来自噪声量子电池的功提取过程：非局域资源的作用

Salvatore Tirone, [1,] * Raffaele Salvia, [2,] † Stefano Chessa, [2, 3,] ‡ 以及 Vittorio Giovannetti[2]

[1] *Scuola Normale Superiore, I-56126 Pisa, Italy* [2] *NEST, Scuola Normale Superiore and Istituto Nanoscienze-CNR, I-56126 Pisa, Italy* [3] *Electrical and Computer Engineering, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 61801, USA*

我们证明，在从量子电池模型中进行功提取时，使用非局域操作和非局域态来减轻环境噪声的不利影响，会产生不对称的有益效果。具体而言，我们表明，在噪声作用后使用非局域恢复操作，即使输入态是可分的（即不纠缠的），通常也能增加从电池中恢复的功量。相反，采用纠缠输入态和局域恢复操作通常不会改善电池的性能。

arXiv:2304.01270v2 [quant-ph] 5 Sep 2023

量子热力学是一个快速发展的领域，旨在理解纳米尺度下小型量子系统的行为 [1]。尤其令人关注的是利用量子效应改进电池的充电过程 [2–8]，这有望推动多个领域的技术进步。该问题的一个关键方面，是评估这些模型在接触环境噪声时的稳定性，因为这代表了更现实的情形，并可能显著影响能量回收/存储的效率。在无噪声区间，已有研究提出了量子电池模型的容量 [8–10] 而从资源理论的角度出发，量子信道的热力学容量（就可模拟性而言）也已有定义 [11]。关于环境噪声作用于系统时这一更现实情形下的能量操控，已有少数研究在特定场景中取得了一些成果，参见例如 [12–20],；此外，人们还提出了多种方案，以稳定受到特定类型扰动影响的量子电池 [1, 21–29]。在这项工作中，我们利用参考文献功容量泛函来解决这一问题。 [30]这些量度评估由大量相同且相互独立的含噪单元（简称量子单元或 q-单元）组成的量子电池模型的功提取过程效率，并以最优量子态为目标

制备方案（在噪声作用之前执行编码操作）和最优恢复变换（在噪声作用之后执行解码操作）。形式上，它们定义为从系统中提取的功与存储在量子电池中的初始能量之比的渐近极限。对于给定的量子电池模型，其数值很大程度上取决于对系统允许的变换所施加的约束类型——见图1。我们的主要发现是，无论噪声模型如何，仅在编码层面使用非局域资源（即采用量子相关态来存储电池的初始能量）并不会提高模型的效率。相反，我们表明，采用非局域变换在恢复阶段，通常会提高电池的功提取性能。取得这一结果的关键在于推导出一个单字母公式，从而简化任意噪声模型下局域烟率容量的计算 [30]。

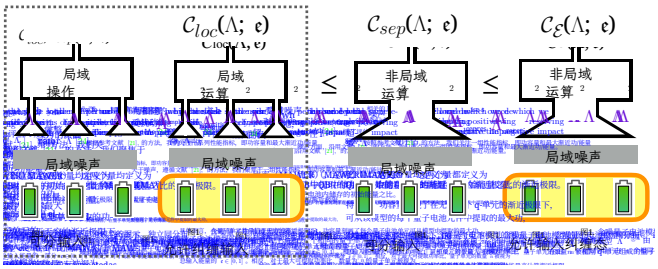

图1. 含噪量子电池模型中的功提取资源核算。模型由 n 受局域噪声（灰色）影响的量子单元（图中绿色元素）组成。从左至右依次为：可分输入局域功率容量$C_{\mathrm{loc,\ sep}}(\Lambda;\epsilon)$（每个单元可提取的最大功，此时量子电池的态制备和噪声作用后的恢复操作均受局域资源限制）；局域功率容量 $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\epsilon)$（此处仅在恢复阶段施加局域性限制）；可分输入容量 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\epsilon)$（仅在态制备阶段施加局域性限制）；可提取功容量 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\epsilon)$（不施加局域性限制）。如定理1所示，无论噪声模型如何， $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\epsilon)$和$C_{\mathrm{loc,\ sep}}(\Lambda;\epsilon)$始终相等。

预备知识：我们将含噪量子电池（QB）建模为由 n 个相同且相互独立（非相互作用）的元件（简称量子单元或 q-单元）组成的集合，每个元件都能够将能量储存在与其局域哈密顿量 h_1、 h_2 相关联的内部自由度^ ^ 中，$\cdots$， h_n，它们在局部上均与单个 ^ q-单元哈密顿量完全相同 h，并受到相同的局部噪声源扰动，我们用一个线性、完全正且保迹的（LCTP）超算子来描述该噪声源 Λ [31–33]。这些系统中的功提取效率可以通过引入 [30] 中的功容量作为性能指标来衡量。第一个例子是遍历功容量 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\ \epsilon)$。

可提取功是一个成熟且广泛认可的度量指标，用于衡量从量子态中能够提取的最大功ˆρ，其提取方式是通过保持系统总能量不变的幺正操作 [9, 34, 35]。对于一个 d维系统，其由哈密顿量ˆ刻画 H，可将其表示为

$$\mathcal{E}(\hat{\rho};\hat{H}) := \max_{\hat{U}\in\mathbb{U}(d)} \left\{ \mathfrak{E}(\hat{\rho};\hat{H}) - \mathfrak{E}(\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^{\dagger};\hat{H}) \right\}, \qquad (1)$$

其中，$\mathfrak{E}(\hat{\rho};\hat{H}) := \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{H}\right]$ 表示量子态ˆρ 的平均能量，而 $\mathbb{U}(d)$是幺正群的 d维表示。根据这一定义，要衡量噪声 Λ 作用后可从量子电池中提取的最大功，一个合理的方法是考虑

$$\mathcal{E}^{(n)}(\Lambda;E) := \max_{\hat{\rho}^{(n)}\in\mathfrak{S}_E^{(n)}} \mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)});\hat{H}^{(n)}), \qquad (2)$$

其中，$\hat{H}^{(n)} := \hat{h}_1 + \cdots + \hat{h}_n$ 表示电池哈密顿量，最大化是在集合 $\mathfrak{S}_E^{(n)}$ 上进行的，该集合包含所有平均能量为 $\mathfrak{E}(\hat{\rho}^{(n)}) \leq E$的 n 个量子单元状态ˆ$\rho^{(n)}$。现在，将能量容量 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\mathfrak{e})$定义为 $\mathcal{E}^{(n)}(\Lambda;E)$在 $n\to\infty$下的适当正则化，并假设（平均而言）每个 n 量子单元储存的能量不超过总输入能量 [30], 的 $\mathfrak{e}\in[0,||h||_\infty]$，即

$$C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\mathfrak{e}) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}^{(n)}(\Lambda;E=n\mathfrak{e})}{n}, \qquad (3)$$

其中，不失一般性，我们将局域哈密顿量 h 的基态能量设为零。在没有噪声的情况下（即 Λ 是恒等信道），$C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 等于 $\mathfrak{e}$，这表明，只要适当地制备量子单元的输入态，我们就能取回最初存入电池的全部能量。相反，耗散和退相干往往会使 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda,\mathfrak{e})$ 的值变小，这意味着无论我们如何选择制备量子电池的量子态，模型的性能都会下降。限制可对电池执行的运算，也会降低 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda,\mathfrak{e})$ 的值。例如，若假设式（2）中的最大化仅针对量子单元的可分输入态进行，我们就会用 $\mathcal{E}^{(n)}_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\ n\mathfrak{e})(\leq\ \mathcal{E}^{(n)}(\Lambda;\ n\mathfrak{e}))$ 替代 $\mathcal{E}^{(n)}(\Lambda;n\mathfrak{e})$；按照式（3）进行正则化后，这便给出模型的可分输入容量 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda,\mathfrak{e})$。进而，这表示在这些元素之间不存在初始纠缠时，我们每个量子单元能够提取的渐近功 [30]。类似地，若将式（1）中的优化限制为仅包括作用于量子单元的局域幺正操作（即将 $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\rho};H)$ 替换为局域功率 [36]），则可将 $\mathcal{E}^{(n)}\mathrm{loc}(\Lambda;n\mathfrak{e})$ 与其正则化极限 $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})$ 对应起来。最后，若假设优化仅针对可分态和局域幺正操作进行，便可定义 $\mathcal{E}^{(n)}\mathrm{loc,sep}(\Lambda;\ n\mathfrak{e})$ 和 $C_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$。关于……，参见 [37]

形式化定义。简单的资源计数论证可以证明，这些泛函 [30] 之间存在一种自然的偏序关系，其中 $C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 和 $C_{\mathrm{loc,\ sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 分别是最大项和最小项，而 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})$ 和 $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 则是中间量，即。

$$C_{\mathcal{E}}(\Lambda;\mathfrak{e}) \geq C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}), C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e}) \geq C_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) . \qquad (4)$$

正如我们将看到的，本文的主要成果之一是细化（4），证明对于所有噪声模型，$C_{\mathrm{loc、\ sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$与 $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})$之间不存在差距，并且可以严格证明 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})\ \geq C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$。

闭式公式与界：– 现在我们证明，无论 LCPT 映射 Λ 如何，可分输入的局域烟率容量$C_{\mathrm{loc、\ sep}}$（Λ；$\mathfrak{e}$）与局域烟率容量 C_{loc}（Λ，$\mathfrak{e}$）相等，并且可用单次（$n=1$）最大输出功率泛函（2）表示为简单的单字母表达式，即

定理 1。对于任意 *LCPT* 映射 Λ，以及任意 $\mathfrak{e}\in$ˆ$[0,||h||_\infty]$，我们可以写成

$$C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e}) = C_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) = \chi(\Lambda;\mathfrak{e}), \qquad (5)$$

$$\chi(\Lambda;\mathfrak{e}) := \sup_{\{p_j,\mathfrak{e}_j\}} \sum_j p_j\, \mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\mathfrak{e}_j), \qquad (6)$$

其中，上确界取遍所有满足约束的输入 *q*-单元能量 *{style id='1'>*ˆ$\{p_j,\mathfrak{e}_j\}$ $\mathfrak{e}_j\in[0,||h||_\infty]$

$$\sum_j p_j\mathfrak{e}_j \leq \mathfrak{e}. \qquad (7)$$

证明。鉴于（4），为推导公式（5），只需证明 $\chi(\Lambda;\mathfrak{e})$ 是 *i)*$C_{\mathrm{loc,\ sep}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})$ 的下界，以及 *ii)* $C_{\mathrm{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 的上界。

不等式 i) 的证明可通过观察到：给定 $\mathfrak{e}\in[0,||h||_\infty]$ 和 n 为整数，我们有，模型 $\mathcal{E}^{(n)}$ loc

, Λ $E=$ $n\mathfrak{e}$

sep(;) 的最大输出局域功率必然小于在形如 ˆ$\rho^{(n)}$ fact :=ˆ $\rho_1\otimes\hat{\rho}_2\otimes\cdots\otimes\hat{\rho}_n$ 的（因子化）量子态上计算得到的输出局域功率，其中对于 $i=1$、$\cdots$、n，ˆρ_i 是第 i 个 q-单元的密度矩阵，其输入能量为$\tilde{\mathfrak{e}}_i\in[0,||\hat{}h||_\infty]$，并满足约束 $\sum_{i=1}^n\tilde{\mathfrak{e}}_i/n\leq\mathfrak{e}$。也就是说，$\mathcal{E}^{(n)}$ loc,sep$(\Lambda;E=n\mathfrak{e})$ $\geq\ \mathcal{E}_{\mathrm{loc}}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}$ fact$);\hat{H}^{(n)})\ =\sum_{i=1}^n\mathcal{E}(\Lambda(\hat{\rho}_i);\hat{h})$，其中在第二步中我们使用了非相互作用系统的局域功率是可加的这一事实 [30, 36]。特别地，选择 $\tilde{\rho}_i$ 使其最大化单次最大输出功率 $\mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\tilde{\mathfrak{e}}_i)$，我们可以将上述不等式转化为

$$\frac{\mathcal{E}^{(n)}_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;E=n\mathfrak{e})}{n} \geq \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\tilde{\mathfrak{e}}_i)}{n}. \qquad (8)$$

在 $n\ \to\ \infty$极限下，左侧趋近于$C_{\mathrm{loc,\ sep}}$（Λ，$\mathfrak{e}$）。相反，给定任意满足约束（7）的分布 $\{p_j,\mathfrak{e}_j\}$，我们可以迫使

式（8）的右侧收敛至 $\sum_j p_j\ \mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\mathfrak{e}_j)$。因此，我们可以写成 $C_{\text{loc, sep}}(\Lambda;\ \mathfrak{e}) \geq \sum_j p_j\ \mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\ \mathfrak{e}_j)$；对 $\{p_j,\mathfrak{e}_j\}$ 的所有取值进行优化后可见，式（5）的右侧确实是$C_{\text{loc, sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 的下界。

现在我们证明性质*ii)*。为此，考虑最优量子态$\hat{}\rho_*^{(n)}$，它使我们能够在固定 n 和 $\mathfrak{e}$的情况下，使 $\mathcal{E}^{(n)}{}_{\text{局域}}(\Lambda;E=n\mathfrak{e})$的最大化达到饱和。利用局域功率的可加性，我们可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\text{loc}}^{(n)}(\Lambda;E=n\mathfrak{e})}{n} &= \frac{\mathcal{E}_{\text{loc}}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}_*^{(n)});\hat{H}^{(n)})}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathcal{E}(\Lambda(\hat{\rho}_i);\hat{h})}{n} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\mathfrak{e}_i)}{n}\ ,\end{aligned} \tag{9}$$

其中，对于 $i\in\{1,\cdots,n\}$，$\hat{}\rho_i$是$\hat{}\rho_*^{(n)}$在对应于第 i个q-单元上的约化密度矩阵，而 $\mathfrak{e}_i$ 表示其平均能量；按构造，它必须满足条件 $\sum_{i=1}^n \mathfrak{e}_i/n \leq \mathfrak{e}$。接下来注意到，由于$\{p_i=1/n,\mathfrak{e}_i\}$ 是满足（7）的能量分布的一个特殊实例，（9）的最后一项必定小于或等于 χ（Λ；$\mathfrak{e}$）。取 $n\to\infty$ 极限后，最终便得到论文结论。

□

注 1。对于单次（n =1）最大输出功率 $\mathcal{E}^{(1)}$（Λ；$\mathfrak{e}$）是能量参数 $\mathfrak{e}$的凹函数的噪声模型，可以显式地完成公式（5）中的优化，从而得到更简洁的表达式：

$$C_{\text{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e}) = C_{\text{loc,sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) = \mathcal{E}^{(1)}(\Lambda;\mathfrak{e})\ . \tag{10}$$

由于 $C_{\text{loc, sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 肯定不大于$C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$，定理 1 的结果使我们能够在 $C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 和 $C_{\text{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 之间建立明确的排序，即

$$C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) \geq C_{\text{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})\ . \tag{11}$$

从物理上看，这意味着，与量子通信等其他量子信息场景中的情况不同，[38], 在功提取任务中，原则上，在解码阶段使用非局域资源总是优于在编码阶段使用这些资源。为了进一步强化这一论断，接下来我们将推导 $C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 的一个非平凡下界；对于由维数大于 2 的q-单元构成的量子电池模型，该下界通常大于 $\chi(\Lambda,\ \mathfrak{e})$:

推论 1。对于任意 *LCPT* 映射 Λ，以及任意 $\mathfrak{e}\in\hat{}[0,||h||_\infty]$，我们可以写出

$$C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) \geq \chi_{\text{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e}) := \sup_{\{p_j,\mathfrak{e}_j\}}\sum_j p_j\ \mathcal{E}_{\text{tot}}^{(1)}(\Lambda;\mathfrak{e}_j)\ , \tag{12}$$

其中 $\mathcal{E}^{(1)}{}_{\text{总}}(\Lambda;\ \mathfrak{e})$ 是信道 *[9]*输出端所能获得的单次能量约束最大总可提取功 Λ，与式（5）的情况一样，上确界取遍所有的分布 $\{p_j,\mathfrak{e}_j\}$ 的$\hat{}$输入 q-单元能量 $\mathfrak{e}_j\in[0,||h||_\infty]$ 满足约束（7）。

不等式（12）最终源于参考文献 [30] 所示的性质，即 $C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 与 $C_{\text{sep, tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 相同（后者是将 $\mathcal{E}_{\text{sep}}^{(n)}(\Lambda;E)$ 中出现的可提取功替换为总功率得到的）。不过，为求完整，我们在 [37] 中给出该推论的一个独立证明。

在特殊情况下，我们可以证明，式（12）右侧给出了 C_{sep}（Λ；$\mathfrak{e}$）的精确值：

推论 2。设 Λ 是一个 *LCPT* 映射，使得对于所有 $\mathfrak{e}\in[0,||h||_\infty]$ 和 n 整数，它都存在一个单体量子态 $\hat{}\sigma_{\mathfrak{e}}$（可能依赖于 n），其平均能量为 $\hat{}\mathfrak{E}$（$\hat{}\sigma$；h）$\leq\mathfrak{e}$，满足

$$\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(|\Psi_{\text{fact}}^{(n)}\rangle\langle\Psi_{\text{fact}}^{(n)}|);\hat{H}^{(n)}) \leq \mathcal{E}((\Lambda(\hat{\sigma}_{\mathfrak{e}}))^{\otimes n};\hat{H}^{(n)}), \tag{13}$$

对于所有因子化纯态 $|\Psi^{(n)}\rangle_{\text{fact}}$，其平均能量为$\mathfrak{E}$（$|\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}\rangle$；$\hat{}H^{(n)}$）$\leq n\mathfrak{e}$。则不等式（12）取等号，即

$$C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) = \chi_{\text{tot}}(\Lambda,\mathfrak{e})\ . \tag{14}$$

证明。设 $\{P_k,|\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}(k)\rangle\}$ 是一个因子化量子态的系综，使我们能够将 QB 的一个给定可分密度矩阵表示为 $\hat{}\rho_{\text{sep}}^{(n)}$，即 $\hat{}\rho_{\text{sep}}^{(n)} = \sum_k P_k|\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}(k)\rangle\langle\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}(k)|$。注意，如果 $\hat{}\rho_{\text{sep}}^{(n)}$ 的平均能量为 $\mathfrak{E}(\hat{}\rho_{\text{sep}}^{(n)};\ \hat{}H^{(n)}) \leq n\mathfrak{e}$，则必有 $\sum_k P_k\mathfrak{e}_k \leq\mathfrak{e}$，其中 $n\mathfrak{e}_k$ 是 $|\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}(k)\rangle$的平均能量，即$\mathfrak{E}(|\Psi^{(n)}{}_{\text{fact}}(k)\rangle;\ \hat{}H^{(n)}) = n\mathfrak{e}_k$。由 ergotropy 泛函的凸性可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}_{\text{sep}}^{(n)});\hat{H}^{(n)}) &\leq \frac{1}{n}\sum_k P_k\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(|\Psi_{\text{fact}}^{(n)}(k)\rangle);\hat{H}^{(n)}) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_k P_k\mathcal{E}((\Lambda(\hat{\sigma}_{\mathfrak{e}_k}))^{\otimes n};\hat{H}^{(n)}) \\ &\leq \sum_k P_k\sup_{n'}\frac{\mathcal{E}((\Lambda(\hat{\sigma}_{\mathfrak{e}_k}))^{\otimes n'};\hat{H}^{(n')})}{n'} \\ &= \sum_k P_k\mathcal{E}_{\text{tot}}(\Lambda(\hat{\sigma}_{\mathfrak{e}_k});\hat{h}) \\ &\leq \sum_k P_k\mathcal{E}_{\text{tot}}^{(1)}(\Lambda,\mathfrak{e}_k) \leq \chi_{\text{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})\ ,\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中我们使用了（13），而在最后三步推导中，我们采用了总功率和受最大能量约束的输出总功率的定义。注意到 $\{P_k,\mathfrak{e}_k\}$ 是式（14）右侧上确界中所包含系综的一个特例，因此我们可以得出$\frac{1}{n}\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{}\rho_{\text{sep}}^{(n)});\hat{}H^{(n)}) \leq \chi_{\text{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})$，这对所有平均能量小于

或等于 $n\epsilon$。最后，通过对所有 $\hat{\rho}_{\text{sep}}^{(n)}$ 取上确界并取 $n \to \infty$ 极限，即可得出论文结论。

□

示例：– 由于对于维数为 2 的系统，总可提取功泛函与可提取功始终相同（见 [37]），鉴于定理 1 和推论 1，若要确定表现出有限间隙 ΔCbetween $C_{\text{sep}}(\Lambda;\epsilon)$ and $C_{\text{loc}}(\Lambda;\epsilon)$ 的量子电池，最佳选择是聚焦于量子电池单元具有维数 $d \geq 3$ 的模型。在 [30] 中可以找到一个此类实例，其中求出了任意维数退极化映射的 $C_{\text{sep}}(\Lambda;\epsilon)$ 和 $C_{\text{loc}}(\Lambda;\epsilon)$ 的取值。下面我们再介绍几个其他情形。例如，在图 2 的 a) 面板中，我们绘出了对受多能级振幅阻尼信道作用的三能级系统，数值求解式 (5) 和 (12) 中优化问题所得的间隙 [39, 40]。另一个例子是考察由相互独立的（无限维）谐振子组成的量子电池模型，这些谐振子受到由相位不敏感玻色高斯信道（PI-BGCs）描述的噪声模型影响 [38, 41]。借助 [42] 的结果，我们知道，对于这些系统，最大输出可提取功和最大总可提取功均通过将相干态作为量子电池单元的输入态配置来获得。在 Λ 对应于单模 PI-BGC Φ_1 的情况下，这意味着对于所有输入能量 ϵ，$C_{\mathcal{E}}(\Phi_1;\epsilon) = C_{\text{sep}}(\Phi_1;\epsilon)$，因此 $C_{\text{sep}}(\Phi_1;\epsilon)$ 与 $C_{\text{loc}}(\Phi_1;\epsilon)$ 之间不存在间隙。特别地，我们有 $C_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_{\lambda,N};\epsilon) = \lambda\epsilon$，$C_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}_{\mu,N};\epsilon) = \mu\epsilon$，以及 $C_{\mathcal{E}}(\mathcal{N}_N;\epsilon) = \epsilon$，其中 $\mathcal{L}_{\lambda,N}$ 是热衰减信道，$\mathcal{A}_{\mu,N}$ 是热放大器，而 $\mathcal{N}_N$ 是加性噪声信道 [38, 41]。如果 Λ 表示多模 PI-BGC，情况就变得更加有趣。事实上，我们可以观察到 C_{sep} 和 C_{loc} 存在间隙的情形。图 2 的 b) 面板展示了一个实例，其中我们考虑了一个 2 模式 PI-BGC $\Phi_2 = \mathcal{L}_{\lambda,N} \otimes \mathcal{L}_{0,0}$，它对其中一个模式起热衰减信道的作用，并在另一个模式上输出真空态。对于该信道，最优输出可提取功 $\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_2;\epsilon)$ 和最优输出总可提取功 $\mathcal{E}^{(1)}\text{tot}(\Phi_2;\epsilon)$ 都是输入能量 ϵ 的仿射函数，但二者并不相同，这意味着$C_{\text{loc}}(\Phi_2;\epsilon) = \mathcal{E}^{(1)}(\Phi;\epsilon)$，以及 $C_{\text{sep}}(\Phi_2;\epsilon) = \mathcal{E}^{(1)}\text{tot}(\Phi;\epsilon)$。如 [37] 所示，所得间隙 ΔC 相对于输入能量保持为常数，并且仅通过 λ 和 N 的隐函数泛函取决于该模型的噪声参数（即常数 λ 和 N）。

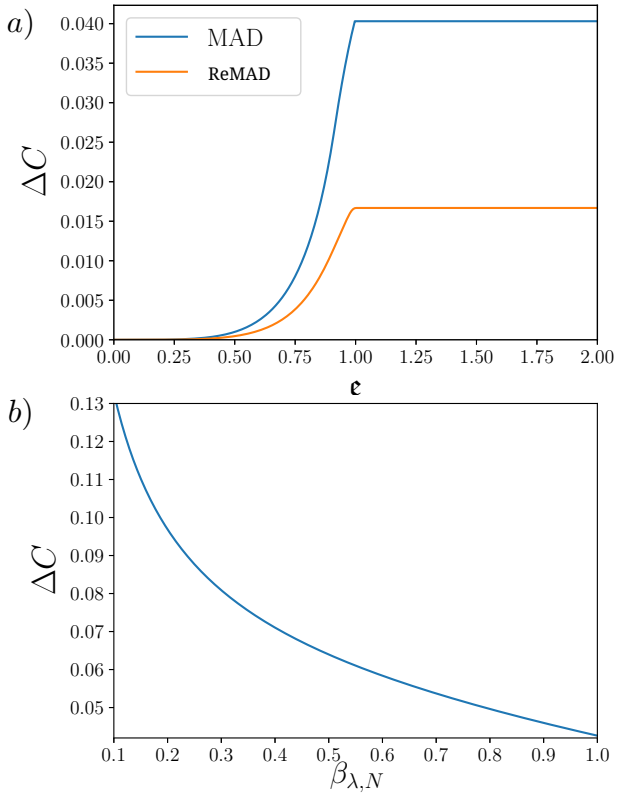

图 2. 电容差 $\Delta C := C_{\text{sep}}(\Lambda;\epsilon) - C_{\text{loc}}(\Lambda;\epsilon)$. 面板 a）展示了根据（5）和（12）得出的 ΔC 下界，针对 MAD 信道 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ [39] 以及 ReMAD 信道 $\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ [40]；两者均作用于哈密顿量为 $\hat{h} = \varepsilon_0(|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|)$ 的三能级系统。此处能量按因子 ε_0 重新缩放，噪声参数固定为 $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.2$ 和 $\gamma_3 = 0.6$。面板 b）展示了双模高斯衰减器 $\Phi_2 = \mathcal{L}_{\lambda,N} \otimes \mathcal{L}_{0,0}$ 的 ΔC 随有效温度 $\beta_{\lambda,N}$ 的变化，见 [37] 中的式（44）；在这种情况下，ΔC 与平均输入能量 ϵ 无关。图中 ΔC 的数值已按 $\hbar\omega$ 重新缩放，其中 ω 为模式频率。

讨论.– 我们观察到，在研究从含噪量子电池模型中进行功提取时，非局域资源所发挥的作用存在不对称性。具体而言，我们的研究结果表明，当通过局域操作恢复能量时，使用量子单元的纠缠输入态并不会增强量子电池对噪声的抵抗力。相反，通过考察几个示例，我们证明，将非局域性纳入提取操作可能是有利的。这意味着非局域性在能量回收中具有独特优势，但若用于态制备，则未必有益。未来，我们计划将这些结果扩展至量子电池哈密顿量包含各个 q-单元之间相互作用的模型。

我们感谢MUR（大学与研究部）通过以下项目提供的经费支持：PNRR MUR项目PE0000023-NQSTI、PRIN 2017：通过量子策略驯服复杂性：混合集成光子学方法（QUSHIP），编号2017SRN-BRK，以及PRO3量子探路者项目。S.C.还获得了IBM-伊利诺伊发现加速器研究所的资助。

* salvatore.tirone@sns.it
† raffaele.salvia@sns.it
‡ schessa@illinois.edu[1] J. Goold、M. Huber、A. Riera、L. del Rio 和 P. Skrzypczyk，《量子信息在热力学中的作用——专题综述》，《物理学杂志A：数学与理论》49，143001（2016）。[2] R. Alicki 和 M. Fannes，《纠缠增强量子电池集合的可提取功》，《物理评论 E》87，042123（2013）。[3] F. Campaioli、F. A. Pollock 和 S. Vinjanampathy，《量子电池》，载于 *Fundamental Theories of Physics*（施普林格国际出版公司，2018年），第207–225页。[4] G. M. Andolina、M. Keck、A. Mari、M. Campisi、V. Giovannetti 和 M. Polini，《可提取功、关联的作用及量子电池中的渐近自由》，《物理评论快报》122，047702（2019）。[5] D. Farina、G. M. Andolina、A. Mari、M. Polini 和 V. Giovannetti，《量子电池的充电器介导能量传输：一种开放系统方法》，《物理评论 B》，035421（2019）。[6] D. Rossini、G. M. Andolina 和 M. Polini，《多体局域化量子电池》，《物理评论B》100，115142（2019）。[7] D. Rossini、G. M. Andolina、D. Rosa、M. Carrega 和 M. Polini，《Sachdev-Ye-Kitaev电池充电过程中的量子优势》（2020）。[8] S. Juli`a-Farr´e、T. Salamon、A. Riera、M. N. Bera 和 M. Lewenstein，《量子电池容量与功率的界》，《物理评论研究》2，023113（2020）。[9] A. E. Allahverdyan、R. Balian 和 T. M. Nieuwenhuizen，《从有限量子系统中提取的最大功》，《欧洲物理快报》（EPL）67，565（2004）。[10] X. Yang、Y.-H. Yang、M. Alimuddin、R. Salvia、S.-M. Fei、L.-M. Zhao、S. Nimmrichter 和 M.-X. Luo，《储能量子系统的电池容量》（2023）。[11] P. Faist、M. Berta 和 F. Brand˜ao，《量子过程的热力学容量》，《物理评论快报》122，200601（2019）。[12] M. Carrega、A. Crescente、D. Ferraro 和 M. Sassetti，《开放量子电池的耗散动力学》，《新物理学杂志》22，083085（2020）。[13] S.-Y. Bai 和 J.-H. An，《通过 Floquet 工程重新激活耗散量子电池》，《物理评论 A》102，060201（2020）。[14] F. T. Tabesh、F. H. Kamin 和 S. Salimi，《环境介导的量子电池充电过程》，《物理评论 A》102，052223（2020）。[15] S. Ghosh、T. Chanda、S. Mal 和 A. Sen(De)，《噪声辅助的量子电池快速充电》，《物理评论 A》104，032207（2021）。[16] A. C. Santos，《自放电过程中二能级电池的量子优势》，《物理评论 E》103，042118（2021）。[17] S. Zakavati、F. T. Tabesh 和 S. Salimi，《开放量子电池充电功率的界》，《物理评论 E》104，054117（2021）。[18] G. T. Landi，《采用贝叶斯风险策略的碰撞模型中的电池充电》，《熵》23，10.3390/e23121627（2021）。[19]D. Morrone、M. A. C. Rossi、A. Smirne 和 M. G. Genoni，《非马尔可夫环境中量子电池的充电：一种碰撞模型方法》（2022）。[20] K. Sen 和 U. Sen，《含噪量子电池》（2023年）。[21] J. Liu、D. Segal 和 G. Hanna，《无损激子量子电池》，《物理化学杂志 C》123，18303（2019）。[22] A. C. Santos、B. C¸akmak、S. Campbell 和 N. T. Zinner，《稳定的绝热量子电池》，《物理评论 E》100，032107（2019）。[23] J. Q. Quach 和 W. J. Munro，《利用暗态为开放量子电池充电并使其稳定》，《应用物理评论》14，024092（2020）。[24] S. Y. Bai 和 J. H. An，《通过 Floquet 工程重新激活耗散量子电池》，《物理评论 A》102，060201（2020）。[25] A. C. Santos、A. Saguia 和 M. S. Sarandy，《稳定且可切换充电的量子电池》，《物理评论 E》101，062114（2020）。[26] S. Gherardini、F. Campaioli、F. Caruso 和 F. C. Binder，《通过顺序测量稳定开放量子电池》，《物理评论研究》2，013095（2020）。[27] J. Liu 和 D. Segal，《通过结构工程提升量子电池性能》（2021 2104 06522），[ ] arXiv：. 量子物理 .[28] A. C. Santos，《自放电过程中二能级电池的量子优势》，《物理评论 E》103，042118（2021）。[29] M. B. Arjmandi.、H. Mohammadi 和 A. C. Santos，《利用无序量子电池增强自放电过程》，《物理评论 E》105，054115（2022）。[30] S. Tirone、R. Salvia、S. Chessa 和 V. Giovannetti，《量子功容量》（2022）。[31] W. F. Stinespring，《C*代数上的正函数》，《美国数学学会会刊》6，211（1955）。[32] M.-D. Choi，《复矩阵上的完全正线性映射》，《线性代数及其应用》10，285（1975）。[33]K. Kraus、A. B¨ohm、J. D. Dollard 和 W. Wootters，*States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin* 1983（施普林格，）。[34] W. Niedenzu、M. Huber 和 E. Boukobza，《自主量子热机中的功概念》，《量子》3，195（2019）。[35] M. ¯Lobejko，《相干量子系统与有限尺寸热浴的紧致第二定律不等式》，《自然通讯》12，10.1038/s41467-021-21140-4（2021）。[36] R. Salvia、G. D. Palma 和 V. Giovannetti，《存在哈密顿量耦合时从二分量子系统中进行最优局域功提取》，《物理评论 A》107，012405（2023）。[37] 补充材料。[38] A. S. Holevo，*Quantum Systems Channels Information: A mathematical introduction*，2012（De Gruyter，）。[39] S. Chessa 和 V. Giovannetti，《多能级振幅阻尼信道的量子容量分析》，《通讯物理》4，22（2021）。[40] S. Chessa 和 V. Giovannetti，《共振多能级振幅阻尼信道》，《量子》7，902（2023）。[41] A. Serafini，*Quantum Continuous Variables: A Primer of Theoretical Methods* 1 2017，第st版（CRC 出版社，）。[42] S. Tirone，R. Salvia，和 V. Giovannetti，量子能-

ergy 线与最优输出可提取功问题，《物理评论快报》**127**，
210601（2021）。

补充材料

可提取功和总功率

我们回顾一下，可提取功（1）量子态 $\hat{\rho}$ 可以表示为其平均能量与其被动态对应态 $\hat{}$ 的平均能量之差ρ_{pass}，即

$$\mathcal{E}(\hat{\rho};\hat{H}) = \mathfrak{E}(\hat{\rho};\hat{H}) - \mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{pass}};\hat{H}) \,, \tag{15}$$

其中 $\hat{\rho}_{\text{pass}}$ 是通过将 $\hat{\rho}$ 的特征向量 $\{|\lambda_\ell\rangle\}_\ell$映射到系统哈密顿量 $\hat{}$ H 的特征向量 $\{|E_\ell\rangle\}_\ell$ 得到的，并使相应的特征值按相反顺序匹配，即。

$$\left.\begin{aligned}\hat{\rho} &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell |\lambda_\ell\rangle\langle\lambda_\ell| \\ \hat{H} &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{d} E_\ell |E_\ell\rangle\langle E_\ell|\end{aligned}\right\} \mapsto \hat{\rho}_{\text{pass}} := \sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell |E_\ell\rangle\langle E_\ell| \,, \tag{16}$$

其中，对于所有 $\ell = 1, \cdots, d-1$，我们设 $\lambda_\ell \geq \lambda_{\ell+1}$和 $E_\ell \leq E_{\ell+1}$。

总可提取功 $\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H})$ 是公式（1）的正则化版本，它出现在考虑拥有任意大量输入态的相同副本 $\hat{}\rho$的情形下。形式上，它定义为

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H}) := \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{E}(\hat{\rho}^{\otimes N};\hat{H}^{(N)})}{N} \,, \tag{17}$$

其中，对于固定的 N 整数，$\hat{H}^{(N)}$ 是通过为 N 个系统副本中的每一个赋予相同的 H $\hat{}$而得到的总哈密顿量（不包含相互作用）。可以验证 [2, 9] 式（17）中的极限存在，并且对应于 $\mathcal{E}(\hat{\rho}^{\otimes N};\hat{H}^{(N)})$ N关于所有可能的 N 的最大值，这尤其意味着 $\hat{}$ $\hat{}\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\ H)$至少与 $\mathcal{E}(\hat{\rho};\ H)$ 一样大，即，

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H}) = \sup_{N\geq 1} \frac{\mathcal{E}(\hat{\rho}^{\otimes N};\hat{H}^{(N)})}{N} \geq \mathcal{E}(\hat{\rho};\hat{H}) \,. \tag{18}$$

系统维数为 2 的情况是这一规则的例外，因为在此条件下有。

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H}) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{E}(\hat{\rho}^{\otimes N};\hat{H}^{(N)})}{N} = \mathcal{E}(\hat{\rho};\hat{H}) \,, \tag{19}$$

对所有输入以及所有 N 均成立。值得注意的是，$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H})$ 可以表示为量子态 $\hat{\rho}$ 与其完全被动态对应态 $\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 之间的能量差，即

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\hat{\rho};\hat{H}) = \mathfrak{E}(\hat{\rho};\hat{H}) - \mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}};\hat{H}) \,, \tag{20}$$

其中$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 为热吉布斯态

$$\hat{\tau}_{\beta_\star} := e^{-\beta_\star \hat{H}}/Z(\beta_\star) \,, \qquad Z(\beta_\star) := \text{Tr}[e^{-\beta_\star \hat{H}}] \,, \tag{21}$$

其中选取有效逆温度 $\beta_\star$，以确保$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 与$\hat{\rho}$具有相同的冯·诺依曼熵，即

$$S(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}) = S(\hat{\rho}) := -\text{Tr}[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}] \,. \tag{22}$$

显然，$\hat{\rho}_{\text{pass}}$ 和$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 都是$\hat{\rho}$的复杂函数：不过请注意，它们仅取决于该算子的谱，这意味着通过幺正旋转而不同的输入态将具有相同的被动态和完全被动态。

量子功容量的明确定义

这里我们回顾 [30] 中给出的遍历功容量定义。首先定义任意量子信道 $C_{\text{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 和任意 $\hat{}$ 的局域功率电容 Λ。首先，我们定义 n 次使用时的最大输出局域功率：

$$\mathcal{E}^{(n)}_{\text{loc}}(\Lambda;E) := \max_{\hat{\rho}^{(n)}\in\mathfrak{S}^{(n)}_E} \Big[\mathfrak{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}));\hat{H}^{(n)}) - \min_{\hat{U}_1,..,\hat{U}_n\in\mathbb{U}(d)} \mathfrak{E}(\hat{U}_1\otimes ...\otimes\hat{U}_n\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)})\hat{U}_1^\dagger\otimes ...\otimes\hat{U}_n^\dagger;\hat{H}^{(n)})\Big] \,, \tag{23}$$

因此，我们现在可以将局域功率电容定义为

$$C_{\text{loc}}(\Lambda,\mathfrak{e}) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}^{(n)}_{\text{loc}}(\Lambda,n\mathfrak{e})}{n} \,. \tag{24}$$

对于任意信道 Λ 和任意输入能量 $\mathfrak{e}$，可分输入 n使用最大输出功率的条件是：

$$\mathcal{E}^{(n)}_{\text{sep}}(\Lambda;E) := \max_{\hat{\rho}_{\text{sep}}\in\mathfrak{S}^{(n)}_{E,\text{sep}}} \Big[\mathfrak{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}_{\text{sep}});\hat{H}^{(n)}) - \min_{\hat{U}\in\mathbb{U}(d^n)} (\mathfrak{E}(\hat{U}\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}_{\text{sep}})\hat{U}^\dagger);\hat{H}^{(n)})\Big] \,, \tag{25}$$

这里 $\mathfrak{S}^{(n)}_{E,\text{ sep}}$ 表示所有输入能量为 $\mathfrak{E}(\hat{}\rho^{(n)})_{\text{sep}} \leq E$ 的可分 n 量子比特量子态集合。因此，我们现在可以将可分输入功率电容定义为

$$C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}^{(n)}_{\text{sep}}(\Lambda;n\mathfrak{e})}{n} \,. \tag{26}$$

最后，为了定义 $C_{\text{loc,sep}}(\Lambda,\mathfrak{e})$ 容量，我们写出局域可分最大输出功率。

as

$$\mathcal{E}^{(n)}_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda,E):=\max_{\hat{\rho}^{(n)}_{\mathrm{sep}}\in\mathfrak{S}^{(n)}_{E,\mathrm{sep}}}\Big[\mathfrak{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}_{\mathrm{sep}});\hat{H}^{(n)})-\min_{\hat{U}_1,..,\hat{U}_n\in\mathbb{U}(d)}\mathfrak{E}(\hat{U}_1\otimes...\otimes\hat{U}_n\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)}_{\mathrm{sep}})\hat{U}_1^\dagger\otimes...\otimes\hat{U}_n^\dagger;\hat{H}^{(n)})\Big]_{\text{我们得到}},\tag{27}$$

任意信道 Λ 和输入能量$\mathfrak{e}$ 的容量为

$$C_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;\mathfrak{e}):=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathcal{E}^{(n)}_{\mathrm{loc,sep}}(\Lambda;n\mathfrak{e})}{n}\,.\tag{28}$$

上述函数的极限存在性由费凯特引理保证，证明见 [30]。

推论证明1

在这里，我们给出推论 1 的显式证明，说明如何利用单次能量约束最大总遍历功的凸闭包 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 对可分输入电容 $\chi_{\mathrm{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ 的下界进行估计$\mathcal{E}^{(1)}{}_{\mathrm{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})$ [30],，即以下量

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})\;:=\;\max_{\hat{\rho}\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{e}}}\mathcal{E}_{\mathrm{tot}}(\Lambda(\hat{\rho});\hat{h})\,,\tag{29}$$

其中，最大化是在输入能量不大于 $\mathfrak{e}$ 的单个 q-单元量子态集合 $\mathfrak{S}_{\mathfrak{e}}$ 上进行的。

证明。对于足够大的 n，考虑可分密度矩阵 $\hat{}\rho^{(n)}:=\hat{}\rho_1^{\otimes m}\otimes\hat{}\rho_2^{\otimes m}\otimes\cdots\otimes\hat{}\rho_k^{\otimes m}$，其中 m 和 k 是将 n 划分成两部分的整数，即 $n=mk$，而 $\hat{}\rho_1$、$\hat{}\rho_2$、$\cdots$、$\hat{}\rho_k$ 是单站点密度矩阵，其平均能量分别为 $\mathfrak{e}_1$、$\cdots$、$\mathfrak{e}_k$，并以如下方式选取：$\hat{}\rho^{(n)}$ 的平均能量小于或等于 $E=n\mathfrak{e}$，即

$$\sum_{i=1}^k m\mathfrak{e}_i\le n\mathfrak{e}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\mathfrak{e}_i\le\mathfrak{e}\,.\tag{30}$$

因此我们可以写出

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathcal{E}^{(n)}_{\mathrm{sep}}(\Lambda;E=n\mathfrak{e})\;&\ge\;\frac{1}{n}\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes n}(\hat{\rho}^{(n)});\hat{H}^{(n)})\\&\ge\;\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k\mathcal{E}(\Lambda^{\otimes m}(\hat{\rho}_i^{\otimes m});\hat{H}^{(m)})\\&\ge\;\frac{1}{mk}\sum_{i=1}^k\mathcal{E}\left((\Lambda(\hat{\rho}_i))^{\otimes m};\hat{H}^{(m)}\right)\,,\end{aligned}$$

其中，第二个不等式是通过将优化限制在局部作用于k q单元块上的幺正算符集合内得到的。取 $m\to\infty$ 式（31）的第一项得到 $C_{\mathrm{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$。反过来，由于对于所有 $i\in\{1,\cdots,k\}$，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\mathcal{E}\left((\Lambda(\hat{\rho}_i))^{\otimes m};\hat{H}^{(m)}\right)}{m}=\mathcal{E}_{\mathrm{tot}}(\Lambda(\hat{\rho}_i);\hat{h})\,,\tag{31}$$

$$C_{\mathrm{sep}}\,(\Lambda;\mathfrak{e})\ge\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\mathcal{E}_{\mathrm{tot}}(\Lambda(\hat{\rho}_i);\hat{h})\,.\tag{32}$$

下一步是将上述不等式应用于一组量子态 $\hat{}\rho_1$、$\hat{}\rho_2$、$\cdots$、$\hat{}\rho_k$，这些量子态在能量为 $\mathfrak{e}_1$、$\mathfrak{e}_2$、$\cdots$、$\mathfrak{e}_n$ 时，使模型的单次最大输出总遍历功达到饱和。因此，我们可以将所有 $\mathcal{E}_{\mathrm{tot}}(\Lambda(\hat{}\rho_i);\hat{}h)$ 替换为相应的 $\mathcal{E}^{(1)}{}_{\text{总功率}}(\Lambda;\mathfrak{e}_i)$，从而得到

$$C_{\mathrm{sep}}\,(\Lambda;\mathfrak{e})\ge\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e}_i)\,.\tag{33}$$

最后，只需注意到，由于我们可以在约束条件（ k ）内任意选择 $\mathfrak{e}_i$ 和30，故（33）右端可以给出正文中满足（ $\sum_j p_j\,\mathcal{E}^{(1)}{}_{\text{总功率}}(\Lambda;\ \mathfrak{e}_j)$ 的所有平均值。5 □

谐振子模型

考虑一组由相同频率 k 表征的 ω相互独立的谐振子，例如，它们表示 k 电磁场的空间模式 [41]。我们可以通过一个复可分无限维希尔伯特空间及其自伴算符 $\hat{}q_1$、$\hat{}p_1$、……、$\hat{}q_k$、$\hat{}p_k$ 对其进行形式化描述，这些算符满足正则对易关系：$[\hat{}q_j,\ \hat{}q_k]=0$ $[\hat{}p_j,\ \hat{}p_k]=0$ $[\hat{}q_j,\ \hat{}p_k]=\delta_{j,\ k}$。其哈密顿量写作

$$\hat{H}_k=\sum_{j=1}^k\hbar\omega\;\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j,\tag{34}$$

其中我们减去了项 $\hbar\omega/2$ ，以便将具有零能量的基态作为参考，并引入湮灭与产生算符$\hat{a}_j:=\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{}q_j+\frac{i}{\omega}\hat{}p_j\right)$、$\hat{a}^\dagger:=\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{}q_j-\frac{i}{\omega}\hat{}p_j\right)$。给定模型的一个一般量子态 $\hat{}\rho$ ，我们将其特征函数定义为 $\xi(\quad\rho\quad\overline{x}\quad\quad\quad x\quad=e^{i\hat{r}\cdot x}\qquad\quad x\in\mathbb{R}^{2k}\qquad r\quad=;):$ $\mathrm{Tr}\left[\hat{}\hat{}D(\,)\right]$，其中 $\hat{}D(\,):$是位移算符，而 $\hat{}:(\hat{}q_1,\hat{}p_1,...,\hat{}q_k,\hat{}p_k)^T$。这类系统的一个重要噪声模型由玻色高斯信道 (玻色高斯信道) [38, 41] 提供，它们刻画了耗散、热化、放大和压缩效应。使用特征函数形式化方法，一个k-模式玻色高斯信道 Φ_k 的作用通过以下映射来表示

$$\xi(\Phi_k(\hat{\rho});x)=\xi(\hat{\rho};X^Tx)e^{-\frac{1}{4}x^TYx+iv\cdot x}\,,\tag{35}$$

其中， v 是 $\mathbb{R}^{2k}$ 的一个指定向量， X 和 Y 是满足条件的两个实 $2k\times 2k$ 矩阵。

$$Y \geq i(\theta_k - X\theta_k X^T)\,, \tag{36}$$

其中 $\theta_k := \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ 是该模型的辛形式（在此表达式中， I_k 表示 $k\times k$ 阶单位矩阵）。玻色高斯信道中的一个特殊子集是所谓的相位不敏感玻色高斯信道（ PI-BGCs），它们满足以下附加条件

$$\Phi_k(e^{-i\hat{H}_k t}\hat{\rho}e^{i\hat{H}_k t}) = e^{\mp i\hat{H}_k t}\Phi_k(\hat{\rho})e^{\pm i\hat{H}_k t}, \tag{37}$$

对于任意量子态 $\hat{\rho}$ 和 $t\in\mathbb{R}$。单模（$k=1$）PI-BGCs 包括

- thermal attenuators $\mathcal{L}_{\lambda,N}$ ($v=0$, $X=\sqrt{\lambda}I_2$, $Y=(1-\lambda)(2N+1)I_2$, with $\lambda\in[0,1)$ and $N\geq 0$),
- thermal amplifiers $\mathcal{A}_{\mu,N}$ ($v=0$, $X=\sqrt{\mu}I_2$, $Y=(\mu-1)(2N+1)I_2$, with $\mu>1$ and $N\geq 0$),
- additive noise channels $\mathcal{N}_N$ ($v=0$,$X=I_2$ and $Y=2NI_2$, with $N\geq 0$).

文献 [42]研究了 PI-BGCs 输出端可提取功和总可提取功泛函的最大值，结果表明，最优输入由多模相干态给出

$$|\vec{\varphi}\rangle \;:=\; |\varphi_1\rangle\otimes\cdots\otimes|\varphi_k\rangle\,, \tag{38}$$

其中，对于 $j=1,\ \cdots,\ k$, $|\varphi_j\rangle$ 是第 j 个模式的相干态，其复振幅为 φ_j。具体而言，给定 Φ_k一个一般的 PI-BGC，可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(\Phi_k(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_k\right) &\geq \mathcal{E}\left(\Phi_k(\hat{\rho});\hat{H}_k\right)\,, \\ \mathcal{E}_{\rm tot}\left(\Phi_k(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_k\right) &\geq \mathcal{E}_{\rm tot}\left(\Phi_k(\hat{\rho});\hat{H}_k\right)\,,\end{aligned} \tag{39}$$

对于所有量子态 $\hat{\rho}$ with

$$\mathfrak{E}(\hat{\rho};\hat{H}_k)\leq\mathfrak{E}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|\,;\hat{H}_k)=\hbar\omega|\vec{\varphi}|^2=\hbar\omega\sum_{j=1}^{k}|\varphi_j|^2\,. \tag{40}$$

$k=2$ 模式玻色高斯信道的电容差距

在此，我们评估作用于两个相互独立、共振模式（模式$\Phi_2=\mathcal{L}_{\lambda,\,N}\otimes\mathcal{L}_{0,\,0}$）上的 PI-BGC 的遍历功容量（模式 A 和模式 A' 的频率均为ω）。由（39）可知，计算 $\mathcal{E}^{(n)}(\Phi_2;\mathfrak{e})$ 和$\mathcal{E}^{(n)}{}_{\rm tot}(\Phi_2;\mathfrak{e})$ 时，对于任意整数 n，我们可以将分析范围限定为 $2n$ 模相干输入态的遍历功容量

$$|\vec{\varphi}\rangle := |\varphi_1\rangle\otimes|\varphi_1'\rangle\otimes\cdots\otimes|\varphi_n\rangle\otimes|\varphi_n'\rangle\,, \tag{41}$$

满足能量约束

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|\,;\hat{H}_2^{(n)}) &= \hbar\omega|\vec{\varphi}|^2 \\ &= \hbar\omega\sum_{j=1}^{n}\left(|\varphi_j|^2+|\varphi_j'|^2\right)\leq n\mathfrak{e}\,,\end{aligned} \tag{42}$$

（在上述表达式中， $|\varphi_j\rangle$ 和 $|\varphi_j'\rangle$ 分别表示模式 A 和 A' 的 j 个副本的相干态，而 $\hat{}\,H_2$ 是它们的哈密顿量）。注意，单模式信道$\mathcal{L}_{0,\,0}$ 将模式 A' 的所有输入态映射为基态构型 $|0\rangle$，而 $\mathcal{L}_{\lambda,\,N}$ 将模式 A 的相干态映射为由逆温度表征的热位移密度矩阵。

$$\beta_{\lambda,N} := \log\frac{(1-\lambda)N+1}{(1-\lambda)N}\,. \tag{43}$$

$\hat{}$ 特别地，以 D_1 表示位移算符，该算符作用于模式 A 的基态会生成相干态 $|\sqrt{\lambda}\varphi_1\rangle$，我们可以写作

$$\Phi_2(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\otimes|\varphi_1'\rangle\langle\varphi_1'|)=\hat{D}_1\left(\hat{\tau}_{\beta_{\lambda,N}}\otimes|0\rangle\langle 0|\right)\hat{D}_1^\dagger\,, \tag{44}$$

$\hat{}$其中 $\hat{}\tau_{\beta_{\lambda,N}}=\frac{e^{-\beta_\lambda}}{\quad}$，$_{N^h(,)}$，其中 $\hat{}h:=\hbar\omega\hat{a}\hat{}\hat{a}$ 单模哈密顿量，以及 $Z_1(\beta):=\frac{Z_1}{\beta_\lambda}\mathrm{Tr}[e^{-\beta h}]$ 相关的单模配分函数。推广到n 个副本的情况可得

$$\begin{aligned}\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|) &= \bigotimes_{j=1}^{n}\Phi_2(|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\otimes|\varphi_j'\rangle\langle\varphi_j'|) \\ &= \hat{D}_A\left(\hat{\tau}_{\beta_{\lambda,N}}\otimes|0\rangle\langle 0|\right)^{\otimes n}\hat{D}_A^\dagger\end{aligned} \tag{45}$$

与 $\hat{}\,D_A=\hat{}D_1\otimes\hat{}D_2\otimes\cdots\otimes\hat{}D_n$。由方程（15）和（20）可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_2^{(n)}) \\ &\quad=\mathfrak{E}(\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_2^{(n)})-\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(n)};\hat{H}_2^{(n)})\,,\end{aligned} \tag{46}$$

and

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{\rm tot}(\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_2^{(n)}) \\ &\quad=\mathfrak{E}(\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_2^{(n)})-\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm c\text{-}pass}^{(n)};\hat{H}_2^{(n)})\,,\end{aligned} \tag{47}$$

其中输出平均能量可轻松计算为

$$\mathfrak{E}(\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|);\hat{H}_2^{(n)})=\hbar\omega\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda|\varphi_j|^2+(1-\lambda)Nn\right)\,. \tag{48}$$

在上述表达式中，$\hat{}\,\rho_{\rm pass}^{(n)}$ 和 $\hat{}\,\rho_{\rm c\text{-}pass}^{(n)}$ 分别是 $\Phi_2^{\otimes n}(|\vec{\varphi}\rangle\langle\vec{\varphi}|)$ 的被动态和完全被动态对应态。利用补充材料第一节末尾讨论的酉不变性以及

恒等式（45）还可得出，$\hat{\rho}_{\rm pass}^{(n)}$ 和 $\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(n)}$ 分别对应于 $2n$ 模式乘积态的被动态和完全被动态对应形式

$$\hat{\rho}_{\lambda,N}^{(n)} := \left(\hat{\tau}_{\beta_{\lambda,N}} \otimes |0\rangle\langle 0|\right)^{\otimes n} , \tag{49}$$

它不依赖参数 φ_j 和 φ_j'，因此也不依赖信道的输入能量。据此我们可以得出结论，$\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(n)}; \hat{H}_2^{(n)})$ 和 $\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(n)}; \hat{H}_2^{(n)})$ 都不是 $\mathfrak{e}$ 的函数，从而可以显式求解计算 $\mathcal{E}^{(n)}(\Phi_2;\mathfrak{e})$ 和 $\mathcal{E}^{(n)}_{\text{总}}(\Phi_2;\mathfrak{e})$ 所需的最大化问题：

$$\frac{\mathcal{E}^{(n)}(\Phi_2;n\mathfrak{e})}{n\hbar\omega} = \frac{\lambda\mathfrak{e}}{\hbar\omega} + (1-\lambda)N - \frac{\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(n)}; \hat{H}_2^{(n)})}{n\hbar\omega}, \tag{50}$$

$$\frac{\mathcal{E}_{\rm tot}^{(n)}(\Phi_2;n\mathfrak{e})}{n\hbar\omega} = \frac{\lambda\mathfrak{e}}{\hbar\omega} + (1-\lambda)N - \frac{\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(n)}; \hat{H}_2^{(n)})}{n\hbar\omega} . \tag{51}$$

按照定理 1中计算 $C_{\rm loc}(\Phi_2;\mathfrak{e})$（以及 $C_{\text{loc, sep}}(\Phi_2;\mathfrak{e})$）的步骤，我们只需考虑函数 (50) 在 $n=1$处的凸包，即

$$\frac{C_{\rm loc}(\Phi_2;\mathfrak{e})}{\hbar\omega} = \frac{\lambda\mathfrak{e}}{\hbar\omega} + (1-\lambda)N - \frac{\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}; \hat{H}_2)}{\hbar\omega} . \tag{52}$$

此处 $\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}$ 为双模态的被动态对应态

$$\hat{\rho}_{\lambda,N}^{(1)} := \hat{\tau}_{\beta_{\lambda,N}} \otimes |0\rangle\langle 0| . \tag{53}$$

关于 $C_{\rm sep}(\Phi_2;\mathfrak{e})$，我们则需要对 $n\to\infty$ 取 (50) 的极限，或者等价地，取 (51) [30] 的极限。通过注意到张量积态 $\hat{\rho}_{\lambda,N}^{(n)}$ 的完全被动态对应态对应于以下状态，计算可以简化

$$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(n)} = \hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{\otimes n} , \tag{54}$$

其中，$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 是$\hat{\rho}_{\lambda,N}^{(1)}$的完全被动态。因此我们可以写成

$$\frac{C_{\rm sep}(\Phi_2;\mathfrak{e})}{\hbar\omega} = \frac{\lambda\mathfrak{e}}{\hbar\omega} + (1-\lambda)N - \frac{\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}; \hat{H}_2)}{\hbar\omega} \tag{55}$$

（注意，借助（39），上述表达式也给出了 $C_{\mathcal{E}}(\Phi_2;\mathfrak{e})$）的精确值。从方程（5）和（55）最终得到

$$\begin{aligned}\Delta C(\mathfrak{e}) &= C_{\rm sep}(\Phi_2;\mathfrak{e}) - C_{\rm loc}(\Phi_2;\mathfrak{e}) \\ &= \mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}; \hat{H}_2) - \mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}; \hat{H}_2) ,\end{aligned} \tag{56}$$

其不依赖于输入能量 $\mathfrak{e}$。为表明差值（56）非零，只需验证

$$\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)} \neq \hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)} , \tag{57}$$

即，式（53）的被动态对应态并非完全被动态。为此，我们使用式（20）来表示

$$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)} = \frac{e^{-\beta_\star \hat{H}_2}}{{\rm Tr}[e^{-\beta_\star \hat{H}_2}]} = \left(\frac{e^{-\beta_\star \hat{h}}}{Z_1(\beta_\star)}\right)^{\otimes 2} = \hat{\tau}_{\beta_\star}^{\otimes 2} , \tag{58}$$

其中，$\beta_\star$ 的选取满足

$$\begin{aligned}S(\hat{\tau}_{\beta_\star}^{\otimes 2}) = 2S(\hat{\tau}_{\beta_\star}) &= S(\hat{\rho}_{\lambda,N}^{(1)}) = S(\hat{\tau}_{\beta_{\lambda,N}}) \\ &\Longrightarrow \beta_\star = \mathcal{S}^{-1}\left(\mathcal{S}(\beta_{\lambda,N})/2\right) ,\end{aligned} \tag{59}$$

其中，$\mathcal{S}(x)$是函数

$$S(\hat{\tau}_\beta) = \mathcal{S}(\beta) := -\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) + \beta\hbar\omega\left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right) , \tag{60}$$

它表示单模式热量子态 $\hat{}$ 的冯·诺依曼熵τ_β。方程（58）意味着$\hat{\rho}_{\text{c-pass}}$ 的所有本征值都具有明确的简并度，

$$\begin{aligned}&\lambda_0(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)}) = \tfrac{1}{Z_1^2(\beta_\star)} , && \deg = 1, \\ &\lambda_1(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)}) = \tfrac{e^{-\beta_\star\hbar\omega}}{Z_1^2(\beta_\star)} , && \deg = 2, \\ &\lambda_2(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)}) = \tfrac{e^{-2\beta_\star\hbar\omega}}{Z_1^2(\beta_\star)} , && \deg = 3, \\ &\cdots && \cdots \\ &\lambda_k(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)}) = \tfrac{e^{-k\beta_\star\hbar\omega}}{Z_1^2(\beta_\star)} , && \deg = k+1,\end{aligned} \tag{61}$$

若反设 $\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\text{c-pass}}^{(1)}; \hat{H}_2)$与$\mathfrak{E}(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}; \hat{H}_2)$相同，那么对于任意能量本征值 k，$\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}$ 中与之对应的 $k+1$ 个本征值之和必须等于 $(k+1)e^{-\beta_\star\hbar\omega}/Z_1^2(\beta_\star)$，这是由于$\hat{H}_2$ 的本征空间存在简并度。这一事实对$\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}$的正本征值施加了严格约束：

$$\lambda_k(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}) = \frac{e^{-k\beta_{\lambda,N}\hbar\omega}}{Z_1(\beta_{\lambda,N})} , \tag{62}$$

特别是，它们的比值必须满足以下条件

$$e^{\hbar\omega\beta_\star} = \frac{2\lambda_0(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)})}{\lambda_1(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}) + \lambda_2(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)})} = \frac{2}{e^{-\hbar\omega\beta_{\lambda,N}} + e^{-2\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}} , \tag{63}$$

and

$$\begin{aligned}e^{\hbar\omega\beta_\star} &= \frac{3}{2}\frac{\lambda_1(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}) + \lambda_2(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)})}{\lambda_3(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}) + \lambda_4(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)}) + \lambda_5(\hat{\rho}_{\rm pass}^{(1)})} \\ &= \frac{3}{2}\frac{e^{-\hbar\omega\beta_{\lambda,N}} + e^{-2\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}}{e^{-3\hbar\omega\beta} + e^{-4\hbar\omega\beta} + e^{-5\hbar\omega\beta}} ,\end{aligned} \tag{64}$$

因此这意味着

$$\frac{2}{e^{-\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}+e^{-2\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}} = \frac{3}{2}\frac{e^{-\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}+e^{-2\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}}{e^{-3\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}+e^{-4\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}+e^{-5\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}} , \tag{65}$$

但当 $\beta_{\lambda,N}$ 足够大时，无法满足最后这个条件。

我们现在明确计算 $\mathfrak{E}(\hat{\rho}^{(1)}_{\text{pass}};\hat{H}_2)$ 和$\mathfrak{E}(\hat{\rho}^{(1)}_{\text{c-pass}};\hat{H}_2)$。一方面，根据（58），我们知道后者不过是双模热态 $\hat{\tau}^{\otimes 2}_{\beta_\star}$ 的平均能量，即

$$\mathfrak{E}(\hat{\rho}^{(1)}_{\text{c-pass}};\hat{H}_2)=2\mathfrak{E}(\hat{\tau}_{\beta_\star};\hat{h})=2\hbar\omega\left(\frac{e^{-\beta_\star\hbar\omega}}{1-e^{-\beta_\star\hbar\omega}}\right), \tag{66}$$

其中 β_λ 的一个隐函数，N 通过（59）。另一方面，由（62）可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(\hat{\rho}^{(1)}_{\text{pass}};\hat{H}_2)&=\hbar\omega\sum_{k=0}^{\infty}k\sum_{k'\in I_k}\frac{e^{-k\beta_{\lambda,N}\hbar\omega}}{Z_1(\beta_{\lambda,N})} \\ &=\hbar\omega\sum_{k=0}^{\infty}k\left[e^{-\frac{k(k+1)}{2}\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}-e^{-(\frac{k(k+3)}{2}+1)\hbar\omega\beta_{\lambda,N}}\right],\end{aligned} \tag{67}$$

其中，I_k 表示由以下序列定义的 $k+1$ 整数集合：

按以下步骤：

$$\begin{aligned}I_0&=\{0\}, \quad I_1=\{1,2\}, \quad I_2=\{3,4,5\}, \\ I_3&=\{6,7,8,9\}, \quad \cdots\end{aligned} \tag{68}$$

图 2 b) 面板是通过数值计算式（66）和式（67）实现的。

多能级振幅阻尼信道

多能级振幅阻尼（MAD）信道 [39],描述了量子多能级系统中激发态向能量较低态的弛豫过程。对于量子三能级系统，可能的衰减过程与三个阻尼参数 $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$ 相关，这些参数定义了 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$，其变换如下。

$$\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\hat{\rho})=\begin{pmatrix}\rho_{00}+\gamma_1\rho_{11}+\gamma_3\rho_{22} & \sqrt{1-\gamma_1}\rho_{01} & \sqrt{1-\gamma_2-\gamma_3}\rho_{02}\\ \sqrt{1-\gamma_1}\rho^*_{01} & (1-\gamma_1)\rho_{11}+\gamma_2\rho_{22} & \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2-\gamma_3)}\rho_{12}\\ \sqrt{1-\gamma_2-\gamma_3}\rho^*_{02} & \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2-\gamma_3)}\rho^*_{12} & (1-\gamma_2-\gamma_3)\rho_{22}\end{pmatrix}. \tag{69}$$

共振多能级振幅阻尼（ReMAD）信道 [40], 描述了量子多能级系统中，从激发态弛豫到能量较低态的过程，其中能级彼此共振。对于量子三能级系统，相应的映射可表示为

$$\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\hat{\rho})=\begin{pmatrix}\rho_{00}+\gamma_1\rho_{11}+\gamma_3\rho_{22} & \sqrt{1-\gamma_1}\rho_{01}+\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\rho_{12} & \sqrt{1-\gamma_2-\gamma_3}\rho_{02}\\ \sqrt{1-\gamma_1}\rho^*_{01}+\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\rho^*_{12} & (1-\gamma_1)\rho_{11}+\gamma_2\rho_{22} & \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2-\gamma_3)}\rho_{12}\\ \sqrt{1-\gamma_2-\gamma_3}\rho^*_{02} & \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2-\gamma_3)}\rho^*_{12} & (1-\gamma_2-\gamma_3)\rho_{22}\end{pmatrix}. \tag{70}$$

注意，输出密度矩阵的 01 和 10 元素中现在包含了相干项 ρ_{01} 和ρ_{12}的混合，而 MAD 信道中不存在这种情况。

Capacitance gap for MAD and ReMAD channels

在图 2 的 a) 面板中，我们绘出了一个 MAD 信道 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ 和一个 ReMAD 信道 $\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ 实例的电容差距下界 ΔC 随输入能量 $\mathfrak{e}$ 的变化。该下界是通过数值计算 $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})$ 与 $\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})$ 之差得到的（对于 ReMAD 信道，相应地计算了量 $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3})-\mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3})$）。为了证明这一差值代表电容差距的下界，我们在图3中展示了函数$\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})$、$\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})$、$\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3});\mathfrak{e}$和$\mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})$在正文中报告的 γ_1、γ_2 和 γ_3 取值下，均为能量 $\mathfrak{e}$ 的凹函数，这

这一性质意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&=\chi(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}), \\ \mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&=\chi(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}),\end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&=\chi_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}), \\ \mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&=\chi_{\text{tot}}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}).\end{aligned} \tag{72}$$

由于对于任意信道 Λ 和输入平均能量，正如正文中所述，$\mathfrak{e}(\Lambda;\mathfrak{e})=C_{\text{loc}}(\Lambda;\mathfrak{e})$，且$\chi_{\text{tot}}(\Lambda;\mathfrak{e})\leq C_{\text{sep}}(\Lambda;\mathfrak{e})$，因此显然，对于所考虑的参数值

$$\begin{aligned}\Delta C(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&\geq\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})-\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}), \\ \Delta C(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})&\geq\mathcal{E}^{(1)}_{\text{tot}}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e})-\mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3};\mathfrak{e}).\end{aligned} \tag{73}$$

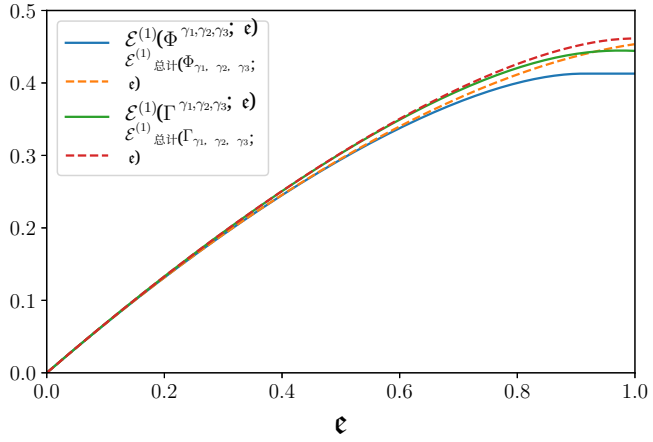

图3. 图中绘出了单次最优输出功率 $\mathcal{E}^{(1)}(\Phi_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3};\mathfrak{e})$ 和 $\mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3};\mathfrak{e})$，以及单次输出总功率 $\mathcal{E}^{(1)}{}_{\text{tot}}(\Phi_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3};\ \mathfrak{e})$ 和 $\mathcal{E}^{(1)}(\Gamma_{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3};\ \mathfrak{e})$。我们注意到，它们都是平均输入能量 $\mathfrak{e}$ 的凹函数。此处参数的取值为 $\gamma_1 = 0.3$、$\gamma_2 = 0.2$ 和 $\gamma_3 = 0.6$。