arXiv:2304.01268v1 [math.AP] 3 Apr 2023

各向异性介质中 Peierls-Nabarro 模型解的存在性与唯一性

YUAN GAO 与 JAMES M. SCOTT

ABSTRACT. 我们研究横观各向同性介质中弯曲位错的向量场 Peierls-Nabarro 模型解的存在性与唯一性。在滑移面上的错配势满足适当假设时，我们将三维 Peierls-Nabarro 模型约化为一个非局部标量 Ginzburg-Landau 方程。对于一类特定的弹性系数，可推导出具有显式非局部正核的非局部标量方程。我们证明，任何稳定稳态解都具有一维剖面。因此，我们得到标量方程以及原始三维系统的解均可由一参数直位错族刻画。本文将此前针对完整各向同性情形得到的结果推广到了各向异性情形。

1. INTRODUCTION

矢量 Peierls-Nabarro (PN) 模型是一种非线性模型，它通过将位错核心中的原子尺度效应纳入连续弹性模型，来描述位错的核心结构 [13, 17]。作为材料中最常见的线缺陷 [11, 20], , 位错的核心结构是研究材料结构稳定性以及塑性变形最小能垒的基础问题。特别是对于一般的各向异性材料，位错核心稳态剖面及其刚性是一个核心问题。本文研究各向异性本构关系中一段特定的参数范围，在该范围内，矢量 PN 模型的稳态解是一维剖面，可由一个适当的一维标量非局部 Ginzburg-Landau 方程给出，且该方程的核已显式计算。

在位移向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 的三维 PN 模型中，假设位错滑移面两侧的两个半空间是由胡克定律描述的线弹性连续体。这里假设滑移面是固定平面 Γ，水平位移不连续（称为错配位移）发生于此。两个弹性连续体通过滑移面上的非线性原子尺度势力相连接，因此产生的边界应力会随滑移面上的错配位移非线性变化。上述由位错引起的错配位移的方向和大小由伯格斯矢量 $\mathbf{b}$ 表征。伯格斯矢量的大小代表了在位错核心中观测到严重畸变区域的典型长度。因此，自然需要以伯格斯矢量的大小为基准，对所有量进行缩放，包括空间变量 x_1, x_2, x_3、位移向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 以及 $\mathbf{b}$。缩放后，我们将所有这些量（记号不变）视为无量纲量，并将伯格斯矢量的大小视为 4。这意味着，在对上、下弹性体作出某些对称假设后，剪切方向上的远场错配位移满足双态远场条件 ± 1；参见 [4, 6, 7, 20]

本文研究的弹性介质为横观各向同性介质；材料的应力-应变响应关于垂直于横向平面（即基面）的轴呈各向同性。刚度张量

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35A02, 35J50, 35Q74, 35R09, 35J60.*Key words and phrases.* 非局部方程、Peierls-Nabarro 模型、Ginzburg-Landau方程、各向异性弹性、分数阶拉普拉斯算子、狄利克雷到诺伊曼映射、降维。YG 获得美国国家科学基金会项目 DMS-2204288 的资助。JS 部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-1937254 和 DMS- 2012562 的资助。

横观各向同性介质的刚度张量由五个独立的弹性系数唯一确定，见下文（2.3）。为了将三维模型约化为强耦合的二维非局部系统，我们计算了滑移面两侧半空间中与体本构定律相关的狄利克雷到诺伊曼映射。由于介质具有各向异性，不同的滑移面 Γ 会产生不同形式的约化模型。本文研究滑移面的两种不同取向。第一种情形是 Γ 垂直于各向同性平面，而第二种情形是 Γ 与各向同性平面平行；图 1 和图2对此作了图示。

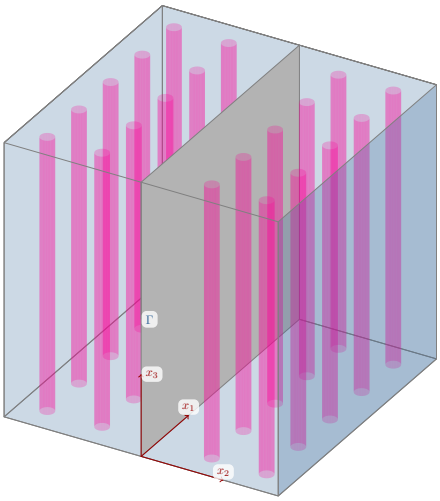


FIGURE 1. 滑移面垂直于各向同性平面。

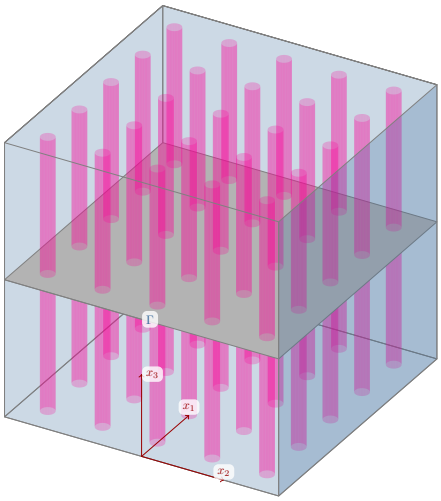


FIGURE 2. 滑移面平行于各向同性平面。

非线性错配势 W定义在滑移面上，由滑移面两侧的位错错配产生边界应力。在每种情况下，我们假设 W 仅取决于单一方向上的位移错配，并且 W 是关于该变量的周期势／双阱势。此假设可将二维系统进一步化简为非局部标量 Ginzburg-Landau 方程。我们计算了该积分微分算子的精确表达式，并确定了使其核为正的弹性系数范围。随后，我们采用 [4]中针对完全各向同性弹性的情形所采用的方法，得出该标量 Ginzburg-Landau 方程存在一个唯一解（在平移和旋转意义下），且该解具有一维剖面。然后，我们遵循 [6, 7] 中的弹性延拓步骤，得出完整三维 PN 系统是适定的。

再次，由于完整三维介质具有各向异性，假设 W 的依赖方向不同，会导出不同的约化一维方程。在情形 I 中，当 Γ 垂直于各向同性平面，且 W 仅依赖于位移的面内方向时，约化二维算子具有很强的各向异性，其傅里叶符号表现为三个以上不同的频率模。在情形 II 中，当 Γ 垂直于各向同性平面，且 W 仅依赖于位移的面外方向时，约化二维算子具有各向异性，但仅涉及三个频率模。在情形 III 中，当 Γ 平行于各向同性平面时，所得错配位移仅依赖于各向同性平面内的参考构形，即约化二维模型与完全各向同性情形下的对应模型十分相似。该二维模型本身是各向同性的，因此令 W 依赖于位移的任一方向，所得模型均等价。这三种情形的结果分别由以下三个命题概述：命题2.4、命题2.5和命题5.2。

证明依赖于最初在 [2] 中发展起来的局部 BV 估计，这些估计用于研究非局部极小曲面的定量平坦性。在 [4,定理 4。6], 作者利用平坦性

估计，通过结合内部 BV 估计和 [2, 5, 10, 18]中的尖锐插值不等式，得到非局部微分方程的标量解估计。关键在于非局部算子的核表示所具有的显式性质。具体而言，非局部核需关于伸缩变换齐次、严格为正，且具有良好的衰减估计；参见 [2, 3, 6, 10]。考虑到材料的横向各向异性，对于上文所述的三种情形，我们将选取五个弹性常数的特定取值范围，使核具有所需性质 K，该核刻画了标量非局部算子。我们利用这些性质以及 [4,定理 4。6]，证明二维约化标量非局部方程的任意有界稳定解都具有一维剖面。关于非局部 Allen-Cahn 方程刚性性质的其他方法，参见 [6, 定理 2]，该方法利用线性算子的谱估计；关于利用原始局部方程的刘维尔型定理的方法，参见 [1]。借助所得的刚性结果，以及由三维矢量位错模型约化得到的一维非局部 Allen-Cahn 方程的显式核表示，还可以进一步利用非局部算子的最大值原理，探究位错的长时间行为。这将留待今后的工作；关于各向同性情形，可参见 [8, 9, 14, 15] 中的方法。

横向各向异性介质中的 PN 模型是完全各向同性介质中 PN 模型的推广。事实上，通过对弹性系数作特定选择，本文中的每个结果都对应于完全各向同性情形下 PN 模型的一个结果；我们在全文的评注中对此作了说明。特别是，本文中的类似论述可以恢复 [4, 6, 7] 中研究的二维和一维非局部算子的许多刻画结果。同时，在情形 I 和情形 II 中，我们对弹性系数作了一些特殊选择，使得约化模型相对容易分析；然而，对于一般的系数选择（例如不满足下文（2.11）的选择），本文结果是否仍然成立，目前尚无定论。

本文组织如下：下一节将说明记号并介绍必要的技术引理。在第 2 节中，我们定义 Γ 垂直于各向同性平面时的三维 PN 模型，并通过狄利克雷到诺伊曼映射计算约化后的二维模型。第 3节讨论进一步约化的一维非局部模型的计算及其性质，其中 W 仅依赖于 u_1；第 4 节则讨论 W 仅依赖于 u_3时的相同内容。在第 5节中，我们推导平行情形下的三维 PN 模型，并讨论其降维过程、计算结果及标量方程的性质。最后，在第 6 节中，我们得出结论：对于三个约化问题，有界稳定解均具有一维剖面，从而完成命题 2.4、命题 2.5和命题 5.2的证明。

1.1. 记号与预备知识。 对于 $d \geq 2$，将施瓦茨空间记为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，其对偶空间记为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$，并将齐次索 Sobole夫空间记为

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \,:\, \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty \right\} .$$

$L^1(\mathbb{R}^2)$ 函数 v 的傅里叶变换记作

$$\hat{v}(k) = \mathcal{F}v(k) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\imath x\cdot k} v(x) \,\mathrm{d}x \,,$$

其逆记为

$$v^\vee(k) = \mathcal{F}^{-1}v(k) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\imath x\cdot k} v(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

引理 1.1. 设 $\rho > 0$。算子 $(-\Delta)^{\rho} := (-\partial_{x_1}^2 - \rho\partial_{x_2}^2)$ 作用于足够光滑的 $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 时，其平方根的积分表示为

$$(-\Delta_\rho)^{1/2} u(x) := -\frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u(x-y) + u(x+y) - 2u(x)}{(y_1^2 + \frac{y_3^2}{\rho})^{3/2}} \, \mathrm{d}y \,,$$

相应的傅里叶符号为 $\sqrt{k_1^2 + \rho k_2^2}$。

2. Slip plane perpendicular to the plane of isotropy: the 3D model

本节介绍横向各向异性弹性的三维 Peierls-Nabarro 模型，然后在第2.1 节中通过 Dirichlet-to-Neumann 映射将其化简为二维非局部模型。本节概述了滑移面垂直于各向同性平面时的前两个主要结果（命题2.4和命题2.5）。这两个结果的证明将在第6节完成。

在 PN 模型中，滑移面Γ将弹性介质的两个半空间分隔开。令 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 表示位移向量。系统的总能量为

$$E(\mathbf{u}) := E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}) + E_{\mathrm{mis}}(\mathbf{u}) \,. \tag{2.1}$$

横向各向同性材料的材料性质由五个独立的弹性常数 C_{11}、C_{13}、C_{33}、C_{44} 和 C_{66} 决定。这些常数决定了应力-应变关系，其中包含两个半空间的总弹性能 $E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u})$。具体而言，$E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u})$ 定义为

$$E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma} \sigma : \varepsilon \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}x \,, \tag{2.2}$$

其中 ε_{ij} 是应变张量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \,, \quad \text{for } i, j, = 1, 2, 3, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \,,$$

且 σ 是 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 中的应力张量，由下式给出

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + (C_{11} - 2C_{66})\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \,, \\
\sigma_{22} &= (C_{11} - 2C_{66})\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \,, \\
\sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \,, \\
\sigma_{23} &= \sigma_{32} = C_{44}\varepsilon_{23} \,, \\
\sigma_{13} &= \sigma_{31} = C_{44}\varepsilon_{13} \,, \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = C_{66}\varepsilon_{12} \,.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

我们在（2.2）中使用爱因斯坦求和约定：

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \,.$$

假设定义 σ 的五个弹性模量满足一致椭圆性条件（参见 [12, 16]）

$$0 < C_{66} < C_{11} \,, \qquad C_{13}^2 < C_{33}(C_{11} - C_{66}) \,, \qquad C_{44} > 0 \,. \tag{2.4}$$

请注意，将参数设为以下值即可得到完全各向同性介质的 PN 模型

$$C_{11} = C_{33} = 2\mu\frac{1-\nu}{1-2\nu} \,, \quad C_{13} = 2\mu\frac{\nu}{1-2\nu} \,, \quad C_{44} = C_{66} = \mu \,, \tag{2.5}$$

其中 μ 为剪切模量，ν 为泊松比。

在这一初始设定中， Γ 取为垂直于各向同性平面，即 $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : \ x_2 = 0\}$；见图 1。因此，由原子反应引起的滑移面上的错配能 $E_{\mathrm{mis}}(\mathbf{u})$可表示为

$$E_{\mathrm{mis}}(\mathbf{u}) := \int_\Gamma \gamma(u_1^+ - u_1^-, u_3^+ - u_3^-)\mathrm{d}S = \int_\Gamma W(u_1^+, u_3^+)\mathrm{d}S\,,$$

其中，对于 $i = 1, 3$, $u_i^\pm(x_1, \ x_3) := u_i(x_1, \ 0^\pm, \ x_3)$。我们假设非线性势 W 二次可微，且其导数满足 H¨older 连续性，即对于某个 $a \in (0, 1)$，有 $W \in C^{2,\,a}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$。

通过在滑移面上满足以下条件，对式（2.2）进行最小化，可得到位错的平衡结构

$$\begin{aligned} u_1^+(x_1, x_3) &= -u_1^-(x_1, x_3)\,, \\ u_2^+(x_1, x_3) &= u_2^-(x_1, x_3)\,, \\ u_3^+(x_1, x_3) &= -u_3^-(x_1, x_3)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

我们还将考虑 W形式的两种不同情形；我们将在第$\partial_{u_1} W = 0$ 节和第 $\partial_{u_3} W = 0$ 节分别讨论3 和4。对于前一种情形，我们假设 满足双态远场边界条件

$$u_1^+(\pm\infty, x_3) = \pm 1 \quad \text{for any } x_3 \in \mathbb{R}\,, \tag{2.7}$$

而对于后一种情形，我们对 u_3 假设类似的条件

$$u_3^+(x_1, \pm\infty) = \pm 1 \quad \text{for any } x_1 \in \mathbb{R}\,. \tag{2.8}$$

严格来说，由于 ε 衰减缓慢，弹性能为无穷大。因此，我们通过扰动来定义极小化子。具体而言，对于在欧几里得球 $B_R(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$ 内具有紧支撑的任意 $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma; \ \mathbb{R}^3)$，我们定义扰动后的弹性能

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\mathrm{els}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}) &:= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Gamma} \frac{1}{2}(\sigma_{\mathbf{u}} + \sigma_{\boldsymbol{\varphi}}) : (\varepsilon_{\mathbf{u}} + \varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}}) - \frac{1}{2}\sigma_{\mathbf{u}} : \varepsilon_{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\big((\sigma_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij}(\varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij} + (\sigma_{\mathbf{u}})_{ij}(\varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij} + (\sigma_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij}(\varepsilon_{\mathbf{u}})_{ij}\big)\,\mathrm{d}x \\ &:= E_{\mathrm{els}}(\boldsymbol{\varphi}) + \mathcal{C}_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})\,, \end{aligned}$$

其中交叉项定义为

$$\mathcal{C}_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\big(\sigma_{\mathbf{u}} : \varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}} + \sigma_{\boldsymbol{\varphi}} : \varepsilon_{\mathbf{u}}\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\big((\sigma_{\mathbf{u}})_{ij}(\varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij} + (\sigma_{\boldsymbol{\varphi}})_{ij}(\varepsilon_{\mathbf{u}})_{ij}\big)\,\mathrm{d}x$$

且 $\sigma_{\mathbf{u}}$、 $\varepsilon_{\mathbf{u}}$ 和 $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}$、 $\varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}}$ 分别是与$\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$相对应的应力张量和应变张量。我们还将扰动错配能定义为

$$\hat{E}_{\mathrm{mis}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}) := \int_\Gamma W(u_1^+ + \varphi_1^+, u_3^+ + \varphi_3^+) - W(u_1^+, u_3^+)\,\mathrm{d}S.$$

扰动总能量定义为

$$\hat{E}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}) := \hat{E}_{\mathrm{els}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}) + \hat{E}_{\mathrm{mis}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u})\,.$$

ˆ注释 2.1. 由于$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}$ 在 B_R之外重合，扰动弹性能 $E(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u})$等价于局部扰动弹性能

$$\hat{E}_{\mathrm{els}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}; B_R) := \int_{B_R\setminus\Gamma} \frac{1}{2}(\sigma_{\mathbf{u}} + \sigma_{\boldsymbol{\varphi}}) : (\varepsilon_{\mathbf{u}} + \varepsilon_{\boldsymbol{\varphi}}) - \frac{1}{2}\sigma_{\mathbf{u}} : \varepsilon_{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}x := E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}; B_R) - E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}; B_R)\,,$$

错配能也同理

$$\hat{E}_{\mathrm{mis}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u}; B_R) := \int_{B_R\cap\Gamma} W(u_1^+ + \varphi_1^+, u_3^+ + \varphi_3^+) - W(u_1^+, u_3^+)\,\mathrm{d}S := E_{\mathrm{mis}}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}; B_R) - E_{\mathrm{mis}}(\mathbf{u}; B_R)\,,$$

ˆ使得 $E(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u})$ 等价于

$$\hat{E}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u};B_R) := \hat{E}_{\text{els}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u};B_R) + \hat{E}_{\text{mis}}(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{u};B_R) := E(\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi};B_R) - E(\mathbf{u};B_R)\,.$$

因此，我们称$\mathbf{u}$ 为局部极小值，遵循 [7]中的约定。

定义 2.2。 如果$\mathbf{u}$ 满足以下条件，我们称$\mathbf{u}$ 为的局部极小值

$$E(\mathbf{u}+\boldsymbol{\varphi};B_R) - E(\mathbf{u};B_R) \geq 0$$

对于任意紧支撑于欧几里得球 B_R(0)内的 $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty$(($\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$;$\mathbb{R}^3$), 满足条件 $\subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^+(x_1,x_3) &= -\varphi_1^-(x_1,x_3)\,,\\
\varphi_2^+(x_1,x_3) &= \varphi_2^-(x_1,x_3)\,,\\
\varphi_3^+(x_1,x_3) &= -\varphi_3^-(x_1,x_3)\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

为了定义与总能量 E 相关的欧拉-拉格朗日方程，我们需要先设定一些记号。我们将 $\mathbb{L}\mathbf{u}$ 定义为二阶偏微分方程组

$$\mathbb{L}\mathbf{u} := \operatorname{div}\sigma\,, \qquad (\mathbb{L}\mathbf{u})_i = L_{ij}u_j, \quad i=1,2,3,$$

其中 L_{ij} 是偏导数矩阵， i、$j = 1$为 2、3

$$\begin{aligned}
L_{11} &= C_{11}\partial_{11} + C_{66}\partial_{22} + C_{44}\partial_{33}\,,\\
L_{22} &= C_{66}\partial_{11} + C_{11}\partial_{22} + C_{44}\partial_{33}\,,\\
L_{33} &= C_{44}\partial_{11} + C_{44}\partial_{22} + C_{33}\partial_{33}\,,\\
L_{23} &= L_{32} = (C_{13}+C_{44})\partial_{23}\,,\\
L_{13} &= L_{31} = (C_{13}+C_{44})\partial_{13}\,,\\
L_{12} &= L_{21} = (C_{11}-C_{66})\partial_{12}\,.
\end{aligned}$$

引理 2.3。 假设 $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma;\ \mathbb{R}^3)$ 满足 (2.6) 以及 (2.7) 或 (2.8) 是总能量 E 在定义 *2.2* 意义下的局部极小值。则 $\mathbf{u}$ 满足欧拉-拉格朗日方程

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}\mathbf{u} &= 0 \ \textit{in}\ \mathbb{R}^3\setminus\Gamma\,,\\
\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^- &= \partial_{u_1}W(u_1^+,u_3^+) \ \textit{on}\ \Gamma\,,\\
\sigma_{32}^+ + \sigma_{32}^- &= \partial_{u_3}W(u_1^+,u_3^+) \ \textit{on}\ \Gamma\,,\\
\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^- &= 0 \ \textit{on}\ \Gamma\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

证明。 计算过程与完全各向同性弹性情形下的类似结果相仿；参见 [4,附录 A], 了解各向同性情形。 □

对约化模型的分析会因弹性系数的选择而有显著差异。更一般的情形留待未来工作讨论；此处我们作如下选择

$$\sqrt{C_{11}C_{33}} - C_{13} - 2C_{44} = 0\,, \qquad \text{and} \qquad C_{11} = C_{33}\,. \tag{2.11}$$

第一个关系大大简化了分析，而第二个关系则进一步简化了各向同性平面垂直于 Γ 时结果的表述。

我们的前两个主要结果如下：

命题 2.4 (情形 I: Γ 垂直于各向同性平面， $\partial_{u_3}W = 0$)。假设五个弹性常数满足(2.4) 和(2.11)，并假设这些量

$$\nu := \frac{C_{13}}{2(C_{13}+C_{44})}\,, \qquad \delta := \frac{C_{66}}{C_{44}}\,, \qquad \mu := C_{44} \tag{2.12}$$

满足

$$\delta > 0 \quad \textit{and} \quad \max\left\{1-\frac{2}{\delta}, \frac{\sqrt{\delta}}{2}\frac{2\delta-3}{2\delta^{3/2}-2\delta^{1/2}+1}\right\} < \nu < \frac{2}{4-\delta+\sqrt{\delta^2+8}}. \tag{2.13}$$

假设 $\partial_{u_3} W = 0$，即 $W(u_1, u_3) = W(u_1)$，并且

$$\begin{gathered} W \textit{ is a periodic / double-well potential in } C_b^{2,a}(\mathbb{R}) \textit{ satisfying} \\ W(v) > W(\pm 1) \textit{ for } x \in (-1,1), \quad W''(\pm 1) > 0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

则系统 *(2.10)* 存在唯一的经典解 $\boldsymbol{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，其属于 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$，且对于所有 $s \geq 1$ 以及任意固定的 $x_2 \neq 0$，都有 $\boldsymbol{u}(\cdot, x_2, \cdot) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$。此外，该解在定义 *2.2* 的意义下是 *Peierls-Nabarro* 模型的局部极小值。第一分量 u_1 是方程 *(3.3)* 的唯一稳定解，其具有式 *(3.14)* 中定义的特定非局部核，而 u_1 具有一维剖面。

命题 2.5（情形 II：Γ 垂直于各向同性平面，$\partial_{u_1} W = 0$）。设五个弹性常数满足（2.4）和（2.11）。定义量 μ，ν 和 δ，如（2.12）所示，并定义

$$p := \delta(2(1-\nu) - \delta(1-2\nu)) \quad \textit{and} \quad q := 1-\nu. \tag{2.15}$$

假设

$$(\nu, \delta) \in \mathcal{U}^+, \tag{2.16}$$

其中，$\mathcal{U}^+ \subset \mathbb{R}^2$ 是由曲线 $\nu = \frac{1}{2}$、$\nu = \frac{\delta}{(\delta-2)\,2(\delta^2-\delta+1)}$、$\nu = 1 - \frac{2}{\delta}$、$\nu = \frac{2}{1+4\delta-2\delta^2+\sqrt{1-8\delta+28\delta^2-16\delta^3+4\delta^4}}$ 和 $p = \tilde{r}$ 围成的开区域，其中 $\tilde{r}(q)$ 是多项式的最小正根

$$\begin{aligned} x \mapsto & -8(-1+q)x^4 + 8(-1+q)q^3 \\ & + q^2(13+14q-11q^2)x + (-11+14q+13q^2)x^3 + 2q(1-18q+q^2)x^2. \end{aligned}$$

假设 $\partial_{u_1} W = 0$，即 $W(u_1, u_3) = W(u_3)$，且 W 满足 *(2.14)*。那么，系统 *(2.10)* 存在唯一的经典解 $\boldsymbol{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，属于 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$，且 $\boldsymbol{u}(\cdot, x_2, \cdot) \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$，对所有 $s \geq 1$ 以及所有固定的 $x_2 \neq 0$ 均成立（在 x_3 方向平移并绕 x_2 轴旋转的意义下唯一）。此外，该解是定义 *2.2* 意义下的 E 的局部极小值。第三个分量 u_3 是方程 *(4.2)* 的唯一稳定解，其具有 *(4.7)* 中定义的特定非局部核；u_3 具有一维剖面。

注意，(2.11)-(2.12) 意味着

$$C_{11} = C_{33} = 2\mu\frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad C_{13} = 2\mu\frac{\nu}{1-2\nu}, \quad C_{44} = \mu, \quad C_{66} = \delta\mu.$$

情形 $\delta = 1$ 对应于各向同性弹性情形，而 μ 和 ν 分别对应于各向同性固体的剪切模量和泊松比。

(2.4) 中关于一致椭圆性的条件等价于以下条件

$$0 < \mu, \quad 0 < \delta < 4, \quad 1 - \frac{2}{\delta} < \nu < \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

注意，δ 可以任意接近 0，因此 ν 没有下界；这符合各向异性介质中泊松比的预期行为 [19]。容易验证，在 (ν, δ) 平面上，由 (2.13) 和 $\mathcal{U}^+$ 描述的区域均为 (2.17) 所定义区域的子集。

2.1. **将三维系统约化为非局部二维系统**。我们可以将其约化为仅依赖于 u_1^+ 和 u_3^+ 的非局部二维系统，方法是利用分别对应于上、下半空间的狄利克雷到诺伊曼映射 $(-\sigma_{12}^+, -\sigma_{22}^+, -\sigma_{32}^+)$ 和 $(\sigma_{12}^-, \sigma_{22}^-, \sigma_{32}^-)$ 所满足的 (2.10) 中的关系。我们使用傅里叶变换计算该映射。这里，$x = (x_1, x_3)$ 且 $k = (k_1, k_3)$，从而使关于滑移面的表述沿用完整三维系统所采用的约定。我们在以下引理中给出降维结果。

引理 *2.6.* 设 C_{11}、C_{13}、C_{33}、C_{44} 和 C_{66} 满足 *(2.4)* 和 *(2.11)*，并按 *(2.12)* 定义 μ、ν 和 δ。假设 $\boldsymbol{u}$ 满足 *(2.10)*，且当 $|x_2| \to \infty$ 时保持有界；再假设 u_1^+ 和 u_3^+ 属于分数阶索 *Sobole* 夫空间 $H^s(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \geq 1/2$。那么，$\boldsymbol{u}$ 可以完全用 u_1^+ 和 u_3^+ 表示。特别地，$(u_1^+,\ u_3^+)$ 满足以下非局部系统

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}(\sigma_{12}^+(k) + \sigma_{12}^-(k)) \\ \mathcal{F}(\sigma_{32}^+(k) + \sigma_{32}^-(k)) \end{bmatrix} := -\mathbb{A}(k) \begin{bmatrix} \hat{u}_1^+(k) \\ \hat{u}_3^+(k) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \partial_{u_1} W(u_1^+, u_3^+) \\ \partial_{u_3} W(u_1^+, u_3^+) \end{bmatrix} \quad on\ \Gamma\,, \tag{2.18}$$

其中，2×2 矩阵 $\mathbb{A}(k)$ 定义如下

$$\mathbb{A}(k) := \frac{2\mu}{1-\nu} r_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\delta(2(1-\nu)-\delta(1-2\nu))k_1^2 + (1-\nu)k_3^2}{r_1^2} & \frac{\delta\nu k_1 k_3}{r_1^2} \\ \frac{k_1 k_3}{\delta r_1^2} \cdot \frac{(\nu\delta + (1-\nu)(1-\delta))r_2 + (\nu\delta^2 - (1-\nu)(1-\delta)^2)r_1}{r_1 + r_2} & \frac{r_1 r_2 - \nu k_1^2}{r_1^2} \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

and

$$r_1 := r_1(k) := \sqrt{k_1^2 + k_3^2/\delta} \quad and \quad r_2 := r_2(k) := \sqrt{k_1^2 + k_3^2}\,. \tag{2.20}$$

注意，当 $\delta = 1$矩阵 $\mathbb{A}$ 与完全各向同性介质中位错情形下狄利克雷到诺伊曼映射的傅里叶变换一致，参见 [4]。

证明。将方程组除以 C_{44}，对 $\mathbb{L}\mathbf{u} = 0$ 关于（x_1，x_3）变量进行傅里叶变换，并利用（2.11）和（2.12，可得以下三个方程

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}k_1^2 + k_3^2\right)\hat{u}_1 + \delta\partial_{22}\hat{u}_1 + \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} - \delta\right)(\imath k_1)\partial_2\hat{u}_2 + \frac{1}{1-2\nu}(k_1k_3)\hat{u}_3 = 0\,, \\ \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} - \delta\right)(ik_1)\partial_2\hat{u}_1 - \left(\delta k_1^2 + k_3^2\right)\hat{u}_2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\partial_{22}\hat{u}_2 + \frac{1}{1-2\nu}(\imath k_3)\partial_2\hat{u}_3 = 0\,, \\ -\frac{1}{1-2\nu}(k_1k_3)\hat{u}_1 + \frac{1}{1-2\nu}(\imath k_3)\partial_2\hat{u}_2 - \left(k_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}k_3^2\right)\hat{u}_3 + \partial_{22}\hat{u}_3 = 0\,. \end{aligned}$$

这是一个关于 x_2 的 3×3 二阶常微分方程组。我们分别在上半空间和下半空间中求解该方程组。

为求解上半空间中的该方程组，我们将其写成一个 6×6 一阶方程组 m

$$\partial_2 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(k, x_2) \\ \partial_2\hat{\mathbf{u}}(k, x_2) \end{bmatrix} = \mathfrak{A}(k) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(k, x_2) \\ \partial_2\hat{\mathbf{u}}(k, x_2) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

其中，6×6 矩阵 $\mathfrak{A}$ 取决于 k、μ、ν 和 δ，并满足边界条件

$$\hat{\mathbf{u}}(k_1, k_3, 0) = \hat{\mathbf{u}}^+(k_1, k_3)\,, \qquad \hat{\mathbf{u}}(k, +\infty) = 0\,.$$

根据条件（2.4）和（2.11），$\mathfrak{A}(k)$ 的特征多项式有六个非零实根 $\pm r_1(k)$ 和 $\pm r_2(k)$，如（2.20）所示，并且 $\pm r_2$ 二者的重数均为 2。因此，（2.21）的通解是六项的任意线性组合，其中每一项都是一个（广义）特征向量与 $\mathrm{e}^{\pm r_i(k)\, x_2}$ 的乘积，其中 $i = 1,\ 2$。计算过程 straightforward。

由于 $\mathbf{u}$ 在 $|x_2| \to \infty$时保持有界，因此我们从最终解中排除具有正根的解，也就是说，线性组合中的三个系数为零。其余三个系数完全由 $x_2 = 0$处的边界条件确定，因此，方程（2.21）的唯一解具有如下形式 $\hat{\mathbf{u}}(k,\ x_2) = \mathbb{B}^+(k,\ x_2)\hat{\mathbf{u}}^+(k)$，其中 $x_2 > 0$，对于一个 3×3 矩阵$\mathbb{B}^+$。矩阵 $\mathbb{B}^+$ 的形式仅由其特征值和特征向量的性质决定 $\mathfrak{A}$。

同理，系统（2.21）在下半空间中满足边界条件时的唯一解

$$\hat{\mathbf{u}}(k_1,k_3,0)=\hat{\mathbf{u}}^-(k_1,k_3)\,,\qquad \hat{\mathbf{u}}(k,-\infty)=0\,,$$

具有如下形式 $\hat{\mathbf{u}}(k,x_2)=\mathbb{B}^-(k,x_2)\hat{\mathbf{u}}^-$ 对于 $x_2<0$，其中某个 3×3 矩阵 $\mathbb{B}^-$。事实上，$\mathbb{B}^-(k,x_2)=\overline{\mathbb{B}^+(k,-x_2)}$，其中 z 是 z的复共轭。

接下来，我们利用滑移面边界条件 (2.6) 得知，对于所有 $k\in\mathbb{R}^2$ 和所有 $x_2\in\mathbb{R}$，$\hat{\mathbf{u}}(k,t)$ 仅取决于 $\hat{u}_1^+$、$\hat{u}_2^+$ 和 $\hat{u}_3^+$。最后，(2.10) 中的方程 $\mathcal{F}(\sigma_{22}^+-\sigma_{22}^-)=0$ 使我们能够用 $\hat{u}_1^+$ 和 $\hat{u}_3^+$ 表示 $\hat{u}_2^+$；将这一关系代入 (2.10) 中另外两个涉及狄利克雷到诺伊曼映射的方程，即可得到矩阵 $\mathbb{A}(k)$ 的表达式 (2.19)。□

矩阵 $\mathbb{A}$ 在 $k\neq0$下是正定的，这归功于一致椭圆性条件（2.4）。因此，根据普朗歇雷尔恒等式

$$C^{-1}\,\|(u_1,u_3)\|^2_{\dot{H}^{\frac12}(\Gamma)}\le\int_\Gamma\langle\mathbb{A}(k)(\hat{u}_1,\hat{u}_3),(\hat{u}_1,\hat{u}_3)\rangle\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_3\le C\,\|(u_1,u_3)\|^2_{\dot{H}^{\frac12}(\Gamma)}\,.$$

接下来的两节将讨论引言中所述的情形 I 和情形 II。在情形 I 中，W仅依赖于 u_1^+；在情形 II 中，W 仅依赖于 u_3^+。在这两种情形下，这种简化都使我们能够将二维方程进一步化为一维问题。

3. The 1D reduced equation in the perpendicular case: $\partial_{u_3}W=0$

在假设 $W(u_1,u_3)=W(u_1)$ 的前提下，我们推导出 u_1^+的约化标量方程，该方程是一个各向异性非局部金兹堡-朗道方程。我们将在命题3.1中推导该各向异性非局部方程的非局部核表示。随后，我们将研究非局部核的显式公式，并在命题3.4 和命题3.6中证明该核的正性。

此处，为简洁起见，我们省略 u_1^+、u_3^+ 上的上标。不过，我们保留空间变量和频率变量的指标约定：$x=(x_1,x_3)\in\mathbb{R}^2$ 和 $k=(k_1,k_3)\in\mathbb{R}^2$。我们的约化非局部系统为

$$\mathbb{A}(k)\begin{bmatrix}\hat{u}_1(k)\\ \hat{u}_3(k)\end{bmatrix}=-\mathcal{F}\begin{bmatrix}\partial_{u_1}W(u_1,u_3)\\ \partial_{u_3}W(u_1,u_3)\end{bmatrix}\qquad\text{on }\Gamma\,.\tag{3.1}$$

由于 $\partial_{u_3}W=0$，我们可以用 $\hat{u}_1$ 表示 $\hat{u}_3$ 并代入剩余方程。由此得到傅里叶空间中关于 $\hat{u}_1$ 的一维标量各向异性非局部方程

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_1)(k_1,k_3):=\frac{\det\mathbb{A}(k)}{a_{22}(k)}\hat{u}_1(k)=-\mathcal{F}(W'(u_1))\,.\tag{3.2}$$

因此，对傅里叶变换求逆，可得到一个新的一维非局部方程

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}u_1(x_1,x_3)=-W'(u_1(x_1,x_3))\,,\quad (x_1,x_3)\in\Gamma\,,\\&\lim_{x_1\to\pm\infty}u_1(x_1,x_3)=\pm1\,,\quad x_3\in\mathbb{R}\,,\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中，非局部算子 $\mathcal{L}$ 的傅里叶符号为

$$\widetilde{m}(k):=\frac{2\mu r_2\big(pk_1^2+k_3^2\big)}{r_1r_2-\nu k_1^2}\tag{3.4}$$

其中 p 定义于（2.15）中。该符号具有“双重非局部”性质，由各向异性符号的平方根之积构成。由于 $\nu<1/2$ 我们有

$$2\mu\min\{1,p\}r_2(k)\le\widetilde{m}(k)\le\mu C(\delta,\nu)r_2(k)\qquad\text{for all }k\in\mathbb{R}^2\,.$$

现在我们推导 $\mathcal{L}$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ 中的积分形式。对于 $\mathcal{L}$，只要其作用的函数足够光滑，例如 $s \geq 1$ 时的 $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$，该积分形式就与傅里叶反演公式一致。

命题 3.1. 设 K_1 和 K_2 是偏微分方程在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 中的唯一解

$$(\delta(1-\nu^2)\partial_1^4 + (1+\delta)\partial_1^2\partial_3^2 + \partial_3^4)K_1(x) = (\partial_1^2 + \partial_3^2)(p\partial_1^2 + \partial_3^2)\left(\frac{1}{(x_1^2 + \delta x_3^2)^{3/2}}\right) \tag{3.5}$$

and

$$(\delta(1-\nu^2)\partial_1^4 + (1+\delta)\partial_1^2\partial_3^2 + \partial_3^4)K_2(x) = (p\partial_1^4 + \partial_1^2\partial_3^2)\left(\frac{1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}}\right). \tag{3.6}$$

算子的积分形式 $\mathcal{L}$ 定义于 (3.2) 为

$$\mathcal{L}w(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \big(w(x-y) - w(x+y) - 2w(x)\big)K(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{3.7}$$

其中 $K(x) := 2\mu\delta\big(\sqrt{\delta}K_1(x) + \nu K_2(x)\big)$。

证明。我们希望 $\widetilde{m}$ 的分母是一个局部算子，以便在半拉普拉斯算子的定义中进行分部积分。如果将分母有理化，那么 $\widetilde{m}$ 仍在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ 中，傅里叶符号变为

$$\widetilde{m}(k) = 2\mu\delta\frac{m_n(k)}{m_d(k)}\,,$$

其中符号 $m_n(k)$ 和 $m_d(k)$ 定义为

$$m_n(k) := r_2\big(pk_1^2 + k_3^2\big)\big(r_1r_2 + \nu k_1^2\big)$$

and

$$m_d(k) := ck_1^4 + bk_1^2k_3^2 + k_3^4 \quad \text{with} \quad c := \delta(1-\nu^2)\,,\ b := (1+\delta)\,. \tag{3.8}$$

这里 m_d 是一个局部算子，而 m_n 是局部算子与平方根算子复合后所得算子的和。

将 m_n 分成两部分：$m_n = m_{n,\,1} + \nu m_{n,\,2}$ 其中

$$m_{n,1} := r_2^2\big(pk_1^2 + k_3^2\big)r_1\,,$$
$$m_{n,2} := k_1^2\big(pk_1^2 + k_3^2\big)r_2\,.$$

注意，作为变量 k_1^2 和 k_2^2的函数，$m_{n,\,r_1}{}^{1}$ 和 $m_{n,\,r_2}{}^{2}$ 都是齐次二次多项式，因此定义了各向异性双调和型微分算子。

定义 L_n、$L_{n,\,1}$ 和 $L_{n,\,2}$ 为其傅里叶符号分别是 m_n、$m_{n,\,r_1}{}^{1}$ 和 $m_{n,\,r_2}{}^{2}$ 的算子。因此，对于任意 $w \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\mathcal{F}(L_nw) = \mathcal{F}(L_{n,1}\circ(-\Delta_{\frac{1}{\delta}})^{1/2}w + \nu L_{n,2}\circ(-\Delta)^{1/2}w) = (m_{n,1}(k) + \nu m_{n,2}(k))\hat{w} = m_n(k)\hat{w}$$

在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$中，其中各向异性分数阶拉普拉斯算子已在引理 1.1中定义。

定义 L_d 为符号为 m_d 的算子。通过在原点附近使用截断函数，并应用控制收敛定理，我们可以假设 $\hat{w}$ 在原点附近为零。现在由 $w = L_dv$ 定义 $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$。因此，$\hat{v} = \frac{\hat{w}}{m_d}(k)$。所以，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w &:= 2\mu\delta\big(\mathcal{L}_1w + \nu\mathcal{L}_2w\big)\\ &= 2\mu\delta\left((-\Delta_{\frac{1}{\delta}})^{1/2}L_{n,1}L_d^{-1}w + \nu(-\Delta)^{1/2}L_{n,2}L_d^{-1}w\right)\\ &= 2\mu\delta\left((-\Delta_{\frac{1}{\delta}})^{1/2}L_{n,1}v + \nu(-\Delta)^{1/2}L_{n,2}v\right).\end{aligned}$$

分别处理 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$。根据定理 1.1 中的表示公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1u(x) &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_{n,1})_x v(x-y)+(L_{n,1})_x v(x+y)-2(L_{n,1})_x v(x)}{(y_1^2+\delta y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_{n,1})_y\left(v(x-y)+v(x+y)-\left(\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)\right)}{(y_1^2+\delta y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

这里我们使用多重指标记号：$a=(a_1,\ a_3)\in\mathbb{N}_0^2$, $|a|=a_1+a_3$, $a!=a_1!a_3!$, $y^a=y_1^{a_1}y_3^{a_3}$，以及 $D^a v(x)=\frac{\partial^{|a|}}{\partial_{x_1}^{a_1}\partial_{x_3}^{a_3}}v(x)$。现在进行分部积分（通过使用积分算子的主值定义，并注意到当取主值极限时，边界项 $\to 0$，我们可以毫无困难地在此处进行分部积分），

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_1u(x)\\ &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)(L_{n,1})_y\left(\frac{1}{(y_1^2+\delta y_3^2)^{3/2}}\right)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

由于 $K_1(y)$ 满足

$$L_dK_1(y)=L_{n,1}\left(\frac{1}{(y_1^2+\delta y_3^2)^{3/2}}\right),$$

再次分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1u(x) &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)(L_d)_yK_1(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(L_d)_y\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)K_1(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left((L_d)_x v(x-y)+(L_d)_x v(x+y)-2(L_d)_x v(x)\right)K_1(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(u(x-y)+u(x+y)-2u(x)\right)K_1(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

我们以相同的方式处理 $\mathcal{L}_2$：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2u(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_{n,2})_x v(x-y)+(L_{n,2})_x v(x+y)-2(L_{n,2})_x v(x)}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_{n,2})_y\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}\tag{3.9}$$

分部积分后，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_2u(x)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 4}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)(L_{n,2})_y\left(\frac{1}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\right)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

由于 $K_2(y)$ 满足

$$L_dK_2(y)=L_{n,2}\left(\frac{1}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\right),$$

再次分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 u(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 6}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)(L_d)_y K_2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(L_d)_y\left(v(x-y)+v(x+y)-\sum_{|a|\le 6}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\right)K_2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left((L_d)_x v(x-y)+(L_d)_x v(x+y)-2(L_d)_x v(x)\right)K_2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(u(x-y)+u(x+y)-2u(x)\right)K_2(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

□

3.1. **核的公式**。现在，我们通过求解以下偏微分方程，推导非局部核的公式 K，即（3.7），其中需要求解的偏微分方程为 $K_1(x)$ 和 $K_2(x)$。

引理 3.2。设 μ，δ 和 ν 满足（2.17），按 p 和 q 中（2.15）的定义定义 b 和 c，并按（3.8）中的定义定义。则方程 K_1 存在一个解（3.5）如下：

$$K_1(x_1,x_3)=\frac{Ax_1^{12}+Bx_1^{10}x_3^2+Cx_1^8x_3^4+Dx_1^6x_3^6+Ex_1^4x_3^8+Fx_1^2x_3^{10}+Gx_3^{12}}{(x_1^2+\delta x_3^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^4+bx_1^2x_3^2+cx_3^2)^3}\,, \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{aligned}A&=\frac{-2b+\delta+2p+2}{\delta}\,,\\ B&=\frac{3\left(2b^2-2b(\delta+p+1)-4c+3\delta+3\delta p+4p\right)}{\delta}\,,\\ C&=\frac{9b^2\delta+6c(3b-5\delta-4p-4)-6b\left(\delta^2+\delta+\delta p-p\right)+3\delta(2\delta+2\delta p+11p)}{\delta}\,,\\ D&=\frac{b^2(\delta(2\delta+1)+(\delta+2)p)-2b(c(-13\delta+p+1)+\delta(\delta+(\delta-13)p))}{\delta}\\ &\quad+\frac{20c^2-2c(\delta(10\delta+23)+(23\delta+10)p)+20\delta^2 p}{\delta}\,,\\ E&=\frac{-6c\left(b\left(-\delta^2+\delta+\delta p+p\right)+\delta(4\delta+4\delta p+5p)\right)+9b\delta p(b+2\delta)+c^2(33\delta+6p+6)}{\delta}\,,\\ F&=6b^2\delta p-6c(b(\delta+\delta p+p)+2\delta p)+3c^2(4\delta+3p+3)\,,\\ G&=c(c(2\delta+2\delta p+p)-2b\delta p)\,.\end{aligned} \tag{3.11}$$

K_1 是方程（3.5）在 $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 中的唯一解，而 K_1 满足以下条件 *g:*

i) $K_1(x)=K_1(-x)$, $K_1(\rho x)=\rho^{-3}K_1(x)$ *for* $\rho>0$.
ii) $|x^aD^aK_1(x)|<\frac{C}{|x|^3}$ *for any multi-index* $a\in\mathbb{N}_0^2$ *and any* $x\neq 0$.

证明。回忆命题 L_d 的证明中对算子 $L_{n,\,1}$ 的定义 3.1。方程（3.5）的右端项等于

$$G_1(x_1,x_3):=\frac{P_1(x_1,x_3)}{(x_1^2+\delta x_3^2)^{\frac{11}{2}}}\,,$$

其中 P_1 是四次多项式

$$\begin{aligned} P_1(x_1,x_3) &:= 45\Big(d_1(\nu,\delta)x_1^4 + d_2(\nu,\delta)x_1^2x_3^2 + d_3(\nu,\delta)x_3^4\Big)\,, \text{ with}\\ d_1(\nu,\delta) &:= 8p - 2\delta(1+p) + \delta^2\,,\\ d_2(\nu,\delta) &:= \delta(-12p + 17(1+p)\delta - 12\delta^2)\,,\\ d_3(\nu,\delta) &:= \delta^2(p - \delta 2(1+p) + 8\delta^2)\,. \end{aligned}$$

我们猜测方程（3.5）的一个解为（3.10），其中常数 A 到 G 待定。将 L_d 代入该试探解后，我们得到如下形式的函数 $K_1(x_1,\ x_3) = \frac{\Pi_{(x_1,\ x_3)}}{(x_1^2+\delta x_3^2)^{\frac{11}{2}}(x_1^4+bx_1^2x_3^2+cx_3^2)^5}$，其中 Π 是一个多项式，其项为 $x_1^{2i}x_3^{2(12-i)}$，其中 $i\in\{0,1,\dots,12\}$。将方程 $L_dK_1(x) = G_1(x)$ 乘以该表达式的分母后，我们得到一个含有七个未知系数的十三个方程组成的线性方程组，系数从 A 到 G。该线性方程组有唯一解，因此得到 K_1 具有（3.10）的形式，其系数由（3.11）给出。

现在显然可得 $K_1(x)$ 的性质 i) 和 ii)。转换为极坐标 $(x_1,\ x_3) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ 后，方程（3.5）在乘以 θ 后变为关于 r[11]的四阶常微分方程，其系数是 sin(θ) 和 cos(θ) 的多项式，且右端项有界。我们得到该常微分方程的存在性和唯一性，其导数直到 3 阶均满足 π-周期边界条件；由于我们还证明了 K 在原点之外光滑，因此可推得 K 是唯一的。□

引理 3.3。设 μ、δ 和 ν 满足（2.17）。定义 p 和 q 如（2.15）中所示，并定义 b 和 c 如（3.8）中所示。则方程 K_2（3.6）存在一个解，其表示为

$$K_2(x_1,x_3) = \frac{Ax_1^{12} + Bx_1^{10}x_3^2 + Cx_1^8x_3^4 + Dx_1^6x_3^6 + Ex_1^4x_3^8 + Fx_1^2x_3^{10} + Gx_3^{12}}{(x_1^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^4 + bx_1^2x_3^2 + cx_3^2)^3}\,. \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 2\,,\\ B &= -6b + 12p + 9\,,\\ C &= 6b(p-1) - 24c + 33p + 6\,,\\ D &= b^2 - 2b(c+1) + 2(b+13)bp - 20cp - 46c + 20p\,,\\ E &= -6c((b+5)p + b + 4) + 9b(b+2)p + 6c^2\,,\\ F &= 6b^2p - 6bc(p+1) + 3c(3c - 4p)\,,\\ G &= c(c(p+2) - 2bp)\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

K_2 是方程（3.6）在 $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 中的唯一解，并且 K_2 满足以下条件：

i) $K_2(x) = K_2(-x)$, $K_2(\rho x) = \rho^{-3}K_2(x)$ *for* $\rho > 0$.
ii) $|x^aD^aK_2(x)| < \frac{C}{|x|^3}$ *for any multi-index* $a\in\mathbb{N}_0^2$ *and any* $x\neq 0$.

证明。(3.6) 的右端项等于

$$G_2(x_1,x_3) := \frac{P_2(x_1,x_3)}{(x_1^2+x_3^2)^{\frac{11}{2}}}\,,$$

其中 P_2 是一个四次多项式，定义如下

$$P_2(x_1,x_3) := 45\left((8p-2)x_1^4 + (17-12p)x_1^2x_3^2 + (p-2)x_3^4\right)\,.$$

我们猜测方程 (3.6) 的一个解为 (3.12)。完全相同地，我们将 L_d 应用于该试探解，得到一个形式为 $K_2(x_1,\ x_3) = \frac{\Pi_{(x_1,\ x_3)}}{(x_1^2+x_3^2)^{\frac{11}{2}}(x_1^4+bx_1^2x_3^2+cx_3^2)^5}$ 的函数，其中 Π 是一个多项式含有项 $x_1^{2i}x_3^{2(12-i)}$，其中 $i\in\{0,1,\dots,12\}$。将方程 $L_dK_2(x) = G_2(x)$ 两边乘以此表达式的分母，我们得到一个含十三个方程的线性方程组，用于求解

七个未知系数 A 到 G。该线性方程组也有唯一解，因此我们得到 K_2 具有如下形式（3.12），其中 A 到 G 由（3.13）给出。□

总之，我们有

命题 3.4. 核函数 K： $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 算子 (3.7) 定义为

$$K(x) := 2\mu\delta\big(\sqrt{\delta}K_1(x) + \nu K_2(x)\big)\,. \tag{3.14}$$

此处的 函数 $K_1(x)$ 和 $K_2(x)$ 分别通过 (3.10)-(3.11) 以及 (3.12)-(3.13)定义 y.

注记 3.5. 当 $\delta = 1$ 时， $p = 1$、 $b = 2$ 和 $c = (1+\nu)(1-\nu)$，因此 K的公式可简化为

$$K(z) = 2\mu\frac{Az_1^4 + Bz_1^2z_3^2 + Cz_3^4}{|z|(z_1^2 + qz_3^2)^3} \tag{3.15}$$

with

$$A = 3 - 2q, \quad B = 2(3q^2 - 5q + 3), \quad C = q(3q - 2), \tag{3.16}$$

以及 $q = 1 - \nu$。这正是与各向同性弹性情形下的一维约化算子相关联的核 [4]；另请参见下文第 5 节。

3.2. **为正的区域**。我们的分析中一个关键环节要求 K在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$中处处为正。下文针对情形 I，计算满足这一条件的弹性系数范围。

命题 *3.6*（情形 *I* 下核的正性）。设 μ、 δ 和 ν 满足 *(2.17)*。按 *(2.15)* 定义 p 和 q，并按 *(3.8)* 定义 b 和 c。另设 ν 和 δ 满足 *(2.13)*。令 K（x）$= 2\mu\delta\big(\sqrt{\delta}K_1$（$x$）$+\nu K_2$（$x$）$\big)$ 为 *(3.3)* 中非局部算子的核，其中函数 K_1（x）和 K_2（x）分别通过 *(3.10)–(3.11)* 和 *(3.12)–(3.13)* 定义。那么，存在正常数 c_δ、 ν 和 C_δ、 ν，它们仅依赖于 δ 和 ν，使得 $\frac{\mu c_\delta}{|x|^{3^\nu}} \le K$（$x$）$\le \frac{\mu C_\delta}{|x|^{3^\nu}}$。

证明。 由于对任意 $\rho > 0$， $K(\rho x) = \rho^{-3}K(x)$，因此我们只需关注 K 在 $|x| = 1$ 上的最小值，即 $K(\cos\theta, \sin\theta)$ 在 $\theta \in [0, \pi)$ 上的最小值。

根据 K 的精确表达式在不同 ν 和 δ 下的图像，$\arg\min_{\theta\in[0,\pi)} K(\cos\theta, \sin\theta)$ 最可能的候选值是 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$。因此，使 $K(x) > 0$ 至多的 (ν, δ) 取值范围，不会超出同时满足 $K(1,0) > 0$ 和 $K(0,1) > 0$ 的取值范围。代入这两个值可得

$$K(1,0) = \delta^{3/2}(3 - 4\nu) + \delta^{5/2}(4\nu - 2) + 2\delta\nu\,, \qquad K(0,1) = \frac{\delta(\nu(-2\delta\nu + \delta + 2\nu - 4) + 1)}{(\nu - 1)^2}\,.$$

当且仅当 ν 和 δ 满足（2.13）时，这两个量均为正。根据 K的显式公式，我们断言（2.13）恰好刻画了使 K为正的系数范围。可以验证，图 3 的边界与集合 $\{(\nu,\ \delta)$：（2.13）成立$\}$ 的边界在数值上重合。□

注 3.7. 当 $\delta = 1$ 且 K 由式（3.15）-（3.16）给出时，对$\theta \mapsto K$（$\cos\theta$，$\sin\theta$）应用一阶导数检验可得

$$K(z) > 0 \text{ if and only if } \frac{2}{3} < q < \frac{3}{2}\,,$$

即当且仅当 $\nu \in (-\frac{1}{2},\ 13)$。-这与 ν在 [4] 中通过参数变分法得到的取值范围相同。

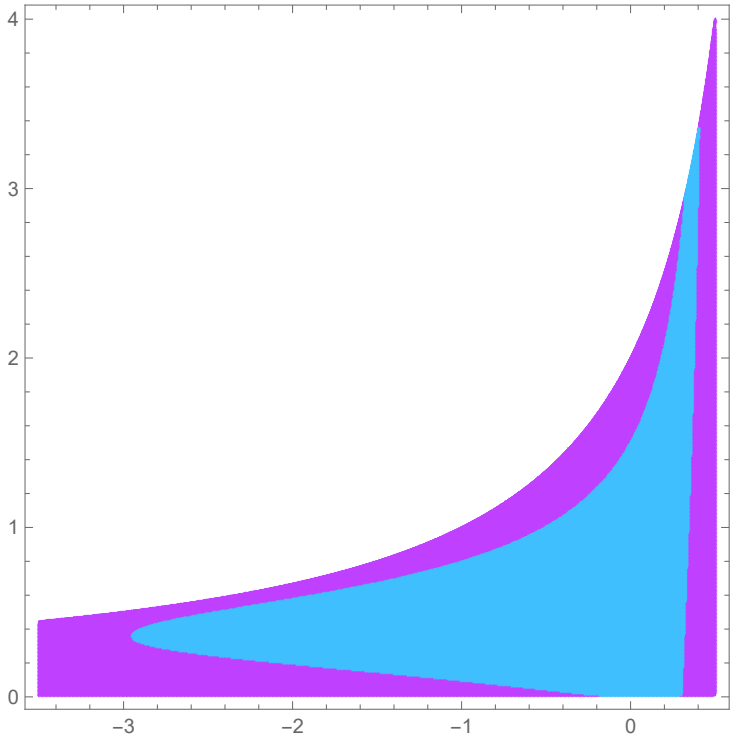


FIGURE 3. 数值极小值图： $K(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 在 $(\nu,\ \delta)$ 平面上的数值极小值。外部区域由满足 (2.17) 的 $(\nu,\ \delta)$ 构成。内部区域由以下 $(\nu,\ \delta)$ 构成：其数值极小值 $K(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 为正。

与（3.3）对应的能量为

$$E_\Gamma(u_1) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{L}u_1)u_1\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} W(u_1)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.17}$$

其中 $E_\Gamma(u_1;\ B_R)$ 定义了局部化版本。现在的目标是证明方程 (3.3) 的解的存在性、唯一性及其性质。得益于 K的性质，方程 (3.3) 的解具有一维剖面，我们将在第 6 节证明这一点。

4. THE 1D REDUCED EQUATION IN THE PERPENDICULAR CASE: $\partial_{u_1} W = 0$

假设 $W(u_1,\ u_3) = W(u_3)$，我们现在仿照第 3 节推导情形 II 的约化标量方程，然后在命题 4.1 中刻画非局部核的显式形式。由于材料具有各向异性，若假设错配势仅依赖于 $\hat{}u_3$，则会得到不同的约化方程。作出这一假设后，按照第 3 节的相同方法，可得到关于 $\hat{}u_3$ 的方程：

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_3)(k_1,k_3) := \frac{\det\mathbb{A}(k)}{a_{11}(k)}\hat{u}_3(k) = -\mathcal{F}(W'(u_3))\,. \tag{4.1}$$

对傅里叶变换进行求逆，我们得到一维非局部方程以及（2.8）：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_3(x_1,x_3) &= -W'(u_3(x_1,x_3))\,, \quad (x_1,x_3)\in\Gamma\,,\\ \lim_{x_3\to\pm\infty} u_3(x_1,x_3) &= \pm 1\,, \quad x_1\in\mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_3)(k) = \frac{2\mu r_2\big(\delta(2(1-\nu)-\delta(1-2\nu))k_1^2+k_3^2\big)}{\delta(2(1-\nu)-\delta(1-2\nu))k_1^2+(1-\nu)k_3^2}\hat{u}_3(k)\,. \tag{4.3}$$

这个方程类似于各向同性弹性情况下的一维约化方程。然而，分子和分母都不是拉普拉斯算子。回顾 p和 q 在（2.15）中的定义，我们可以将（4.3）改写为

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_3)(k) = \frac{2\mu r_2\big(pk_1^2 + k_3^2\big)}{pk_1^2 + qk_3^2}\hat{u}_3(k)\,. \tag{4.4}$$

注意，根据2.15中的定义， $0 < p \leq 4$ 和 $1/2 < q < \infty$ 对于任意 ν 和 δ 满足2.17，因此我们有

$$C(\mu, p, q)^{-1} r_2(k) \leq \mathcal{F}(\mathcal{L}u_3)(k) \leq C(\mu, p, q) r_2(k) \text{ for all } k \in \mathbb{R}^2\,.$$

我们采用第3 节中的记号约定（例如， $\mathcal{L}$ 具有非局部核 K等），但明确的定义（即 $\mathcal{L}$ 和 K的表达式）与第3 节中的定义不同，除非另有说明。

命题 4.1。 定义于 $\mathcal{L}$ 中的积分形式(4.1) 为

$$\mathcal{L}w = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \big(w(x-y) - w(x+y) - 2w(x)\big)K(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

其中， K 是偏微分方程在 $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 中的唯一解

$$(p\partial_1^2 + q\partial_3^2)K(z) = 2\mu(p\partial_1^2 + \partial_3^2)\left[\frac{1}{|z|^3}\right]\,. \tag{4.5}$$

证明。 定义 L_n 和 L_d 为符号分别是 $m_n(k) := pk_1^2 + k_3^2$ 和 $m_d(k) := pk_1^2 + qk_3^2$ 的算子。令 $w \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$。通过在原点附近使用截断函数并应用控制收敛定理，我们可以假设$\hat{}w$ 在原点附近为零。定义$v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$为 $L_d v = w$, 使得$\hat{}v = \hat{}_{m_d}^{w}(k)$。因此我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w &= 2\mu\left((-\Delta)^{1/2}L_n L_d^{-1} w\right)\\ &= 2\mu\left((-\Delta)^{1/2}L_n v\right)\,.\end{aligned}$$

根据定理 $-\Delta)^{1/2}$ 中的表示公式 1.1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w(x) &= -\frac{2\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_n)_x v(x-y) + (L_n)_x v(x+y) - 2(L_n)_x v(x)}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{2\mu}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(L_n)_y\left(v(x-y) + v(x+y) - \big(\sum_{|a|\leq 2}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a + (-y)^a)\big)\right)}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

这里我们使用多重指标记号。 $a = (a_1, a_3) \in \mathbb{N}_0^2$, $|a| = a_1 + a_3$, $a! = a_1!a_3!$, $y^a = y_1^{a_1}y_3^{a_3}$，以及 $D^a v(x) = \frac{\partial^{|a|}}{\partial_{x_1}^{a_1}\partial_{x_3}^{a_3}}v(x)$。现在进行分部积分（由于使用积分算子的主值定义，并注意到当取主值极限时，边界项 $\to 0$ ，因此这里可以毫无困难地进行分部积分），

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}w(x)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y) + v(x+y) - \sum_{|a|\leq 2}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a + (-y)^a)\right)(L_n)_y\left(\frac{2\mu}{(y_1^2+y_3^2)^{3/2}}\right)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

现在，由于 $K(y)$ 满足

$$L_d K(y) = L_n\left(\frac{2\mu}{|y|^3}\right) \tag{4.6}$$

再次分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 w(x) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(v(x-y)+v(x+y)-\Big(\sum_{|a|\le 2}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\Big)\right)(L_d)_y K(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(L_d)_y\left(v(x-y)+v(x+y)-\Big(\sum_{|a|\le 2}\frac{D^a v(x)}{a!}(y^a+(-y)^a)\Big)\right)K(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left((L_d)_x v(x-y)+(L_d)_x v(x+y)-2(L_d)_x v(x)\right)K(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(w(x-y)+w(x+y)-2w(x)\right)K(y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

□

命题 4.2 (情形 II 的齐次性和核的正性)。设 δ 和 ν 满足 (2.17)。定义 p 和 q 如 (2.15)所示。设核 $K\colon\ \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 定义如下

$$K(z) := 2\mu\frac{Az_1^6+Bz_1^4z_3^2+Cz_1^2z_3^4+Dz_3^6}{|z|^3(qz_1^2+pz_3^2)^3} \tag{4.7}$$

with

$$\begin{aligned}A &= 2pq^2-2pq+q^2,\quad B=-6p^2q+6p^2+9pq^2-6pq,\\ C &= -6p^2q+9p^2+6pq^2-6pq,\quad D=p^3-2p^2q+2p^2\,.\end{aligned} \tag{4.8}$$

则 K 满足以下性质:

i) $K(x)=K(-x)$, $K(\rho x)=\rho^{-3}K(x)$ 对 $\rho>0$成立。 *ii)* 对任意多重指标 $a\in\mathbb{N}_0^2$ 和任意 $x\neq 0$, $|x^a D^a K(x)|<\frac{C}{|x|^3}$。 *iii)* K 是方程 *(4.5)* 在 $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 中的唯一解，且具有 -3阶齐次性。 *iv)* 假设 ν和 δ满足 *(2.16)*。那么对于每个 $(\nu,\delta)\in\mathcal{U}^+$，存在正常数 $c_{\delta,\nu}$ 和 $C_{\delta,\nu}$，它们仅依赖于 δ 和 ν，使得 $\frac{\mu c_\delta}{|x|^3}^\nu\le K(x)\le\frac{\mu C_\delta}{|x|^3}^\nu$。

证明。性质 i) 显然成立，性质 ii) 可由性质 i) 轻易推出。将 (x_1,x_3) 转换为极坐标 $=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 后即可看出性质 iii)；两边乘以 r^3 后，方程 (4.5) 化为一个在 θ 上系数有界的二阶常微分方程，其在 $\theta\mapsto K(\cos\theta,\sin\theta)$ 上满足 π-周期边界条件。因此，存在唯一的二次可微解；根据性质 ii) 以及 $K(x)$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中满足方程 (4.5) 这一事实，可知该解必为 $K(\cos\theta,\sin\theta)$。

剩下需要证明性质 iv)。根据前面的讨论，只需考察函数 $K(\theta):=K(\cos\theta,\sin\theta)$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 内的临界点。利用初等代数，函数 $K'(\theta)$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 内的根为 0、$\pi/2$ 和反余弦($\zeta^\pm$)，其中

$$\zeta^\pm := \sqrt{\frac{2q^2-pq-p^2\pm\sqrt{(p-q)^2(p^2+q^2)}}{(p-q)^2}}\,.$$

在 $0<p\le 4$和 $\frac{1}{2}<q<\infty$的范围内，$\zeta^+\in[-1,1]$仅当 $p\ge\frac{4}{3}q$时成立，而 $\zeta^-\in[-1,1]$仅当 $p\le\frac{3}{4}q$时为实数。因此，方程 $K'(\theta)=0$ 在$\frac{3}{4}q\le p\le\frac{4}{3}q$时恰有两个解，否则恰有三个解。

因此，当且仅当 $K(x_1,x_3)>0$ 当且仅当 $K(\theta)>0$

$$\overline{K}(0)>0\,,\quad \overline{K}(\pi/2)>0\,,\quad \text{and}\quad \overline{K}(\arccos(\zeta^\pm))>0\,.$$

直接代入可得以下关系

$$\begin{aligned} &\frac{2(2pq-2p+q)}{q^2}>0\,,\\ &\frac{2(p-2q+2)}{p}>0\,,\\ &\frac{(q-1)\left(p^3+q^3+\left(p^2+q^2\right)\sqrt{p^2+q^2}\right)+4(1-p)pq^2}{2p(q-p)q^2}>0 \text{ when } p\le\frac{3}{4}q \text{ or } p\ge\frac{4}{3}q\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

区域 $\mathcal{U}^+$ 由这三个条件以及椭圆性条件（2.17）定义。经过初等代数运算可知，第一个条件给出 $\nu>\frac{\delta(\delta-2)}{2(\delta^2-\delta+1)}$，第二个条件给出 $\nu<\frac{2}{1+4\delta-2\delta^2+\sqrt{1-8\delta+28\delta^2-16\delta^3+4\delta^4}}$ 为说明第三个条件导出 $p>\tilde{r}$，我们结合解析论证与数值论证。首先，当 $p\ge 4q/3$ 时，很容易看出表达式 K(反余弦 $(\zeta^{\pm})$) 始终为正。其次，我们注意到 K(反余弦 $(\zeta^{\pm})$) $\le\min\{K(0)\ K(\pi/2)\}$ 在区域 U 内定义为 —

$$U:=\{(\nu,\delta)\ :(2.17)\text{ is satisfied and }\ 1/2<q<1,p\le 3q/4\}\,,$$

且 K(反余弦$(\zeta^{\pm})$) $\ge\min\{K(0)\ K(\pi/2)\}$ 在区域 $\{(\nu,\delta)$ 中：（2.17）成立，且 $1\ \ge q,p\le 3q/4\}$。第三，共轭

$$\frac{(q-1)\left(p^3+q^3-\left(p^2+q^2\right)\sqrt{p^2+q^2}\right)+4(1-p)pq^2}{2p(q-p)q^2}$$

对所有 $(p,\ q)\in U$，均为正。

将(4.9中的第三个表达式乘以其共轭，得到一个有理表达式，其分母为正，分子为多项式

$$\begin{aligned} x\mapsto\ &-8(-1+q)x^4+8(-1+q)q^3\\ &+q^2(13+14q-11q^2)x+(-11+14q+13q^2)x^3+2q(1-18q+q^2)x^2\,. \end{aligned}$$

该多项式的根可以精确求出（尽管其解析表达式使用起来较为繁复），并且可以通过数值验证，对于所有 $(p,\ q)\in U$，这四个根均为实数。综合以上观察可知，对于 $(p,\ q)\in U$，当且仅当 p 大于该多项式的两个或全部根时，K(反余弦$(\zeta^{\pm})$) >0。以下结论可通过数值验证：对于 $(p,\ q)\in U$，其中一个根始终为负。最小正根 $\tilde{r}$作为 q的函数，定义了一条曲线 $p=\tilde{r}$，将区域 U 分成两个集合（注意，对于 $q=1,\ \tilde{r}=0$ ）。另外两个正根始终位于区域 U 之外。总之，对于 $(p,\ q)\in U$，只有当 $p>\tilde{r}$时，K(反余弦$(\zeta^{\pm})$) >0，因此 iv) 得证。□

注4.3。当 $\delta=1$ 公式 K 与完全各向同性弹性的（3.15）-（3.16）相同时。

类似于（3.17），与（4.2）对应的能量为

$$E_\Gamma(u_3):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{L}u_3)u_3\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}W(u_3)\,\mathrm{d}x\,, \tag{4.10}$$

其中 E_Γ（u_3；B_R）定义了局部化版本。现在的目标是证明（4.2）的解的存在性、唯一性及其性质。得益于 K的性质，（4.2）的解具有一维剖面，我们将在第6节证明这一点。

5. Slip plane parallel to the plane of isotropy

在本节中，我们研究情形 III；Γ取为平行于各向同性平面，即$\Gamma=\{(x_1,x_2,x_3):\ x_3=0\}$。我们首先介绍三维模型并将其约化为二维非局部系统，然后在第5.1 节推导此情形下的标量约化方程。我们

在命题5.2中总结关于情形 III 解的存在性与唯一性的第三个结果。我们在第5.1节刻画相应非局部核的显式形式及其正性。

狄利克雷到诺伊曼映射以及随后得到的一维约化方程，其形式与完全各向同性弹性情形下的对应结果相同。对 [4]的分析因此可直接应用，但有一个例外：此处泊松比的对应量 ν 是五个弹性常数的函数，而非泊松比。这里 [4] 各向同性情形下对泊松比的约束 $\mathbb{R}^5$ 描述了一个区域，在该区域内积分微分核为正。完整三维系统以及扰动能量和局部化能量的记号均予以保留。

引理 5.1。假设$\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma; \mathbb{R}^3)$，其中 $\Gamma = \{x_3 = 0\}$ 满足

$$\begin{aligned} u_1^+(x_1, x_2) &= -u_1^-(x_1, x_2)\,, \\ u_2^+(x_1, x_2) &= -u_2^-(x_1, x_2)\,, \\ u_3^+(x_1, x_2) &= u_3^-(x_1, x_2)\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

并且满足以下任一条件

$$u_1^+(\pm\infty, x_2) = \pm 1 \quad \textit{for any } x_2 \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

or

$$u_2^+(x_1, \pm\infty) = \pm 1 \quad \textit{for any } x_1 \in \mathbb{R}\,. \tag{5.3}$$

此外，假设$\mathbf{u}$ 是总能量的局部极小值

$$E(\mathbf{u}) = E_{\mathrm{els}}(\mathbf{u}) + \int_\Gamma W(u_1^+, u_2^+)\,\mathrm{d}S$$

按定义*2.2*的意义。则$\mathbf{u}$ 满足欧拉-拉格朗日方程

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\mathbf{u} &= 0 \ \textit{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma\,, \\ \sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^- &= \partial_{u_1} W(u_1^+, u_2^+) \ \textit{on } \Gamma\,, \\ \sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^- &= \partial_{u_2} W(u_1^+, u_2^+) \ \textit{on } \Gamma\,, \\ \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- &= 0 \ \textit{on } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

命题 5.2 (情形 III：Γ 平行于各向同性平面，$\partial_{u_1} W = 0$)。假设五个弹性常数满足 (2.4)，并进一步假设 $(C_{11},\ C_{33},\ C_{13},\ C_{44},\ C_{66}) \in \mathcal{V}^+$，其中$\mathcal{V}^+ \subset \mathbb{R}^5$ 是区域

$$\mathcal{V}^+ := \left\{ (C_{11}, C_{33}, C_{13}, C_{44}, C_{66}) \,:\, \frac{2}{3} < \frac{\eta_1}{\eta_2} < \frac{3}{2} \right\}, \tag{5.5}$$

其中 η_1 和 η_2 是定义为如下的实数

$$\eta_1 := 2\sqrt{C_{44} C_{66}} \tag{5.6}$$

and

$$\eta_2 := \frac{1}{\tau}\left(C_{11} - C_{13} - C_{44} + \frac{C_{13} C_{44}}{C_{33}} + \frac{\sqrt{C_{11} C_{33}}(C_{33} - C_{13})(C_{44} + C_{13})}{C_{33}^2} \right), \tag{5.7}$$

并且其中

$$\tau := \frac{\sqrt{\sqrt{C_{11} C_{33}} - C_{13}}\sqrt{\sqrt{C_{11} C_{33}} + C_{13} + 2C_{44}}}{2\sqrt{C_{33} C_{44}}}\,. \tag{5.8}$$

假设 $\partial_{u_1} W = 0$，即 $W(u_1, u_2) = W(u_2)$，且 W满足 *(2.14)*。那么，系统 *(5.4)* 存在唯一的经典解 $\boldsymbol{u}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，属于 $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma;\ \mathbb{R}^3)$；该解在 x_1 方向平移及绕 x_3 轴旋转的意义下唯一，并且对所有 $s \geq 1$ 及任意固定的 $x_3 \neq 0$，均有 $\boldsymbol{u}(\cdot, \cdot, x_3) \in H^s(\mathbb{R}^2)$。此外，该解是 E 的一个局部极小值，其意义见定义 *2.2*。第二个分量 u_2 是方程 *(5.13)* 的唯一稳定解，其特定的非局部核定义见 *(5.15)*，且 u_2 具有一维剖面。

现在，我们仿照第 2 节，将三维系统约化为二维系统。这里 $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$且 $k = (k_1,\ k_2) \in \mathbb{R}^2$。

引理5.3. 假设五个弹性常数满足 (2.4)。假设 $\mathbf{u}$ 满足 (5.4)且当 $|x_3| \to \infty$ 时保持有界，并假设 u_1^+ 和 u_2^+ 属于 $H^s(\mathbb{R}^2)$，其中 $s \geq 1/2$。那么 $\mathbf{u}$ 可以完全表示为 u_1^+ 和 u_2^+ 的函数。特别地，(u_1^+, u_2^+)满足非局部系统

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}(\sigma_{13}^+(k) + \sigma_{13}^-(k)) \\ \mathcal{F}(\sigma_{23}^+(k) + \sigma_{23}^-(k)) \end{bmatrix} := -\mathbb{A}(k) \begin{bmatrix} \hat{u}_1^+(k) \\ \hat{u}_2^+(k) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \partial_{u_1} W(u_1^+, u_2^+) \\ \partial_{u_2} W(u_1^+, u_2^+) \end{bmatrix} \qquad on\ \Gamma\,, \tag{5.9}$$

其中，2×2 矩阵 $\mathbb{A}(k)$ 定义为

$$\mathbb{A}(k) = \eta_1 |k| \mathbb{I} + (\eta_2 - \eta_1)|k| \frac{k \otimes k}{|k|^2}\,, \tag{5.10}$$

并且，$\mathbb{I}$ 表示单位矩阵，而$(k \otimes k)_{ij} = k_i k_j$对 $i, j = 1,2$均成立。

证明。证明过程是直接计算，采用引理 2.6 中概述的方法。2×2矩阵 $\mathbb{A}$由 6×6矩阵 $\mathfrak{A}$确定。的特征多项式由 $\mathfrak{A}(k)$ 给出：

$$\widetilde{p}(\lambda) := \left(\lambda^2 - \delta|k|^2\right)\left(\alpha\lambda^4 - \gamma|k|^2\lambda^2 + \beta|k|^4\right)\,,$$

其中，四个无量纲参数 α、β、γ 和 δ 定义为

$$\alpha = \frac{C_{33}}{C_{44}}\,, \quad \beta = \frac{C_{11}}{C_{44}}\,, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - \left(\frac{C_{13}}{C_{44}} + 1\right)^2\,, \quad \delta = \frac{C_{66}}{C_{44}}\,.$$

由一致椭圆性条件（2.4）可知，这些常数至少满足 $\alpha > 0$、$\beta > 0$、$\delta > 0$ 和 $-2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma \leq \alpha\beta + 1$。关于 [16] 的椭圆性性质的详细讨论，另见 $\mathbb{L}$。$\widetilde{p}$（λ）的六个根为

$$\pm r_i(k) = \pm \vartheta_i |k|\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

其中，（可能为复数的）常数 ϑ_i 定义为

$$\pm\vartheta_1 = \pm\sqrt{\delta}\,, \qquad \pm\vartheta_2 = \pm\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}}\,, \qquad \pm\vartheta_3 = \pm\sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}}\,.$$

用原始弹性常数表示，$\vartheta_2 = \tau + \tilde{\tau}$和 $\vartheta_3 = \tau - \tilde{\tau}$，其中 τ定义于（5.8）中，而 $\tilde{\tau}$ 定义为

$$\tilde{\tau} := \frac{\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{33}} + C_{13}}\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{33}} - C_{13} - 2C_{44}}}{2\sqrt{C_{33}C_{44}}}\,.$$

的确切形式将取决于根是否重复或为复数，但关于约化矩阵 $\mathbb{A}$ 的公式（5.10）适用于所有情况。□

对于所有 $k \neq 0$，只要满足以下条件，矩阵 $\mathbb{A}(k)$ 就是正定的

$$\eta_1 > 0 \text{ and } \eta_2 > 0\,.$$

显然，$\eta_1 > 0$ 根据 C_{44} 和 C_{66}上的椭圆性条件，$\mathbb{R}^4$ 但描述 C_{11}、C_{13}、C_{33} 和 C_{44} 取值范围的 $\eta_2 > 0$ 中的区域则更难描述。不过，该集合非空；事实上，可以验证，对于弹性常数已在 η_2 第 [16, 页确定的材料，3]，其值为正。特殊情形是 $\sqrt{C_{11}C_{33}} - C_{13} - 2C_{44} = 0$；容易验证，恰当 $\eta_2 > 0$ 当

$$\frac{1}{\alpha} < \beta < 6 + \frac{2}{\alpha} + \alpha + \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}\sqrt{1+4\alpha} \text{ when } 0 < \alpha \leq 2 + \sqrt{5}\,,$$

$$6 + \frac{2}{\alpha} + \alpha - \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}\sqrt{1+4\alpha} < \beta < 6 + \frac{2}{\alpha} + \alpha + \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}\sqrt{1+4\alpha} \text{ when } 2 + \sqrt{5} < \alpha\,.$$

5.1. **一维方程**。显然，约化二维算子是各向同性的，因此只需考虑以下情形

$$W(u_1^+, u_2^+) = W(u_2^+)\,;$$

另一种情形

$$W(u_1^+, u_2^+) = W(u_1^+)$$

可通过坐标旋转等价地转化为第一种情形。与前几节类似，为简洁起见，我们省略 u_1^+, u_2^+ 上的上标。约化非局部系统为

$$\left(\eta_1|k|\mathbb{I} + (\eta_2-\eta_1)|k|\frac{k\otimes k}{|k|^2}\right)\begin{bmatrix}\hat{u}_1(k)\\ \hat{u}_2(k)\end{bmatrix} = -\mathcal{F}\begin{bmatrix}\partial_{u_1}W(u_1,u_2)\\ \partial_{u_2}W(u_1,u_2)\end{bmatrix} \quad \text{on } \Gamma\,. \tag{5.11}$$

如果进一步假设 $\partial_{u_1}W = 0$，即 $W(u_1, u_2) = W(u_2)$，那么我们可以用 $\hat{}u_2$ 表示 $\hat{}u_1$，并将其代入剩余方程。由此得到傅里叶空间中的一维标量各向异性非局部方程

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_2)(k_1,k_2) := \frac{\det \mathbb{A}(k)}{a_{11}(k)}\hat{u}_2(k) = -\mathcal{F}(W'(u_2))\,. \tag{5.12}$$

对傅里叶变换进行逆变换并利用（5.2），得到标量非局部方程

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_2(x_1,x_2) &= -W'(u_2(x_1,x_2))\,, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma\,,\\ \lim_{x_2\to\pm\infty} u_2(x_1,x_2) &= \pm 1\,, \quad x_1\in\mathbb{R}\,,\end{aligned} \tag{5.13}$$

其中

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u_2)(k) = \frac{\eta_1\eta_2|k|^3}{\eta_2 k_1^2+\eta_1 k_2^2}\hat{u}_2(k)\,. \tag{5.14}$$

若 $\eta_i > 0$ 对于 $i = 1, 2$，该方程与各向同性弹性情形中的一维约化方程具有相同形式 [4]。令 $\mu = \eta_1/2$, $p = 1$并且 $q = \eta_1/\eta_2$ 将 k_2 替换为 k_3 于命题4.1中，可得:

命题 5.4。定义于 $\mathcal{L}$ 中的(5.12) 的积分形式为

$$\mathcal{L}w(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\big(w(x-y)-w(x+y)-2w(x)\big)K(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

其中

$$K(z) = \eta_1\eta_2\frac{Az_1^4+Bz_1^2z_2^2+Cz_2^4}{|z|(\eta_1 z_1^2+\eta_2 z_2^2)^3} \tag{5.15}$$

with

$$A = 3\eta_1^2-2\eta_1\eta_2, \quad B = 2(3\eta_1^2-5\eta_1\eta_2+3\eta_2^2), \quad C = 3\eta_2^2-2\eta_1\eta_2 \tag{5.16}$$

是该偏微分方程在 $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 中的唯一解

$$(\eta_2\partial_1+\eta_1\partial_2)K(z) = \eta_1\eta_2(\partial_1^2+\partial_2^2)\left[\frac{1}{|z|^3}\right]\,. \tag{5.17}$$

命题 5.5(情形 III 中核的齐次性与正性)。定义 η_1 和 η_2 如同(5.6)–(5.7)中所述。设核 $K:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 定义如(5.15)–(5.16)。则 K 满足如下条件:

i) $K(x) = K(-x)$, $K(\rho x) = \rho^{-3}K(x)$, 对于 $\rho>0$。*ii)* 对任意多重指标 $a\in\mathbb{N}_0^2$ 以及任意 $x\neq 0$, $|x^a\mathcal{D}^aK(x)| < \frac{C}{|x|^3}$。*iii)* K 是方程 *(5.17)* 在 $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 中的唯一解，且为 -3 阶齐次函数。*iv)* 假设这五个弹性常数属于 $\mathcal{V}^+$。那么存在仅依赖于这五个弹性常数的正常数 c 和 C，使得 $\frac{c}{|x|^3}\le K(x)\le\frac{C}{|x|^3}$。

— —

证明。我们采用与命题 4.2 相同的方法。令 $\ell = \eta_1/\eta_2$。 $K'(\theta) = \frac{d}{d\theta} K$(余弦$(\theta)$，正弦$(\theta)$) 对于 $\theta \in [0, \pi/2]$ 的根分别为 0、 $\pi/2$和反余弦(ζ)，其中

$$\zeta := \sqrt{\frac{1 + 2\ell - 2\sqrt{1+\ell^2}}{\ell - 1}} \quad \text{for } \ell \in (1/2, 3/4) \cup (4/3, 2)\,.$$

在范围 $\frac{1}{2} < \ell < 2$, $\zeta \in [0, 1]$ 内仅当 $\ell \in (1/2, 3/4) \cup (4/3, 2)$。因此，方程$K'(\theta) = 0$在 $[0, \pi/2]$ 中当 $\ell \in (1/2, 3/4) \cup (4/3, 2)$ 时恰有三个解，否则恰有两个解。因此， $K(x_1, x_2) > 0$ 当且仅当 $K(\theta) > 0$ 当且仅当

$$\overline{K}(0) > 0\,, \quad \overline{K}(\pi/2) > 0\,, \quad \text{and} \quad \overline{K}(\arccos(\zeta)) > 0 \text{ when } \ell \in (1/2, 3/4) \cup (4/3, 2)\,.$$

直接代入可得关系式

$$\begin{aligned} &\frac{2(3\ell - 2)}{\ell^2} > 0\,, \\ &2(3 - 2\ell) > 0\,, \\ &\frac{\ell^3 + \ell^2\sqrt{\ell^2+1} + \sqrt{\ell^2+1} + 1}{2\ell^2} > 0 \text{ when } \frac{4}{3} < \ell < 2 \text{ or } \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{4}\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

显然，(5.18) 中的第三个关系式总是成立，而另外两个关系式给出的条件是 $2/3 < \ell < 3/2$。 □

注意，取弹性常数如式（2.5）所示，可得 $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1 - \nu$。 —

6. Bounded stable solutions have 1D profiles

现在我们证明约化标量方程的适定性及其解的性质。我们同时考虑以下三种情形：

I) $W(u_1, u_3) = W(u_1)$， $u = u_1$满足（3.3），核 K由命题 3.4 定义，且弹性常数满足命题 2.4 的假设。II) $W(u_1, u_3) = W(u_3)$， $u = u_3$满足（4.2），核 K由命题 4.2 定义，且弹性常数满足命题 2.5 的假设。III) $W(u_1, u_2) = W(u_2)$， $u = u_2$满足（5.13），核 K由命题 5.4 定义，且弹性常数满足命题 5.2 的假设。

得益于前几节的工作，这些情形均可归结为以下问题：求满足条件的 u

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u(x_1, x_2) = -W'(u(x_1, x_2))\,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \\ &\lim_{x_1 \to \pm\infty} u(x_1, x_2) = \pm 1\,, \quad x_2 \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $x = (x_1, x_2)$,

$$\mathcal{L}w(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \big(w(x - y) - w(x + y) - 2w(x)\big) K(y)\, \mathrm{d}y\,, \tag{6.2}$$

且非局部核 $K \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 满足

(i) 对任意 $\rho > 0$， $K(x) = K(-x)$， $K(\rho x) = \rho^{-3} K(x)$; (ii) 对任意多重指标 $a \in \mathbb{N}_0^2$ 和任意 $x \neq 0$， $|x^a \mathcal{D}^a K(x)| < \frac{C}{|x|^3}$; (iii) 存在正常数 ℓ 和 L，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\ell}{|x|^3} \le K(x) \le \frac{L}{|x|^3}$。 — —

本节中，我们证明在设定 I)、II) 和 III) 中的任意有界稳定解都具有一维剖面，即对于某个 $e \in \mathbb{S}^1$， $u(x) = \psi(e \cdot x)$，其中 ψ是一个一维标量问题的唯一解（相差平移变换）。

我们先澄清稳定解的定义。

定义 6.1。 我们称 u 是方程（6.1）的稳定解，当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathcal{L}v + W''(u)v\right) v \,\mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{for any } v \in C_c^2(\mathbb{R}^2).$$

将任意欧几里得球 $B_R \subset \mathbb{R}^2$ 中 u 的总能量定义为

$$\begin{aligned} E_\Gamma^0(u; B_R) &:= \frac{C_d}{4} \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus B_R^c\times B_R^c} |u(x)-u(y)|^2 K(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_R} W(u(x))\,\mathrm{d}x \\ &:= \frac{C_d}{4}\mathcal{E}(u; B_R) + F(u; B_R), \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 K 满足上述性质 (i)-(ii)-(iii)。在这一一般情形下，我们可以得到稳定解的内部 BV 估计。

引理 6.2。 设 $|u| \leq M$ 是定义 *6.1* 意义下方程 （6.1） 的有界稳定解。假设 W 满足 （2.14），且 $L_*:=\max\{2, \|W\|_{C_b^{2,\alpha}(\mathbb{R})}\}$。那么存在常数 $C = C$（ℓ、 L、 M、 L_*），使得对任意 $B_R \subset \mathbb{R}^2$ 和 $R \geq 1$,

$$\int_{B_R} |\nabla u|\,\mathrm{d}x \leq C(\ell, L, M, L_*) R\log(L_* R), \qquad \mathcal{E}(u, B_R) \leq C(\ell, L, M, L_*) R\log^2(L_* R). \tag{6.4}$$

我们省略该引理的证明，因为其证明步骤与 [4, 命题 4。5] 相同。主要思路是首先对任意方向 $e \in \mathbb{S}^1$ 得到关键的内部 BV 估计

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{\frac12}} (\partial_e u(x))_+ \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B_{\frac12}} (\partial_e u(y))_- \,\mathrm{d}y\right) &\leq C(\delta,\nu)\frac{\mathcal{E}(u, B_R)}{R^2}, \\ \int_{B_{\frac12}} |\nabla u(x)|\,\mathrm{d}x &\leq C(\delta,\nu)(1+\sqrt{\mathcal{E}(u, B_1)}), \end{aligned} \tag{6.5}$$

这依赖于核的性质 (i)-(ii)-(iii) K，然后使用能量的尖锐插值不等式 $\mathcal{E}(u, B_R)$。结合能量估计 (6.4) 和内部 BV 估计 (6.5)，可得当 $R \to +\infty$时，对于任意方向 $e \in \mathbb{S}^1$ 以及 $\mathbb{R}^2$ 中的任意半球，我们有

$$\partial_e u \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \quad \text{or} \quad \partial_e u \leq 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \qquad \text{for any } e \in \mathbb{S}^1,$$

由此可得， u 具有一维单调剖面。

因此，对于情形 I)、II) 和 III)，我们得出

定理 6.3。假设 $|u| \leq M$ 是方程 (6.1) 的有界稳定解，且 W 满足 (2.14)。设核 K 满足上述条件 (i)-(ii)-(iii)。那么 u 具有一维单调剖面，并且 $|u| \leq 1$。此外，对于任意 $e := (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1$，在固定 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的情况下，方程 (6.1) 的解可表示为 $u(x) = \psi(e\cdot x)$，其中 ψ 是一维标量问题的唯一解（相差平移除外）

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac12}\psi(x_1) &= \frac{-1}{m(\cos\theta, \sin\theta)} W'(\psi(x_1)), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x_1\to\pm\infty} \psi(x_1) &= \pm 1, \end{aligned}$$

并且其中 m 是与之关联的符号 $\mathcal{L}$ 其定义见 (3.4)、(4.4)或 (5.14).

证明。 证明与 [4, 定理 46]相同。 □

命题 2.4、命题 2.5和命题 5.2 的证明。 由定理 6.3，方程（6.1）的解唯一，且具有一维剖面。这意味着方程（3.3）、（4.2）和（5.13）的解分别唯一，且具有一维剖面。根据已得到的三维解的一个分量，我们可以进一步利用第2节中基于相关狄利克雷到诺伊曼映射的弹性延拓，求出三维系统中的另外两个分量（完全各向同性情形的详细说明见 [7] ）。最后，得到分别对应这三种设定的完整三维系统的唯一稳定解。 □

注6.4。对于更一般的各向异性材料，或者对于不满足（2.11）的弹性系数，与狄利克雷到诺伊曼映射相关联的矩阵 $\mathbb{A}$ 表达式会更加复杂，使得本文采用的方法难以实施。本文的结果在这些更一般的情形下仍有待解决。

References

[1] Xavier Cabr
´ `
Communications e 和 Joan *on Pure and Applied Mathematics* 58 12 1678 1732, 2005 Sola-Morales。半空间中边界反应的层解。 , ( ): – Dec 。[2] Eleonora Cinti、Joaquim Serra 和 Enrico Valdinoci。稳定非局部极小曲面的定量平坦性结果与 BV-估计。 *Journal of Differential Geometry*, 112(3):447–504, Jul 2019。[3] Serena Dipierro、Joaquim Serra 和 Enrico Valdinoci。非局部相变的平坦性改善。*American Journal of Mathematics*, 142(4):1083–1160, 2020。[4] Hongjie Dong 和 Yuan Gao。弯曲位错 Peierls–Nabarro模型有界稳定解的存在性与唯一性。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 60(2):1–26, 2021。[5] Alessio Figalli 和 Joaquim Serra。关于边界反应的稳定解：维度为 $4+1$时的 De Giorgi型结果。 *Inventiones mathematicae*, 219(1):153–177, Jan 2020。[6] Yuan Gao、Jian-Guo Liu 和 Zibu Liu。高维位错矢量 Peierls–Nabarro 模型的存在性与刚性。 *Nonlinearity*, 34(11):7778, 2021。[7] Yuan Gao、Jian-Guo Liu、Tao Luo 和 Yang Xiang。重新审视希尔伯特空间中刃位错的 Peierls-Nabarro 模型。 *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 26(6):3177, 2021。[8] Yuan Gao 和 Jean-Michel Roquejoffre。Ginzburg-Landau能量下具有动态边界反应的扩散的渐近稳定性。 *arXiv preprint arXiv:2201.02105*, 2022。[9] M. Gonz´
ález 和 R. Monneau。一维半拉普拉斯算子反应扩散方程极限下粒子系统的慢运动。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32:1255–1286, 2012。[10] Changfeng Gui 和 Qinfeng Li。分数阶 Allen–Cahn 方程稳定解的一些能量估计。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 59(2):49, 2020。[11] J. P. Hirth 和 J. Lothe。 *Theory of Dislocations (2nd ed.)*。Wiley，纽约，1982。[12] J Merodio 和 RW Ogden。关于横观各向同性线弹性固体强椭圆性的一则注记。*Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 56(4), 2003。[13] F.R.N. Nabarro。简单立方晶格中的位错。 *Proceedings of the Physical Society* 59 2 256 272, , ( ): – 。 1947
[14] S. Patrizi 和 E. Valdinoci。晶体中原子位错的弛豫时间。
Calc. Var. Partial Differ. , : – 。[15] S. *Equ.* 55 1 44, 2016 Patrizi 和 E. Valdinoci。晶体位错动力学的长时间行为。
Math. Models Methods , : – 。[16] RC *Appl. Sci.* 27 2185 2228, 2017 Payton。 *Elastic wave propagation in transversely isotropic media*，第4卷。Springer Science & Business Media，2012。[17] Rudolf Peierls。位错的尺寸。 *Proceedings of the Physical Society*, 52(1):34, 1940。[18] Ovidiu Savin。非局部相变中极小化子的刚性。 *Anal. PDE*, 11(8):1881–1900, 2018。[19] T.C.T. Ting 和 Tungyang Chen。各向异性弹性材料的泊松比可能没有界限。*Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 58 1 73 82, 2005 The , ( ): – 。

[20] Yang Xiang。不同尺度下的位错建模。 *Commun. Comput. Phys.*, 1(3):383–424, 2006。

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN

Email address: gao662@purdue.edu

Department of Applied Physics and Applied Mathematics, Columbia University, New York,NY 10027

Email address: jms2555@columbia.edu