arXiv:2304.01276v1 [stat.OT] 3 Apr 2023

面向职前数学与科学教师的贝叶斯数据分析课程的设计与实施

Mine Dogucu*统计科学系，加拿大伦敦大学；统计系，加利福尼亚大学欧文分校；Sibel Kazak，数学与科学教育系，中东技术大学；Joshua Rosenberg，教师教育理论与实践系，田纳西大学诺克斯维尔分校

2023年4月5日

摘要

随着贝叶斯方法日益普及，以及易于获取的计算机软件不断涌现，贝叶斯方法的教学与学习也在不断拓展。然而，大多数

*作者谨此感谢 Nick Kim 承担数学教学方法课程的教学工作，该课程部分构成了本研究的研究背景。Dogucu 获得美国国家科学基金会资助，资助编号 2215879。Rosenberg 获得美国国家科学基金会资助，资助编号 1937700。

教育机会都面向统计学和数据科学专业的学生，在更广泛的科学、技术、工程和数学领域中则相对有限。此外，K-12阶段的相关机会也较少。我们以间接推动在K-12阶段引入贝叶斯方法为目标，开发了一项贝叶斯数据分析活动，并在35名数学和科学职前教师中实施。本文介绍了这项活动、为其提供支持的网络应用程序，以及职前教师对该活动的看法。最后，我们探讨了培养K-12教师开展贝叶斯方法教学与学习的未来方向。

关键词：
贝叶斯方法、K—12 年级、科学教育、数学教育、教师教育

1 引言

某年春天，在高中吃午餐的学生可能会发现，来校园外庭院觅食的鸟儿比过去多了。这是为什么呢？学生（以及成年人）可能会提出各种看似合理的想法。不过，无论具体假设是什么，得出的任何结论都无法确定无疑。鸟儿来访次数增加可能由许多因素造成，而对于这个问题，任何答案或单一答案都无法一锤定音。

学生在学校的其他场合也会遇到不确定性。为什么今天的交通状况比昨天更糟？为什么在化学实验室进行的探究活动，对一个实验小组的学生来说效果不如另一个小组？回顾生活在数百或数千年前人们的历史后，我们对历史知识应有多大把握？这些问题的答案必然存在不确定性。

尽管不确定性存在于学生的日常经历中，但学校关于不确定性的教学往往未能为学习者提供有用的策略或数学、统计方法，帮助他们更好地解答现实世界中的科学问题。

理解不确定性的挑战并非学生独有。许多科学家（以及统计学家）在回答科学问题时也难以应对不确定性。如果接受过统计学培训，科学家和学生通常接受的是频率学派统计学培训，并且往往只依赖单一指标，即 p 值，来量化不确定性。人们广泛建议在科学实践中运用贝叶斯方法（Wasserstein & Lazar 2016），以期克服对 p 值的误用和过度使用；同时，也建议在大学阶段的统计学课程中纳入贝叶斯方法（Berry 1997, Witmer 2017, Johnson 等人 2020, Hu 2020, Hoegh 2020, Dogucu 和 Hu 2022, Hu & Dogucu 2022 ）。

毋庸置疑，科学家的实践与其所受培训密不可分。因此，将如何应对不确定性及贝叶斯思想尽早介绍给学生，应成为课程设置的优先事项。

许多历史性变化使贝叶斯方法比以往更受欢迎。其中，影响贝叶斯方法教与学的最显著变化，或许是计算能力的进步。目前有各种工具可用于贝叶斯方法的教学与学习，所需技能水平各不相同。这些工具包括但不限于点击式软件 JASP（Love 等人，2019年）、完整的概率编程语言 STAN（Carpenter 等人，2017年）和 JAGS（Plummer 等人，2003年），以及 R 程序包，例如 `rstanarm` （Goodrich，2022年）和 `tidybayes` （Kay，2022年）。

尽管有了新工具，使贝叶斯统计学更容易在课堂上开展教学，但贝叶斯课程通常面向主修统计学、数据和数学科学的学生，只有少数课程面向其他科学、技术、工程和数学领域（例如生物学、天文学）的学生（Dogucu 和 Hu，2022年）。在幼儿园至十二年级阶段，关于从不同角度引入贝叶斯思想也存在争论，例如如何解读和评估概率，以及如何进行非正式统计推断（Chernoff，2014年；Kazak，2015年；Nilsson 等人，2014年；Martignon 和 Erickson，2014年）。我们认为，在更广泛的科学、技术、工程和数学教育群体中普及贝叶斯方法至关重要，同时，在更早的年级开始教授和学习贝叶斯思维也很重要。

有鉴于此，我们开发并开展了一项旨在促进贝叶斯思维的课堂活动。我们的目标是为职前数学与科学教师设计并实施这项活动，使他们了解贝叶斯数据分析并能够运用它。一个间接目标是帮助幼儿园至十二年级（大学前阶段）的学习者通过易于理解又严谨的贝叶斯方法思考并理解不确定性。鉴于大学阶段很少提供贝叶斯方法培训，我们优先培训职前

教师 （也就是说，他们尚未任教，以区别于在职教师）掌握贝叶斯方法，并帮助他们做好准备，以便在未来的幼儿园至高中课程中融入贝叶斯思想。

我们首先介绍数学与统计教育以及科学教育领域中与本研究相关的研究，在此基础上拓展我们的工作；随后描述并讨论我们的教学活动与经验。

1.1 R数学与统计教育领域的相关研究

不确定性这一概念在处理数据和机会这两个密切相关的主题时发挥着统合作用。它们都是学校数学课程主流内容的一部分，但往往被分开讲授。随着人们日益关注从低年级开始培养学生的非正式统计推断能力（Makar与Rubin 2018年；Makar 2014年、Watson 2008年、Ben-Zvi 2006年），不确定性推理在学校阶段进行非正式统计推断的语境中也越来越受到关注（Braham与Ben-Zvi 2015年、Kazak 2015年、Henriques与Oliveira 2016年）。非正式统计推断包括提出超越数据本身的主张、利用数据作为证据支持这些主张，以及运用概率语言进行概括（Makar与Rubin 2009年）。因此，对不确定性的阐释是非正式统计推断的核心。

在传统的统计推断教学方法中，一种常见的潜在推理过程，即费希尔方法，基于概率的频率解释，要求“评估反对某项主张的证据强度”（Rossman 2008，第7页）。另一种推理形式，即基于概率的主观主义观念的贝叶斯视角（Albert 2002），在根据数据进行统计推断时可以说更具直观性。这种推理过程从基于个人判断或经验、与某个假设或主张相关联的先验概率开始，并且

涉及根据新数据更新该概率（Rossman 2008）。然而，主观概率作为测量概率的主要方法之一，并未纳入学校数学课程，尽管小学学生有机会使用主观概率描述词（不可能、较不可能、较可能和确定）来描述随机事件的结果（Jones等人 2007）。

数学教育领域近期的一些研究聚焦于运用概率的主观主义观念和贝叶斯方法，支持年轻学生进行不确定性推理。在一项针对7至8岁儿童的研究中，Kazak和Leavy（2018年，2022年）让儿童预测随机事件中特定结果发生的可能性（例如，从袋子里抽出一颗绿色软糖），并在非数值笑脸量表上标示他们的判断（量表一端是表示不可能事件的悲伤表情，中间是表示等可能事件的中性表情，另一端是表示必然事件的快乐表情）。研究者关注儿童的个人（主观）概率估计，以及当儿童通过进行24次试验的物理实验、继而通过进行500次或1000次试验的计算机模拟获得新数据时，他们的先验概率估计如何变化。研究结果表明，即使对幼儿而言，根据新证据调整先验概率估计的推理过程也可能十分直观。

此外，Kazak（2015年）通过一项任务考察了10至11岁学生的不确定性推理：学生需要判断一个随机游戏是否公平，并说明自己对游戏公平性的判断（猜想）的置信度。游戏规则是从两个袋子中各随机抽取一个筹码，如果两个筹码颜色相同，学生就赢得游戏。学生以小组形式合作，首先根据直觉或个人信念评估给定的四个游戏是否公平，并作出解释；随后在从0（完全没有信心）到10（完全有信心）的量表上标记自己的置信度。接着，他们可以尽情亲自玩这个游戏，并且

被要求根据游戏结果，在新的量表上再次标记自己对游戏公平性的置信度。在下一部分中，学生使用计算机模拟收集更多数据（数量从100到100000不等），并利用模拟结果中的信息更新自己的置信度。研究表明，这项任务帮助学生使用置信度量表表达对某一猜想的主观概率信念，并支持他们根据新获得的信息更新对个人信念的置信度。因此，在较低年级促进贝叶斯推理，似乎有助于将学生的直觉发展为更有力的概率观念。

尽管学生对概率的认知会随着年龄增长而变化（Piaget & Inhelder 1951年，Kreitler & Kreitler 1986年，Barash 等 2019年），但即使到了本科阶段（乃至更高阶段），学习统计推断仍面临诸多挑战。统计推断通常从频率学派视角进行教学，最新建议包括通过模拟来教授推断，例如自助抽样和随机化检验（Rossman & Chance 2014年）。然而，尽管基于模拟的活动有诸多益处，却并不总能帮助消除与推断相关的错误观念。例如，在一门采用模拟教学推断的课程中，职前教师在提出假设、解读 p-值以及得出结论方面遇到了困难（Biehler 等 2015年）。

虽然这些贝叶斯课程和活动并非专为职前教师设计，但也有人推荐并在本科阶段开设这些课程和活动，将其作为统计推断的另一种方法。尽管贝叶斯课程在本科阶段并不常见（Dogucu 和 Hu 2022），但此类课程已有许多示例（Witmer 2017, Johnson 等人 2020, Hu 2020, Hoegh 2020, Hu & Dogucu 2022）。人们还尝试通过各种活动引入贝叶斯思想，包括借助 M&M’s糖果（Eadie 等人 2019）和网络模拟器（Barcena 等人 2019）来搜索

一艘潜艇。

1.2 科学教育领域的相关研究

尽管此前在数学与统计教育领域有更多研究推动以贝叶斯方式处理不确定性，但科学教育领域也有一些相关研究。两篇奠基性论文从贝叶斯视角考察了在 K-12课堂中基于证据进行论证这一科学与工程实践——这是科学家和工程师专业工作中常见的一项活动（国家研究委员会 2012年）。

Szu与Osborne（2012年）针对贝叶斯方法如何以及为何能对K—12 年级的科学教师和学习者的科学推理有所助益，作出了重要区分。具体而言，“贝叶斯推断作为科学推理模型的价值之争，其关键跨越”（第61页）在于承认学生对现象、科学思想和理论所持有的信念程度。这种主观的概率观使贝叶斯定理不再只是一个数学表达式：相反，贝叶斯定理可用于理解并促进学生推理。他们解释说，贝叶斯方法的这一关键特点能够支持一种非正式但有原则的科学推理形式。这种对非正式但有原则的科学推理 的关注，与统计教育领域类似的倡议相一致，即为学生提供参与非正式统计推断的机会（Makar与Rubin，2018年）。

Nussbaum（2011年）提供了在实际的幼儿园至十二年级课堂情境中实施贝叶斯论证方法的示例。虽然重点在于论证，但学生参与基于证据进行论证的主题，围绕的是是否应提高税收以向无家可归者提供资源这一问题。与 Nussbaum（2011年）强调主观概率不同，Szu与Osborne（2012年）展示了如何从经验性证据中获得先验和似然，这同样是在学生

参与科学论证的情境中。

除了这两篇论文之外，近期一些关于本科物理教学情境的研究，推动了贝叶斯方法的一种更为定性 的应用路径（Warren 2018年，2020年）。Warren 将他设计并实施的活动称为贝叶斯更新活动，并将其融入大学物理入门课程。在这些活动中，学生首先表达自己对待检验假设的初始置信度。随后，他们需要思考所收集的实验数据与最初的假设是否一致（或有何不同），之后再根据贝叶斯定理更新 自己的信念。重要的是，这项研究采用了更具定性的贝叶斯推理方法：学生的初始信念并非以数字或分布表示，而是以假设的形式表达。不过，对大多数大学前阶段的学生来说，这种方法可能仍具挑战性，因为应用贝叶斯定理仍需要一定的数学能力，而高中高年级数学或统计学课程之外的学生可能难以达到这一水平。

Rosenberg、Kubsch、Wagenmakers 和 Dogucu（2022年）拓展了科学教育领域的部分既有研究。他们阐释了一些认识论（即与知识相关的）原则，科学教师可以将其作为启发式方法用于教学。这些原则包括：a）对新证据持开放态度，b）考虑已有知识，以及 c）考虑替代解释。此外，他们还基于 Warren（2018年、2020年）提出的方法，开发了一个交互式网络版本，将定性方法付诸实践。不过，该应用程序无法进行精确计算，而是采用更具启发性的计算方式；它仅适用于假设，而不考虑参数。简言之，它更适合作为介绍贝叶斯推理的非正式方式。接下来，我们将讨论自己开发的应用程序和教学计划如何克服这些局限。

2 Web应用程序与活动计划

2.1 Web应用程序

我们开发了一个网络应用程序，以辅助学习一些基础的贝叶斯思想。我们希望用户能够：1）设定先验模型；2）理解后验模型是通过同时考虑先验模型和似然函数（基于数据）构建的；3）理解更多数据（即证据）会削弱先验对后验分布的影响，同时增强似然的影响。这些思想不依赖于特定模型，适用于任何贝叶斯模型。在网络应用程序（以及活动）中，我们采用了贝塔-二项模型，因为它较为简单。这里的简单是指模型中只有一个参数，并不一定意味着学习起来容易。此外，贝塔-二项模型是贝叶斯课程中最常讲授的模型之一（Dogucu 和 Hu，2022年）。因此，我们认为它适合作为数学和科学职前教师学习的第一个贝叶斯模型。

该应用程序使用 `R`package shiny（Chang 等人，2021）开发，为 R 软件包 `bayesrules` （Dogucu 等人，2021）中的贝塔-二项模型可视化提供交互功能；该软件包曾用于 *Bayes Rules!* 一书（Johnson 等人，2022）的第 3 章和第 4 章。该软件包中的静态可视化函数有助于学习上一段提到的贝叶斯建模的三个基础思想（Dogucu 和 Johnson，2022）。不过，在教学中，我们选择使用 Shiny 框架创建交互式可视化，以避免 R 安装问题。此外，由于该应用程序不要求用户编写代码，因此也可用于不熟悉 R 的学习者。我们开发该应用程序时没有将其限定在某一具体情境中（例如抛硬币），因此如果其他教育者有需要且感兴趣，也可以使用它。

使用该应用程序时，用户首先选择 Beta先验的形状参数。他们可以交互式地更改这些值，直到找到与其信念相符的分布。接下来，用户提供数据信息。信息提供后，应用程序会将先验、似然和后验分布可视化。对于可能不一定熟悉二项分布的科学教育者，我们避免使用试验和成功等术语，而分别采用“观测/案例数量”和“指定结果数量”。我们在图1中展示了该应用程序的前两个选项卡。

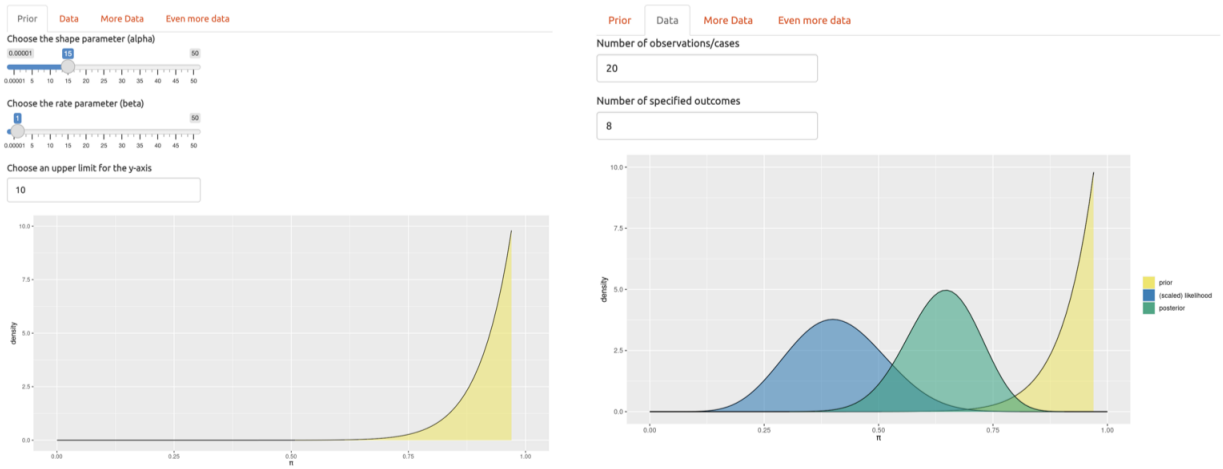


图1：网络应用程序的界面，左侧为先验选项卡，右侧为数据选项卡。

该应用程序还支持这样的情境：用户可以提供更多数据并更新后验分布，甚至可以在最后一轮提供更多数据。新增的“数据”和“更多数据”选项卡旨在让用户直观地看到，证据越多，后验分布就越接近似然。

2.2 活动设计

除了应用程序，我们还开发了一项活动，将贝叶斯方法应用于数据分析与解读。向职前数学与科学教师介绍贝叶斯方法有两个目的。首先，需要让数学教师相信个人（主观）概率是有用的，因为有了足够的科学证据，不同的科学家会得出相同或相近的结论，因此主观概率的重要性也就没那么大。该应用程序确实有助于展示：如果收集的数据样本量足够大，后验分布就会相似或相同。其次，需要让科学教师相信贝叶斯思维有助于回答科学问题，让他们看到这种方法如何帮助他们以切实可行的方式分析数据。

为了让学生从贝叶斯视角调查数据，我们希望提出一个能激发学生兴趣的问题，并决定聚焦于与大学可持续发展倡议相关的主题，即校园节能。为了让活动更具真实性并激发学生参与，我们还希望提出一个答案尚未确定的问题。该问题要求学生估计一个参数 π，即校园内亮着灯的无人房间所占的比例。该活动分为六个部分：

第一部分——先验想法：介绍问题后，首先请学生估计亮着的灯的比例，并用 0% 到 100% 的量表表示对这一估计的置信度，其中 0% 表示完全没有信心，100% 表示完全有信心。这一估计及其不确定性为学生分享关于 π 的先验信息提供了机会。我们还请他们写下估计该比例时考虑的假设，以鼓励他们陈述作为初始估计依据的先验观察或知识。随后，每位学生使用小程序反思

自己对该比例的先验想法，并选择由形状参数和率参数（alpha 和 beta）确定的贝塔分布。最能体现学生对 π 的初始想法的分布，在收集任何数据之前构成了先验模型。

第二部分——数据：学生以小组（每组 4–6 人）为单位，使用 Google 表格记录校园内不同大型建筑中无人房间的灯的状态（每组负责一栋建筑）。这项数据收集活动分配了 30 分钟。数据包括指定房间的名称/编号，以及房间内是否有一盏或多盏灯亮着（是=1，否=0）。各小组完成数据收集后，每位学生使用本组的数据独立完成其余任务。

第三部分——想法的变化：在这一部分，学生只需考虑前五个观测值。学生使用 Shiny 应用查看根据其数据（n=5）得出的先验分布、似然分布和后验分布，并写下自己对这些先验分布、似然分布和后验分布的观察与疑问。他们还可以比较不同数据和不同先验对后验分布的影响。我们希望他们理解，后验分布代表一种估计；这种估计依据贝叶斯定理，在先验想法与数据之间取得平衡。接着，学生根据后验分布，在线上提供的量表（0% 至 100%）上再次标出自己对估计有多大把握。全班讨论了如何考虑先验、数据或两者之后，我们简要讲解了频率派方法和贝叶斯方法。随后，学生需要指出哪种方法更符合科学探究，并解释原因。

第四部分 - 更多数据：学生现在使用 Shiny 应用分析其小组收集的全部数据（n=48-57）。在这一部分探究活动中，学生需要理解，上一部分（III）的后验分布被用作先验。随后，他们需要解读数据，并将更新后的后验分布与先前的后验分布进行比较。他们再次在量表上标出自己对更新后估计值的信心程度

（0% 至 100%），并根据新信息作出判断。

第五部分 - 汇总全班数据：为了了解大样本量的影响，各小组收集的所有数据都被合并到一个全班数据（n=205）电子表格中。通过考察先验、数据的似然以及基于全班数据得出的后验分布，学生们被要求写下自己注意到估计值有哪些变化，并再次通过在给定的量表上作标记来评估自己的置信度。探究活动结束时，学生们就校园内有灯未关的房间比例得出结论，并反思如何拓展这项探究活动。

第六部分：反思与规划：学生们反思了自己从这项活动中学到了什么、可以将哪些内容用于学生身上，以及自己还有哪些问题想要了解。学生们先以小组形式进行反思，之后以简短的书面反思回应提示。

3 实施

3.1 教学背景

在实施前的三年里，一位作者在美国东南部的一所大学为职前（尚未任教）和在职进修（一边任教一边取得教师资格证）的科学教师授课。这门课程主要聚焦于科学领域的项目式学习（Krajcik & Czerniak 2018年），这种方法强调通过规划和开展由重要科学问题或难题驱动的复杂项目来学习科学。

另一位授课教师为职前教师开设了一门平行课程。过去，职前数学教师课程的授课教师与讲授

职前科学教师课程的作者曾将他们的若干课堂合并。这样做有多重考虑：一是帮助学生学习互补学科内容（对数学教师而言是科学，对科学教师而言是数学）；二是让职前教师在这些课程中参与融合数学与科学的活动，即数据建模 （Kazak 等，2021；Lehrer 与 English，2018）。这是因为，利用经验数据开展工作，是新一代科学标准与共同核心州标准（该州采用这两项标准作为课程标准）之间相对少见的交集领域。Lawson 等（2021）记录了这些早期尝试的研究发现。鉴于此前曾尝试围绕数据与数学和科学师范生共同开展教学，这一情境适合用于探索本文提出并阐述的贝叶斯方法。因此，两位授课教师都熟悉这些课程，也都希望帮助课程中的学生——现任和未来教师——能够引导其幼儿园至十二年级（大学前阶段）的学生，以更深入、更有意义的方式开展数据学习。

3.2 参与者

如上一节所述，本研究的样本包括正在取得教师资格证的职前科学教师和数学教师。需要指出的是，少数学生严格来说属于在职教师（同时任教并取得教师资格证）。尽管他们是我们所授课程的大学生，但本文将他们称为职前教师，因为这是他们在课程中的主要身份。2021 年秋季学期，我们将两个班合并，进行了一次时长约三小时的课程。值得注意的是，新冠肺炎疫情在该学期造成了严峻挑战，因此两个班都采用了混合模式：

如果职前教师担心感染 COVID-19（或曾接触过病毒），可以在线参加课程；许多人根据每周变化的个人偏好选择了在线参加。具体而言，课程共有 21 名职前科学教师和 14 名数学师范生。职前教师此前接触统计学、数据分析和数据科学的机会有限，相关经验也不多。职前科学教师（中学或高中）的培养方案均未要求修读任何统计学或数据科学课程。高中数学师范生的培养方案要求修读一门概率与统计课程（该课程的先修课为微积分 3，这意味着在本研究中，只有少数参与者在培养方案的这一阶段已经修读过该课程）。

35名职前教师中，几乎所有人都参加了这项活动。不过，9名科学职前教师和7名数学职前教师同意我们将其作品用作本研究的数据来源，因此共有16名职前教师参与。其中3名职前教师没有向我们提供完整作品，因此我们的分析样本为13名职前教师，其中包括7名科学职前教师和6名数学职前教师。

3.3 教学安排

如前所述，课程采用混合模式授课；在开展贝叶斯数据分析活动的那次课上，几位职前教师以全程在线的方式参与。为确保他们有机会充分参与所有课堂活动，我们采取了多项措施予以配合。具体而言，我们组建了由数学课和科学课职前教师混合组成的小组（使他们有机会与教授不同学科的职前教师交流协作），同时也将线下和在线参与的职前教师编入同一小组。由于此前几次课中，在线参与的职前教师通常只参加约两小时（而非完整的三小时）

课程，我们提前分享了所有材料，并录制了一段视频，供在线职前教师在上课前观看。我们请面对面课堂中的职前教师在小组内为线上教师发声，并确保在线组员能够参与；因此，面对面课堂中的职前教师会在在线组员听不清音频或有问题想向全班提出时，及时告知授课教师。职前教师以小组形式完成任务的各个环节并进行讨论，但每个人都独立完成并提交任务。

3.4 材料

所用材料如下（材料链接见附录）：

1. *Shiny* 交互式网络应用程序。 该应用程序使职前教师能够使用我们前文介绍的贝塔-二项分布模型估计后验分布。

2. 供职前教师自我评估其贝叶斯思维和频率学派思维程度的简短 *Google* 表单。表单包含四个问题，教师可以作答，并据此解读自己的思维与贝叶斯或频率学派数据分析方法的契合程度（摘自《Bayes Rules!》一书，Dogucu 等人，2021）。

3. 用作数字工作表的 *Google* 文档。该文档由六个部分组成，与我们为职前教师设计的活动结构相对应：1）先验想法，2）数据，3）想法的变化，4）更多数据，5）汇总全班数据，6）反思。

4. 供职前教师记录观测值作为数据的 *Google* 表格电子表格。该电子表格包含多个选项卡，供教师分组记录数据；另有一个选项卡用于汇总全班数据。这些数据的摘要被用于该应用程序中。

5. *Google* 幻灯片演示文稿。该演示文稿用于向职前教师介绍新理念，并帮助他们组织任务。

3.5 参与者评论

为了对实施情况提供内容和形成性反馈，我们收集并分析了教师在 Google 文档中的回复，以了解他们的评论。

职前数学和科学教师完成这项活动后，主要从内容、课程形式和技术方面总结了要点。职前教师谈及自己对活动内容（即贝叶斯数据分析）的体验时，通常会考虑用于分析和解读数据的概念与方法。以下是一些相关评论示例：“我现在对先验、似然和后验概率之间的差异有了更直观的理解。”以及“解读数据并据此得出结论的方法有很多。”

职前教师对课程形式（即“互动课程”和“小组活动”）的评论，体现了他们主要从教学角度出发的倾向。例如，正如这条评论所示：“这是一项很棒的小组活动，适合教师和我们未来的教师借此了解数据的价值与局限。”这位职前教师似乎反思了自己的体验，并将其与未来的教学联系起来。此外，一些职前教师提到，学习使用 Shiny 应用程序分析数据是一种新的工具。

据职前教师的回答，这项活动似乎也激发了他们对贝叶斯思想（以及更广泛而言，对统计学和概率）的兴趣，而这些内容据称并未纳入他们的教师培训。例如，一位职前数学教师表示：“我想进一步了解贝叶斯定理，以及它如何应用于现实世界中的其他情境。我还想了解其他的数据表示方法。我从未上过统计学课程，但这次活动非常有趣。”一些职前教师（尤其是准备教授科学的教师）有兴趣进一步了解该应用程序，并学习如何将数据可视化用于自己的教学（例如：“我如何为我的学生制作更多数据可视化内容”）。

当被问及还能在哪些主题中采用类似方法来指导学生时，职前教师大多举出了不同情境下的一般性数据收集示例，例如测量、函数关系、鸟类调查，甚至量子物理学。因此，职前教师普遍认为贝叶斯方法可用于任何数据分析。这种广泛的适用范围也体现在职前教师提出的贝叶斯方法具体应用示例中。具体而言，一位职前数学教师给出了一个与该活动类似的二项分布示例（即调查人们喜欢或不喜欢什么），而一位职前科学教师则将活动中使用的方法与自己的学科领域联系起来，例如假设检验（“你可以使用该应用程序分析学生在实验中收集的数据，并将他们的假设（预测）与结果进行比较。”）。

4 结论与讨论

我们的目标是为职前数学与科学教师设计并实施一项贝叶斯数据分析活动。我们认为，这将表明，即使

没有贝叶斯统计方法基础的职前科学教师也能够开展这类活动。本节将讨论这项活动，以及我们在向职前教师授课时的观测结果。具体分为三个方面。首先，我们讨论贝叶斯思维及其在教师教育中的作用，以及这项活动如何助力培养科学和数学教师。其次，我们重新审视将贝叶斯思维引入幼儿园至十二年级阶段这一间接目标。最后，参与者除了是职前教师外，也是大学生。因此，我们将从大学阶段统计教育的角度讨论这项活动及其贡献。

4.1 对教师教育的贡献

本研究的一项贡献是证明了将数学与科学职前教育工作者汇聚在一起的可行性与价值。传统上，职前教师培养通常将这两个学科领域的教师分开培养，不过，有一个知名项目将未来数学和科学教师的课程整合在一起（Backes等，2018年）。但总体而言，数学教师与其他数学教师一起学习如何教授数学，科学教师则与其他科学教师一起学习如何教授科学。帮助学生分析数据是数学和科学课程标准的重要特征（全国州长协会等，2010年；国家研究委员会，2012年）。因此，为数学与科学教育工作者设计并实施课程体验，不仅符合课程标准，也切实可行；此外，数学与科学在数据分析方法上的互补差异，也可能使此类体验更具价值。具体而言，数学建模历来被批评忽视数据分析发生的情境 （Rubin，2020年）。与此同时，科学教师向学生介绍数据的方式可能缺乏统计严谨性（Rosenberg、Schultheis、Kjelvik、Reedy和Sultana，2022年）。这一点从参与者在活动结束时的反思中显而易见

两位数学师范生在反思中提到，他们观察到数学和科学师范生在统计概念和数据分析方面采用了不同的方法。我们实施的这类贝叶斯数据分析活动及课程，旨在弥补教师专业培养中长期存在的这两方面不足，即将有意义的情境 与数学严谨性结合起来。我们观察到，教师们会在活动和课程中互相帮助，弥补彼此经验不足的方面：数学教师向科学教师说明，他们在地图上观察到的分布如何与微积分相关概念相联系；科学教师则向数学教师介绍具体的环境科学和物理学相关知识。因此，这类机会既能让两组教师更容易理解对方的学科领域，又能满足课程标准，因为数据在两个领域中都发挥着核心作用。

在这项活动中，我们尝试以透明、具体的方式展示：在与大学生相关的真实情境中，随着新数据的获得，基于个人判断形成的初始假设如何得到更新。职前教师首先陈述自己的初始预测以及对估计结果的置信度。随后，他们在应用程序中分析先验—似然—后验分布，并根据本小组收集的前五个数据（n=5）、所有小组的数据（n=48-57），最后根据全班的数据（n=205）更新自己的置信度。这种方法借助了贝叶斯方法所采用的演绎推理的直观性，正如其他研究者所强调的那样（Albert 2002年，Rossman 2008年）；因此，即使职前教师此前没有修过概率、统计学和微积分方面的本科课程，这项活动也可能对他们有所帮助。此外，一些职前教师的评论表明，在一堂三小时的课上完成这项活动后，他们对学习统计学、概率，尤其是贝叶斯思想产生了兴趣。因此，此类活动可以纳入与以下内容相关的教师教育课程：

贝叶斯数据分析内容，例如本研究采用的、侧重于科学领域项目式学习的课程。

本研究对教师教育的另一项贡献，是展示了一种专为教学与学习设计的技术。在教师教育领域，人们长期关注教师如何使用内容特定技术（例如数学或科学教育技术）以及情境特定技术（例如适用于幼儿园至高中学校现有技术条件的技术）（Mishra 和 Koehler 2006年）。我们设计的应用程序考虑到了这些因素。它并非专为贝叶斯数据分析而设计（也未必适用于一般的贝叶斯数据分析）；已有其他广泛使用的工具可用于此目的，例如 Stan（Gelman 等人 2015年）。与此同时，该工具旨在帮助学习者开展在统计和技术层面均有效的分析。此外，任何学生和教师都能通过配备网页浏览器的电脑（或 Chromebook）使用该工具。因此，本研究提供了一个用于教学与学习的统计软件实例，旨在部分回应 McNamara（2019年）提出的呼吁：设计能够弥合纯学习工具与专业工具之间差距的工具。我们开发的工具可供任何教师使用。我们可以设想对该工具进行扩展，使其能够针对因变量采用不同的分布进行分析（即正态-正态分布和伽马-泊松共轭先验模型），从而进一步弥合教师和学习者使用我们开发的应用程序在 K-12课堂中能够完成的分析，与 Stan 等工具允许更熟练用户进行的更复杂分析之间的差距。

4.2 对幼儿园至高中教育的贡献

在概率和非正式统计推断的情境中，在学校阶段引入贝叶斯思想的机会日益增多（Chernoff 2014年，Kazak 2015年，Nilsson 等人 2014年，Martignon 和 Erickson 2014年）。本研究补充了这些研究，因为我们

通过与职前数学和科学教师开展贝叶斯数据分析活动，间接旨在运用贝叶斯方法，在幼儿园至十二年级阶段培养学生对不确定性的理解。完成活动和课程后，职前教师的反馈表明，他们打算在自己的课堂上运用该活动的若干方面来促进学生学习，例如课程形式（小组活动）、内容（数据的价值与局限）以及应用程序。

这项工作对K-12科学教育的一项研究相关贡献，是展示贝叶斯数据分析如何应用于这一情境的一个示例。已有研究探讨了如何在科学课堂中运用贝叶斯定理，而本研究则探索了如何运用贝叶斯方法来开展科学教育研究中通常所称的科学与工程实践 ——论证（Nussbaum 2011，Szu与Osborne 2012）。贝叶斯数据分析的示例不多，而且这些工作都处于本科物理学情境中（Warren 2018，2020）。因此，本文所述的活动和课程呈现了我们所知的首个示例，展示了K-12阶段的教师如何支持学生以贝叶斯方式分析数据。我们希望未来的研究——无论由我们还是他人开展——能在这一领域作出更多贡献，开始记录参与贝叶斯数据分析所产生的影响，并采用Warren（2020）研究中使用的研究设计和评估方式（或其改编版本）。

本研究对幼儿园至高中教育的另一项贡献，是阐述如何运用贝叶斯方法进行不确定性推理。这种方法为未来的数学和科学教师提供了一种自然的途径，使他们能够利用额外数据更新先验概率估计以及对置信度的看法。概率测量主要有三种方法：经典派（在学校数学中称为“理论”方法）、频率派（在学校数学中称为“实验”方法）和主观方法。虽然前两种方法的某些方面

已被不同国家的K-12数学课程纳入，但这些课程文件对主观概率缺乏论述（Jones等人，2007）。正如Jones等人指出的，且较新的研究也提供了支持（Kazak，2015年；Kazak和Leavy，2022年），有证据表明，即使是年幼的学生，在接触主观概率时，也能逐渐形成直觉，在获得新数据后调整先验概率估计或对置信水平的看法。因此，亲身经历过这类学习的职前数学与科学教师，更有可能运用这些理念，帮助学生培养作出个人概率判断所需的知识。

本文介绍的贝叶斯数据分析活动涉及非正式统计推断（Makar与Rubin 2009年）和不确定性相关的理念。这些理念可能与幼儿园至十二年级阶段的数学和科学课程都息息相关，因为分析和解释数据并阐明不确定性，是数学和科学标准的一部分（参见《共同核心州立标准：数学》（CCSSM），http://www.corestandards.org/Math，以及新一代科学标准 https://www.nextgenscience.org/）。尽管学校通常将数学和科学内容分开教学，但数学可以为分析数据、解决现实问题奠定基础，而科学则能为数据探究提供丰富且有意义的背景（Watson 2017年）。我们预计，在科学背景（可持续性／节能）下实施这项活动，并让数学和科学师范生共同参与，可以激发相关努力，促进幼儿园至十二年级学校课程中数学与科学内容的相互联系。

4.3 对大学统计学教育的贡献

我们在第1节中曾提到，统计学界呼吁科学家在数据分析中将贝叶斯方法作为一种替代方案（Wasserstein 和 Lazar 2016年）；统计教育文献也表明，统计学系开设了面向大学阶段学生的课程（Berry 1997年、Witmer 2017年、Johnson 等人 2020年、Hu 2020年、Hoegh 2020年、Hu 和 Dogucu 2022年），但除极少数例外，这些课程似乎并未纳入更广泛的科学、技术、工程和数学项目（Dogucu 和 Hu 2022年）。贝叶斯课程有许多先修要求（Dogucu 和 Hu 2022年），这可能是这些课程无法惠及更广泛的科学、技术、工程和数学群体的原因之一。

统计学训练讨论中经常被视为核心的先修课程之一是微积分。对于统计学导论课程（这类课程通常采用频率学派范式教学），在现代课程体系中，是否将微积分作为先修要求因课程而异（Carver 等，2016）。尽管贝叶斯统计课程对微积分先修知识的依赖程度更高，但贝叶斯推理的基础内容，例如更新信念，也可以传授给年幼的学习者（Kazak，2015）。我们认为，这项活动丰富了有关贝叶斯活动的文献（例如 Eadie 等，2019；Barcena 等，2019），而这类活动可以运用高中代数知识完成。本活动经过精心设计，避免了数学推导，并借助可视化聚焦于贝叶斯思维的基础内容，类似于 Dogucu 和 Johnson（2022）中的示例。因此，对于数学和统计学先修要求较少、无法修读完整贝叶斯统计学课程的大学生而言，本活动可用于引入贝叶斯概念。

4.4 局限性

尽管我们认为这项活动作出了多方面贡献，但也注意到它存在一些局限。这是一项面向两个班级开展的单次活动。我们认为，扩大教师群体的范围将有助于了解这项活动在多大程度上满足不同年级、数学和科学知识水平各异，以及教学情境不同的教师的需求（例如，社会经济资本水平不同的学校）。我们还认为，扩大至处于不同职业阶段的教师群体也会有所裨益，具体而言，是在职 （在自己的课堂中独立授课）的数学和科学教师。

此外，我们认为，将活动扩展到多个课时——即课程中的一个“单元”，甚至整门课程——可能会有所裨益，不过我们确实认为，我们提供的初步体验仍然很有价值。

我们希望在未来的版本中考虑解决的另一项局限，是如何平衡必要的背景信息与职前教师所完成的核心活动。鉴于单次课时有限，我们向职前教师提供了大量有关贝叶斯定理、贝叶斯数据分析方法以及应用程序使用方式的信息。其中部分材料可以提前提供，以便教师在课堂上有更多时间进行练习、讨论、反思和规划。

最后一项局限涉及科学思想与贝叶斯方法两者受到强调的程度。具体而言，我们认为，将这项活动与我们开展活动所在国家的课程标准所涵盖的学科核心理念相结合，会很有裨益（即《新一代科学标准》；国家研究委员会等，2013）。我们认为，这需要确定一种科学现象，其机制或过程能够用我们所采用的模型类型（贝塔-二项分布）轻松表示。或者，我们也可以采用其他合适的模型类型（例如正态-正态分布或伽马-泊松分布）。这样做将提升理解该活动科学焦点的重要性，同时保留对理解贝叶斯方法如何运作的强调。

对于理解该活动的科学焦点而言，利害关系会更为重大，同时仍强调理解贝叶斯方法的运作方式。

任何教授职前教师、在职教师或具有同等培训背景的学习者，都可以直接使用该学习活动及其配套的网络应用程序。由于这些资源以开源形式提供，因此可以进行修改，以便在不同背景下采用这些资源。根据我们开展该活动的经验以及所遇到的一些限制，我们提出以下可能的修改建议，供读者参考：

- 如果只教授数学职前教师或在职教师，则可以通过进一步深入讲解贝塔-二项模型来支持这些活动。我们的许多参与者是职前数学教师，他们渴望了解该模型为何如此运作。

- 如有需要，可以更改科学背景。在这种情况下，读者可以选择任何其他未知量来表示 π。对此必须谨慎，因为我们假设数据服从二项模型，而该模型假设每个观测值都彼此独立。

- 将科学、技术、工程和数学教师聚集在一起。贝叶斯建模活动是将不同学科教师聚集在一起的绝佳机会。不过，值得注意的是，在组织实施方面，这可能存在较大困难。

- 在课外安排时间进行数据收集。无论教授的是贝叶斯建模还是其他主题，教学时间总是不够用，这一点并不令人意外。教师，尤其是不太熟悉数据建模的教师，需要时间来内化这些概念。未来的改进可以包括让教师在课外收集数据，从而腾出更多课堂时间来阐释概念。在不同时间收集数据也有助于提升研究发现的可推广性。

- 根据教学方式（即混合式、在线或线下）调整活动。

未来的调整应仔细考虑数据收集过程。例如，如果该活动在线上开展，就需要更改数据情境，以便教师能够在家中和宿舍里收集数据。

- 最后，可以考虑使用不同的工具。对于希望采用不同贝叶斯模型、但不想或无法利用 Shiny 软件包开发自己的应用程序的授课教师而言，JASP（Love 等，2019年）或许是合适的选择。

5 结束语

贝叶斯数据分析可能对幼儿园至十二年级（大学预科阶段）的学生有所帮助，并赋予他们力量。教师对于帮助自己的学生从这种方法中受益至关重要。在这项工作中，我们为职前教师设计并开发了一堂课程，教师们参与了课程并进行了反思。通过这项工作，我们表明，职前教师很容易就能运用这种方法，并报告由此带来的即时益处以及可能的长期益处。我们希望这项工作能推动未来的研究、设计与开发，使贝叶斯思维对K—12 年级的学习者而言更加易于理解，同时也能像在众多应用领域中一样强大。

附录

1. 该网络应用程序可通过 `https://mdogucu.shinyapps.io/teachered-bayes-shin` 在线免费访问
   源代码可在 GitHub 上获取 `https://github.com/mdogucu/teachered-bayes-shiny`

2. 活动期间向职前教师提供的（电子版）讲义可通过以下链接访问：
`https://docs.google.com/document/d/1G3H1aePCx7Jcg226v59m-LiTVcLYe1Ym/`

edit?usp=sharing&ouid=110969489876425298430&rtpof=true&sd=true

3. 活动期间向职前教师展示的幻灯片可在此处找到 https://docs.google.com/presentation/d/1L27DRrJFqTGGKv9gCgEYhvJfNntsPymH/edit?usp=sharing&ouid=116742544548104368401&rtpof=true&sd=true

数据可用性

本研究所得发现所依据的数据，可在提出合理请求后向通讯作者 MD 获取。

人类参与者

所有研究参与者均已提供知情同意。本研究已获田纳西大学诺克斯维尔分校机构审查委员会批准（18-04804-XP）。

参考文献

Albert, J.（2002年），从贝叶斯视角进行入门统计学教学，载于《第六届国际统计教学会议论文集。南非开普敦 [CD-ROM]。荷兰福尔堡：国际统计学会 [在线：www. stat. auckland. ac. nz/~iase/publications/1/3f1 albe. pdf]》。

Backes, B., Goldhaber, D., Cade, W., Sullivan, K. &Dodson, M.（2018年），‘UTeach是否可行？评估科学、技术、工程和数学教师的相对成效’，《教育经济学评论》64，184–198。

Barash, J., Brocas, I., Carrillo, J. D. & Kodaverdian, N.（2019年），‘从启发式到贝叶斯：推理从童年期到成年期的发展’，《经济行为与组织杂志》**159**，305–322。

Barcena, M. J., Garin, M.A., Martin, A., Tusell, F. & Unzueta, A.（2019年），《贝叶斯定理教学辅助网络模拟器》，《统计教育杂志》**27**(2), 68–78。

Ben-Zvi, D.（2006年），为学生的非正式推断与论证提供支架，载于《第七届国际统计教学会议论文集》，第1–6页。

Berry, D. A.（1997年），《以科学中的实际应用教授基础贝叶斯统计学》，《美国统计学家》**51**(3), 241–246。

Biehler, R., Frischemeier, D. & Podworny, S.（2015年），《随机化检验背景下职前教师的不确定性推理》，《不确定性推理：非正式推断推理的学习与教学》第129–162页。

Braham, H. M. & Ben-Zvi（2015年），学生在非正式探索抽样分布时对不确定性的表达，载于 A. Zieffler & E. Fry 编，《不确定性推理：非正式推断推理的学习与教学》，Catalyst Press，明尼阿波利斯，第57–94页。

Carpenter, B., Gelman, A., Hoffman, M. D., Lee, D., Goodrich, B., Betancourt, M., Brubaker, M., Guo, J., Li, P. & Riddell, A.（2017年），《Stan：一种概率编程语言》，《统计软件杂志》**76**(1)。

Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J., Horton, N., Lock, R., Mocko, M., Rossman, A., Roswell, G.H., Velleman, P., Witmer, J. 等（2016年），《统计教育评估与教学指南（GAISE）：

大学报告》，技术报告。**网址：***http://www.amstat.org/education/gaise*

Chang, W., Cheng, J., Allaire, J., Sievert, C., Schloerke, B., Xie, Y., Allen, J., McPherson, J., Dipert, A. & Borges, B. (2021), 'shiny：R 的 Web 应用程序框架'。**网址：** *https://cran.r-project.org/web/packages/shiny/index.html*

Chernoff, E. J. (2014年), 请真正的贝叶斯概率站出来，收录于 《第九届国际统计教学会议论文集》。美国亚利桑那州弗拉格斯塔夫。荷兰福尔堡：国际统计学会。

Dogucu, M. & Hu, J. (2022年), '本科贝叶斯教育的现状与未来建议'，《美国统计学家》第 1239–1262 页。**网址：**
https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00031305.2022.2089232

Dogucu, M. & Johnson, A. (2022年)，借助可视化支持贝叶斯建模，载于《弥合差距：赋能并教育当今的统计学学习者。第十一届国际统计教学会议论文集》，国际统计教育协会。

Dogucu, M., Johnson, A. & Ott, M. (2021)，《bayesrules：Bayes Rules! 一书的数据集与补充函数》。

网址：*https://cran.r-project.org/web/packages/bayesrules/index.html*

Eadie, G., Huppenkothen, D., Springford, A. & McCormick, T.（2019年），《用 M&M's 引入贝叶斯分析：面向本科生的主动学习练习》，《统计学教育杂志》**27**(2), 60–67。

Gelman, A., Lee, D. & Guo, J.（2015年），《Stan：用于贝叶斯推断与优化的概率编程语言》，《教育与行为统计学杂志》40(5)，530–543。

Goodrich, B.（2022年），《rstanarm：通过 Stan 进行贝叶斯应用回归建模》。R 软件包版本 2.21.3。**网址：** *https://mc-stan.org/rstanarm*

Henriques, A. & Oliveira, H.（2016年），《学生在使用 tinkerplots 开展统计调查并进行非正式推断时对不确定性的表达》，*StatisticsEducation Research Journal* **15(2)**, 62–80。

Hoegh, A.（2020年），《为何应在统计学课程中引入贝叶斯思想，以及如何引入》，《统计教育杂志》 **28(3)**，222–228。**网址：** *https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10691898.2020.1841591*

Hu, J.（2020年），《面向本科生的贝叶斯统计学课程：贝叶斯思维、计算与研究》，《统计教育杂志》**28(3)**，229–235。出版商：Taylor & Francis。

Hu, J. & Dogucu, M.（2022年），‘两门本科贝叶斯课程的内容与计算大纲：工具、示例与建议’，*Stat* p. e452。出版方：Wiley Online Library。

Johnson, A., Ott, M. & Dogucu, M.（2022年），*Bayes Rules!*：使用 *R* 进行贝叶斯建模的引言，CRC出版社。**网址：** *https://www.bayesrulesbook.com/*

Johnson, A., Rundel, C., Hu, J., Ross, K. & Rossman, A.（2020年），《贝叶斯统计学本科课程教学：一场专题讨论》，《统计教育杂志》**28**（3），251–261。出版商：Taylor & Francis。

Jones, A., Langrall, C. & Mooney, E.（2007），《概率研究：回应课堂现实》。载于 I. F. Lester（编）：《数学教学与学习研究第二手册》。

Kay, M.（2022），《tidybayes：用于贝叶斯模型的整洁数据与“几何对象”》。R 软件包版本 3.0.2。**网址：***https://mjskay.github.io/tidybayes/*

Kazak, S.（2015），《一种受贝叶斯启发的不确定性推理方法：你有多确定？》，载于《CERME 9——欧洲数学教育研究学会第九届大会》，第 700–706 页。

Kazak, S., Fujita, T. & Turmo, M. P.（2021），《学生通过使用大型多变量数据集进行数据建模所作的非正式统计推断》，《数学思维与学习》第 1–21 页。

Kazak, S. & Leavy, A. (2022年)，《幼儿概率主观与客观概念之间日益显现的相互作用》，加拿大科学、数学与技术教育期刊 **22**(3), 538–557。

Kazak, S. &Leavy, A. M. (2018年)，《小学生关于不确定性的初步推理：聚焦主观概率》，载于 A. Leavy、M. Meletiou-Mavrotheris 和 E. Paparistodemou 编，《幼儿与小学教育中的统计学》，施普林格，第 37–54 页。

Krajcik, J.S. &Czerniak, C.M.(2018年)，《小学和中学科学教学：一种项目式学习方法》，Routledge。Kreitler, S. & Kreitler, H. (1986年)，“5 至 12 岁儿童概率思维的发展”，《认知发展》1(4), 365–390。Lawson, M. A., Herrick, I. R. & Rosenberg, J. M. (2021)，“携手共进”，《教育技术与社会》24(4), 180–192。

Lehrer, R. & English, L. (2018年), 在《统计教育研究国际手册》中引导儿童进行变异建模，施普林格，第 229–260 页。

Love, J., Selker, R., Marsman, M., Jamil, T., Dropmann, D., Verhagen, J., Ly, A., Gronau, Q. F., ˇSm´ıra, M. 等（2019年），《JASP：适用于常见统计设计的图形化统计软件》，《统计软件杂志》88，1–17。

Makar, K.（2014年），《儿童通过非正式推断推理探索平均数》，《数学教育研究》86(1)，61–78。

Makar, K. & Rubin, A.（2009年），《思考非正式统计推断的框架》，Statistics Education Research Journal 8(1)。

Makar, K. & Rubin, A.（2018年），学习统计推断，《统计教育研究国际手册》。施普林格国际教育手册。施普林格，施普林格，第261–294页。

Martignon, L. & Erickson, T.（2014年），《四年级儿童的原初贝叶斯推理》，载于《统计教育中的可持续性：第九届国际统计教学会议论文集》。荷兰福尔堡：国际统计教育协会。在线访问：https://iase-web. org/documents/papers/rt2016/Martignon. pdf。

McNamara, A.（2019年），《现代统计计算工具的关键属性》，《美国统计学家》73(4), 375–384。Mishra, P. & Koehler, M. J.（2006年），《技术教学内容知识：教师知识框架》，《教师学院学报》108(6), 1017–1054。全国州长协会等（2010年），《共同核心州标准》，华盛顿特区。国家研究委员会（2012年），《新一代科学标准：为各州制定，由各州制定》。**网址：** *https://www.nextgenscience.org/*国家研究委员会等（2013年），《新一代科学标准：为各州制定，由各州制定》。**网址：** *https://www.nextgenscience.org*¨Nilsson, P., Blomberg, P. & Arleb¨ack, J. B.（2014年），《探索现实的贝叶斯建模情境》，载于《第九届国际统计教学会议论文集》。美国亚利桑那州弗拉格斯塔夫。荷兰福尔堡：国际统计学会。Nussbaum, E. M.（2011年），《论证、对话理论与概率建模：教育论证研究的替代框架》，《教育心理学家》46(2), 84–106。Piaget, J. & Inhelder, B.（1951年），《儿童偶然性观念的起源》。Plummer, M. 等（2003年），《JAGS：使用吉布斯抽样分析贝叶斯图模型的程序》，载于《第三届分布式统计计算国际研讨会论文集》，第124卷，奥地利维也纳，第1–10页。

Rosenberg, J., Kubsch, M., Wagenmakers, E.-J. & Dogucu, M. (2022年),《在科学课堂中理解不确定性：贝叶斯方法》， *Science & Education* 。

Rosenberg, J. M., Schultheis, E. H., Kjelvik, M. K., Reedy, A. & Sultana, O. (2022年),《大数据，大变化？科学课堂中使用的技术与数据来源》， *British Journal of Educational Technology* **53**(5),1179–1201。

Rossman, A. J. (2008年),《关于非正式统计推断的推理：一位统计学家的观点》, *Statistics Education Research Journal* **7**(2), 5–19。

Rossman, A. J. & Chance, B. L. (2014年),《运用基于模拟的推断学习统计学入门》, *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* **6**(4), 211– 221。

Rubin, A.（2020年），《学习如何进行数据推理：我们是如何走到今天的，又有哪些认识？》， *Journal of the Learning Sciences* **29**(1), 154–164。

Szu, E. & Osborne, J.（2012年），《贝叶斯视角下的科学推理与论证》，载于M. S. Khike（编），《科学论证视角》，施普林格，Dordrecht，第55–71页。

Warren, A. R.（2018年），《定量批判性思维：运用贝叶斯更新的学生活动》, *American Journal of Physics* **86**(5), 368–380。

Warren, A. R.（2020年），《贝叶斯更新活动对学生认识论的影响》， *Physical Review Physics Education Research*16(1)。

Wasserstein, R. L. & Lazar, N. A.（2016年），《ASA 关于 p值的声明：背景、过程与目的》，《美国统计学家》**70**(2)，129–133。Taylor & Francis。**网址：** *https://doi.org/10.1080/00031305.2016.1154108*

Watson, J. M.（2008年），《与七年级初学者学生探索推断入门》，《统计教育研究期刊》**7**(2)，59–82。

Watson, J. M.（2017年），《连接科学与统计学：三个国家的课程要求》，《国际科学与数学教育杂志》**15**，1057–1073。Witmer, J.（2017年），《面向本科生的贝叶斯与马尔可夫链蒙特卡罗》，《美国统计学家》**71**(3)，259–264。