$ 的正则变换生成函数。那么

$$\mathbf{q}' = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{p}'} = \mathbf{q} + \epsilon\frac{\partial s}{\partial\mathbf{p}},\quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{p}' + \epsilon\frac{\partial s}{\partial\mathbf{q}}. \qquad (26)$$

变换后的哈密顿量为

$$\begin{aligned}\epsilon^2 H'_\tau(\mathbf{q}',\mathbf{p}',\tau) &= \epsilon^2 H_\tau(\mathbf{q},\mathbf{p},\tau) + \epsilon^2\frac{\partial s}{\partial\tau}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\tau)\\ &= \epsilon^2 H_\tau + \epsilon^2\frac{\partial s}{\partial\tau} + \epsilon^3\sum_i\left(-\frac{\partial H_\tau}{\partial q'_i}\frac{\partial s}{\partial p'_i}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial H_\tau}{\partial p'_i}\frac{\partial s}{\partial q'_i}-\frac{\partial^2 s}{\partial q'_i\partial\tau}\frac{\partial s}{\partial p'_i}\right)+\mathrm{O}(\epsilon^4), \qquad (27)\end{aligned}$$

其中，最后一个方程中的所有函数均在带撇号坐标和动量处求值。注意，由于 $s$ 随外双星的轨道频率变化，而外双星的轨道频率为 $\epsilon$阶，因此项 $\partial s/\partial\tau$ 为 $\epsilon^2$阶。

我们将固定相空间坐标下 $H_\tau$ 关于虚时间的平均值记为 $\langle H_\tau\rangle_\tau$，并写作 $\{H_\tau\}_\tau = H_\tau - \langle H_\tau\rangle_\tau$。现在令

$$\frac{\partial s}{\partial\tau} = -\{H_\tau\}_\tau. \qquad (28)$$

对该关系积分即可确定生成函数 $s(\mathbf{q},\mathbf{p}',\tau)$，并且可以选择积分常数，使得 $\langle s\rangle_\tau = 0$。因此，带撇号与不带撇号的坐标和动量之差也会发生振荡。于是

$$\begin{aligned}\epsilon^2 H'_\tau(\mathbf{q}',\mathbf{p}',\tau) &= \epsilon^2\langle H_\tau\rangle_\tau\\ &\quad+\epsilon^3\sum_i\left(-\frac{\partial\langle H_\tau\rangle_\tau}{\partial q'_i}\frac{\partial s}{\partial p'_i}+\frac{\partial H_\tau}{\partial p'_i}\frac{\partial s}{\partial q'_i}\right)+\mathrm{O}(\epsilon^4).\end{aligned} \qquad (29)$$

现在我们可以对哈密顿量关于虚时间取平均，得到

$$\epsilon\langle H'_\tau(\mathbf{q}',\mathbf{p}',t)\rangle_\tau = \epsilon^2\langle H_\tau\rangle_\tau + \epsilon^3\sum_i\left\langle\frac{\partial H_\tau}{\partial p'_i}\frac{\partial s}{\partial q'_i}\right\rangle_\tau + \mathrm{O}(\epsilon^4). \qquad (30)$$

在此方程中，括号内方程（29）的第一项在取平均后消失，因为第一个因子为常数，而第二个因子的平均值为零。

现在我们对记号做几处调整。舍去所有阶数为 $\mathrm{O}(\epsilon^4)$ 或更高的项。去掉坐标和动量上的撇号；这是可以接受的，因为带撇号和不带撇号的变量仅相差 $\mathrm{O}(\epsilon)$ 的涨落项。我们还令 $\epsilon = 1$。此外

$$\begin{aligned}\langle H_\tau\rangle_\tau &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\tau)d\tau\,\langle H_{\rm quad}\rangle_t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^P dt\langle H_{\rm quad}\rangle_t = \frac{1}{n_2}\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t, \qquad (31)\end{aligned}$$

方程（22）的双重平均哈密顿量。因此，我们对四极哈密顿量的最终近似为

$$\frac{1}{n_2}\left(\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t + H_{\rm B}\right), \qquad (32)$$

其中 Brown 哈密顿量为

$$H_{\rm B} \equiv n_2 \left\langle w(\tau) \frac{\partial \langle H_{\rm quad}\rangle_t}{\partial L_1} \frac{\partial s}{\partial \omega_1} + w(\tau) \frac{\partial \langle H_{\rm quad}\rangle_t}{\partial L_{z1}} \frac{\partial s}{\partial \Omega_1} \right\rangle_\tau$$
$$= \frac{n_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\tau) d\tau \left( \frac{\partial \langle H_{\rm quad}\rangle_t}{\partial L_1} \frac{\partial s}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \langle H_{\rm quad}\rangle_t}{\partial L_{z1}} \frac{\partial s}{\partial \Omega_1} \right). \quad (33)$$

单重平均四极势（17）可写为

$$\langle H_{\rm quad}\rangle_t = \frac{G m_0 m_1 m_2 a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^3} \big[\alpha(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) F_\alpha(e_2,\tau)$$
$$+ \beta(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) F_\beta(e_2,\tau) + \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) F_\gamma(e_2,\tau)\big], \quad (34)$$

其中

$$F_\alpha(e,\tau) = (1+e\cos f_2)^3 \cos 2f_2,$$
$$F_\beta(e,\tau) = (1+e\cos f_2)^3 \sin 2f_2,$$
$$F_\gamma(e,\tau) = (1+e\cos f_2)^3; \quad (35)$$

在这些方程中，外双星的真近点角 $f_2$ 被视为虚时间 $\tau$的函数。我们还有

$$\alpha(\mathbf{e},\mathbf{j}) = 3j_x^2 - 3j_y^2 - 15e_x^2 + 15e_y^2,$$
$$\beta(\mathbf{e},\mathbf{j}) = 6j_x j_y - 30 e_x e_y,$$
$$\gamma(\mathbf{e},\mathbf{j}) = 12e^2 - 2 + 3j_x^2 + 3j_y^2 - 15e_x^2 - 15e_y^2$$
$$= 1 - 6e^2 - 3j_z^2 + 15e_z^2. \quad (36)$$

不难证明

$$\langle F_\alpha\rangle_t = \langle F_\beta\rangle_t = 0, \quad \langle F_\gamma\rangle_t = (1-e_2^2)^{3/2}. \quad (37)$$

因此，双重平均四极哈密顿量为

$$\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t = \frac{G m_0 m_1 m_2 a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^3} \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) \langle F_\gamma(e_2,f_2)\rangle_t$$
$$= \frac{G m_0 m_1 m_2 a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^{3/2}} \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1), \quad (38)$$

与方程（22）一致。

单重平均哈密顿量的振荡部分为

$$\{H_\tau\}_\tau = H_\tau - \langle H_\tau\rangle_\tau = w(\tau)\langle H_{\rm quad}\rangle_t - \frac{1}{n_2}\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t$$
$$= \frac{G m_0 m_1 m_2 a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^3} \big[\alpha(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) w(\tau) F_\alpha(e_2,f_2)$$
$$+ \beta(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) w(\tau) F_\beta(e_2,f_2) + \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1) w(\tau) F_\gamma(e_2,f_2)$$
$$- \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1)(1-e_2^2)^{3/2}/n_2\big]. \quad (39)$$

我们定义

$$G_\alpha(e,\tau) \equiv \int_0^\tau w(\tau') d\tau' F_\alpha(e,\tau'),$$
$$G_\beta(e,\tau) \equiv \int_0^\tau w(\tau') d\tau' F_\beta(e,\tau'),$$
$$G_\gamma(e,\tau) \equiv \int_0^\tau w(\tau') d\tau' F_\gamma(e,\tau') - (1-e^2)^{3/2}\tau/n_2. \quad (40)$$

注意

$$0 = \langle F_\alpha\rangle_t = \frac{n_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\tau) d\tau\, F_\alpha(e,\tau) = \frac{n_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau\, dG_\alpha(e,\tau)/d\tau$$
$$= \frac{n_2}{2\pi}[G_\alpha(2\pi) - G_\alpha(0)]. \quad (41)$$

因此，$G_\alpha(e,\tau)$ 是周期性的；$G_\beta(e,\tau)$ 也是如此，而 $G_\gamma(e,\tau) - \langle G_\alpha - \langle G_\alpha\rangle_\tau\rangle_\tau$ 也是如此。我们将 $G_\alpha(e,\tau)$ 的波动部分定义为 $\{G_\alpha\}$，并以类似方式定义 $\{G_\beta\}_\tau$ 和 $\{G_\gamma\}_\tau$。由于它是近点角 $f$ 的奇函数，$G_\alpha(e,\tau)$ 是奇函数，因此 $\langle G_\alpha\rangle_\tau = 0$ and $\{G_\alpha\}_\tau = G_\alpha$。类似地，$\{G_\gamma\}_\tau = G_\gamma$。

现在我们可以对方程（28）积分，得到正则变换，

$$s = -\frac{G m_0 m_1 m_2 a_1^2}{8(m_0+m_1)a_2^3(1-e_2^2)^3} \Big[\alpha(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1)\{G_\alpha(e_2,\tau)\}_\tau$$
$$+ \beta(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1)\{G_\beta(e_2,\tau)\}_\tau + \gamma(\mathbf{e}_1,\mathbf{j}_1)\{G_\gamma(e_2,\tau)\}_\tau\Big]. \quad (42)$$

我们只使用 $G\{\alpha,\beta,\gamma\}(e_2,\tau)$的振荡部分，以确保$\langle s\rangle_\tau = 0$。

为了计算方程（33）中的轨道平均，我们需要计算诸如 $w(\tau)F_\alpha\{G_\alpha\}_\tau$, $w(\tau)F_\alpha\{G_\beta\}_\tau$ 等乘积的轨道平均。我们假设虚时间是平近点角的奇函数，正如真近点角一样。因此，$w(\tau)$、$F_\alpha(e,\tau)$ 和 $F_\gamma(e,\tau)$ 是虚时间的偶函数，而 $F_\beta(e,\tau)$ 是奇函数。同样，$\{G_\alpha(e,\tau)\}_\tau$和 $\{G_\gamma(e,\tau)\}_\tau$是奇函数，而 $\{G_\beta(e,\tau)\}_\tau$是偶函数。因此，只有四个非零乘积。此外，

$$\langle w(\tau)F_\alpha\{G_\beta\}_\tau\rangle_\tau = \left\langle \frac{d\{G_\alpha\}_\tau}{d\tau}\{G_\beta\}_\tau \right\rangle_\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\{G_\alpha(\tau)\}_\tau\{G_\beta(\tau)\}_\tau\big|_0^{2\pi} - \left\langle \{G_\alpha\}_\tau \frac{d\{G_\beta\}}{d\tau}\right\rangle_\tau$$
$$= -\langle w(\tau)F_\beta\{G_\alpha\}_\tau\rangle_\tau. \quad (43)$$

同样，$\langle w(\tau)F_\beta\{G_\gamma\}_\tau\rangle_\tau = -\langle w(\tau)F_\gamma\{G_\beta\}_\tau\rangle_\tau$。因此，我们需要的关系仅由两个新函数概括：

$$A(e_2) \equiv \frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\langle w(\tau)F_\alpha\{G_\beta\}_\tau\rangle_\tau$$
$$= -\frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\langle w(\tau)F_\beta\{G_\alpha\}_\tau\rangle_\tau,$$
$$C(e_2) \equiv \frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\langle w(\tau)F_\beta\{G_\gamma\}_\tau\rangle_\tau$$
$$= -\frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\langle w(\tau)F_\gamma\{G_\beta\}_\tau\rangle_\tau. \quad (44)$$

因此，方程（33）给出

$$H_{\rm B} = \frac{G^{3/2} m_0^2 m_1^2 m_2^2 a_1^4}{64(m_0+m_1)^2(m_0+m_1+m_2)^{1/2} a_2^{9/2}}$$
$$\times \big[A(e_2)\{\alpha,\beta\}_{\rm P} + C(e_2)\{\beta,\gamma\}_{\rm P}\big] \quad (45)$$

Here

$$\{\alpha,\beta\}_{\rm P} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\right)$$
$$= \frac{\partial\alpha}{\partial\omega_1}\frac{\partial\beta}{\partial L_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}\frac{\partial\beta}{\partial L_{z1}} - \frac{\partial\beta}{\partial\omega_1}\frac{\partial\alpha}{\partial L_1} - \frac{\partial\beta}{\partial\Omega}\frac{\partial\alpha}{\partial L_{z1}} \quad (46)$$

是一个泊松括号。

泊松括号最容易通过以下关系式求得

$$\{j_i,j_j\}_{\rm P} = \frac{1}{\Lambda_1}\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} j_k, \quad \{e_i,e_j\}_{\rm P} = \frac{1}{\Lambda_1}\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} j_k,$$
$$\{e_i,j_j\}_{\rm P} = \{j_i,e_j\}_{\rm P} = \frac{1}{\Lambda_1}\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} e_k, \quad (47)$$

其中$\epsilon_{ijk}$是反对称张量，且 $\Lambda_1$ 由方程（21）给出。

泊松括号为

$$\begin{aligned}\{\alpha,\beta\}_{\rm P} &= \frac{36(m_0+m_1)^{1/2}}{m_0m_1(Ga_1)^{1/2}}(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\big[24e_1^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2\\ &\quad-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+1\big],\\ \{\beta,\gamma\}_{\rm P} &= \frac{36(m_0+m_1)^{1/2}}{m_0m_1(Ga_1)^{1/2}}\big\{(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)[1-2(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)^2-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2\\ &\quad+4e_1^2-10(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2]\\ &\quad-20(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\big\}.\end{aligned}\tag{48}$$

其中$\hat{\mathbf{j}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 是分别平行于外轨道角动量和偏心率矢量的单位向量。用轨道根数表示，

$$\begin{aligned}\{\alpha,\beta\}_{\rm P} &= \frac{36(m_0+m_1)^{1/2}\cos I_1(1-e_1^2)^{1/2}}{m_0m_1(Ga_1)^{1/2}}\\ &\quad\times\left[1+24e_1^2-(1-e_1^2)\cos^2 I_1-15e_1^2\sin^2 I_1\sin^2\omega_1\right],\\ \{\beta,\gamma\}_{\rm P} &= \frac{9(m_0+m_1)^{1/2}(1-e_1^2)^{1/2}}{m_0m_1(Ga_1)^{1/2}}\\ &\quad\times\big\{2\cos I_1\sin^2 I_1(2-17e_1^2)\cos 2\Omega_1\\ &\quad-5e_1^2[(1-\cos I_1)^2(3\cos I_1+2)\cos 2(\omega_1-\Omega_1)\\ &\quad+(1+\cos I_1)^2(3\cos I_1-2)\cos 2(\omega_1+\Omega_1)]\big\}.\end{aligned}\tag{49}$$

现在可以将哈密顿量（45）写成

$$\begin{aligned}H_{\rm B} &= \frac{9Gm_0m_1m_2^2a_1^{7/2}}{16(m_0+m_1)^{3/2}(m_0+m_1+m_2)^{1/2}a_2^{9/2}}\\ &\quad\times\Big[\!\!\Big[A(e_2)(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\big[24e_1^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+1\big]\\ &\quad+C(e_2)\big\{(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)[1-2(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)^2-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+4e_1^2\\ &\quad-10(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2]-20(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\big\}\Big]\!\!\Big].\end{aligned}\tag{50}$$

利用方程（18）或（49），可以用轨道根数重写该式。

Brown 哈密顿量体现了外部天体四极势的非线性效应——该哈密顿量与摄动质量的平方成正比 $m_2$ 在 $m_2 \ll m_0$的极限下，$m_1$。Lei、Circi 和 Ortore（Lei, Circi, & Ortore (2018年)给出了 Brown 哈密顿量在八极及更高阶势下的推广（但复杂得多的）对应形式。

Brown 哈密顿量 $H_{\rm B}$与双重平均的四极和八极哈密顿量 $\langle\!\langle H_{\rm quad}\rangle\!\rangle_t$ (方程 22) 和 $\langle\!\langle H_{\rm oct}\rangle\!\rangle_t$ (方程23)，以及 Milankovich 运动方程（20），共同决定了在忽略外双星轨道变化时内双星偏心率矢量和角动量矢量的长期演化。虚时间与实际时间不同，但这种差异仅以周期为 $2\pi/n_2$ 的振荡量为限，因此在计算内双星的长期演化时，可以用实际时间替代虚时间。

现在我们考察哈密顿量中的函数 $A(e_2)$ 和 $C(e_2)$，它们概括了 Brown 哈密顿量对外双星偏心率 $e_2$ 的依赖关系。

首先考虑方程（$G\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}(e,\ \tau)$）（40）中的定义。

由于 $w(\tau)d\tau = dt$，第一个可以写成

$$\begin{aligned}G_\alpha(e,\tau) &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n_2}\int_0^\tau\frac{df F_\alpha}{(1+e\cos f)^2}\\ &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n_2}\int_0^\tau df(1+e\cos f)\cos 2f\\ &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{3n_2}\sin f(3\cos f+2e+e\cos 2f),\end{aligned}\tag{51}$$

其中 $n_2 = [G(m_0+m_1+m_2)a_2^3]^{1/2}$ 是外双星的平均运动，而真近点角 $f$ 是虚时间 $\tau$的函数。

同样，

$$\begin{aligned}G_\beta(e,f) &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{6n_2}(3+4e-3e\cos f-3\cos 2f-e\cos 3f),\\ G_\gamma(e,f) &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n_2}(f+e\sin f-\tau).\end{aligned}\tag{52}$$

由方程（44）中的第一个方程可得，

$$A(e_2) = \frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\left[\langle w(\tau)F_\alpha G_\beta\rangle_\tau - \langle w(\tau)F_\alpha\rangle_\tau\langle G_\beta\rangle_\tau\right].\tag{53}$$

现在 $\langle w\ (\tau)\ F_\alpha\rangle_\tau = \langle F_\alpha\rangle_t/n_2$（方程 25），由方程（37）中的第一个方程可知该项为零。因此

$$A(e_2) = \frac{n_2}{(1-e_2^2)^6}\langle F_\alpha G_\beta\rangle_t;\tag{54}$$

利用方程（35）和（52）可以直接求得这个时间平均值，结果为

$$A(e_2) = -\frac{(3+2e_2^2)}{12(1-e_2^2)^3},\tag{55}$$

这一结果与所选择的虚时间 $\tau$ 无关。

同样，

$$C(e_2) = \frac{n_2^2}{(1-e_2^2)^6}\left[\langle w(\tau)F_\beta G_\gamma\rangle_\tau - \langle w(\tau)F_\beta\rangle_\tau\langle G_\gamma\rangle_\tau\right];\tag{56}$$

并且 $\langle w\ (\tau)\ F_\beta\rangle_\tau = \langle F_\beta\rangle_t/n_2$ 它从第二个方程（37）中消失。因此

$$\begin{aligned}C(e_2) &= \frac{1}{(1-e_2^2)^{9/2}}\langle(1+e_2\cos f)^3\sin 2f(f+e_2\sin f-\tau)\rangle_t\\ &= \frac{1}{(1-e_2^2)^3}\int_0^{2\pi}\frac{df}{2\pi}(1+e_2\cos f)\sin 2f(f+e_2\sin f-\tau).\end{aligned}\tag{57}$$

与 $A(e_2)$ 不同，函数 $C(e_2)$ 取决于虚时间 $\tau$ 的定义。由于 $\tau$ 是平近点角或真近点角的奇函数，我们可以写成

$$\tau = f + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\sin jf.\tag{58}$$

将此展开式代入方程（57）并计算积分，可得

$$C(e_2) = \frac{1}{(1-e_2^2)^3}\left[\tfrac{1}{4}e_2(e_2-a_1) - \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{4}e_2a_3\right].\tag{59}$$

系数 $a_4$、$a_5$ 等没有影响；因此 $C(e_2)$ 仅取决于三个参数 $a_1$，$a_2$，$a_3$。

我们不再用这些系数对 $C(e_2)$进行参数化，而是介绍三种具有物理依据的虚时间选取方式，它们涵盖了预期可能出现的行为范围。

**1. 虚时间 = 平近点角** 传统上，通常令$\tau = l = n_2 t$，其中$l$是平近点角，$n_2$是外双星的平均运动。因此，除相差一个比例常数外，虚时间与真实时间相同。

平近点角关于真近点角的标准傅里叶展开为（例如，Brouwer & Clemence 1961年，第 65 页）

$$a_1 = -2e_2,$$
$$a_2 = \frac{2}{e_2^2}[1-(1-e_2^2)^{1/2}]^2[\tfrac{1}{2}+(1-e_2^2)^{1/2}],$$
$$a_3 = -\frac{2}{e_2^3}[1-(1-e_2^2)^{1/2}]^3[\tfrac{1}{3}+(1-e_2^2)^{1/2}], \tag{60}$$

and

$$C(e_2) = \frac{1}{12e_2^2(1-e_2^2)^3}[4(1-e_2^2)^{3/2}-4+6e_2^2+3e_2^4]. \tag{61}$$

函数 $C(e_2)$ 由 $e_2 \to 0$ 定义，其极限为 $C(e_2) = 0$。

将方程（50）中的 $C(e_2)$ 替换为此表达式后，我们将该哈密顿量称为 $H_{B1}$。

**2. 虚时间 = 真近点角** 在此情况下 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$，且

$$C(e_2) = \frac{e_2^2}{4(1-e_2^2)^3}. \tag{62}$$

将 $C(e_2)$ 替换为此表达式后，我们将该哈密顿量称为 $H_{B2}$。

**3. 虚时间 = f + e sin f** 通过选择 $\tau = f + e\sin f$，我们有$a_1 = e$，$a_2 = 0, a_3 = 0$，因此

$$C(e_2) = 0. \tag{63}$$

对于 $C(e_2)$的这一表达式，我们将哈密顿量称为 $H_{B3}$。

这些例子表明，$C(e_2)$取决于虚时间与真实时间之间关系的选择。因此，如果外双星的轨道是偏心的，哈密顿量 $H_B$ 以及运动方程都会取决于虚时间的选择。然而，这种依赖性所导致的运动方程解仅相差振荡项，因此，对于任何虚时间，运动方程的长期解都相同。Brown 哈密顿量对虚时间选择的依赖性，可以看作是哈密顿量定义中的一种规范自由度。

鉴于这种自由度，选择方案 3 来定义虚时间，可以得到最简单的 Brown 哈密顿量表达式。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_B = H_{B3} &= -\frac{3Gm_0m_1m_2^2a_1^{7/2}(3+2e_2^2)}{64(m_0+m_1)^{3/2}(m_0+m_1+m_2)^{1/2}a_2^{9/2}(1-e_2^2)^3} \\ &\times(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\left[24e_1^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+1\right] \\ &= -\frac{3Gm_0m_1m_2^2a_1^{7/2}(3+2e_2^2)\cos I_1(1-e_1^2)^{1/2}}{64(m_0+m_1)^{3/2}(m_0+m_1+m_2)^{1/2}a_2^{9/2}(1-e_2^2)^3} \\ &\times[1+24e_1^2-(1-e_1^2)\cos^2 I_1-15e_1^2\sin^2 I_1\sin^2\omega_1]. \end{aligned} \tag{64}$$

注意，哈密顿量 $H_{B3}$ 与升交点经度 $\Omega_1$ 无关，因此共轭动量 $L_{z1}$ 守恒，$\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2$ 也守恒。因此，双重平均四极哈密顿量$\langle\langle H_{quad}\rangle\rangle_t$和 Brown 哈密顿量 $H_{B3}$ 都守恒 $L_{z1}$，所以在这些哈密顿量之和的作用下，运动是可积的。即使 $H_{B3}$ 远大于八极哈密顿量$\langle\langle H_{oct}\rangle\rangle_t$，纳入后者也很重要，因为它能使 $L_{z1}$ 发生变化，从而让系统探索更大的相空间区域。

## 3 与其他研究的比较

### 3.1 Brown（1936a、1936b、1936c）

本分析的大部分内容都见于 E. W. Brown（1936a、1936b、1936c）发表的三篇杰出论文。

双重平均八极哈密顿量（23）等价于 Brown (1936b）第 64 页以“$k_1k_2(\frac{5}{16}e+\cdots$”开头的方程，不过：(i) Brown 的表达式是 $-\langle\langle H_{oct}\rangle\rangle_t$；(ii) Brown 的表达式是单位质量对应的量，因此必须乘以内双星的约化质量，$m_0m_1/(m_0+m_1)$（方程 11）；(iii) Brown 的下一个方程中，$k_3$ 应替换为 $k_2$。本文还引入了以真近点角作为虚时间的概念（“问题及其解法之所以能够大大简化，主要就是由于这一改变”）。

Brown 的哈密顿量见Brown (1936c。在该论文中，相关哈密顿量在第 119 页写作$R' = R_c + \frac{1}{2}(R_f, S)_c$（括号是 Brown 用来表示泊松括号取负的记号）。要将其与我们的结果进行比较，必须：(i) 将情况限定为质量满足以下层级关系 $m_1 \ll m_0 \ll m_2$；(ii) 注意到$R'$是哈密顿量的负值；(iii) 去掉一个无关紧要的常数项；(iv) 将 $R'$ 乘以 $n_2$，即外双星的平均运动，因为 $R'$是虚时间 $\tau = f_2$ 而非真实时间对应的哈密顿量。经过这些变换，Brown 在第 121 页给出的 $R_c$ 表达式等价于我们关于双重平均四极哈密顿量的方程 (22)。

Brown 求出了 $R'$，$\frac{1}{2}(R_f, S)_c$中第二项的表达式，适用于外双星轨道为圆形的特殊情况（$e_2 = 0$）。在这种情况下，我们的 Brown 哈密顿量表达式，即方程（50）或（64），可简化为

$$\begin{aligned} \frac{H_B}{m_1} &= -\frac{9Gm_2^{3/2}a_1^{7/2}}{64m_0^{1/2}a_2^{9/2}}(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)\left[24e_1^2-15(\mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2-(\mathbf{j}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}_2)^2+1\right] \\ &= -\frac{9n_2^3a_1^2\cos I_1(1-e_1^2)^{1/2}}{128n_1} \\ &\times[2+33e_1^2+(17e_1^2-2)\cos^2 I_1+15e_1^2\sin^2 I_1\cos 2\omega_1] \end{aligned} \tag{65}$$

其中 $n_1 = (Gm_0/a_1^3)^{1/2}$ 是内双星的平均运动。这等价于 Brown 在第 121 页给出的$\frac{1}{2}(R_f, S)_c$ 表达式，正如Breiter 与 Vokrouhlický (2015)所指出的。

此外，Brown 在第 120 页指出，当外双星偏心率 $e_2$ 不为零时，Brown 哈密顿量可通过将方程（65）中的表达式乘以 $(1+\frac{2}{3}e_2^2)/(1-e_2^2)^3$得到；当（参见方程）时，这一结果等价于我们的表达式 $H_B$ $m_1 \ll m_0 \ll m_2$。

因此，本文和近期文献中的几乎所有重要结果都已包含在 Brown 1936 年的论文中。

### 3.2 Söderhjelm（1975）

Söderhjelm 的方程 (14) 给出了双重平均四极哈密顿量（22）——按其记号，正比于 $\frac{1}{2}k_1L_1$ 的项——与 Brown 哈密顿量 $H_{B3}$ ——正比于该项

于 $\frac{1}{2}k_1k_2L_1$。为将其与我们的结果[2] 进行比较，我们必须：(i) 注意到 Söderhjelm 的 $F$ 是哈密顿量的相反数；(ii) 将 $F$ 乘以 $n_2$，因为 $F$ 是虚时间下的哈密顿量 $f_2$。

### 3.3 Ćuk 与 Burns（2004）

Ćuk 与 Burns 在研究巨行星不规则卫星的运动时，考察了 Brown 哈密顿量。这里，内双星由巨行星和卫星组成，外部天体是太阳，因此 $m_1 \ll m_0 \ll m_2$。由于外行星的轨道偏心率很小，Ćuk 与 Burns 仅考虑外双星为圆形轨道的情况，即 $e_2 = 0$。于是，Brown 哈密顿量由方程（65）给出。按照 Ćuk 与 Burns 的符号，这个公式应与哈密顿量 $-(\langle R_E\rangle + \langle R_{E'}\rangle + \langle R_I\rangle)$进行比较，其中三项分别由他们的方程（21）、（27）和（32）定义。两者的公式并不一致。我们认为，这是因为 Ćuk 与 Burns 忽略了因偏心率变化（他们的方程 19）而导致的 $R_I$ 变化（他们的方程 13）。这些变化会使哈密顿量中多出一项，用他们的符号可写为

$$\langle R_{I'}\rangle = \tfrac{135}{128} m n_p^2 a^2 e^2 \sqrt{1-e^2}\,\sin^2 i \cos i \cos 2\omega. \tag{66}$$

那么我们发现 $-(\langle R_E\rangle + \langle R_{E'}\rangle + \langle R_I\rangle + \langle R_{I'}\rangle)$ 与 Brown 哈密顿量的第二个方程（65）一致。

### 3.4 Breiter 与 Vokrouhlický（2015）

Breiter 与 Vokrouhlický (2015) 对哈密顿量进行了展开，其中虚时间等于真实时间或平近点角。他们的所有结果都与我们的结果一致。具体而言，我们关于双重平均四极哈密顿量的第一个方程（22）等价于他们的方程（49）和（77）。我们关于双重平均八极哈密顿量的第一个方程（23）等价于他们的方程（78）和（79）。利用计算机代数，可以很容易地证明，他们关于 Brown 哈密顿量的方程（80）等价于我们的方程（50）和（61），对应哈密顿量 $H_{B1}$。

### 3.5 Luo、Katz 与 Dong（2016年）

Luo 等人使用真近点角作为虚时间来计算 Brown 哈密顿量（他们将这种分析称为“修正双重平均”或 CDA）。他们的方程（39）对应于我们的方程（50）和（62），适用于 $H_{B2}$，再乘以内双星的约化质量 $m_0m_1/(m_0+m_1)$（方程 11）。将他们的表达式转换为我们的形式时，我们利用关系式消去无量纲角动量矢量和偏心率矢量的 $y$ 分量：$j_y e_y = -j_x e_x - j_z e_z$（因为 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{e} = 0$）、$j_y^2 = 1 - e^2 - j_x^2 - j_z^2$（因为 $|\mathbf{j}|^2 = 1 - e^2$）以及 $e_y^2 = e^2 - e_x^2 - e_z^2$。

如果与.....相匹配，Luo 等人的方程（39）将大大简化

[2] 请注意，Söderhjelm 和 Will(2021年) 使用的坐标系中，正 $z$轴与系统的总角动量平行；而我们假设 $z$轴与外双星的角动量平行，正 $x$轴与外双星的偏心率矢量平行。在我们所假设的极限情况下，即外双星的角动量远大于内双星的角动量时，若轨道根数为 $I_2 = 0$，$\Omega_2 = \Omega_1 + \pi$ $\omega_2 = \pi - \Omega_1$ ，。

对哈密顿量 $H_{B3}$ 而非 $H_{B1}$。用他们的记号，式（39）变为

$$\Phi = -\epsilon_{\rm SA}\frac{27 G m_{\rm per} a^2}{64 b_{\rm per}^3}(1+\tfrac{2}{3}e_{\rm per}^2) j_z\left[(1-j_z^2)/3 + 8e^2 - 5e_z^2\right]. \tag{67}$$

### 3.6 Will（2021年）

Will 以轨道根数为变量，推导并分析了 Brown 哈密顿量所对应的运动方程。Will 直接处理运动方程，采用双时间尺度分析，从未写出 Brown 哈密顿量。尽管如此，利用计算机代数可以轻松验证，他的运动方程 (2.33) 与从 Brown 哈密顿量出发，将其写成轨道根数的形式 $H_{B1}$ 并应用拉格朗日方程描述根数随时间的演化（例如，Brouwer & Clemence 1961年、Murray & Dermott 1999年 或Tremaine（2023））所推导出的方程等价，但需：(i) 换算到 Will 的时间坐标，此时内双星的轨道周期为 1；(ii) 考虑到他对近心点经度采用了非标准定义 $\varpi$，即 $\dot\varpi = \dot\omega + \dot\Omega\cos I$ 而非通常的 $\dot\varpi = \dot\omega + \dot\Omega$；以及 (iii) 将 Brown 哈密顿量除以约化质量 $m_0m_1/(m_0+m_1)$，从而得到拉格朗日方程中使用的单位质量哈密顿量。

Will 的运动方程对应于使用平近点角作为虚时间，因此 $C(e_2)$ 由方程（61）给出。然而，他将自己的运动方程与 Luo 等人 (2016年) 的运动方程进行了比较，后者使用真近点角作为虚时间（方程 62）。正如 §2.2末尾的讨论所预期的那样，这两种方法中使用的轨道根数相差一些小的振荡项，Will 在其附录C中给出了这些项。纳入这些项后，Luo 等人 (2016年) 与 Will (2021年) 完全一致。

如果从哈密顿量 $H_{B3}$ 而不是 $H_{B1}$ 推导，Will 的运动方程（2.33）可以大幅简化。通过在他的方程（2.33）中设定 $H(E) = 0$，即可得到简化后的运动方程。

## 4 数值示例

我们开展了一些数值实验，以比较双重平均八极哈密顿量 $\langle H_{\rm oct}\rangle_t$ 与 Brown 哈密顿量的三个版本 $H_{B1}$、$H_{B2}$ 和 $H_{B3}$ 的影响。

在我们的第一个实验中，我们追踪一个测试粒子的运动。该粒子绕质量为 $m_0 = 1$ 的天体运行，而该天体又被另一个质量同为 $m_2 = 1$的第三体环绕。测试粒子的初始半长轴为 $a_1 = 1$，初始偏心率为 $e_1 = 0$。2。外部天体的半长轴为 $a_2 = 30$，偏心率为 $e_2 = 0.8$，并在赤道面内运行，其近心点位于正 $x$轴方向。在这些坐标中，测试粒子的初始倾角、近心点幅角和升交点经度分别为 $I_1 = 110^\circ$、$\omega_1 = 0$ 和 $\Omega_1 = \pi$。我们追踪测试粒子 50 000 个初始轨道周期，分别通过采用不同哈密顿量积分 Milankovich 方程 (20)，以及使用 rebound 软件包直接积分牛顿运动方程（Rein 和 Liu 2012）来完成。这些初始条件与 Luo 等人（2016）图 1 中的条件相似，不同之处在于，我们为外部天体选取了较大的偏心率（$e_2 = 0.8$，而非 0.2），以突出八极哈密顿量的贡献以及 Brown 哈密顿量各种形式的贡献差异；当 $e_2 \to 0$ 时，这些贡献都会消失。

轨迹的倾角和偏心率如图所示

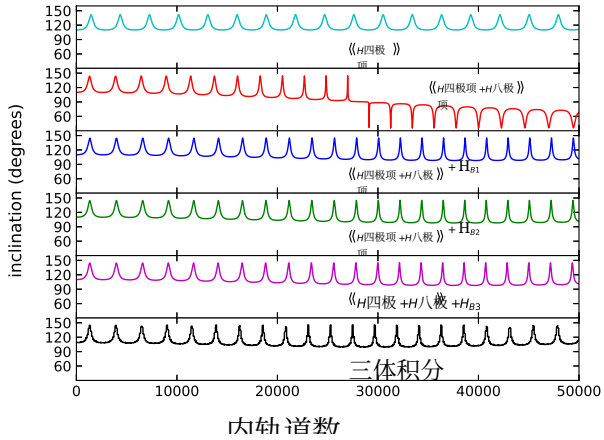


**图 1**。三体系统的长期演化。该系统由一个绕质量为 $m_1 = 1$、半长轴为 $a_1 = 1$、偏心率为 $e_1 = 0.2$ 的天体运行的测试粒子组成。质量为 $m_1$ 的天体还被另一个质量为 $m_2 = 1$、半长轴为 $a_2 = 30$、偏心率为 $e_2 = 0.8$ 的第三体环绕。轨道的其他参数见正文。图中展示了内双星经历 50000 个初始轨道周期内相互倾角的演化。底部面板展示了直接对运动方程进行三体积分的结果，顶部四个面板则展示了由米兰科维奇方程（20）描述的演化，分别采用：（i）双重平均四极哈密顿量（22）；（ii）双重平均四极哈密顿量加双重平均八极哈密顿量（23）；（iii）双重平均哈密顿量加 Brown 哈密顿量 $H_{\rm B1}$；（iv）双重平均哈密顿量加 Brown 哈密顿量 $H_{\rm B2}$；（v）双重平均哈密顿量加 Brown 哈密顿量 $H_{\rm B3}$。三种 Brown 哈密顿量给出的解均与三体积分结果吻合良好。

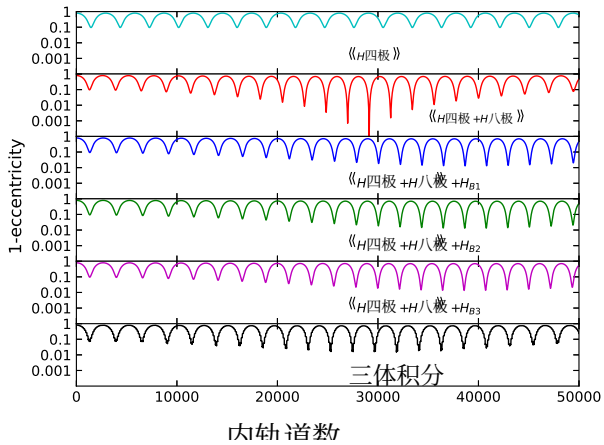


**图2**。与图1相同，只是此处绘出了内轨道的偏心率。

见图 1和 2。每幅图的底部面板显示了对牛顿三体运动方程进行直接积分的结果。顶部面板显示了对双重平均四极哈密顿量（方程（22））进行积分的结果。倾角和偏心率经历规则的反相 ZLK 振荡；请记住，对于该哈密顿量，角动量的 $z$ 分量 $j_z = (1 - e_1^2)^{1/2} \cos I_1$ 守恒，且运动是可积的。

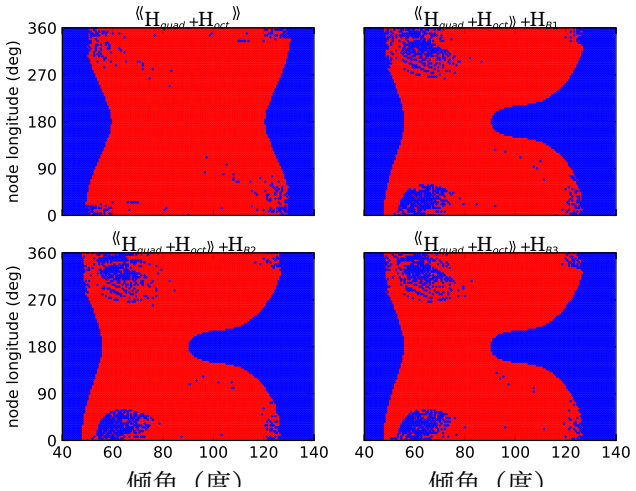


**图3**。发生轨道翻转的轨迹以红点表示，而未发生翻转（$\cos I_1$符号恒定）的轨迹以蓝色表示。初始轨道根数与图1 和2 相同，但倾角和升交点经度在所有可能的取值范围内扫描。每条轨道均积分 125 000 个初始轨道周期。对于 Brown 哈密顿量的三种形式，轨道翻转的分布基本相同。

第二个面板显示加入双重平均八极哈密顿量后的轨迹。运动变得更加复杂，尤其是出现了轨道翻转（偏心率几乎达到 1 时，倾角从逆行变为顺行：$1-e < 10^{-4}$），发生时间为 $t \simeq 29\,000$。接下来的三个面板展示了将 Brown 哈密顿量的三种表达式 $H_{\rm B1}$、$H_{\rm B2}$ 和 $H_{\rm B3}$ 分别加入双重平均四极和八极势后的效果。轨道翻转和大幅偏心率振荡均受到抑制；三种哈密顿量下的运动非常相似，也与直接三体积分非常相似（除了三体积分与采用 Brown 哈密顿量的三次积分之间，ZLK 振荡的相位存在适度的累积偏移）。这些发现与我们的结论一致：三种形式的 Brown 哈密顿量对应的运动方程解仅相差微小的振荡项。

图3 展示了一族轨迹行为的一个方面。这些轨迹的参数与图1 和2相同，区别在于倾角从40◦ 变化到140◦，升交点经度从 0 变化到360◦。每条轨迹均积分 125000 个初始轨道周期；若积分过程中发生翻转（$\cos I_1$ 变号），则以红点表示；若未发生翻转，则以蓝点表示。该图可直接与 Luo 等人（Luo 等人 (2016年）进行比较，后者也展示了直接三体积分的结果。主要结论是，对于 Brown 哈密顿量的三个版本以及三体积分，发生翻转的轨道几乎相同。

## 5 总结

层级三体系统中冯·齐佩尔–利多夫–科扎伊振荡（或称 ZLK 振荡）的经典理论，基于远处天体产生的双重平均四极势，也就是说，该势或哈密顿量是对内外天体的轨道取平均后得到的。该哈密顿量见方程（22），既可用无量纲角动量矢量$\mathbf{j}_1$ 和偏心率表示，

矢量 $\mathbf{e}_1$ 表示内轨道，也可用该轨道的轨道要素表示$a_1$， $e_1$， $I_1$， $\omega_1$和 $\Omega_1$（我们始终假定外轨道的角动量足够大，因此保持不变）。双重平均四极哈密顿量守恒内双星角动量在垂直于外双星轨道方向上的分量， $j_{1z} = \mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}_2 = (1-e_1^2)^{1/2} \cos I_1$，从而人为地限制了内双星可到达的相空间体积，尤其是禁止内双星的两个成员发生碰撞，除非 $j_{1z} \simeq 0$（若两个天体的半径之和远小于它们的半长轴）。通常通过在运动方程中纳入双重平均八极哈密顿量（23）的影响来弥补这一缺陷（例如，Naoz 2016），或者纳入内轨道摄动导致的外轨道要素变化。

如 §1 所述，当外部天体的质量与内双星中两个天体的总质量相当或更大时， $m_2 \gtrsim m_0 + m_1$，双重平均四极哈密顿量相对于内体开普勒哈密顿量的相对强度为 $O(\epsilon^2)$，其中 $\epsilon \sim n_2/n_1$ 是外部天体与内双星的平均运动之比。由方程（3）给出的八极势，其相对强度可写为 $O(\epsilon^2 a_1/a_2)$，比四极项小 $O(a_1/a_2)$。

相比之下，Brown 哈密顿量所描述的内双星轨道的非线性四极扰动，其影响相对于内体的开普勒哈密顿量（方程 6）为 $O(\epsilon^3)$。因此，只要满足以下条件，预计这些影响就会超过八极效应。

$$\frac{m_2}{m_0+m_1} \gtrsim \frac{a_2}{a_1} \tag{68}$$

（例如，在地月日系统中，左侧为 $3\,29\times$。右侧为 $10^5$）。该公式可能会让人觉得 $a_2 \gg a_1$ 质量相近的层级系统（ $m_0+m_1 \sim m_2$ ）中，可以忽略 Brown 哈密顿量的影响。然而，正如 §4 中的示例所示，情况并非总是如此。实际上，在几乎所有天体物理系统中，我们都应追踪 *Brown* 哈密顿量和八极哈密顿量两者的影响，因为：（i）哈密顿量中依赖于轨道根数的系数可能在很大范围内变化，而且 Brown 哈密顿量中的系数通常更大；（ii）在一些重要的特殊情况下，八极哈密顿量会消失，例如内双星或外双星的偏心率为零，或者内双星的两个质量相同。

在某些情况下，还应纳入：（i）内双星摄动导致的外轨道变化（例如，Ford 等（2000））；以及（ii）由广义相对论修正产生的主导轨道平均哈密顿量（例如，Tremaine（2023）），

$$H_{\rm gr} = -\frac{3G^4(m_0+m_1)^4}{c^2\Lambda_1^3 L_1} + \frac{15G^4(m_0+m_1)^4}{8c^2\Lambda_1^4} + O(c^{-4}), \tag{69}$$

其中 $c$ 是光速， $\Lambda_1$ 和 $L_1$ 是方程（21）中定义的德洛内元素。

文献中至少出现了三种不同形式的 Brown 哈密顿量。我们表明，这些形式源于轨道平均所采用的虚时间或近点角选择不同。不同形式的存在反映了用于消去运动方程中长期项的正则变换所具有的规范自由度；采用这三种哈密顿量求得的运动方程解之间存在微小摄动，这些摄动以外双星的轨道周期为时间尺度振荡。

总之，研究 ZLK 振荡时，应使用双重平均的四极和八极哈密顿量之和，以及 Brown 哈密顿量，来描述三体系统的演化。

。Brown 哈密顿量最简单的形式是方程（64<style'>），实际应用中应使用这种形式。

**致谢**

本研究部分由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）资助，资助编号为 RGPIN-2020-03885。感谢审稿人 Clifford Will 与我讨论，这些讨论澄清了我对相关问题的理解。

**数据可用性**

如有合理请求，我们将共享本文所用的代码。

**参考文献**

Breiter S., Vokrouhlický D., 2015, MNRAS, 449, 1691 Brouwer D., Clemence G.M., 1961年, 《天体力学方法》. 学术出版社, 纽约 Brown E.W., 1936a, MNRAS, 97, 56 Brown E.W., 1936b, MNRAS, 97, 62 Brown E.W., 1936c, MNRAS, 97, 116 Ćuk M., Burns J.A., 2004, 《天文学杂志》, 128, 2518 Delaunay C.E., 1860, 《巴黎科学院回忆录》, 28, 1 Delaunay C.E., 1867, 《巴黎科学院回忆录》, 29, 1 Ford E.B., Kozinsky B., Rasio F.A., 2000, 《天体物理学杂志》, 535, 385 Hill G.W., 1894, 《数学年刊》, 9, 31 Ito T., Ohtsuka K., 2020, 《环境、地球与行星专著》, 7, 1 Kinoshita H., Nakai H., 1999年, 《天体力学与动力天文学》, 75, 125 Kozai Y., 1962, 《天文学杂志》, 67, 591 Lei H., Circi C., Ortore E., 2018年, MNRAS, 481, 4602 Lidov M.L., 1961年, 载于《人造天体运动问题》. 俄罗斯科学院, 莫斯科, 第119页（俄文）。原文及英文译文见
h
t
t
p
s://
ui.adsabs.harvard.edu/abs/1963pmac.book..119L/abstractLuo L., Katz B., Dong S., 2016年, MNRAS, 458, 3060 Milankovich M., 1939, 《塞尔维亚科学院数学与自然科学通报 A 辑》, 第6期 Murray C.D., Dermott S.F., 1999年, 《太阳系动力学》. 剑桥大学出版社, 剑桥 Naoz S., 2016年, 《天文学与天体物理学年度评论》, 54, 441 Rein H., Liu S.-F., 2012, 《天文学与天体物理学》, 537, A128 Shevchenko I.I., 2017, 《利多夫–小柴效应——系外行星研究与动力天文学中的应用》. 施普林格, 查姆 Söderhjelm S., 1975, 《天文学与天体物理学》, 42, 229 Tremaine S., 2023, 《行星系统动力学》. 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿 Tremaine S., Touma J., Namouni F., 2009, 《天文学杂志》, 137, 3706 Will C.M., 2021年, 《物理评论 D》, 103, 063003. von Zeipel H., 1910, 《天文学通报》, 183, 345（法文）。

**附录 A:**

本附录旨在说明，月球的近点和交点进动率中的 $O(\epsilon^3)$ 项（方程 7）可以从 Brown 哈密顿量推导得出。

设地球、月球和太阳的质量分别为 $m_0$， $m_1$， $m_2$。我们将太阳轨道近似为圆轨道， $e_2 = 0$ $m_1 \ll$ ；那么，由于 $m_0 \ll m_2$ Brown 哈密顿量由方程（ ）给出，因此可以将其加到双重平均的四极哈密顿量（22）中；因为

月球轨道的偏心率和倾角都很小，我们可以按 $e_1$ 和 $I_1$ 的幂展开，

$$\frac{\langle\langle H_{\rm quad}\rangle\rangle_t}{m_1}+\frac{H_{\rm B}}{m_1}=\frac{3n_2^2a_1^2}{8}(I_1^2-e_1^2)-\frac{9n_2^3a_1^2}{64n_1}(25e_1^2+I_1^2)+{\rm O}(e_1,I_1)^4, \tag{A1}$$

其中， $n_1$ 和 $n_2$ 是月球和太阳的平均运动。对于较小的偏心率和倾角，描述近心点经度 $\varpi_1$ 和升交点经度 $\Omega_1$进动速率的拉格朗日方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\varpi_1}{dt}&=-\frac{1}{n_1a_1^2e_1}\frac{\partial H/m_1}{\partial e_1}=\frac{3n_2^2}{4n_1}+\frac{225n_2^3}{32n_1^2}+{\rm O}(e_1^2,I_1^2),\\ \frac{d\Omega_1}{dt}&=-\frac{1}{n_1a_1^2I_1}\frac{\partial H/m_1}{\partial I_1}=-\frac{3n_2^2}{4n_1}+\frac{9n_2^3}{32n_1^2}+{\rm O}(e_1^2,I_1^2),\end{aligned} \tag{A2}$$

与 Brouwer & Clemence（1961年，第322页）及方程（7）一致。

本文由作者准备的 TEX/LATEX 文件排版。