arXiv:2304.01277v2 [quant-ph] 2 Aug 2023

测量量子元胞自动机与 Floquet 码中的反常现象

David Aasen[1],Jeongwan Haah[1,2],Zhi Li[3],和 Roger S. K. Mong[4]

[1]Microsoft Quantum，Station Q，美国加利福尼亚州圣巴巴拉[2]Microsoft Quantum，美国华盛顿州雷德蒙德[3]周界理论物理研究所，加拿大安大略省滑铁卢[4]物理与天文学系，匹兹堡大学，美国宾夕法尼亚州匹兹堡

我们研究泡利测量电路作用下量子信息的演化。我们重点关注一维和二维系统，这与近期引入的 Floquet 拓扑码有关。我们在测量电路的背景下定义局部可逆性，从而能够以类似于有限深度幺正电路的方式处理有限深度测量电路。与酉情形不同，有限深度且局部可逆的测量电路可以在一维中实现平移。二维中的局部可逆测量电路也可能沿边界引发逻辑信息流。我们引入“测量量子元胞自动机”这一概念，将这些思想统一起来，并定义一维中的指标，以表征逻辑算符的流。我们发现，二维 Floquet 拓扑码存在一种体不变量 $\mathbb{Z}_2$，它表明平凡边界的存在受到阻碍。我们证明，Hastings–Haah 蜂窝码属于具有此类障碍的类别，这意味着其边界必然具有非局域动力学、周期加倍，或呈现量子信息的反常边界流。

目录

1 引言 2

2 泡利测量动力学 6

2.1 可逆测量.7 2.2 示例：迭代但瞬时的量子隐形传态 .9 2.3 局部可逆跃迁 .11 2.4 再论示例：测量平移 .12

3 局部可逆测量循环 13

3.1 简单等价与群结构 .14 3.2 融合与拓扑码 .16 3.3 拓扑 LR 循环的边界作用：MQCA .18

4 一维 MQCA 的指标 20

4.1 Fredholm 映射 .204.2 MQCA 指数 .214.3 马约拉纳链代数上的平移 .234.4 一维 LR 循环的 MQCA .244.5 二维拓扑LR循环的边界 MQCA .25

5 二维局域可逆循环示例：Wen plaquette 平移 27
5.1 垂直（右侧）边界 .285.2 水平（顶部）边界 .295.3 双重 WPT：周期倍增与粘合 .30

6 HH蜂窝Floquet码及其边界动力学 32
6.1 HH码的 LR 循环 .326.2 截断锯齿边界 .346.3 具有非平凡扩散的 MQCA .356.4 周期加倍的有隙动力学 .376.5 备注.39

7 讨论 39

参考文献 42

A 一些代数 46B 关于 MQCA 指标的细节 48C 一维泡利稳定子群的结构 56D 关于 WPT 模型的更多内容 67E 关于 HH 码的更多内容 68

1 引言

量子测量对于量子信息处理的几乎所有方面都至关重要。除了显而易见的必要性——通过测量读取量子态中的信息之外，测量还适用于纠缠和魔态蒸馏等应用 [1, 2], 驱动纠缠相变 [3], 或态制备 [4, 5, 6]。测量在量子纠错中也不可或缺，它能够实现逻辑信息的非局域化和稳健存储。为此，必须精心设计测量序列，在保留量子信息完整性的同时隔离错误。

与此同时，人们发现了新的幺正量子动力学相类别，它们无法通过静态哈密顿量实现 [7, 8]。例如，对非相互作用系统进行周期驱动可以改变能带结构的拓扑，从而产生新的拓扑相 [9, 10, 11]。人们已经构造出明确的实例，其中非平凡的边界动力学清晰可见 [12, 13,14, 15]。随着周期驱动系统中新的涌现现象和拓扑序不断被发现，自然会让人思考它们在周期测量动力学中是否也有对应现象。

本文研究周期性测量序列及其对量子信息动力学的影响。我们的研究部分受到近期发展起来的一类新型量子纠错码的启发 [16, 17, 18, 19, 20]，这类纠错码兼具非平凡的 Floquet 特征和拓扑特征。其中一些 Floquet码只需进行相邻量子比特之间的两两测量，因此比其静态对应物更易于实现；后者则涉及对三个或更多量子比特进行联合测量。预计这类测量可在基于马约拉纳的量子硬件中原生实现 [16, 21]。

特别地，Hastings–Haah 蜂窝码（HH码） [16] 在每个测量周期都会对码空间实施一种非平凡变换。HH码定义在一个二维面元三着色晶格上，在不存在边界的情况下，其测量序列具有三周期性（即每个循环包含三个测量步骤）。然而，引入边界并构造 HH 码的平面实现一直颇具挑战。文献 [16, 22, 23, 21]通过将测量序列的周期性加倍至六个步骤来维持逻辑量子比特。相比之下，文献 [24] 展示了一种三周期平面电路，但由此产生的动力学具有非局域性，并且无法针对某些错误实现容错。因此，一个自然的问题随之而来：周期倍增是否是具有边界的 HH 码的基本特征？为此，我们证明，只要保持局域性，HH 码的边界就必须满足以下两种情况之一：要么周期加倍，要么允许存在动态边界自由度。这让人联想到某些类别的有能隙的对称性保护／对称性丰富拓扑序态中的体边对应，在这些态中，边界要么必须发生对称性破缺，要么承载反常无能隙自由度。本文的主要成果是刻画测量电路中的这类边界反常。

量子元胞自动机（QCA）是对局域幺正动力学的一种抽象。QCA 是局域算子代数的一个保持局域性的 $*$-自同构；简单来说，它将直积希尔伯特空间上的局域算符映射为附近的局域算符。QCA 的幺正性意味着它是可逆的；其作用可以通过另一个 QCA 逆转。尽管有限深度幺正电路（FDUC 或浅层幺正电路）构成了 QCA 的一个类别，但并非所有 QCA 都能通过 FDUC [25, 26, 27, 28, 29, 30] 实现。特别地，将无限链上的所有量子比特沿一个格点移动（例如向左移动）的操作是一个 QCA，但无法通过浅层幺正电路实现。在一维情况下，QCA 在有限深度幺正电路意义下由 GNVW 不变量 [25] 分类，这是一种有理指标，用于刻画沿链传播的量子信息流。GNVW 不变量类似于手征中心荷，因为它必须在严格一维的任何电路中为零，但在二维浅层幺正电路的边界处却可以非零 [13, 14, 7, 31]。

我们考虑测量电路中的类似思想。鉴于有限深度测量电路能够产生长程关联，我们为泡利测量电路引入局部可逆性条件，以保证量子信息在一系列测量过程中得到保留并保持局域。我们将局部可逆测量循环 (LRMC) 定义为浅层幺正电路的对应概念。它是一个循环测量序列，每经过一个周期，逻辑空间保持不变，同时逻辑算符发生变换。我们用测量量子元胞自动机 (MQCA)来概括这类变换；它要求局域逻辑算符映射为邻近的局域逻辑算符。随后，我们定义 MQCA 指数 ，用于刻画信息沿一维条带或链的流动。

测量情形与酉情形之间的一个关键区别在于，自由度不一定构成乘积算符代数。在标准 QCA 表述中，算符代数是由简单局部代数构成的张量积，每个简单局部代数都位于一个晶格位置上。这里的 MQCA 定义在

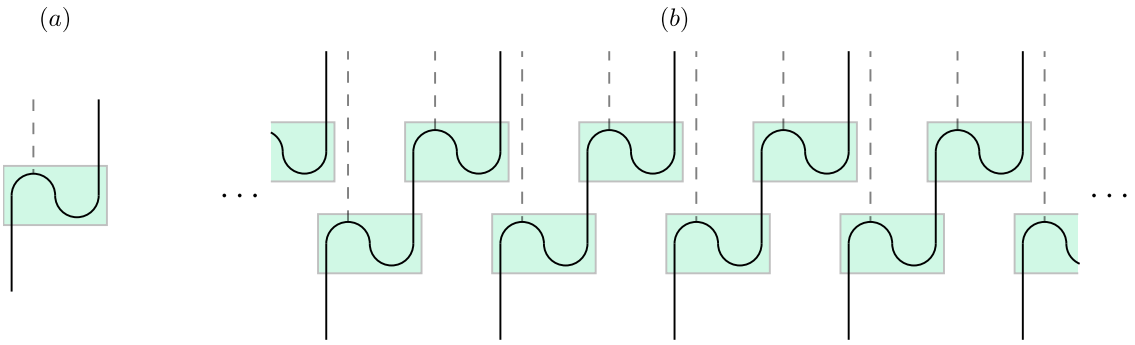


图 1：**(a)** 单个量子比特的**量子隐形传态**示意图。按步骤（从下至上）来看，我们取一个未知量子比特（左侧），创建一个贝尔对（杯形），将未知量子比特与贝尔对中的一个量子比特一同测量（帽形），剩余的量子比特（右侧）便携带着原始量子信息，但需进行泡利校正。**(b)** 实现沿无限链进行**量子比特平移**的测量电路示意图。该电路作用于由量子比特和位于量子比特之间的辅助量子比特组成的链，包含两个（复合）步骤。首先，将每个格点上的量子比特量子隐形传态至相邻的辅助量子比特；随后，再将辅助量子比特量子隐形传态至下一个量子比特。由此得到一个具有非平凡 MQCA 指数的一维局部可逆测量循环。在两个子图中，实线表示量子信息流，虚线表示测量产生的经典信息。

泡利稳定子/规范群的逻辑算符代数上；在许多有趣的情形中，这种代数并不具有张量积结构。我们的一些例子出现在二维拓扑稳定子群的边界上。酉 QCA 若为 Clifford，就是 MQCA 的一种特殊情形。因此，MQCA 涵盖的动力学比其酉对应物更丰富。由此，MQCA 指数是 Clifford 量子元胞自动机的 GNVW 指数的一种推广。

虽然浅层幺正电路的 GNVW 不变量必定是平凡的，但对于局部可逆测量循环，类似的结论并不成立。有限深度的局部可逆测量循环可以实现沿无限链的量子比特平移。我们的示例如图 1 所示，由反复应用量子隐形传态协议 [32] 构成。该电路的效果是将格点 j 上的量子比特隐形传态到格点 $j+1$ 上；此电路的 MQCA 指数为 1。本文的第一个主要结果是，任意一维系统的 MQCA 指数始终为整数。用逻辑代数的语言来说，这意味着每个相关自由度都可以用一对反对易算符来刻画，例如 X_j 和 Z_j，它们局域在格点 j附近。平移电路将这些算符分别变换为 X_{j+1} 和 Z_{j+1}，至多相差一个符号。MQCA 指数精确度量这些算符的流。

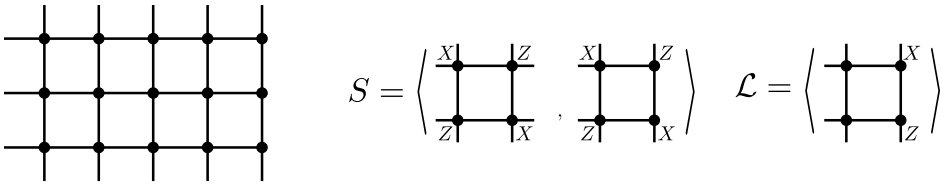


图 2：带垂直边界的 Wen 的 plaquette 模型。（左）右侧带有垂直边界的方格晶格。（中）模型的稳定子，包括体项和与边界相接的项。（右）逻辑代数的生成元，它们是位于边界上的二体项。

此外，我们还考虑二维 Floquet 测量电路及其诱导的

沿边界的 MQCA。我们的第一个例子基于 Wen 的面元模型 [33], ，该模型实现了环面码拓扑序，并由四体算符稳定。考虑该模型的一条垂直边界（只需移除跨越边界的项即可得到），如图 2 所示。逻辑代数由沿边缘的二体算符生成，每个元胞有一个逻辑生成元。当我们实施上述平移电路（每列各实施一次）时，模型中的每个格点都会向上移动一个单位。虽然逻辑代数保持不变，也就是说，平移实现了该代数的自同构，但每个逻辑算符都会移动一个位置，从而在边界实现了非平凡 MQCA。由于每个元胞只有一个逻辑生成元（而一维链中每个元胞有两个），这个 MQCA 沿边界传输相当于半个量子比特的信息。MQCA 指数为 $1\ 2$，表明存在一种边界反常，无法通过纯一维电路实现。

边界 MQCA 指数取决于沿边缘采用的具体电路终止方式；通过将纯一维电路附加到边缘，可以使该指数改变一个整数。我们的第二个主要结果是，MQCA 指数的分数部分与所选的边界终止方式无关，而是体电路的一种性质。也就是说，二维拓扑局部可逆测量循环由一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ 指数表征，它构成了构造一种不含非平凡逻辑算符的光滑边界的障碍。[1] 特别是，HH码属于非平凡类。因此，我们可以说，HH码的任何边界都必须满足以下条件之一：(a) 不具备局部可逆性；(b) 周期加倍（或经过 $6N$ 步）或非周期；或 (c) 具有反常 MQCA 指数。

Th器官 ization of th论文 is as follows.

- §2 定义**可逆性**和**局部可逆性**在测量电路这一语境中的含义。这些概念类似于量子电路（不含测量）中的幺正性和局部幺正性。本节为这项工作奠定基础，并通过大量示例和反例加以说明。
- §3 探讨局部可逆测量动力学的性质。我们解释电路**融合**，通俗地说，就是不同电路之间的边界。我们定义测量量子元胞自动机（MQCA）。
- §4 定义 MQCA 指数，用以量化电路中的信息“流”。我们证明，每个一维电路都必须具有整数指标，并且二维拓扑局部可逆测量循环[2] 由一个 $\mathbb{Z}_2$ 不变量刻画。
- §5 介绍 Wen 面元平移（WPT）电路。我们为这一模型构造了各种边界。
- §6回顾 Hastings–Haah 蜂窝码（HH 码）。我们同样为这一模型构造了各种边界。
- §7 简要总结研究结果并给出结论性评述。我们探讨 MQCA 指数与拓扑量子场论（TQFT）之间的联系，以及本工作的推广。我们还讨论其在量子纠错方面的潜在应用。

第 4 节运用泡利群和 Fredholm 指数的数学理论发挥关键作用。我们鼓励不同专业背景的读者研读这些细节，但我们认为，读者只需具备 §2 中介绍的背景知识，就能充分理解示例的内容：§5 和 §6。本文中使用的常见术语和缩写列表见

[1]在本文中，我们并未证明这一 $\mathbb{Z}_2$ 不变量是存在平凡边界的唯一障碍。[2]更准确地说，任何具有真空边界（平凡电路）的拓扑 LR 循环。

表 1：本文中使用的常见术语和缩写

基稳定子群 / 基码	见公式（14）
共轭基 / 共轭对	定义 2.3
ISG：瞬时稳定子群	式（13）
局域可逆（LR）	定义。2.3
LRMC / LR 循环：局部可逆测量循环	§3
拓扑局部可逆测量循环	定义 3.1
混合	§3.2
拓扑混合	定义 3.1
真空混合	§3.3
MQCA：测量量子元胞自动机	定义 3.2
典范 MQCA	前面的定理 4.6
MQCA 指数 / $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}$	§4.2
马约拉纳链代数	式（29）
WPT：Wen-plaquette 平移模型	§5
HH码：Hastings–Haah 蜂窝码	§6

表 1.

2 Pauli 测量动力学

类比于局域幺正电路，我们考虑由有限多层（时间步）组成的局域**测量电路**，每层同时测量彼此不重叠或仅彼此对易的局域算子。也就是说，在每一层中，我们测量一组局域算子，每个算子都作用于几个相邻的量子比特，并与其他算子对易。也可以交替进行局域测量和局域幺正操作。然而，纯测量电路并不比幺正-测量交错电路的通用性低，因为局域幺正操作只会改变局部测量的基：

$$\Pi_n U_n \cdots \Pi_2 U_2 \Pi_1 U_1 = \tilde{\Pi}_n \cdots \tilde{\Pi}_2 \tilde{\Pi}_1 U_n \cdots U_2 U_1 \,, \tag{1}$$

其中，$\tilde{\Pi}_k = U_n \cdots U_{k+1} \Pi_k U_{k+1}^\dagger \cdots U_n^\dagger$ 可通过测量电路实现。因此，包含测量的最一般短时动力学可视为两阶段动力学：第一阶段施加幺正电路，第二阶段施加测量电路。

本文考虑对量子比特上的泡利算符进行测量。泡利算符是 2×2 Pauli 矩阵的张量积，例如作用于一个量子比特的 X_i，以及作用于两个量子比特 i 和 $i+1$的 $Z_i Z_{i+1}$。由于任意泡利算符 P的平方都等于 $P^2 = \mathbf{1}$，相应的测量有两个可能结果 ± 1，并且量子态会相应地坍缩为

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{\mathbf{1} \pm P}{2} |\psi\rangle \tag{2}$$

具体取决于测量结果。这里省略了整体归一化因子，但将投影算符写成了真正的投影算符。

Pauli 测量的一个有趣之处在于，它们以我们将在下文中更仔细考察的最大程度体现了海森堡不确定性原理。我们首先

暂且忽略动力学的局域性，先考察一个抽象情形，然后再结合局域性展开讨论。

2.1 可逆测量

假设我们测量一个系统，该系统处于（连续多个）可能量子态中的一种，并得到一个与其底层量子态无关的结果。信息不会从系统传递给观察者，底层量子信息也应保持不受扰动。结果与量子态无关，并不一定意味着结果是固定的；这只意味着结果取自一个固定的概率分布！

量子隐形传态正是这种无信息测量的一种体现。考虑两个量子比特，其中第一个量子比特包含我们想要传递的某个量子态（一个逻辑量子比特），第二个量子比特则处于泡利 X 的本征态。量子隐形传态协议是先测量双量子比特泡利 ZZ ，随后测量第一个量子比特上的单量子比特泡利 X 。由 ZZ 执行的第一次测量结果 ± 1 必须是均匀随机的（ $\mathrm{Prob}[+] = \mathrm{Prob}[-]$），因为初始量子态 $|\psi\rangle$ 是反对易算符 IX 的本征态:

$$\mathrm{Prob}[+] = \langle\psi| \frac{\mathbf{1}+ZZ}{2} |\psi\rangle = \langle\psi| (IX) \frac{\mathbf{1}+ZZ}{2} (IX) |\psi\rangle = \langle\psi| \frac{\mathbf{1}-ZZ}{2} |\psi\rangle = \mathrm{Prob}[-]. \qquad (3)$$

出于同样的原因，接下来由 XI 进行的测量会得到均匀随机的结果。直接计算表明，第二个量子比特所处的量子态与原始量子态相差一个仅取决于测量结果的泡利算符。我们进行了测量，却没有获得任何信息，因此成功保留了量子态。

为了恰当地描述一系列测量过程中量子信息的变换，我们需要跟踪稳定子群以及逻辑算符的动力学。在每一步，瞬时稳定子群（ISG）是具有确定本征值的泡利算符集合。例如， $\mathbf{1} = II$ 和 IX 都是初始量子态的稳定子，因此初始ISG为$\mathrm{ISG}_0 = \{\mathbf{1}, IX\}$。测量 ZZ后，ISG变为$\mathrm{ISG}_1 = \{\mathbf{1}, ZZ\}$（注意， IX 不再是稳定子）。最终的ISG为$\mathrm{ISG}_2 = \{\mathbf{1}, XI\}$。对于步骤 t，逻辑算符是指与ISG_t的所有元素对易的任意泡利算符，这些算符构成的集合记为$\mathrm{ISG}_t^{\perp}$。它们生成可作用于量子态、同时使其保持在稳定子空间内的操作。例如，$\mathrm{ISG}_0^{\perp} = \{\mathbf{1}, XI, YI, ZI, IX, XX, YX, ZX\}$。如果两个逻辑算符相差一个稳定子元素，则它们相对于某个ISG等价，例如 $XI \overset{\mathrm{ISG}}{\sim}{}^{0} XX, YI \overset{\mathrm{ISG}}{\sim}{}^{0} YX$；因为它们作用于由$\mathrm{ISG}_0$稳定的量子态时，会产生等价的操作。（根据定义，每个稳定子也都是逻辑算符，并且等价于恒等算符。）

电路的测量动力学 由逻辑算符在每一步中的演化来刻画。逻辑算符从步骤 t 演化到步骤 $t+1$ 的过程如下：对于逻辑算符 $L \in \mathrm{ISG}_t$，找到一个等价算符 $L' \overset{\mathrm{ISG}}{\sim}{}^{t} L$ ，使得 L' 也属于 ISG_{t+1}，然后 L' 便成为步骤 $t+1$的逻辑算符；这相当于找到一个稳定子$S \in \mathrm{ISG}_t$ ，使得 $LS \in \mathrm{ISG}_{t+1}^{\perp}$。例如，考虑初始量子态中的逻辑算符 XI 。 XI 不是 ISG_1 的逻辑算符（因为它与 ZZ 不对易），但由于 $XI \overset{\mathrm{ISG}}{\sim}{}^{0} XX$ 且XX 确实与 ZZ对易， $XI \mapsto XX$ 会在测量 ZZ的过程中演化。接下来测量 XI时，逻辑算符 XX （位于 ISG_1）确实 与第二次测量对易，因此逻辑算符仍为 XX。经过我们的稳定子序列 $\mathrm{ISG}_0 \to \mathrm{ISG}_1 \to \mathrm{ISG}_2,$ ，初始

逻辑算符变换为

$$(XI, YI, ZI) \xmapsto{\text{measure } ZZ} (XX, YX, ZI) \xmapsto{\text{measure } XI} (XX, XY, IZ) \overset{\mathrm{ISG}_2}{\sim} (IX, IY, IZ). \tag{4}$$

确实，算符 作用于第一个量子比特的算符被“传送”到了作用于第二个量子比特的算符上 .

量子隐形传态之后，量子态中有意义的部分（逻辑量子比特）位于第二个量子比特中，而第一个量子比特则处于泡利 X 的本征态。因此，情况与量子隐形传态之前相同，我们可以将量子态传回第一个量子比特。该协议是先测量 ZZ，然后测量 IX。若考虑稳定瞬时量子态的泡利算符，我们会观察到正向与反向的对称性：

$$\langle \pm IX \rangle \underset{2_{\text{backward}}}{\overset{1_{\text{forward}}}{\rightleftarrows}} \langle \pm ZZ \rangle \underset{1_{\text{backward}}}{\overset{2_{\text{forward}}}{\rightleftarrows}} \langle \pm XI \rangle \,. \tag{5}$$

这里，每个尖括号 $\langle \bullet \rangle$ 中的算符在底层量子态上取本征值 $+1$。由于测量结果完全随机，这些符号必须视为无关紧要；不过需要注意，要实现正确的量子隐形传态，必须利用这些符号来施加泡利“校正”。

事实上，Pauli 测量完全随机这一事实意味着，可以通过依赖测量结果的泡利校正来撤销该测量：

$$\langle \pm IX \rangle \underset{\text{measure } IX}{\overset{\text{measure } ZZ}{\rightleftarrows}} \langle \pm ZZ \rangle \,. \tag{6}$$

中间的 ZZ 测量 (5) 对量子隐形传态协议至关重要。如果直接将 XI 作为第一步进行测量（同时系统由 IX稳定），第一个量子比特中存储的量子信息就会被破坏。这是不可逆的操作，我们在讨论量子信息动力学时会避免这种操作。其根本原因是 IX 和 XI 对易且相互独立，因此不可能从第一步直接过渡到最后一步。

我们将发现，对这种情况进行抽象很有用。对于一个群，**基** 是该群的一个非冗余生成集。

命题 2.1. 设 A 和 B 是有限个量子比特上在乘法下的泡利算符阿贝尔群（泡利稳定子群）。令 $S = A \cap B$。以下条件等价。

(a)（反对易共轭）存在 A/S 的基底 $\{A_i S\}$ 和 B/S 的基底 $\{B_j S\}$，使得对于每个 $A_{i'}$，都存在一个 $B_{j'}$，它与所有 A_i 对易，但不与 $A_{i'}$ 对易；对于每个 $B_{j'}$，都存在一个 $A_{i'}$，它与所有 B_j 对易，但不与 $B_{j'}$ 对易。*(b)*（稳定子群不扩张）如果 $A \in \mathcal{A}$ 与 B 的所有元素对易，则 $A \in B$；如果 $B \in \mathcal{B}$ 与 A 的所有元素对易，则 $B \in A$。*(c)*（非奇异对易关系）对于 A/S 的任意基底 $\{A_a S \mid a = 1, 2, \ldots, m\}$ 和 B/S 的任意基底 $\{B_b S \mid b = 1, 2, \ldots, n\}$，由以下元素构成的二元矩阵 M 可逆：对于 $1 \le a \le m$ 和 $1 \le b \le n$，若 A_a 与 B_b 对易，则矩阵元素为 $M_{ab} = 0$，否则为 $M_{ab} = 1$；该矩阵在 $\mathbb{F}_2$ 上可逆。*(d)*（共享逻辑算符）存在一个由泡利算符组成的群 L，其元素与 A 和 B 均对易，且 LA 是 A 的所有逻辑算符组成的群，LB 则是 B 的所有逻辑算符组成的群。

(e)（反对易关系的消解）对于任意与 S 的每个元素均对易的泡利算符 O，存在 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，使得 OA 与 $\mathcal{B}$ 的每个元素均对易，且 OB 与 $\mathcal{A}$ 的每个元素均对易。

注意，条件 (b) 和 (d) 不要求任何基，尤其不需要关于 $\mathcal{S}$ 的任何信息。

证明。 见A.1。 □

定义 2.2。 一对 **可逆的** 泡利稳定子群称为可逆对，当且仅当它满足2.1中的任一（因而也是全部）条件。

我们对这些刻画作如下解释。设两个泡利稳定子群 A 和 B 构成一个可逆对。假设某个逻辑态被编码在泡利稳定子码 A 中，随后我们测量 B 的稳定子。对于每个稳定子测量 $B \in$B，它要么与 A 的所有元素对易，要么至少与 A 的一个元素反对易。如果 B 与 A 的某个元素反对易——条件 (a) 保证 $B \notin$A 满足这一点——那么测量的每种结果都是完全随机的，即所有允许的结果出现的概率相同（见 (3)），因此不会泄露关于逻辑态的任何信息。如果 B 与 A 的每个元素都对易，它仍然不会泄露任何逻辑信息，因为该测量只是一致性检查： $B \in$A。这就是条件 (b)。条件 (c) 有用之处在于，它是一个可高效验证的条件。共享逻辑算符的存在，即条件 (d)，告诉我们如何在测量后访问逻辑量子比特：使用 L 中在测量跃迁下保持不变的算符。条件 (d) 还意味着，对于 A 的任意逻辑算符 P，都可以用某个 $A \in$A 对其进行修饰，使得 PA 也与 B 对易。给定 P，这样的乘积 PA在模 A ∩B 的意义下是唯一的。条件 (e) 给出了一个算符转变为逻辑算符的最小条件：该算符必须与公共稳定子对易。

在本节开头的例子中，群 IX 和 ZZ 构成可逆对， (ZZ 和 XI) 也是如此，这可由式 (5) 说明。值得注意的是，IX 和 XI 不构成可逆对。（全文中，我们用 $P_1, P_2, \ldots$ 表示由泡利算符 $\{P_i\}$ 生成的群。）

2.2 示例：迭代但瞬时的量子隐形传态

上文在(5) 中的隐形传态示例，是原始量子隐形传态协议的一种类比（或许更为现代） [32]。让我们回顾并串联起原始协议。Alice 持有一个数据（逻辑）量子比特，以及另一个与鲍勃的一个量子比特处于贝尔态的量子比特。Alice 在贝尔基上测量她的两个量子比特。瞬间，鲍勃的量子比特便被置为与 Alice 的逻辑量子比特完全相同的量子态，只差一个取决于 Alice 测量结果的泡利校正。鲍勃可以持有与 Charlie 共享的另一对贝尔对中的一半，并在贝尔基上测量自己的两个量子比特。这样，只差一个泡利校正，Charlie 的量子比特就会被置为 Alice 的逻辑量子比特。值得注意的是，Alice 的测量与鲍勃的测量彼此对易，因此测量的时间顺序无关紧要。[3] 对于站成一条直线的 $n+1 \geq 2$ 参与方，迭代这一量子隐形传态协议很简单。第一位参与方持有一个指标为1的逻辑量子比特，而每位参与方 j持有两个指标分别为 $2j-1$和 $2j$的量子比特，最后一位参与方除外，他只持有量子比特 $2n+1$。参与方 j 与 $j+1$ 在量子比特 $2j$ 与 $2j+1$ 之间共享一对贝尔对，而每位参与方 j 进行一次贝尔

[3]不过，具体如何解释取决于这一点；在一种排序中，逻辑量子比特按序列进行传送，而在另一种排序中，逻辑量子比特则通过 Alice 和 Charlie 之间派生出的贝尔对进行传送。

测量，测量对象为两个量子比特 $2j-1$ 和 $2j$，其中 $1 \le j \le n$。第一位参与方的逻辑量子比特会瞬间隐形传态至最后一位参与方，只差一个取决于所有测量结果的泡利校正。

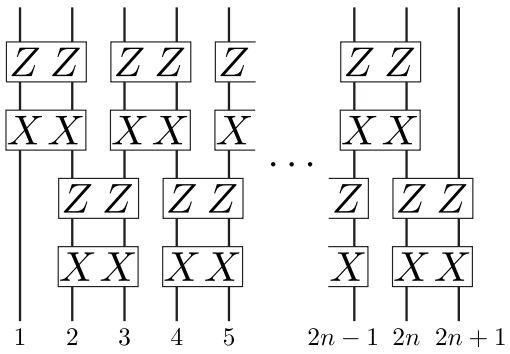


图 3：正文中讨论的量子隐形传态协议的电路图。从下往上看，前两次测量在参与方 $2n$ 和 $2n+1$ 之间制备贝尔态。接下来的两次测量在贝尔基中测量参与方 $2j-1$ 和 $2j$，从而将量子比特 1 上的量子态传送到量子比特 $2n+1$。该电路可逆，但并非局域可逆（当固定 ℓ 并使 n 变大时）。

初始共享贝尔对的量子态是以下泡利算符的共同本征态

$$\mathcal{A} = \langle X_{2j}X_{2j+1}\,, Z_{2j}Z_{2j+1} \mid j = 1, 2, \ldots, n\rangle\,. \tag{7a}$$

这些贝尔测量等价于测量阿贝尔泡利群的每个元素

$$\mathcal{B} = \langle X_{2j-1}X_{2j}\,, Z_{2j-1}Z_{2j} \mid j = 1, 2, \ldots, n\rangle\,. \tag{7b}$$

我们验证这两个群构成一个可逆对。取一个群

$$\mathcal{L} = \langle X_1X_2X_3\cdots X_{2n+1}\,, Z_1Z_2Z_3\cdots Z_{2n+1}\rangle\,. \tag{8}$$

显然 $\mathcal{LA}$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有逻辑算符构成的群，$\mathcal{LB}$ 是 $\mathcal{B}$ 的所有逻辑算符构成的群。因此，根据 2.1(d)，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 构成一个可逆对。

等价地，我们可以验证条件 (b)。由于 $\mathcal{A}$ 是由互不重叠的泡利子群构成的直积，每个子群恰好包含两个生成元，对应一个贝尔对，因此，任何假设存在的非恒等元素 $A \in \mathcal{A}$，若与 $\mathcal{B}$ 对易，其最左侧的非恒等张量因子必定位于偶数编号的量子比特上，不妨设为 $2j$。那么，与 $\mathcal{B}$ 中的 $X_{2j-1}X_{2j}$ 和 $Z_{2j-1}Z_{2j}$ 的对易关系会迫使该张量因子为恒等算符，这就产生了矛盾。因此，条件 (b) 得到满足。

请注意，正如“可逆对”这一名称所示，从量子比特 $2n+1$ 到 1 的反向迭代隐形传态，是通过测量由$\mathcal{B}$稳定的量子态上的$\mathcal{A}$ 来实现的。

其他等价条件 2.1(a,c) 的具体形式如下。满足 (a) 的一些生成集可通过对角化 M (c) 中的矩阵来找到。我们将 $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$ 的生成元排列如下

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \langle X_2X_3\,, Z_2Z_3\,, X_4X_5\,, Z_4Z_5\,, \ldots\rangle\,,\\ \mathcal{B} &= \langle X_1X_2\,, Z_1Z_2\,, X_3X_4\,, Z_3Z_4\,, \ldots\rangle\,.\end{aligned} \tag{9}$$

那么， $2n \times 2n$ 二进制对易矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} N & N & & & \\ & N & N & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & N & N \\ & & & & N \end{pmatrix} \text{ where } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

为$\mathcal{A}$ 选择不同的生成集相当于进行一次行变换，而为$\mathcal{B}$ 选择不同的生成集则相当于进行一次列变换。因此，我们可以自由地在 M 的左侧和右侧分别乘以任意可逆矩阵。一个简单的选择是在右侧乘以 M 的逆:

$$\begin{pmatrix} N & N & & & \\ & N & N & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & N & N \\ & & & & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & N & \cdots & N & N \\ & N & \cdots & N & N \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & N & N \\ & & & & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{pmatrix}. \tag{11}$$

这个上三角矩阵将 $\mathcal{B}$ 的多个生成元合并为一个新的生成元。这意味着，按照（a）的定义，$\mathcal{A}$ 的局域稳定子与 $\mathcal{B}$ 的非局域生成元共轭。我们尚不能断定这种非局域性不可避免；不过，我们将确认，非局域性之所以出现，是因为量子隐形传态本质上是“瞬时”的。

2.3 局域可逆跃迁

我们所说的量子比特晶格，是指一组量子比特，其中定义了任意两个量子比特之间的距离。对于任意 $\ell \geq 0$，一个 ℓ-球是直径为 ℓ 的度量球。这里，区域的直径是区域内两点之间的最大距离。区域 R 的 ℓ-邻域是距离该区域不超过 ℓ 的所有点的集合： $R^{+\ell} = \{x \mid \exists a \in R, \text{distance}(a, x) \leq \ell\}$。对于算符$O$，其支撑记作 Supp($O$)，是使得 O 在其补集上作用为恒等算符的最小区域。令 $\mathcal{P}$ 为有限支撑泡利算符构成的群。

如果存在一组$\{A_i \in \mathcal{A}\}$ 的 ℓ局域算符，使$\mathcal{A}$ 由$\{A_i\}$ 和$\mathcal{S}$生成，则称$\mathcal{A}$ 是$\mathcal{P}$ 的子群，且$\mathcal{S}$之上的 ℓ**局部生成** 子群。

定义 2.3。 如果一对$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$是由所有有限支撑泡利算符构成的群的阿贝尔子群，并且存在$\mathcal{S} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 之上的 ℓ局部生成集$\{A_i \in \mathcal{A}\}$ 和$\{B_j \in \mathcal{B}\}$，使得对每个 $A_{i'}$，都存在 $B_{j'}$ 与除 $A_{i'}$之外的所有 A_i 对易；并且对每个 $B_{j'}$，都存在 $A_{i'}$ 与除 $B_{j'}$之外的所有 B_j 对易，则称这对群**局域可逆** 。我们称反对易元素 $A_{i'}$和 $B_{j'}$ 互为**共轭**；称$\{A_i \in \mathcal{A}\}$ 和$\{B_i \in \mathcal{B}\}$ 为$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$的一组 ℓ**局部共轭基** 。

ˆA 局部有限乘积 A 来自 $\mathcal{A}$，是$\mathcal{A}$ 的一个子集，其中支撑包含任意给定点的元素只有有限多个。此类集合中所有元素的乘积未必定义良好，特别是在$\mathcal{P}$ 为无限集时，因此未必是$\mathcal{P}$中的元素；不过，这个无限乘积在局部是定义良好的，可视为深度 1 的量子电路，尤其是通过共轭作用于任意有限支撑的泡利算符时，其作用是定义良好的。共轭作用会为任意有限支撑的泡利算符引入一个符号。若两个来自$\mathcal{A}$的局部有限乘积通过共轭给出相同作用，我们就将它们视为相同。$\mathcal{A}$ 的所有局部有限乘积构成的集合记为 $\hat{\mathcal{A}}$，它是一个群。

命题 2.4. 设(A, B) 是一个局部可逆对。对于任意支撑在 R^ ^ ^^上的^ $P \in$ ^P，若其与 $S = A \cap B$ 中的每个元素都对易，则存在局部有限乘积 $A \in A$和 $B \in B$，二者均支撑在 $R^{+2\ell}$上，使得^$_A$^P与B中的每个元素都对易，且^$_B$ ^P与A中的每个元素都对易。

证明。 取一组针对（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）的共轭 ℓ 局部基。考察 $\mathcal{A}$ 中所有与 ^P 反对易的基元素，它们必然各自支撑在 $R^{+\ell}$ 上。将 ^P 与 $\mathcal{B}$ 的共轭基元素相乘。这些 $\mathcal{B}$ 的共轭元素支撑在 $R^{+2\ell}$ 上，并且该集合是局部有限的，因为任意球内都只有有限个线性无关的元素。

□

^ ^**推论 2.5**。 对于任意 $P \in P$，其支撑在 R 上且与 A 逐元素对易，存在一个支撑在 $R^{+2\ell}$ 上的局域有限乘积 ^$A \in$ ^A，使得 ^$_A$ ^P与 B 逐元素对易。这样的 ^^ ⌒乘积 AP在 $A \cap B$ 意义下是唯一的。

证明。 我们只需证明唯一性。这两个此类乘积之差是 ^$_{A'}$，属于 ^$\mathcal{A}$，并且必须与$\mathcal{B}$ 中的每个元素对易。这意味着，^A' 在$\mathcal{B}$的共轭$\mathcal{A}$基下的展开，不应包含$\mathcal{S} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$之上的任何非平凡基元素。这正是我们要证明的。

□

这个推论意味着，通过局部可逆**跃迁**$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$^实现的测量动力学具有局域性保持性质。一个与 P 逐元素对易的$\mathcal{A}$ 局域有限乘积可以视为一个逻辑算符[4] 。对于$\mathcal{A}$，环面码中的弦算符若沿两个方向无限延伸，便是一个支撑无限、但由泡利算符构成的局域有限乘积的例子，并且它与该码的稳定子群对易。因此，在局部可逆跃迁作用下，逻辑算符会在局部更新。由此我们可以得出结论：§§2.2 中的瞬时量子隐形传态电路在某个步骤并非局部可逆。若它是局部可逆的，那么每个逻辑算符，特别是即将被传送的数据量子比特上的单量子比特 X 和 Z ，都必须演化为附近的算符。这与电路将逻辑量子比特传送到远处相矛盾，因为传送后逻辑量子比特附近不存在任何一个逻辑算符，能够表示传送前量子比特上的逻辑算符。

2.4 再论示例：测量平移

这里我们给出一个一维局部可逆测量电路的示例，该电路实现了逻辑量子比特的均匀平移（其思想类似于引言中的图1 ）。

考虑一条一维链，其中每个格点各有两个量子比特，分别以偶数和奇数编号。将所有偶数编号的量子比特置于 X本征态，并将所有奇数编号的量子比特视为逻辑量子比特。通过(5) ，我们可以将位于 $2j-1$ 的逻辑量子比特隐形传态至位于 $2j$的偶数编号量子比特，同时将所有奇数编号量子比特置于 X 本征态。此隐形传态由一个深度为2的测量电路实现。得到的状态与初始状态几乎相同，只是偶数和奇数量子比特的角色互换了。现在，对所有 j，为每对量子比特 $2j$ 和 $2j+1$ 再实施一次隐形传态电路。这样，我们便回到了原来的稳定子群，其中所有偶数编号的量子比特分别处于 X本征态。图4展示了这一隐形传态的电路图。总体而言，该测量电路的深度为4。忽略依赖于测量结果的泡利

[4]有人可能会疑惑，为什么我们不说它是一个逻辑算符。如果 ^P 具有有限支撑，那么它是；否则，两个具有无限支撑的“算符”并不总是具有定义良好的对易关系，我们也不总能谈论逻辑算符代数。当然，在任何有限系统中都不会出现这个问题。

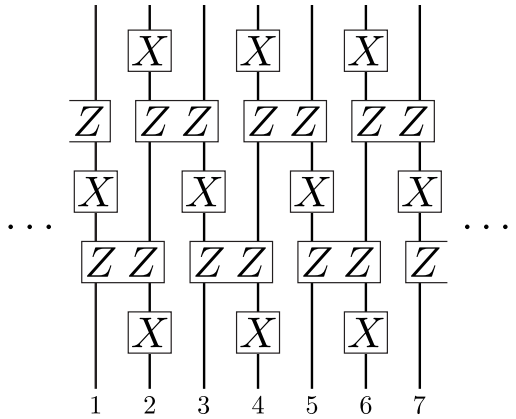


图4：一种局域可逆电路，可在由 n 个量子比特和 n 个辅助量子比特组成的链上实现平移。经过一个循环后，奇数编号格点上的逻辑算符向右移动了两个格点。

校正后，我们可以将这个深度为4的电路视为周期为4的测量动力学。

$$\begin{array}{ccc} \langle X_{2j}\rangle & \xrightarrow{1} & \langle Z_{2j-1}Z_{2j}\rangle \\ {\scriptstyle 4}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 2} \\ \langle Z_{2j}Z_{2j+1}\rangle & \xleftarrow[3]{} & \langle X_{2j-1}\rangle \end{array} \tag{12}$$

一个最初位于格点 j（在量子比特 $2j-1$上）的逻辑量子比特，在第二个测量层后被传送到量子比特 $2j$，随后又被传送到格点 $j+1$上的量子比特 $2j+1$。也就是说，除泡利校正外，每个逻辑量子比特都向右传送了一个格点。除去必须向右传递的测量结果所含的经典信息，我们通过测量电路实现了平移。这与幺正动力学形成对照：幺正动力学无法通过浅层幺正电路实现净平移 [25]。请注意，无论逻辑量子比特处于何种量子态，我们忽略的经典信息都具有完全相同的分布——均匀分布。

我们可以检验这个平移电路是否满足可逆对条件。由于深度为 4，我们考虑四对，但重新组合量子比特后，所有这些对都相同。电路中的任意一对测量层都由互不重叠的双量子比特电路组成。因此，很容易看出该条件得到了满足。与上文的迭代隐形传态示例相比，一个主要区别是，现在根据 2.1(a) 显示共轭对的稳定子群基底都是局域的，作用范围最多为相邻的两个量子比特。

3 局域可逆测量循环

一个**测量电路**是由一系列测量步骤组成的 $M_t (t = 0, 1, 2, ...)$，其中每个测量步骤都是一组彼此对易的 ℓ-局部泡利算符： $M_t \subset \mathcal{P}$ 和 $M_t^{\perp} \supseteq M_t$。（$\bullet^{\perp}$ 表示与 $\bullet$的每个元素都对易的所有泡利算符的集合。）在每个时间步，**瞬时稳定子群**（ISG）是一组具有确定本征值且支撑有限的泡利算符。根据测量电路，其瞬时稳定子群 [16]定义如下：

$$\mathrm{ISG}_t = \left\langle \mathrm{ISG}_{t-1} \cap M_t^{\perp}, M_t \right\rangle . \tag{13}$$

在每个时间步，ISG_t 包含由 M_t生成的群，同时也保留前一时间步中与当前测量集对易的元素。

给定一个时间周期测量电路，即 $M_t = M_{t+T}$ 对于所有 $t \geq 0$ 以及某个 $T > 0$，如果我们从 $\mathrm{ISG}_{-1} = \{\mathbf{1}\}$ 开始，则根据 (13) 的演化可能会导向一个稳态的、时间周期性的 ISG 序列。也就是说，对于所有 $t \geq t_0$ 以及某个 $T\prime > 0$，$\mathrm{ISG}_{t+T'} \equiv \mathrm{ISG}_t$，其中 $\equiv$ 表示两个稳定子群除符号外相同。这就是本文所关注的情况。我们并不一定声称，任何时间周期测量电路的 ISG 时间序列都必须进入稳态。研究动力学的瞬态部分本身会很有趣，但本文不讨论这一问题。

从现在起我们关注**局部可逆测量循环**。这将简称为 LR 循环或 LRMC。形式上，LRMC 是一个元组 $(\mathcal{A}_0, \mathfrak{C})$，其中 $\mathcal{A}_0$ 是一个稳定子码，而$\mathfrak{C}$ 是一个有限深度测量电路，由 M_1, M_2、.....、M_T指定，并满足以下条件：由 (13) 确定的 ISG 构成一个局部可逆对的循环链

$$\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \to \cdots \to \mathcal{A}_{T-1} \to \mathcal{A}_T \equiv \mathcal{A}_0 \tag{14}$$

其中，最后一个 ISG 与第一个 ISG 除符号外相同。初始稳定子群 $\mathcal{A}_0$ 称为**基底** 或**背景**。注意，该序列中恰有 T 个局域可逆对。我们将简单地称这列稳定子群为局域可逆序列。

注意，元组 $(\mathcal{A}_0, \mathfrak{C})$ 通过 (13)定义了一个 ISG 序列，但可能存在许多不同的电路 $\mathfrak{C}$，它们生成的 ISG 序列除符号外相同。事实上，给定一个稳定子群序列，若其中每个群都具有一个 ℓ-局部生成集，则可通过测量该 ℓ-局部生成集的所有元素来实现转换。测量顺序并不重要，因为这些元素彼此对易。对于给定的稳定子群，可能存在许多不同的 ℓ-局部生成集，而任何一种选择都会产生相同的瞬时稳定子群序列。我们希望将这些生成相同 ISG 序列（除符号外）的不同测量电路视为等价。为此，我们定义一个简单等价关系。

3.1 简单等价与群结构

由于我们考虑的是有限深度电路，因此可以将它们复合任意有限次。根据定义，复合后的动力学仍然是局域可逆的。可以将其想象成一个抽象简单图，其中每个顶点对应一个稳定子群，并且当且仅当边两端的两个稳定子群构成一个局部可逆对时，两者之间才存在一条边。一个局部可逆测量循环对应于该抽象图中的一个回路，而动力学的复合则对应于回路的复合。因此，以一个固定背景稳定子群为基点的所有局部可逆测量循环构成一个幺半群。（幺半群是一种类似于群的代数结构，但不一定具有逆运算。）我们可以通过引入一种**简单等价**关系，将这个幺半群转化为一个群，其方式类似于局部幺正电路群。

构造与可逆测量电路相对应的幺正电路很有用。考虑对泡利算符 B 进行测量，其结果均匀随机，这是因为存在一个反对易稳定子 A。对于任意一对反对易泡利算符 A, B，我们有一个幺正

$$U_{A,B} = \frac{A + B}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

如果量子态 $|\psi\rangle = A|\psi\rangle$ 被 A稳定，那么 $U_{A,\ B}|\psi\rangle = BU_{A,\ B}|\psi\rangle$ 就被 B稳定：

$$BU|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}B(\mathbf{1}+B)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(B+\mathbf{1})|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(B+A)|\psi\rangle = U|\psi\rangle\,. \tag{16}$$

事实上，$U_{A,B}|\psi\rangle$ 是获得测量结果 $B=+1$ 后的量子态。（更高维量子位的推广见 A.2。）更一般地，对于任意局域可逆跃迁$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，我们可以将 所有 测量替换为这类酉算子的乘积，

$$U_{\{A_i\},\{B_i\}} = \prod_i \frac{A_i + B_i}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

其中 $\{A_i\}$、$\{B_i\}$ 是 (A, B) 的局部共轭基。由于对于 $i\neq j$，A_i 与 B_j 对易，酉算子$U_{\{A_i\}}$、$\{B_i\}$ 可以通过有限深度酉电路实现。如果 $\{A_i\}$ 和 $\{B_i\}$ 的符号选择使得 $|\psi$ 被 $\{A_i\}$ 稳定（具有 $+1$ 本征值），并且 $\{B_i\}$ 的测量结果全部为 $+1$，那么$U_{A_i、\ B_i}|\psi$ 就是跃迁 A $\to$ B 后的量子态。由于具有不同测量结果的任意量子态之间仅相差一个（局部有限的）泡利算符，我们可以说，通过测量 B 的生成元得到的 ISG 演化，与应用 U 得到的演化相同。请注意，该酉算子并非唯一确定的；对 (A, B) 选择不同的共轭基会得到不同的酉算子。

回到电路简单等价这一主题，首先，我们允许插入和删除冗余测量。对一个已经被某泡利算符稳定的量子态测量该泡利算符，不会改变此量子态。特别是，如果某一层中的一个测量门是正在测量的另一个算符的乘积，我们可以省略这个冗余测量门。如果一个电路可以通过添加或删除此类冗余测量而得到另一个电路，并且冗余测量的算符是 ℓ-局域的，我们就称这两个电路简单等价。删除冗余测量后，整层都可能被消去，从而缩短瞬时稳定子群的序列。例如，序列 $(\mathcal{A}\to\mathcal{A})$ 总可以缩短为 $(\mathcal{A})$。在这种情况下，$\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 对应的幺正电路可以取为恒等算符。

其次，我们允许插入和删除夹心反对易测量。具体而言，假设一个长度为 2 的局域可逆跃迁 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是通过测量 ISG 的某些局部共轭基中的所有元素实现的。考虑由 $B\in\mathcal{B}$ 和 $C\in\mathcal{C}$ 进行的两次连续测量，它们在 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 之间构成一对共轭测量；再假设 $C\equiv A$ 也是 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，并参与了$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的局部共轭基。（例如，这种情况可能发生在 $\mathcal{A}=\mathcal{C}$ 时。）那么，我们允许删除对 B 的测量。

删除测量 B 确实会改变底层的 ISG 序列；然而，局部可逆性得以保留，最终的量子态也保持不变（至多相差泡利校正）。为此，考虑转换后的幺正电路。由于 $A\equiv C$ 和 B 互为共轭，我们可以将先测量 B再测量 C替换为$U_{B、\ C}U_{A、\ B}$。注意，$U_{B、\ C}$与U_A^{-1}、$_B$至多相差一个泡利算符（$U_{A、\ B}U_{A、\ -B} = BA$）；因此，删除 B 相当于移除这些酉门。测量电路与转换后的幺正电路之间唯一的差别，是一个仅取决于随机测量结果的泡利算符。应用此规则，可将局域可逆序列 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 缩短为 $\mathcal{A}$。

顾名思义，局部可逆测量循环可以被撤销，从而反转 ISG 的序列。

$$\mathcal{A}_0\equiv\mathcal{A}_T\to\mathcal{A}_{T-1}\to\cdots\to\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_0\,. \tag{18}$$

请注意，这种逆向动力学通常并不是简单地反转测量门的时间顺序就能实现的。如果一个 LR 循环由基码 A_0 和一个由测量层 $\mathfrak{C}=(M_1,M_2,\ldots,M_T)$ 构成的电路组成，那么，将测量电路的顺序反转为 $(M_T,M_{T-1},\ldots,M_1)$，并以 A_0 为背景，并没有太大意义，因为在基码 $\mathsf{A}_T\equiv\mathsf{A}_0$ 上测量 M_T 是多余的，而且也不清楚为什么测量 M_1 后得到的最后一个 ISG 必须是该基码。更好的尝试是考虑一个测量电路 $(M_{T-1},M_{T-2},\ldots,M_1,M_T)$，其中每一层中的被测算符都属于式 (18) 中的下一个 ISG，因此该电路可能诱导出如下跃迁：$\mathsf{A}_0\equiv\mathsf{A}_T\xrightarrow[?]{M_{T-1}}\mathsf{A}_{T-1}\xrightarrow[?]{M_{T-2}}\cdots\xrightarrow[?]{M_1}\mathsf{A}_1\xrightarrow[?]{M_T}\mathsf{A}_0$。这个电路通常有效，但并非总是如此。[5] 然而，根据前面的讨论，我们知道总能找到一个电路 $\mathfrak{C}'=(M'1,M'_2,\ldots,M'_T)$，它与 $\mathfrak{C}$ 完全等价，并且其顺序反转版本 $(M'_{T-1},\ldots,M'1,M'_T)$ 会产生 ISG 的反向序列。

因此，以固定的稳定子群 $\mathcal{A}_0$, 为基准，所有 LR 循环的简单等价类构成一个群，因为对于任意具有 ISG 序列（14）的 LR 循环（$\mathcal{A}_0,\mathfrak{C}$），我们都可以构造一个具有 ISG 序列（18）的逆循环（$\mathcal{A}_0,\mathfrak{D}$），使得复合（$\mathcal{A}_0,\mathfrak{C}\circ\mathfrak{D}$）与平凡 LR 循环（$\mathcal{A}_0,\emptyset$）简单等价。事实上，第一个基本操作允许我们将 $\mathfrak{C}$ 的某个测量轮次替换为测量共轭基中的元素的轮次；随后，第二个基本操作会移除 $\mathcal{A}_{t-1}\to\mathcal{A}_t\to\mathcal{A}_{t-1}$中的所有中间测量，从而逐步缩短序列。

因此，局部可逆测量循环之间的简单等价由这两个基本操作定义。这种简单等价关系使我们可以将任意 LR 循环视为一个在符号意义下周期性的稳定子群序列，而无需明确提及测量门。然而，简单等价的两种动力学未必表现相同，尤其是在关注其对扰动的响应时，例如量子计算文献中的容错组件。在这类场景中，重复测量往往至关重要。本文不讨论这一方面。

3.2 混合与拓扑码

对于维数相同的晶格中的局部可逆循环d，我们仿照量子元胞自动机的情形，考虑它们的融合或插值 [25, 27, 34, 30]。酉算子概念可以有多种方式调整以适用于我们的测量情形，但下面我们将讨论两种版本。每个版本都可以视为某种空间边界条件。

我们称之为**混合** 的第一种情况定义如下。取 d维晶格上的两个 LR 循环（$\mathcal{A}_0$, $\mathfrak{A}$）和（$\mathcal{B}_0$, $\mathfrak{B}$）。不失一般性，我们总可以假设两个电路 $\mathfrak{A}$ 和$\mathfrak{B}$ 作用于同一晶格；否则，就插入惰性辅助自由度。给定一个空间边界，两个动力学之间的混合是指在整个晶格上选择一个 LR 循环（$\mathcal{C}_0$, $\mathfrak{C}$），并满足以下条件。空间边界将整个晶格划分为两个区域 A 和 B，我们考虑界面区域 I，它是几何边界 A 与 B之间一个小距离范围内的邻域。界面 I 沿边界延伸，但微观宽度有限。混合基群 $\mathcal{C}_0$ 必须包含 {style id='35'>A_0 中满足以下条件的任意元素：

[5]例如，一个循环 $\big(\mathsf{A}_0=ZZ,XY\quad\mathfrak{C}=(M_1=\{IZ\}\ M_2=\{XI\}\ M_3=\{IY\}\ M_4=\{ZZ\})\big)$ 给出一个 ISG序列 Z_1Z_2, $X_1Y_2\xrightarrow{M_1}Z_1,Z_2\xrightarrow{M_2}X_1,Z_2\xrightarrow{M_3}X_1,Y_2\xrightarrow{M_4}Z_1Z_2,X_1Y_2$，但 $\mathsf{A}_0=Z_1Z_2,X_1Y_2\xrightarrow{M_3}X_1,Y_2\xrightarrow{M_2}X_1,Y_2\xrightarrow{M_1}X_1,Z_2\xrightarrow{M_0=M_4}Z_1,Z_2$，甚至无法在忽略符号的情况下回到初始稳定子群。也就是说，$\big(\mathsf{A}_0,\{M_3,M_2,M_1,M_4\}\big)$ 并不构成有效的 LR 循环。

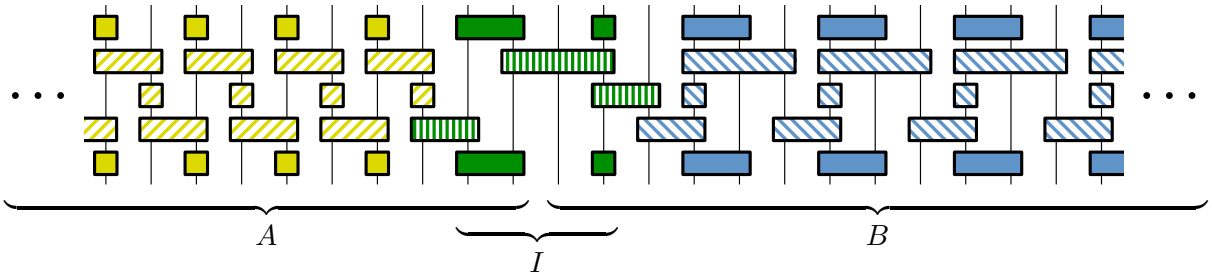


图5：一维中混合的示意性示例，展示了（$\mathcal{A}_0, \mathfrak{A}$）（黄色）与（$\mathcal{B}_0, \mathfrak{B}$）（蓝色）之间的混合。晶格被划分为 A（左半部）和 B（右半部）；界面区域 I的宽度为4个格点。支撑于 $A \setminus I$和 $B \setminus I$上的稳定子和电路算子分别与（$\mathcal{A}_0, \mathfrak{A}$）和（$\mathcal{B}_0, \mathfrak{B}$）中的相应算子一致。

若其支撑位于 $A\setminus I$，并且 $\mathcal{B}_0$ 中满足以下条件的任意元素 $B \setminus I$。类似地，混合电路 $\mathfrak{C}$ 必须包含 $\mathfrak{A}$ 在 $A\setminus I$ 上的测量门，以及 $\mathfrak{B}$ 在 $B \setminus I$ 上的测量门，中间可插入若干空闲步骤。由于可能插入空闲步骤，被混合的两个电路 $\mathfrak{A}$ 和$\mathfrak{B}$ 的周期可能不同。我们对界面区域 I 上的门或基群 $\mathcal{C}_0$ 不作局部可逆性之外的任何要求。混合的示例见图 5 。然而，直接删除测量门未必能得到混合，因为这可能破坏周期性或局部可逆性。因此，LR 循环之间是否存在混合并非总是一目了然。

第二种是融合的一个子类，仅适用于一类较小的、具有拓扑背景码的 LR 循环，我们现在对其进行定义。给定一个 ℓ-局部生成的泡利稳定子群 $\mathcal{A}$，一个**激发** 由泡利算符 P 产生，被定义为一个 ℓ-局部稳定子生成元，且其与 P反对易。对于晶格的任意区域 R，我们用 $R^{+\ell}$ 表示 R的 ℓ-邻域。

定义3.1。 $\mathcal{A}$ 是**拓扑的**，如果对于某个 $\ell > 0$，以下所有条件均成立：

(i) 对于任意支撑在有限凸区域 R 上的泡利算符 P，若 P 与所有稳定子对易，则 P 是若干 ℓ-局域稳定子生成元的乘积，其中每个生成元都支撑在 $R^{+\ell}$ 上；(ii) 若泡利算符 P 产生的一部分激发包含在有限凸区域 R 内，但没有激发的支撑与 $R^{+\ell} \setminus R$ 重叠，则对于 R 中直径为 ℓ 的任意球 B，都存在另一个支撑在 $R^{+\ell}$ 上的泡利算符 Q，使得 PQ 在 $R^{+\ell} \setminus B$ 中不产生激发；(iii) 若有限支撑泡利算符 P 产生的所有激发都包含在凸区域 R 内，则存在另一个支撑在 $R^{+\ell}$ 上的泡利算符 Q，使得 PQ 不产生激发。

拓扑 LR 循环是指其基稳定子群为拓扑码的 LR 循环。拓扑 LR 循环的拓扑混合，是指混合基稳定子群在整个晶格上构成拓扑码的一种混合。

下面对拓扑码的当前定义作几点说明。我们将灵活使用一些本文未定义的惯用术语。

拓扑码的条件 (i) 是所谓“局域拓扑序条件”或 TQO-1,2 的一个定制版本，这些条件用于能隙稳定性证明 [35]。这一条件

意味着任何码态的局部约化密度矩阵都由其周围的稳定子生成元决定。特别是，不存在支撑在任何有限区域上的非平凡逻辑算符。按照 [36] 的定义，所有“精确”码至少对菱形区域（以 ℓ_1-度量定义的球）满足这一首要条件。许多分形子相的例子 [37, 38] 都满足条件 (i)。

条件 (ii) 表明，只要某个激发与其他激发相距一小段距离 ℓ，即在 $R^{+\ell} \setminus R$ 中没有其他激发，我们就应当能够将它局域在空间中的任意一点。事实上，如果存在一组点状激发，例如二维环面码中的激发，或高维中的规范荷，我们总能通过某些弦算符将它们移至任意一点。另一方面，$\mathsf{d} \geq 3$ 维规范理论中的磁通环必须始终保持为磁通环；如果选择一个区域 R，使其包围磁通环的一段适当部分，就无法将该激发在 R 内局域到一个点。这并不违反条件 (ii)，因为回路并非孤立的。注意，条件 (i) 和 (ii) 允许有能隙边界 [39]。事实上，左半平面上的表面码具有有能隙的垂直边界，且不存在非平凡的有限支撑逻辑算符，因此满足条件 (i)。任何激发都可以通过某个弦算符移动到任意给定点，这意味着满足条件 (ii)。相反，$\mathsf{d} \geq 3$ 维的分形子码 [37, 38] 不满足条件 (ii)。根据定义，分形子是一种孤立的、无法局域产生的激发，其反粒子永远不会是点状的。如果选择一个包含单个孤立分形子的区域 R，那么该条件要求我们找到一个算符 Q，能够将这个分形子移动到 R 内的任意给定点，但这是不允许的。

条件 (iii) 排除了任何有隙边界，并要求空间均匀性更加严格。有隙边界允许拓扑带荷激发通过有限支撑算符从边界进入体区。若取 R 为一个包围体区中该激发的小球，那么条件 (iii) 要求我们能够通过在小球周围进行操作将其湮灭，这与该激发具有拓扑非平凡性相矛盾。

最后，我们指出，在 $\mathsf{d} = 2$ 维中，任何具有宏观码距的平移不变码都是本文意义下的拓扑码，因为它在有限深度量子电路意义下等价于有限份环面码 [40]。几乎所有具有拓扑量子场论描述的泡利稳定子码，都符合本文对拓扑码的定义。

3.3 拓扑 LR 循环的边界作用：MQCA

为方便起见，我们将**与真空融合**或简称**真空混合**定义为某个 LR 循环与基于由每个量子比特上的单量子比特 Z 生成的稳定子群的“平凡”LR 循环之间的融合。真空混合不一定是拓扑的。下文 §5 和 §6 中的两个主要示例都具有带有各种界面的非拓扑真空混合。

拓扑 LR 循环的真空混合始于一个具有空间边界、且在一侧为拓扑的基稳定子码 $\mathcal{A}$；这里的意思是，拓扑码的三个条件对包含在半空间内的区域 R 均成立。让我们更仔细地考察这个基码 $\mathcal{A}$。由于真空侧具有单量子比特稳定子，我们可以忽略该区域。根据定义，基码 $\mathcal{A}$包含拓扑码 $\mathcal{B}$ 的所有生成元，这些生成元的支撑与混合的空间边界相距 5ℓ 以上。（当然，常数 5 只是为了便于说明而选取的。）由于边界的存在，可能有许多有限支撑的非平凡逻辑算符，不过体区中不存在此类算符。

假设空间边界是一个平坦超平面，我们证明，在边界附近存在一个定义明确的区域，例如位于距边界 20ℓ 以内，在该区域上，所有有限支撑逻辑算符均有表示。我们可以将其称为真空混合的界面区域 I。为此，

令 $P \in \mathcal{A}^{\perp}$ 为任意有限支撑的逻辑算符。$\mathcal{A}$ 的晶格至少在体区内与$\mathcal{B}$ 的相同，也就是说，距离边界至少为 5ℓ 的区域内是如此。根据拓扑码条件 (iii)， P可以由某个泡利算符 $P_{\prime}$封闭，使得 PP'是$\mathcal{B}$ 的稳定子，并且 P' 支撑在某个最小凸区域的 ℓ邻域内；该凸区域支撑着所有针对 P与$\mathcal{B}$ 不对易的稳定子生成元。该凸区域必须位于空间边界附近，因为那里是唯一可能使 P 不与$\mathcal{B}$对易的区域。因此， P' 支撑在距边界 10ℓ 以内。随后，拓扑码条件 (i) 蕴含 PP'是$\mathcal{B}$的稳定子生成元之积，其中每个生成元都与 $PP_{\prime}$的支撑相距 ℓ 以内。在这个乘积中，支撑于体区内的生成元也属于 $\mathcal{A}$ ，并且它们会抵消 P 在体区内的张量分量。因此，我们得到$\mathcal{A}$ 的一个稳定子，它抵消了 P 在体区内的张量分量，只留下边界附近、距边界 15ℓ 以内的某个算符。这个最终算符距 Supp(P) 不超过 5ℓ 。由此我们得出，基稳定子群$\mathcal{A}$ 的所有有限支撑逻辑算符，都可以在边界处找到一个表示，并且严格位于距边界 15ℓ 以内。注意，我们所声称的界面区域宽度为距边界 20ℓ。[6]

这种局域化意味着，若要考虑逻辑算符的完整群，只需将 A 中的稳定子限制到界面 I ，并在 I 上的完整泡利群中取该限制的交换子 L。这里，限制是指舍弃任何不作用于 I 上的张量分量。例如，若 $B \otimes F$ 是一个泡利算符，其在体区的“内部”通过 B 作用，并在 I 上通过 F 作用，那么 $B \otimes F$ 在 I 上的限制就是 $\mathbf{1} \otimes F$。（限制过程中存在相位歧义，但这不会产生任何实质影响。） A 在界面区域 I 上的限制所生成的群 Π_IA 不一定是阿贝尔群，尽管 A 本身是阿贝尔群。如果两个算符 P、$Q \in$ L 按照构造支撑在界面 I 上，并且它们在稳定子 $S \in$A 的意义下等价，即 $P = QS$，那么显然， $S = Q^{-1}P$ 也支撑在 I 上。因此，A 的所有有限支撑逻辑算符的等价类所构成的群，恰好是 L/A$_I$ ，其中 A$_I = \{S \in$ A $\mid$ Supp(S) $\subseteq I\} \subseteq$Cent(L)。我们将 L/A$_I$ 称为边界逻辑商群。

现在，由局部可逆跃迁复合而成的电路动力学给出了一个可逆的2.5 演化规则，其中每个逻辑算符代表元 P（可在距边界 15ℓ 以内找到）都会映射到一个等价类 $[Q]$ ，该等价类包含模稳定子等价的逻辑算符，其代表元 Q 支撑在 P 附近，且其距离仅取决于 ℓ与电路深度的乘积。将 Q 局域化至边界附近，我们得到 Q' ，它沿界面延伸方向的支撑范围不超过距离 5ℓ ，且距边界不超过距离 20ℓ 。因此， $P \mapsto [Q']$ 是在界面区域 I上定义良好的映射。由此可知，电路动力学在$\mathcal{L}/\mathcal{A}_I$ 上定义了一个具有额外局域性保持性质的自同构。这是以下概念的一个例子。

定义 3.2。 设$\mathcal{L}$ 是 d 维晶格上有限支撑的泡利算符群，且每个格点包含有限个量子比特。对于正规子群$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$，商群$\mathcal{L}/\mathcal{S}$ 的自同构 α 若存在一个常数长度 r （称为作用范围或传播范围），使得对于任意 $P \in \mathcal{L}$ ，其像 $\alpha([P])$ 总能由一个$\mathcal{L}$ 中的算符 $Q \in$ 表示，且该算符的支撑位于 P 的支撑的r邻域内，则称其为**MQCA** 。

现有意义下的 Clifford 量子元胞自动机 [41, 42]是一个 MQCA，其中 $\mathcal{L}$ 是完整的泡利群，而$\mathcal{S} = \{\mathbf{1}\}$。因此，我们的 MQCA 是 Clifford 量子元胞自动机的推广。正如我们在上文所示，每一个

[6]我们尚未使用3.1中的条件 (ii) 来证明此局域化。我们将在4.7的证明中使用 (ii)。

在 d 维空间中的拓扑 LR 循环进行真空混合，会得到一个 $d-1$ 维的 MQCA。尽管我们对 MQCA 的定义 3.2 没有明确提及测量，但我们的例子都来自测量电路，因此得名“M”QCA。在我们考虑的所有情形中，$\mathcal{L}$ 都是逻辑算符群。一维 LR 循环所诱导的 §2.4 中的平移是一维 MQCA 的一个例子，并且恰好是一个幺正 Clifford QCA。当然，要确定一个明确的自同构，我们需要固定测量结果（即后选择）；不过我们已经讨论过，不同的测量结果至多会导致相差一个深度 1 泡利电路的同一自同构。

4 一维 MQCA 的指标

对于一维酉量子元胞自动机和量子游走，[43, 25], 使用 Fredholm 算子已被证明很有成效，[44, 45], 我们将对此作简要回顾。由于忽略所有相位因子后，量子比特上的泡利算符群是一个$\mathbb{F}_2$-线性空间，因此我们的 MQCA 可以看作作用于一个无限维 $\mathbb{F}_2$-向量空间上的可逆线性映射。参照文献 [44, 43, 25], 我们将线性映射指标的构造方法加以调整，以适用于我们的 MQCA。

4.1 Fredholm 映射

设 $\mathbb{F}$ 是一个域（例如，复数域、实数域、有理数域或有限域 $\mathbb{F}_2$）。**Fredholm** 映射 $\phi: V \to W$ 是 $\mathbb{F}$-向量空间之间的线性映射，并且其核 $\ker \phi = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$ 和余核 $\operatorname{coker} \phi = W/\operatorname{im} \phi = W/\{\phi(v) \mid v \in V\}$ 均为有限维。如果 V 和 W 是有限维的，则所有线性映射都是 Fredholm 映射。因此，这一概念只有在无限维情形下才有意义。众所周知，[45, 第 2] 章指出，$\mathbb{F}$-线性映射 $\phi: V \to W$ 是 Fredholm 映射，当且仅当存在另一个 $\mathbb{F}$-线性映射 $\eta: W \to V$，使得 $(\phi\eta - \mathbf{1}): W \to W$ 和 $(\eta\phi - \mathbf{1}): V \to V$ 均为有限秩（即，像为有限维）。这样的 η 称为 ϕ 的**伪逆**。因此，通俗地说，Fredholm 算子几乎是可逆线性映射，只在一个很小的子空间上例外。

Fredholm 映射的 **指标** ϕ 定义为一个整数，生于

$$\operatorname{ind} \phi = (\dim_{\mathbb{F}} \ker \phi) - (\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{coker} \phi). \tag{19}$$

假设这两个维度有限，因此指标也有限。Fredholm 指数对于任何有限维扰动都保持稳定：如果 $\delta: V \to W$ 是任意有限秩线性映射，且 $\phi: V \to W$ 是 Fredholm 映射，那么

$$\operatorname{ind}(\phi + \delta) = \operatorname{ind}(\phi). \tag{20}$$

此外，Fredholm 指数满足

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\phi_1 \oplus \phi_2) &= \operatorname{ind}(\phi_1) + \operatorname{ind}(\phi_2), \\ \operatorname{ind}(\phi_1 \phi_2) &= \operatorname{ind}(\phi_1) + \operatorname{ind}(\phi_2) \end{aligned} \tag{21}$$

只要它们有定义即可。[45, 第 2] 章中关于这些性质 [46] 的证明出人意料地简单。请注意，系数域 $\mathbb{F}$ 是任意的。

4.2 MQCA 指标

我们有 t 从一维 MQCA 出发，确定一个合适的 Fredholm 映射

$$\alpha : \mathcal{L}/\mathcal{S} \to \mathcal{L}/\mathcal{S}. \tag{22}$$

虽然忽略相位因子后， α 可以视为 $\mathbb{F}_2$-向量空间上的线性映射，但该映射可逆，因此 α 的 Fredholm 指数自动为零。为避免这一平凡结果，一个指导原则是考虑半无限区间，并考察 α的受限作用。

受无限伊辛链的启发，我们考虑如下商空间。对于任意区域 $R \subseteq \mathbb{Z}$，令$\mathcal{L}_R$ 表示$\mathcal{L}$ 中由所有支撑在 R上的元素组成的子群。如果 R 是一个区间，我们将用显而易见的不等式（例如$\mathcal{L}_{<a} = \mathcal{L}_{(-\infty,a)}$）简写 R 。类似地，令$\mathcal{L}_R^{/\mathcal{S}}$ 表示$\mathcal{L}/\mathcal{S}$ 中由所有存在一个支撑在 R上的代表元的元素组成的子群。基于此，我们作如下定义。[7]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R^{/\mathcal{S}} &= \{x\mathcal{S} \in \mathcal{L}/\mathcal{S} \mid x \in \mathcal{L}, \operatorname{Supp}(x) \subseteq R\},\\
\mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}} &= \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{(k,\infty)}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}} &= \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{(-\infty,k)}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{F} &= (\mathcal{L}/\mathcal{S}) \Big/ (\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}} \mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}),\\
\mathcal{F}_{<a} &= (\mathcal{L}_{<a}^{/\mathcal{S}} \mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}) \Big/ (\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}} \mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}).
\end{aligned} \tag{23}$$

自同构 α 定义在$\mathcal{L}/\mathcal{S}$上，但我们注意到 α 保持$\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}}\mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}$不变，因此可诱导出一个自同构

$$\bar{\alpha} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}. \tag{24}$$

为此，我们必须证明对于任意 $x\mathcal{S} \in \mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}$，都有 $\alpha(x\mathcal{S}) \in \bigcap_k \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}{}_{(k,\infty)}$，但这很容易证明：对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们知道 $x\mathcal{S} \in \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}{}_{(k+r,\infty)}$，而局域性保持性质蕴含$\alpha(x\mathcal{S}) \in \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}{}_{(k,\infty)}$。类似的论证表明 $\alpha(\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}}$。

设 $a \le b$ 为晶格 $\mathbb{Z}$ 的格点，并选取一个子群 $\mathcal{F}_\circ$，使得 $\mathcal{F}_{<a} \subseteq \mathcal{F}_\circ \subseteq \mathcal{F}_{<b}$。设 ν为到$\mathcal{F}_\circ$上的投影：

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\ \nu\ } \mathcal{F}_\circ, \tag{25}$$

它是包含映射 ι 的左逆：$\mathcal{F}_\circ \to \mathcal{F}$ 使得 $\nu\iota = \mathbf{1}$ 在 $\mathcal{F}_\circ$ 上，并且 $(\iota\nu)^2 = \iota\nu$。考虑一个复合

$$\phi = \nu\bar{\alpha}|_{\mathcal{F}_\circ} : \mathcal{F}_\circ \xhookrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{F} \xrightarrow{\ \bar{\alpha}\ } \mathcal{F} \xrightarrow{\ \nu\ } \mathcal{F}_\circ. \tag{26}$$

[7]对于无限伊辛链，我们可以考虑 L，即所有泡利算符 Z的有限张量积构成的集合，以及 S，即所有偶数个泡利算符 Z的有限张量积构成的子集。在这个例子中，$\mathrm{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}} = \mathrm{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}} = \mathrm{L/S}$，因为 $Z_0\mathrm{S} \in \mathrm{L}_R^{/\mathcal{S}}$。如果我们有一组独立伊辛链，并且 L 是所有有限支撑逻辑算子的集合，S 是稳定子，那么 $\left(\mathrm{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}}\mathrm{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}\right) := \left\langle \mathrm{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}},\ \mathrm{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}} \right\rangle \subseteq \mathrm{L/S}$ 描述了所有无限链和半无限链的逻辑算子（例如，支撑在 $(-\infty, a)$ 或 $(a, +\infty)$ 格点上的伊辛模型）。对于伊辛链集合，F 由所有有限伊辛链的逻辑算子生成；$\mathrm{F} \cong \mathrm{L}/\operatorname{Cent}(\mathrm{L})$。因此，构造 F 似乎有些多余；然而，我们的构造允许更一般的 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{L}$。

定义 4.1. α 的 MQCA 指数定义如下：

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\phi) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}. \tag{27}$$

二分之一这一因子是一种约定，它将使我们的 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}$ 在 [25]作用于完整局部算子代数时， α 等于一维酉量子元胞自动机的通常指标。这是一个合理的定义，因为

引理 4.2。 ϕ 是 *Fredholm* 的，并且 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha)$ 不依赖于对 a、b、ν 的选择。

证明思路。 映射 ϕ 是 Fredholm 算子，因为算子 $\nu\bar{\alpha}^{-1}$ 给出了一个伪逆。对于不同的 a、b、ν 选择，Fredholm 映射 ϕ 只相差一个有限秩映射，而这不会改变指标。参见 §B。

□

命题 4.3。 *MQCA* 指数满足以下性质。

1. $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha\otimes\beta) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta)$。 *2.* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha\beta) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta)$。特别地，$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(id) = 0$ 且 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha^{-1}) = -\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha)$。 *3.* 若 $U : L/S \to L'/S'$ 是等价逻辑算子群之间保持局部性的同构，并且若 $\alpha: L/S \to L/S$ 是 L/S 上的 *MQCA*，则 $U\alpha U^{-1}: L'/S' \to L'/S'$ 是 L'/S' 上的 *MQCA*，且 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(U\alpha U^{-1}) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha)$。 *4.* 若 L/S 是完整泡利群，则 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}$ 等于量子比特上的一维酉量子元胞自动机 *[25]* 的 *GNVW* 指数的（以 $\log_2$ 为底的）对数。

在条目 1 中， $\alpha\otimes\beta$ 表示在双层系统的每一层分别作用 α 和 β所定义的 MQCA。 α 和 β 所对应的底层逻辑群可以不同。在条目 2 中，$\alpha\beta$ 是一个复合：先作用 β ，再作用 α。要使 $\alpha\beta$ 有意义， α和 β 所对应的底层逻辑群必须相同。显然， $\alpha\beta$ 仍然是一个 MQCA。在条目 3 中，我们用逻辑群的一个保持局部性的同构对一个 MQCA 进行共轭，从而得到一个新的 MQCA。这里，U 保持局部性是指，与 MQCA 的定义 3.2 类似，对于任意 $P\in$L，像 $U([P]$)都可以表示为 $Q\in$ L′，且其支撑位于 P附近。条目 3 表明，指标在 U的共轭作用下保持不变。请注意，这并不能由条目 3 推出，因为 U 只是一个同构，不一定是自同构。条目 4 表明，我们的指标是通常定义在完整泡利群上的一维 Clifford 量子元胞自动机指标的恰当推广。4.3 的证明推迟到 §B.1。

以下结果见§B.2，证实了一维 MQCA 指数是流的一种度量这一直觉。

命题 4.4。 设 L 是完整一维泡利群中某个局部生成泡利算符群的交换子，并且对于某些a、$b\in\mathbb{Z}$，$S/(S^{<a}S^{>b})$ 是有限维的。那么，

1. $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}$ 是一个混合不变量，即，如果对于 L/S 上的两个 *MQCA* α、β，存在第三个 *MQCA* γ 以及 a、$b\in\mathbb{Z}$，使得 $\gamma|_{\mathcal{F}_{<a}} = \alpha|_{\mathcal{F}_{<a}}$ 且 $\gamma|_{\mathcal{F}_{>b}} = \beta|_{\mathcal{F}_{>b}}$，那么 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta)$。

2. 如果 α^{refl} 是将 *MQCA* α 在 L/S 上关于一维直线上任意一点作空间反射后得到的 *MQCA*，那么 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha^{\mathrm{refl}}) = -\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha)$。

3. 对于任意 $a \in \mathbb{Z}$，存在 $b \in \mathbb{Z}$，使得 $b < a$ 且

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\dim(\mathcal{F}_{<a} \cap \bar{\alpha}^{-1}\mathcal{F}_{>b}) - \dim(\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b})\Big). \tag{28}$$

如果 S 是局部生成的，或者 S 由二维拓扑泡利稳定子群中所有支撑在有限宽度条带上的元素构成，则满足这一假设：$\dim(S/(S_{<a}S_{>b})) < \infty$ 。

在公式 (28) 中，第一项 $\dim(\mathcal{F}_{<a}\cap\bar{\alpha}^{-1}\mathcal{F}_{>b})$ 统计原本由 $(-\infty, a)$ 表示、并在 MQCA 作用下映射为由 (b, ∞)表示的逻辑算符的数量。第二项对指标进行校正，使得当 α 为恒等算符时，该指标为零。

4.3 马约拉纳链代数上的平移

作为一个具有非整数指标的例子，我们考虑由 $L_i = X_i Z_{i+1}$ 生成的 $\mathcal{L}$，其定义在每个格点含一个量子比特的晶格上。这些生成元满足以下对易关系：

$$L_j L_k = s L_k L_j \quad \text{where } s = \begin{cases} -1 & \text{if } |j-k| = 1, \\ +1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{29}$$

以下各节讨论的例子中普遍存在这种代数；对于任何一组 $\{L_k | k \in \mathbb{Z}\}$ 满足 (29) 的算符，无论它们是在何种背景下构造的，我们都称之为 **马约拉纳链代数**。[8] 事实上，一维中由泡利算符生成的任何平移不变代数，其对易关系都由三部分组成：交换子代数、完整的泡利代数以及马约拉纳链代数各自的对易关系 [26,IV.22]。

令 $\mathcal{S} = \{\mathbf{1}\} \subset \mathcal{L}$。假设给定如下 MQCA $\alpha: \mathcal{L}/\mathcal{S} \to \mathcal{L}/\mathcal{S}$：

$$\alpha(L_j) = L_{j+1}\,. \tag{30}$$

为了计算指标，我们按照 $\mathcal{F}$ 在 (23)中的构造。无穷远处的子群 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\pm\infty}$ 均为 $\{\pm\mathbf{1}\}$。因此，$\mathcal{F} = \mathcal{L}/\{\pm\mathbf{1}\}$。我们选择一个投影 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\leq 0}$，其定义如下

$$\nu : \pm L_k \mapsto \begin{cases} \pm L_k & \text{if } k \leq 0, \\ \pm\mathbf{1} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{31}$$

用向量空间的语言来表述会更清楚。$\mathcal{F}$ 恰好是由所有有限比特串构成的向量空间，每个格点 k 对应一位，且只有有限个非零分量。投影 ν 会将格点 $k > 0$ 上的所有分量置零。因此，用基向量 e_k 表示的 Fredholm 映射为：每个基向量都是一个单位比特串向量，且仅在格点 $k \leq 0$ 处有一个非零分量 1，即

$$\phi : e_k \mapsto \begin{cases} e_{k+1} & \text{if } k \leq -1, \\ 0 & \text{if } k = 0. \end{cases} \tag{32}$$

[8] 考虑一条由马约拉纳零模 $\{\gamma_k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$构成的一维链，使得费米子算符满足 $\gamma_k^\dagger = \gamma_k$ 和$\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k = 2\delta_{k,\,l}$。局域可观测量由偶数个费米子算符组成，并由双线性算符 $\mathbf{i}\gamma_k\gamma_{k+1}$生成。这些双线性算符满足马约拉纳链代数，因此得名。

这是满射，但其核非零，由 e_0 张成。因此，$\mathrm{ind}(\phi) = \dim\ker\phi - \dim$ 余核 $\phi = 1-0=1$，并且

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\phi) = \frac{1}{2}. \tag{33}$$

也可以使用命题 4.4 计算指标。对于任意 $b \le a-2$，我们有 $\dim(\mathsf{F}_{<a}\cap\mathsf{F}_{>b}) = a-b-2$（一个基是 $e_{b+1},\cdots\ e_{a-2}$）以及 $\dim(\mathsf{F}_{<a}\cap\bar{\alpha}^{-1}\mathsf{F}_{>b}) = a-b-1$（一个基是 $e_b,\cdots\ e_{a-2}$），因此 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}$。注意，在这个例子中，$(-\infty,a)\cap(b,\infty)$ 必须是非空的，因为 L 不是格点上的局部群的直和。

4.4 一维局部可逆循环的 MQCA

这里我们证明，一维中任意 LR 循环的 MQCA 指数都是整数。这一结果与上文在马约拉纳链代数上的平移 MQCA 示例形成对比，该示例的 MQCA 指数为 $\frac{1}{2}$。

我们首先分析基稳定子群。在高维中，稳定子群的结构非常复杂，分形子相中有许多例子，无论是否具有空间平移不变性 [37, 38]，近来还发现了无穷多个族 [47, 48]。然而，一维中已知的稳定子群本质上都是伊辛链的稳定子群，由以下算子生成：$Z_iZ_{i+1}^\dagger$作用于一维晶格上的某个区间（可能是无限区间）。（对量子比特而言，厄米共轭是冗余的。）我们证明，在一维中，这就是唯一的可能性。由 n 个连续格点构成的伊辛链，是一个具有以下稳定子群的 n 量子比特（或量子位）系统，其稳定子群由以下算子生成：$Z_iZ_{i+1}^\dagger$。按照惯例，由一个格点（$n=1$）构成的伊辛链，是一个带有作用于该格点的稳定子 Z 的量子比特（或量子位）。

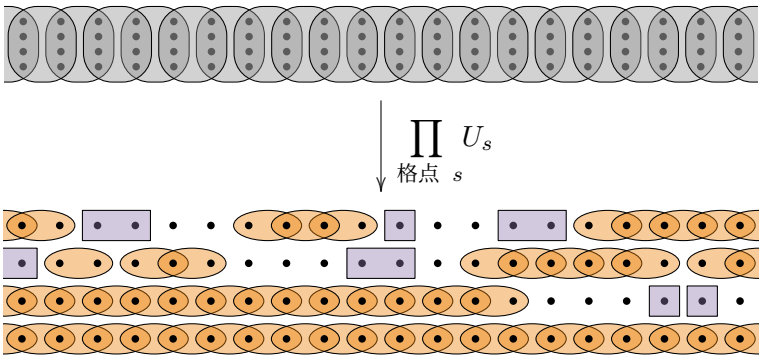


图 6：定理 4.5 的示意图。每个格点（以列表示）由有限个量子位组成（黑点）。上图中，每个气泡表示支撑在两个格点上的一组稳定子。下图中，每个紫色矩形表示一个单格点稳定子或一个双格点贝尔对。橙色椭圆表示伊辛耦合。定理指出，上图中的稳定子总可以通过位点内酉算子的共轭映射为一组伊辛链、单格点稳定子和贝尔对中的稳定子，例如下图所示。

定理 4.5。 设一维链 $\mathbb{Z}$ 或有限周期晶格上的每个格点 k 都有有限个 q_k 维数为素数 p 的量子位。设 A 是一个 *Pauli* 稳定子群，其生成元

作用于至多两个相邻格点。则存在一个深度 *1* 的 *Clifford* 电路，由单点*Clifford*酉门组成，通过该电路，A 可映射为由若干独立伊辛链、一些完全解纠缠的量子比特以及最近邻贝尔对构成的稳定子群。每条伊辛链可以是无限的，也可以是有限的，但每个格点 k 至多参与 q_k 条伊辛链。在长度为 L的有限周期晶格上，每条伊辛链至多占据 L 个量子位。

虽然这个定理（见图 6）或许并不令人意外 [49], 但似乎只有在假设平移不变性的情况下，才有人明确证明过这一点 [36]。通过将若干相邻格点分块，便总能满足 $\mathcal{A}$ 的生成元至多作用于两个相邻格点这一假设。我们的证明不假设平移不变性，而且更加初等。实际上，将本定理应用于平移不变的情形，所得结论比 [36]中的更强，因为我们的电路深度为 1。两种完整证明见§C 。

一维 LR 循环的 MQCA 由一个显然的 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{S}$的选取来定义。具体来说，我们令 $\mathcal{S}$ 为基稳定子群，令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{S}$的所有有限支撑逻辑算符的集合。于是，我们得到一个 MQCA，称为该一维 LR 循环的**典范 MQCA** 。

定理 4.6。 任意一维 *LR* 循环的典范 *MQCA* 都具有整数 *MQCA* 指数。

证明思路。 基码等价于一组独立伊辛链（定理 4.5）。每条有限伊辛链实质上对应一个量子比特，而无限伊辛链（包括半无限伊辛链）按定义取商。典范 MQCA 本质上是作用于这些伊辛量子比特上的酉 QCA，而我们知道它具有整数指标。参见 §B。 □

4.5 二维拓扑局部可逆循环的边界 MQCA

在上一节中，我们发现，如果测量电路允许真空混合，则可以通过d维中的拓扑 LR 循环的作用得到（$\mathsf{d}-1$）维 MQCA。在这里，我们具体考虑一个在右边界和左边界上都允许真空混合的 $\mathsf{d}=2$ 拓扑 LR 循环。我们将证明，无论如何选择真空混合，边界 MQCA 都是良定义的，且在一个独立的一维 LR 循环的典范 MQCA 意义下成立。这将意味着，边界 MQCA 是一个拓扑混合不变量，且在独立的一维 LR 循环的典范 MQCA 意义下成立。可以合理推测，每个拓扑 LR 循环都允许在任意边界上进行真空混合。

设 $\mathcal{B}$ 为二维拓扑 LR 循环的基拓扑码 ($\mathcal{B}$ $\mathfrak{B}$)。假设我们的体电路 $\mathfrak{B}$ 允许进行真空混合，其在系统左右两侧各有一个边界分量，且基码为 $\mathcal{A}$，因此该真空混合的门支撑在一个 条带 上，其宽度足够大但有限，例如 1234ℓ。我们假设基稳定子群 $\mathcal{A}^{\text{strip}}$ 是 ℓ-局部生成的，并且对于所有支撑在距边界足够远处（例如距离 10ℓ）的算符，拓扑码的三个性质均成立。区域的几何结构见图 7 。

于是，我们有三个 MQCA： α_1、 α_2 和 α_{strip}。与 §3.3 中一样，LR 循环将在左边界上实现边界 MQCA α_1 ，其作用于 $\mathsf{L}_1/\mathsf{A}_1$, ；并在右边界上实现另一个边界 MQCA α_2 ，其作用于 $\mathsf{L}_2/\mathsf{A}_2$。这里，$\mathsf{L}_i$ 由所有与 A 对易且在垂直扩展界面区域 I_i上具有有限支撑的泡利算符组成。子群 A_i 是 $(\mathsf{A}^{\text{strip}})_{I_i}$，即 $\mathsf{A}^{\text{strip}}$ 中所有支撑位于 I_i 上的元素所构成的集合。我们不要求它们之间存在任何关系

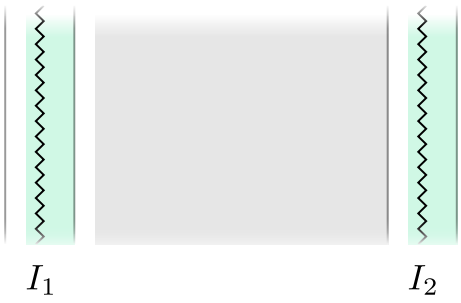


图 7：条带和两个界面区域的几何结构。每个区域在垂直方向上都是无限延伸的，但宽度均有统一上界。

除了 I_1 和 I_2 必须彼此平行之外，这两个 MQCA 之间没有其他要求。此外，由于整体电路实际上作用于一维系统，即条带上，每个有效格点所含的量子比特数取决于 I_1 与 I_2之间的距离，因此我们有作用于 $\mathcal{L}_{\text{strip}}/\mathcal{A}^{\text{strip}}$ 的典范一维量子元胞自动机 α_{strip}，其中 $\mathcal{L}^{\text{strip}}$ 是条带上所有与$\mathcal{A}^{\text{strip}}$的每个元素对易且具有有限支撑的泡利算符所构成的集合。

引理 4.7. $\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_{\text{strip}}) = \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_1) + \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_2)$。

证明思路。证明见§B.3。粗略地说，边界处的逻辑算符 I_1 和 I_2 仍然是该条带的逻辑算符，并且经历相同的动力学。该条带可能还存在一些不支撑在任一单独边界上的额外逻辑算符，即连接 I_1 和 I_2的弦算符。然而，这类弦算符只有有限多个，因为拓扑码的条件（ii）意味着激发是可移动的。这些有限个弦算符不会对指标产生贡献。

□

结合4.6 和 4.7，我们得到如下结果：

定理 4.8。 假设二维拓扑局部可逆测量循环 $(\mathcal{B}\ \mathfrak{C})$在左边界和右边界上都存在真空混合。那么，右边界上的 *MQCA* α的指标 $\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha)$ （因此左边界上的指标也一样）在模 $\mathbb{Z}$ 意义下与具体的真空混合无关。因此，$(\mathcal{B}\ \mathfrak{C})$ 在拓扑混合下的一个不变量是$\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha) + \mathbb{Z} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$。

证明。将 4.7 应用于具有左、右边界的 LR 循环 $(\text{A}\ \mathfrak{C})$，得到 $\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_{\text{strip}}) = \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_1) + \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_2)$，其中 α_1 和 α_2 分别是左、右边界上的 MQCA。假设还有另一个 LR 循环 $(\text{A}', \mathfrak{C}')$，除右边界外，它与 $(\text{A}\ \mathfrak{C})$ 完全相同。我们知道 $\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha'_{\text{strip}}) = \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_1) + \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha'_2)$。定理 4.5 告诉我们，$\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha'_{\text{strip}})$，$\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_{\text{strip}}) \in \mathbb{Z}$。因此，$\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha'_2) - \text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_2) \in \mathbb{Z}$，这意味着边界 MQCA 的指标在相差 $\mathbb{Z}$ 的真空混合下保持不变。

接下来需要说明 $\text{Ind}^{\text{M}}(\alpha_2) + \mathbb{Z} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ 在拓扑混合下的不变性。假设左侧的 $(\mathcal{B}\ \mathfrak{C})$ 与右侧的 $(\mathcal{B}',\ \mathfrak{C}')$ 之间存在一个具有垂直界面区域的拓扑混合。也可以在界面右侧取一个右边界，此时右侧 MQCA 指数完全由 $(\mathcal{B}',\ \mathfrak{C}')$ 决定。$(\mathcal{B}\ \mathfrak{C})$ 与 $(\mathcal{B}',\ \mathfrak{C}')$ 之间的界面，以及具有其右边界的 $\mathfrak{C}'$ 的元素，可以视为将 $(\mathcal{B}\ \mathfrak{C})$ 混合到真空中。指标在真空混合下的不变性意味着结论成立。

□

在 §5 和 §6 中，我们将在下文考察两个例子：Wen plaquette 平移电路和蜂窝 Floquet 码。

推论 4.9。 *Wen plaquette* 平移电路和蜂窝 *Floquet* 码的指标均非零 $\mathbb{Z}_2$ 。

证明。 这些 LR 循环的基码与环面码有限深度幺正电路等价，因此在定义 3.1. 所述意义下是拓扑的（任何没有局域逻辑算符的二维平移不变基码，根据分类定理 [40]，都是拓扑的）。它们通过下文的直接计算满足4.8 的假设。 □

5 二维局域可逆循环示例：Wen plaquette 平移

这里我们定义 Wen plaquette 平移（WPT）模型。Wen plaquette 码 [33]是一种泡利稳定子码，与 Kitaev 环面码等价。WPT 模型是一个以 Wen plaquette 码为基码、周期为四的局域可逆测量循环。该电路定义在晶格 $\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$上，格点坐标将用 (x, y) 和 $(x, y + \frac{1}{2})$ 这样的形式指定，其中 $x, y \in \mathbb{Z}$。该晶格是一个在每条竖直链路上额外增加一个格点的方格晶格。基稳定子群 ISG_0 定义如下：

$$\mathrm{ISG}_0 \equiv \left\langle Z_{x,y}X_{x+1,y}X_{x,y+1}Z_{x+1,y+1} \ , \ Z_{x,\,y+1/2} \ \middle| \ x, y \in \mathbb{Z} \right\rangle . \tag{34}$$

位于$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ 的格点实现 Wen 的面元模型，该模型具有 $\mathbb{Z}_2$ 环面码拓扑序；而位于$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ 的格点则充当辅助量子比特，以实现平移电路。该电路的四个步骤实现了沿晶格每个垂直列、平行于 §2.4 所述的量子比特平移协议（的逆过程），方向与 y坐标轴平行。因此，经过电路的每两个步骤后，面元稳定子会平移半个单位（$y \mapsto y - \frac{1}{2}$）。它们可表示如下。

$$\begin{aligned} P_0(x, y) &= Z_{x,y}X_{x+1,y}X_{x,y+1}Z_{x+1,y+1} \, , \\ P_1(x, y) &= Z_{x,y-1/2}Z_{x,y}X_{x+1,y}X_{x,y+1}Z_{x+1,y+1/2}Z_{x+1,y+1} \, , \\ P_{t+2}(x, y) &= P_t(x, y - \tfrac{1}{2}). \end{aligned} \tag{35}$$

这些算符如图8所示。

具体而言，WPT 模型的 ISG 为

$$\mathrm{ISG}_0 = \left\langle P_0(x, y) \ , \ Z_{x,y+1/2} \ \middle| \ x, y \in \mathbb{Z} \right\rangle , \tag{36a}$$

$$\mathrm{ISG}_1 = \left\langle P_1(x, y) \ , \ X_{x,y-1/2}X_{x,y} \ \middle| \ x, y \in \mathbb{Z} \right\rangle , \tag{36b}$$

$$\mathrm{ISG}_2 = \left\langle P_2(x, y) \ , \ Z_{x,y} \ \middle| \ x, y \in \mathbb{Z} \right\rangle , \tag{36c}$$

$$\mathrm{ISG}_3 = \left\langle P_3(x, y) \ , \ X_{x,y}X_{x,y+1/2} \ \middle| \ x, y \in \mathbb{Z} \right\rangle . \tag{36d}$$

该电路每经过一个循环，就会将逻辑自由度平移一个元胞。例如，局域有限乘积$\prod_n X_{n,\ n}$ 经过电路的一个循环后会映射为 $\prod_n X_{n,\ n-1}$。

在以下小节中，我们构造 WPT 电路的各种边界。首先，通过省略测量门，我们在体区的东侧构造一个边界。背景稳定子码由西半平面中的面元算符生成。这种构造可以说是产生非平凡 MQCA 流的最简单构造，该流自然由体区的竖直平移诱导。其次，我们在北侧引入一个边界，并在该处加入额外的测量

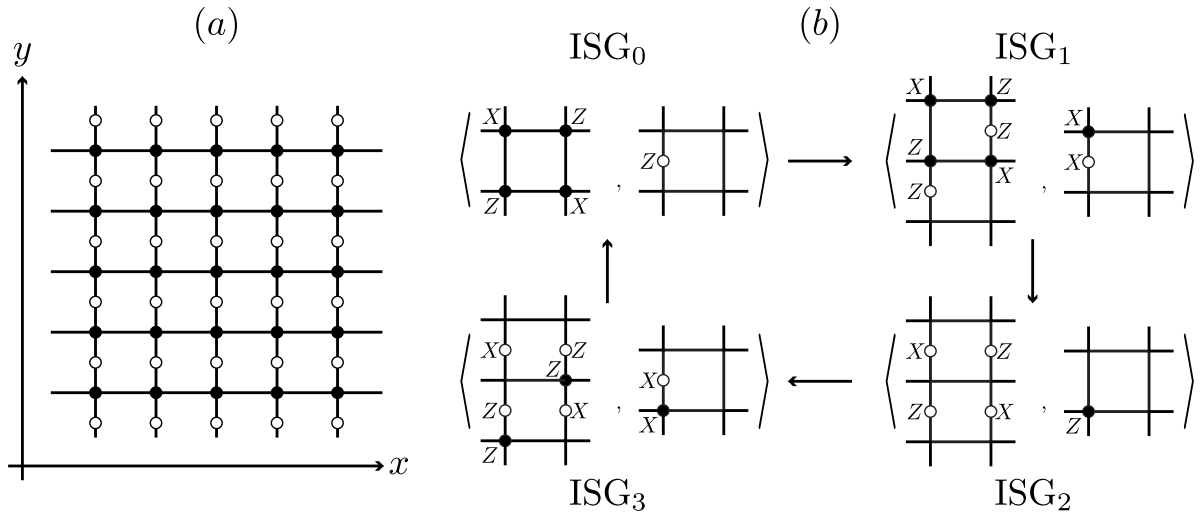


图8：(a) 展示了 WPT 模型所用的晶格。实心圆点表示数据量子比特，空心圆点表示量子隐形传态协议中使用的辅助量子比特。(b) 给出了测量序列每一步对应的 ISG。

边界。这表明，体区的名义垂直运动并不决定边界处的流。这些东边界和北边界是真空拼接的示例。我们还讨论了沿边界粘合两个相同系统的副本，展示了具有相同边界 MQCA 指数的两个 LR 循环如何实现拓扑混合。其中的讨论在更广泛的范围内适用，不局限于这一 WPT 示例。在 §D 中，我们给出了进一步的计算，展示了沿南边界以及流向反转的东边界的其他真空拼接。由于在独立的一维 LR 环中可以进行平移，因此改变净流（MQCA 指数）似乎是微不足道的，但我们的构造并未明确引入额外的一维系统。

5.1 垂直（右）边界

我们将体面元电路（$x \le 0$）与平凡电路（$x > 0$）混合，构造出一个组合。稳定子群为

$$\mathrm{ISG}_0^{(R)} = \Big\langle \{P_0(x,y)\,, Z_{x+1,y-1/2} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid x \in \mathbb{Z}_+,\, y \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\} \Big\rangle, \tag{37a}$$

$$\mathrm{ISG}_1^{(R)} = \Big\langle \{P_1(x,y)\; X_{x+1,y-1/2}X_{x+1,y} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid x \in \mathbb{Z}_+,\, y \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\} \Big\rangle, \tag{37b}$$

$$\mathrm{ISG}_2^{(R)} = \Big\langle \{P_2(x,y)\; Z_{x+1,y} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid x \in \mathbb{Z}_+,\, y \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\} \Big\rangle, \tag{37c}$$

$$\mathrm{ISG}_3^{(R)} = \Big\langle \{P_3(x,y)\,, X_{x+1,y}X_{x+1,y+1/2} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid x \in \mathbb{Z}_+,\, y \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\} \Big\rangle, \tag{37d}$$

与 $\mathrm{ISG}_{n+4}^{(R)} = \mathrm{ISG}_n^{(R)}$。

$\mathrm{ISG}_0^{(R)}$ 的局域逻辑代数由沿边界的$Z_{0,\,y}X_{0,\,y+1}$ 生成。也就是说，

$$(\mathrm{ISG}_0^{(R)})^{\perp} = \langle L_j \mid j \in \mathbb{Z}\rangle\, \mathrm{ISG}_0^{(R)}, \qquad L_j = Z_{0,j}X_{0,j+1}\,. \tag{38}$$

这些逻辑算符遵循马约拉纳链代数 （29），其对易关系为

$$L_j L_k = \begin{cases} -L_k L_j & |j-k| = 1, \\ L_k L_j & j = k \text{ or } |j-k| \geq 2. \end{cases} \tag{39}$$

在一个周期之下 在 WPT 电路的周期中，逻辑算符经历如下动力学。 :

$$\begin{aligned} Z_{0,j}X_{0,j+1} &\xmapsto[(Z_{0,j-1/2})]{\mathbf{0\to1}} Z_{0,j-1/2}Z_{0,j}X_{0,j+1} \xmapsto[(X_{0,j+1/2}X_{0,j+1})]{\mathbf{1\to2}} Z_{0,j-1/2}Z_{0,j}X_{0,j+1/2} \\ &\xmapsto[(Z_{0,j-1}Z_{0,j})]{\mathbf{2\to3}} Z_{0,j-1}Z_{0,j-1/2}X_{0,j+1/2} \xmapsto[(X_{0,j}X_{0,j+1/2})]{\mathbf{3\to4}} Z_{0,j-1}Z_{0,j-\frac{1}{2}}X_{0,j} \equiv Z_{0,j-1}X_{0,j}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

这里， $L \xmapsto[(A)]{\mathbf{i\to i+1}} L'$ i表示，当我们测量$\mathrm{ISG}_{i+1}^{(R)}$ 时， L 为$\mathrm{ISG}_i^{(R)}$ 的逻辑算符应通过 $A \in \mathrm{ISG}_i$ 进行修饰，以便与$\mathrm{ISG}_{i+1}^{(R)}$ 对易并在测量后保留下来，从而得到$L' \equiv LA$ 为$\mathrm{ISG}_{i+1}^{(R)}$ 的逻辑算符（详见下文命题2.1 的讨论）。

一个循环后的净效应是逻辑算符的平移，MQCA 指数为 $-\frac{1}{2}$。 –

5.2 水平（顶部）边界

再次，我们将体面元电路（$y \leq y_b$）与平凡电路（$y > y_b$）混合，边界位于 y_b。定义（对于 $y_b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$）稳定子群 –

$$\mathrm{ISG}_{T(y_b)} = \left\langle \{P_0(x,y)\,, Z_{x,y+1/2} \mid x \in \mathbb{Z},\, y_b - y \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y) \in \Lambda,\, y > y_b\} \right\rangle. \tag{41}$$

（回忆一下， $\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 是量子比特晶格。）从 $y_b = 0$处的边界开始，平移一个单位将使 $\mathrm{ISG}^{T(0)} \mapsto \mathrm{ISG}_{T(-1)}$。混合构造的关键在于，直接过渡 $\mathrm{ISG}_{T(y_b)} \to \mathrm{ISG}_{T(y_b+1)}$ 是局域可逆的。

事实上，$\mathrm{ISG}_{T(y_b)}$ 和 $\mathrm{ISG}_{T(y_b+1)}$ 的生成元几乎处处相同，除了 y_b 附近的一条水平条带。它们的交集 $\mathsf{S} = \mathrm{ISG}_{T(y_b)} \cap \mathrm{ISG}_{T(y_b+1)}$ 由下方的 $\{P_0(x,y)\ Z_{x,y+3/2} \mid x \in \mathbb{Z},\, y_b - y \in \mathbb{Z}_+\}$ 和上方的 $\{Z_{x,y} \mid x \in \mathbb{Z},\, y > y_b + 1\}$ 生成。在 S 上方，$\mathrm{ISG}_{T(y_b)}$ 有额外的稳定子 $Z_{x,y_b+1} \mid x \in \mathbb{Z}$；$\mathrm{ISG}_{T(y_{b+1})}$ 有额外的稳定子 $P_0(x,y_b) \mid x \in \mathbb{Z}$。$Z_{x,y_b+1}$ 和 $P_0(x,y_b)$ 构成共轭对（参见定义 2.3）：

$$Z_{x,y_b+1} P_0(x',y_b) = (-1)^{\delta_{x,x'}} P_0(x',y_b) Z_{x,y_b+1}\,. \tag{42}$$

这种混合包含 5 个步骤，前四步实现体区平移，将所有面元稳定子向远离边界的方向移动一个单位； 5th 步通过测量支撑在行 $y = -1, 0$ 上的 $\{P_0(x,-1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$，使 ISG 恢复到其起始状态。具体而言，WPT 电路的混合为：

$$\mathrm{ISG}_0^{(T)} = \mathrm{ISG}^{T(0)}\,, \tag{43a}$$

$$\mathrm{ISG}_1^{(T)} = \left\langle \{P_1\ (x,\ y)\ \ X_{x,\ y+1/2}X_{x,\ y+1} \mid x \in \mathbb{Z},\ \ y \in \mathbb{Z}_-\} \cup \{Z_{x,y} \mid\ (x,\ y)\ \ \in \Lambda,\ \ y > 0\} \right\rangle, \tag{43b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ISG}_2^{(T)} &= \left\langle \{P_2(x,y)\,, Z_{x,y+1} \mid x \in \mathbb{Z},\, y \in \mathbb{Z}_-\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y) \in \Lambda,\, y > 0\} \right\rangle \\ &= \mathrm{ISG}_{T(-1/2)}\,, \end{aligned} \tag{43c}$$

$$\mathrm{ISG}_3^{(T)} = \Big\langle \{P_3(x,y)\,, X_{x,y}X_{x,y+1/2} \mid x\in\mathbb{Z},\, y\in\mathbb{Z}_-\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y\geq 0\}\Big\rangle\,, \tag{43d}$$

$$\mathrm{ISG}_4^{(T)} = \mathrm{ISG}_{T(-1)}\,, \tag{43e}$$

$$\mathrm{ISG}_{n+5}^{(T)} = \mathrm{ISG}_n^{(T)}. \tag{43f}$$

对于 $y\leq -1$，电路与体区的电路相同，只是多了一个步骤 $\mathrm{ISG}_{5n+4}\to\mathrm{ISG}_{5n+5}$，这一步没有任何作用，因为远离边界的两个 ISG 具有相同的稳定子集合。类似地，对于 $y>0$，该电路由位点算符稳定，且具有平凡动力学。

$\mathrm{ISG}_0^{(T)}$ 的局域逻辑算符是

$$(\mathrm{ISG}_0^{(T)})^{\perp} = \langle L_j \mid j\in\mathbb{Z}\rangle\,\mathrm{ISG}_0^{(T)}, \qquad\qquad L_j = Z_{j,0}X_{j+1,0}\,. \tag{44}$$

同样，$\{L_j\}$ 满足马约拉纳链代数 (29)。经过四步电路后，逻辑算符变换为$L_j\mapsto Z_{j,\,-1}X_{j+1,\,-1}$，这等价于 $Z_{j-1,\,0}Z_{j,\,-1}X_{j+1,\,-1}Z_{j+1,\,0}$（在 $\mathrm{ISG}_4^{(T)}$ 稳定子群下）。最后一步之后，逻辑算符变为（属于等价类）$Z_{j-1,\,0}X_{j,\,0}$。因此，该混合电路的一个循环会使每个逻辑算符向左平移一个单位 $L_j\mapsto L_{j-1}$；将量子信息向左移动半个量子比特。

我们可以通过稍作修改，构造一个将量子信息向右移动的电路。稳定子群 $\mathrm{ISG}_4^{(T)}$ 由沿着 $y=0$ 的一行 Z-稳定子构成；在新电路中，我们将其替换为一行 X-稳定子，使其仍与 $\mathrm{ISG}_3^{(T)}$ 和 $\mathrm{ISG}^{(T)}{}_5 = \mathrm{ISG}^{T(0)}$ 局域可逆。

$$\begin{aligned}
\mathrm{ISG}_t^{(T')} &= \mathrm{ISG}_t^{(T)} \qquad t\notin 5\mathbb{Z}+4,\\
\mathrm{ISG}_{5n+4}^{(T')} &= \Big\langle \{P_0(x,y-1)\,, Z_{x,y+1/2} \mid x\in\mathbb{Z},\, y\in\mathbb{Z}_-\}\\
&\qquad \cup \{X_{(x,0)} \mid x\in\mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y>0\}\Big\rangle\,.
\end{aligned} \tag{45}$$

在此电路作用下，逻辑算符 $L_j = Z_{j,\,0}X_{j+1,\,0}$ 经过四步后仍映射为 $Z_{j,\,-1}X_{j+1,\,-1}$，并在一个完整循环后变换为 $L_{j+1} = Z_{j+1,\,0}X_{j+2,\,0}$。

5.3 双重 WPT：周期倍增与粘合

现在我们展示，将 WPT 模型加倍会得到一个总能被平凡化的边界。使 LR 循环加倍有两种方法：（1）采用双周期，让$T\to 2T$；或（2）将两个 WPT 电路副本做张量积，堆叠在一起。

在第一种情形中，周期加倍意味着由 L_k 生成的马约拉纳链代数变换为 $L_k\mapsto L_{k\pm 2}$。通过附加电路 (122)（或其逆），我们可以构造一个静止边界，即一种使边界 MQCA 成为恒等映射的粘合。

在第二种情形中，我们可以如下“打开”边缘的能隙。取两个带有边界的相同 WPT 副本（例如，§5.1）。每个副本都具有由 $L^{1,k}{}^2$ 生成的边界马约拉纳链代数，并受一个会移动 $L^{1,\,2}_k\mapsto L^{1,k\pm 1}{}^2$ 的非平凡 MQCA 作用。我们将成对的逻辑算符 $L^1_kL^2_k$（它们彼此对易！）加入稳定子群。

这种省略构式是以下更一般情形的一个实例。考虑两个 d 维拓扑 LR 循环的副本。为便于说明，我们设想每个系统都是一个二维片层。假设该片层允许在

左侧进行真空混合，因此所有体门都留在右半部分，而界面区域 I 沿垂直方向延伸，但厚度均匀且有限。混合始于背景码 $\mathcal{A}$。我们找出 $\mathcal{L}$，即所有支撑有限地位于 I 上的 $\mathcal{A}$ 的逻辑算符。由于有两个相同的片层，我们有两个相同的基群 $\mathcal{A}\otimes\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes\mathcal{A}$、相同的逻辑群 $\mathcal{L}\otimes\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes\mathcal{L}$ 以及相同的边界 MQCA $\alpha\otimes\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes\alpha$。

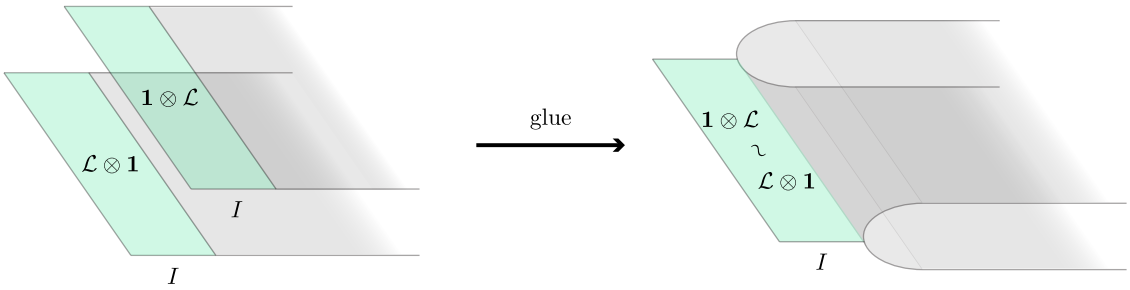


图 9：沿界面区域粘合两个相同的真空拼接。由于边界上的两个 MQCA 相同，由 $P\otimes P$ 和 $P\in\mathcal{L}$ 生成的边界逻辑群的阿贝尔子群在动力学作用下保持静止。

在保持双层系统与边界的所有门不变的情况下，我们修改基码以定义

$$\mathcal{A}_{\text{glued}}=\left\langle \mathcal{A}\otimes\mathbf{1},\quad \mathbf{1}\otimes\mathcal{A},\quad \{P\otimes P\,|\,P\in\mathcal{L}\}\right\rangle. \tag{46}$$

然后，很容易看出 $\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 是阿贝尔的，[9] 并且 $\alpha\otimes\alpha$ 将 $\mathcal{A}_{\text{glued}}/(\mathcal{A}\times\mathcal{A})$ 映射到其自身。

由于$\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 的第三组生成元会将双层系统与几乎所有可能的算符耦合起来，人们可能会预期 $\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 也同样是一个拓扑码。然而，这并不总是成立（在当前的真空混合定义下）。一个反例是位于界面区域内的“漂浮”无限伊辛链，但电路中的任何门都不会作用于它。伊辛链唯一具有有限支撑的逻辑算符是单格点的 Z，因此$\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 的第三组生成元将由 $Z\otimes Z$组成，从而形成一个梯子几何上的伊辛系统，而该系统不是拓扑码。

如果拓扑 LR 循环的真空混合具有无中心边界逻辑商群 L/A_I，那么我们可以证明，$\mathrm{A}^{\text{glued}}$不存在非平凡的有限支撑逻辑算符。根据 §3.3 中讨论的 A 在界面区域处的逻辑算符局域化，只需考察一个可能的逻辑算符 $P\otimes Q\in\mathrm{L}\times\mathrm{L}$。由于 $\mathrm{A}^{\text{glued}}$ 包含 $Q\otimes Q$，这个可能的逻辑算符等价于 $PQ\otimes\mathbf{1}\in\mathrm{L}\otimes\mathbf{1}$，而它应与所有 $P'\otimes P'\in\mathrm{A}^{\text{glued}}$ 对易，这意味着 $PQ\in\mathrm{L}$ 与 L 中的所有元素对易。因此，$PQ\in\mathsf{Cent(L)}\subseteq\mathrm{A}$，因为 L/A_I 是无中心的；并且 $PQ\otimes\mathbf{1}\in\mathrm{A}\otimes\mathbf{1}\subseteq\mathrm{A}^{\text{glued}}$，也就是说，这个可能的逻辑算符是平凡的。

我们在此总结结论：

命题 5.1. *对于在界面处以无中心群为对象、产生边界 MQCA $\alpha\otimes\alpha$ 的任意拓扑 LR 循环的两份真空混合，存在一个新的基码 A^{glued}，它包含这两种混合的基码 $A\times A$，并且 A^{glued} 没有有限支撑的非平凡逻辑算符，且 $\alpha\otimes\alpha$ 将 $A_{\text{glued}}/(A\times A)$ 映入自身。*

[9] 对于奇素数维量子比特，我们对第二张片取复共轭，使 $\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 成为阿贝尔的；这里的复共轭是在使“泡利” X 为实数且“泡利” Z 为对角的基下进行的。$\langle\mathcal{A}\otimes\mathbf{1},\quad \mathbf{1}\otimes\mathcal{A}^*,\ \{P\otimes P^*\,|\,P\in\mathcal{L}\}\rangle$。

我们得到一个新的 LR 循环，从 $\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 开始，并通过预粘合的两种相同混合所对应的门演化。最容易看出这一点的方法，是考虑一个由局域可逆电路构造的幺正电路。该电路从背景码 $\mathcal{A}\ \times\mathcal{A}$ 开始，当然也可以从更大的背景码 $\mathcal{A}_{\text{glued}} \supseteq \mathcal{A}\times\mathcal{A}$开始。我们并不声称这个新的 LR 循环总是拓扑的。由于不存在非平凡逻辑算符，它几乎是拓扑的；但我们不知道形式为 $P\otimes P$ 的第三组生成元是否是均匀局部生成的，而这取决于 $\mathcal{A}$ ，后者基本上不受约束。

如果将粘合区域展开，使一片层位于右侧，另一片层位于左侧，那么一眼便可看出，$\mathcal{A}^{\text{glued}}$ 对于 WPT 模型而言是拓扑的。WPT 模型的 LR 循环与其空间反射后的 LR 循环之间的这种混合是拓扑的。

6 HH蜂窝Floquet码及其边界动力学

上一节中，我们构造了一个基于 Wen plaquette模型的 LR 循环。这里，我们讨论另一个例子——实现 LR 循环的 Hastings–Haah 蜂窝码（HH码） [16], ，并计算平直边界上的边界 MQCA。下面的一种边界条件会诱导出具有非平凡传播范围的边界 MQCA，因此算符的尺寸实际上会随时间线性增长。

此外，我们还展示了如何通过将周期加倍来“打开”边界能隙。如果将 LR 循环的周期加倍，边界 MQCA 指标模 $\mathbb{Z}$ 总是为零。因此，我们可以设想找到一种真空混合，使边界处不存在局域逻辑算符。我们证明 HH码确实存在这种情况。该构造给出了一个周期为 6 的测量电路，这与 [22, 23, 21]的平面蜂窝码不同：我们的体动力学在后半段只是重复，而在 [22, 23, 21]中则在后半段反转。这是要在有限补丁上实现纠错码所必需的修改。

在§E中，我们展示了 HH 码的 LR 循环与 WPT 模型的 LR 循环之间的拓扑混合、有限圆盘边界上的手性边缘动力学，以及各种其他边界条件。

6.1 HH码的局部可逆循环

HH码是一种定义在任意三价、面元三着色晶格上的二维Floquet码。为便于说明，所有图示都将采用蜂窝晶格，尽管这些结果更普遍适用。着色方案见图 10。我们将面元颜色设为 R， G， B，分别对应红色、绿色和蓝色。面元着色会导出边着色；由于每条边都必须连接两个颜色相同的面元，我们将连接红色面元的边称为红色边，连接蓝色面元的边称为蓝色边，连接绿色面元的边称为绿色边。相邻红色面元与绿色面元之间的公共边始终为蓝色边，相邻绿色面元与蓝色面元之间的公共边始终为红色边，依此类推。

该模型在晶格的每个顶点上都有一个量子比特。我们用颜色和泡利标签来表示一组边算符：E^{p} 颜色 表示颜色 $\in\{R,G,B\}$，而 $p\in\{X,Y,Z\}$表示泡利标签。例如， E^{X}_{R}表示由 XX 给出的一组双量子比特算符，它们作用于红色边上的一对顶点。类似地，我们用颜色和泡利标签来表示一组面元算符： P^{p} 颜色 表示颜色 $\in\{R,G,B\}$，而 $\{X,Y,Z\}$表示泡利标签。例如， P^{X}_{G}表示由泡利 X 算符的乘积给出的一组面元算符，这些算符作用于绿色面元边界上的顶点。记作

$\langle E^p$ 颜色$\rangle$ 和$\langle P^p$ 颜色$\rangle$ 作为由以下元素生成的稳定子群： E^p 颜色和 P^p 颜色分别。注意，$\langle P^p_{c'}\rangle \subset \langle E^p_c \rangle$ 对于不同的颜色 $c' \neq c$（见图10）。

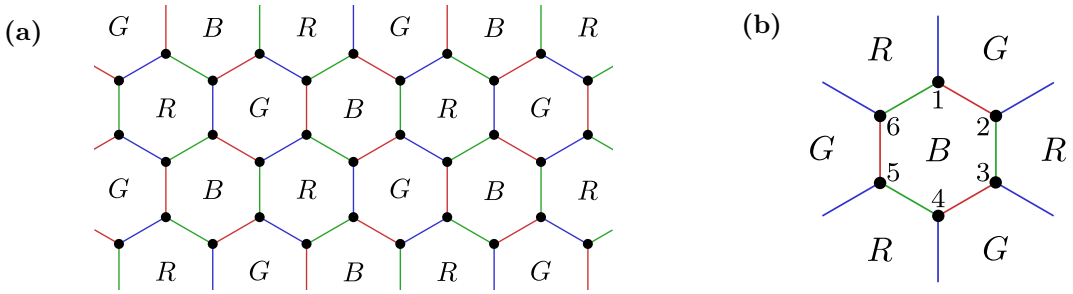


图 10：**(a)** 蜂窝晶格上的面元着色。每个面元和边缘被着色为红色（R）、绿色（G）或蓝色（B）。**(b)** 一个有六个顶点的蓝色面元。蓝色面元周围由交替排列的红色和绿色边组成。

HH码由以下三周期测量调度 $\ldots, \mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{R} \ldots$ 构成。

$$\text{Step } \mathbf{R} : E_R^X\,, \qquad \text{Step } \mathbf{G} : E_G^Y\,, \qquad \text{Step } \mathbf{B} : E_B^Z\,. \tag{47}$$

这三个步骤（**R**、**G**、**B**）作为“Floquet码”重复进行。测量序列在 ISG 之间实现一个电路。

$$\cdots \xrightarrow{E_R^X} \mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \xrightarrow{E_G^Y} \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}} \xrightarrow{E_B^Z} \mathrm{ISG}_{\mathbf{B}} \xrightarrow{E_R^X} \mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \xrightarrow{E_G^Y} \cdots\,, \tag{48}$$

其中

$$\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \equiv \left\langle E_R^X, P_R^X, P_G^Y, P_B^Z \right\rangle, \tag{49a}$$

$$\mathrm{ISG}_{\mathbf{G}} \equiv \left\langle E_G^Y, P_R^X, P_G^Y, P_B^Z \right\rangle, \tag{49b}$$

$$\mathrm{ISG}_{\mathbf{B}} \equiv \left\langle E_B^Z, P_R^X, P_G^Y, P_B^Z \right\rangle. \tag{49c}$$

ISG 严格大于相应的测量集（例如 $\langle E_G^Y\rangle \subset \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}$），因为经过成对测量后推断出的稳定子与后续测量对易。例如，先测量 E_R^X，再测量 E_G^Y，可推断出 P_B^Z 面元稳定子；在一个蓝色面元周围，E_R^X 生成 $\prod_{v\in\mathrm{plaq}} X_v$，而 E_G^Y 生成 $\prod_{v\in\mathrm{plaq}} Y_v$，二者共同使 $\prod_{v\in\mathrm{plaq}} Z_v \in P_B^Z$ 属于 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}$.[10]

现在我们明确证明，ISG 之间的跃迁是局域可逆的。考虑这一对 $(\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}, \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}})$。它们的交集为 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}} = \left\langle P_R^X, P_G^Y, P_B^X, P_B^Y, P_B^Z \right\rangle$。注意，$E_R^X$ 和 E_G^Y 中的每个算符都完全沿着某个蓝色面元的边界分布，这是三价三着色图的性质。对于每个有 $2n$ 个顶点的蓝色面元，按顺时针顺序将顶点排列为 $1, 2, \ldots, 2n$，使边 $(1, 2)$（连接顶点 1 和 2）标记为红色，如图 10(b) 所示。因此，边 $(2j-1, 2j)$ 均为红色，边 $(2j, 2j+1)$ 以及 $(2n, 1)$ 均为绿色。在单个蓝色面元内，商空间 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}/(\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}})$ 由

[10]如果从“冷启动”开始实现 HH码，并采用测量序列（47），则需要经过一个完整周期，才能“预热”到 ISG 之间的可逆转变。

一组基 $\{A_i\} = \{X_3X_4, X_5X_6, \ldots, X_{2n-1}X_{2n}\}$ 生成；商空间 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}/(\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}})$ 由基 $\{Y_2Y_3, Y_4Y_5, \ldots, Y_{2n-2}Y_{2n-1}\}$ 生成。两个商空间都包含 $(n-1)$ 个生成元（而非 n），因为所有 X 的乘积（以及所有 Y 的乘积）都属于 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}} \cap \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}$。对于每个带有 $2 \le k \le n$的 k，算符 $\prod_{j=2}^{2k-1} Y_j \in \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}$ 与 $X_{2k-1}X_{2k}$ 反对易，但与 $\{A_i\}$ 的所有其他生成元对易。因此，A_i $\{\prod_{j=2}^{2k-1} Y_j\}$ 构成 $(\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}, \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}})$ 的一对共轭 ℓ 局域基[11]，满足局域可逆跃迁的定义 2.3。

由类似的论证可知，电路 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{ISG}_{\mathbf{B}}$ 和 $\mathrm{ISG}_{\mathbf{B}} \to \mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}$ 也都是局域可逆的。因此，HH码是一个局部可逆测量循环。

6.2 截断之字形边界

现在我们考虑 HH码 的各种边界，并显式计算边界逻辑代数的演化。本节余下部分，我们假设体区 HH码位于蜂窝晶格上。

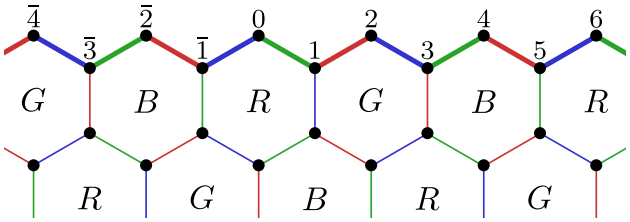


图 11：HH蜂窝码的一部分，以及显露出的之字形边界。边界上的格点已编号（$\bar{n}$ 表示 $-n$）。

图中所示的之字形边界以及顶点标记11。考虑测量电路由两类体边（E_R^X、E_G^Y，或 E_B^Z），以及沿边界进行的单体和二体测量组成。

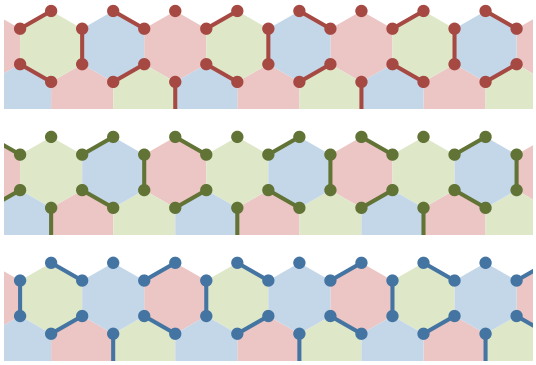
$$
\begin{aligned}
M'_{\mathbf{R}} &= E_R^X \cup \{X_{6j-2}X_{6j-1}\,,\, X_{6j+1}X_{6j+2}\,,\, X_{6j+0} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M'_{\mathbf{G}} &= E_G^Y \cup \{Y_{6j+0}Y_{6j+1}\,,\, Y_{6j+3}Y_{6j+4}\,,\, Y_{6j+2} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M'_{\mathbf{B}} &= E_B^Z \cup \{Z_{6j-4}Z_{6j-3}\,,\, Z_{6j-1}Z_{6j+0}\,,\, Z_{6j-2} \mid j \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

这些边测量源于沿晶格进行切口，形成如图 11 所示的之字形边界，随后将沿切口边的测量稳定子截断为单点稳定子。同样地，每连续两个测量步骤确定一个体面元，因此每个测量轮次对应的 ISG 包括体面元、[12] 体边稳定子，

[11]这些基是 ℓ-局域的，且 $\ell = \sup\{n_{\mathrm{plaq}}\}$，其中采用图度量。通过选择其他共轭基，可以降低 ℓ。例如，蜂窝晶格上的体区 HH 码存在满足$\ell = 1$的共轭基。[12]我们考虑图11 中属于体区的所有带有颜色标签的面元。

除了边界稳定子之外。

$$\begin{aligned}
\mathrm{ISG}'_{\mathbf{R}} &= \left\langle P_R^X, P_G^Y, P_B^Z, M'_{\mathbf{R}} \right\rangle, \\
\mathrm{ISG}'_{\mathbf{G}} &= \left\langle P_R^X, P_G^Y, P_B^Z, M'_{\mathbf{G}} \right\rangle, \\
\mathrm{ISG}'_{\mathbf{B}} &= \left\langle P_R^X, P_G^Y, P_B^Z, M'_{\mathbf{B}} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{51}$$



这里我们提供了每个步骤中测量集合和 ISG 的可视化结果。测量算符以圆点表示；单个圆点表示单点泡利算符，连接的圆点表示多点算符；深色的红、绿、蓝分别对应泡利 X、 Y、 Z。彩色六边形用于表示 ISG 中存在特定的面元算符，浅色的红、绿、蓝分别对应泡利 X、 Y、 Z 的乘积。每个步骤中的 ISG 由图示的面元算符和测量算符生成。

可以计算每个 ISG 的边界逻辑代数。我们用 $L_k^{\mathbf{R}\prime}$ 表示步骤 $\mathbf{R}$ 时针对 $k \in \mathbb{Z}$ 的边界逻辑生成元，用 $L_k^{\mathbf{G}\prime}$ 表示步骤 $\mathbf{G}$ 时针对 $k \in \mathbb{Z} - \frac{1}{3}$ 的逻辑生成元，用 $L_k^{\mathbf{B}\prime}$ 表示步骤 $\mathbf{B}$ 时针对 $k \in \mathbb{Z} - \frac{2}{3}$ 的逻辑生成元。具体而言，它们由下式给出（针对 $j \in \mathbb{Z}$）：

$$L_{2j}^{\mathbf{R}\prime} = Z_{6j-2}Z_{6j-1}Z_{6j+1}Z_{6j+2}\,, \qquad L_{2j+1}^{\mathbf{R}\prime} = X_{6j+2}X_{6j+3}X_{6j+4}\,, \tag{52a}$$

$$L_{2j+2/3}^{\mathbf{G}\prime} = X_{6j+0}X_{6j+1}X_{6j+3}X_{6j+4}\,, \qquad L_{2j+5/3}^{\mathbf{G}\prime} = Y_{6j+4}Y_{6j+5}Y_{6j+6}\,, \tag{52b}$$

$$L_{2j-2/3}^{\mathbf{B}\prime} = Y_{6j-4}Y_{6j-3}Y_{6j-1}Y_{6j+0}\,, \qquad L_{2j+1/3}^{\mathbf{B}\prime} = Z_{6j+0}Z_{6j+1}Z_{6j+2}\,. \tag{52c}$$

在每一步，边界代数都是马约拉纳链代数 (29)：$L_i^C L_j^C = (-1)^{\delta_{|i-j|,\,1}} L_j^C L_i^C$ 对每一步 C。每一步 ISG 之间的跃迁都会在这些边界逻辑代数之间诱导出一个同构。

$$\cdots \mapsto L_j^{\mathbf{R}\prime} \xrightarrow{\mathbf{R}\to\mathbf{G}} L_{j-1/3}^{\mathbf{G}\prime} \xrightarrow{\mathbf{G}\to\mathbf{B}} L_{j-2/3}^{\mathbf{B}\prime} \xrightarrow{\mathbf{B}\to\mathbf{R}} L_{j-1}^{\mathbf{R}\prime} \mapsto \cdots \tag{53}$$

尤其是，经过一个测量周期后，我们有 $L_k^C \to L_{k-1}^C$，这导致每个测量周期平移半个量子比特。与 MQCA (30) 一样，这是一个非平凡的边界作用，其 MQCA 指标为 $-\frac{1}{2}$。

6.3 具有非平凡传播范围的 MQCA

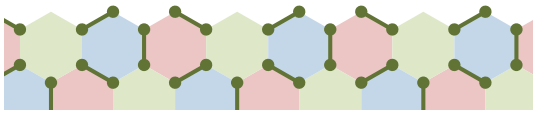
迄今为止的 MQCA 示例都是平移。从技术上讲，这些例子需要非零传播范围参数，但算符的像不会改变其支撑大小。这里我们给出一个边界 MQCA 的示例，它展现了算符的非平凡增长。

考虑锯齿形边缘上的以下边缘测量序列（图 11）。

$$M_{\mathbf{R}} = \{X_{6j+1}X_{6j+2}\,,\, X_{6j+4}X_{6j+5} \mid j \in \mathbb{Z}\}, \tag{54a}$$



$$M_{\mathbf{G}} = \{Y_{6j+3}Y_{6j+4}\,,\, Y_{6j+0}Y_{6j+1} \mid j \in \mathbb{Z}\}, \tag{54b}$$



$$M_{\mathbf{B}} = \{Z_{6j-1}Z_{6j+0}\,,\, Z_{6j+2}Z_{6j+3} \mid j \in \mathbb{Z}\}. \tag{54c}$$



我们使用与式 (51) 相同的着色方案来表示泡利测量。这些是在锯齿形边缘处截断晶格，并且仅保留整个项都位于剩余晶格上的测量后得到的边测量。值得注意的是，这与 §6.2 节中的电路不同，因为这里省略了单点测量。

相应的 ISG 由这些测量算符和体区面片算符生成。这三个 ISG 共享一组逻辑算符。

$$\{X_{6j+2}X_{6j+3}X_{6j+4}\,,\, Y_{6j-2}Y_{6j-1}Y_{6j}\,,\, Z_{6j}Z_{6j+1}Z_{6j+2} \mid j \in \mathbb{Z}\}. \tag{55}$$

由于这些算符与所有三个 ISG 对易，因此它们是边界 MQCA 的不动点；也就是说，经过一个电路周期后，它们映射到自身。此外，$\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}$ 还有额外的逻辑生成元 X_{6j}，$\mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}$ 有 Y_{6j+2}，$\mathrm{ISG}_{\mathbf{B}}$ 有 Y_{6j+4}，对应 $j \in \mathbb{Z}$。这些算符具有非平凡动力学：

$$X_0 \xmapsto{\mathbf{R}\to\mathbf{G}} (Z_0Z_1Z_2)Y_2 \xmapsto{\mathbf{G}\to\mathbf{B}} (Z_0Z_1Z_2)(X_2X_3X_4)Z_4 \xmapsto{\mathbf{B}\to\mathbf{R}} (Z_0Z_1Z_2)(X_2X_3X_4)(Y_4Y_5Y_6)X_6\,. \tag{56}$$

与前述情况不同，LR 循环下逻辑的支撑会随时间推移而增大。这里不存在矛盾，因为算符增长至多随时间线性增长。$\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}$ 的逻辑代数确实是马约拉纳链代数，其分配为

$$L_{4j} = X_{6j}\,,\quad L_{4j+1} = Y_{6j}Z_{6j+1}Z_{6j+2}\,,\quad L_{4j+2} = X_{6j+2}X_{6j+3}X_{6j+4}\,,\quad L_{4j+3} = Y_{6j+4}Y_{6j+5}Y_{6j+6}\,. \tag{57}$$

然而，该电路的一个循环实现了自同构 $L_{4j} \mapsto L_{4j}L_{4j+1}L_{4j+2}L_{4j+3}L_{4j+4}$,$L_{4j+1} \mapsto L_{4j+2}L_{4j+3}L_{4j+4}$, $L_{4j+2} \mapsto L_{4j+2}$, $L_{4j+3} \mapsto L_{4j+3}$。经过计算可知，该电路的边界 MQCA 指数为 $+\frac{1}{2}$。

使用马约拉纳基来描述这些算符很有启发性：考虑一条由马约拉纳零模组成的链 $\{\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，其中 γ_k 是满足反对易关系的厄米费米子算符$\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k = 2\delta_{k,l}$。局域可观测量由偶数个马约拉纳算符组成，它们由相邻双线性算符 $\mathbf{i}\gamma_k\gamma_{k+1}$生成。相邻双线性算符 $A_k = \mathbf{i}\gamma_{k-1}\gamma_k$ 构成一个马约拉纳链代数（29），即 $A_jA_k = (-1)^{\delta_{|j-k|,1}}A_kA_j$。因此，我们作如下约定 $L_k \cong \mathbf{i}\gamma_{k-1}\gamma_k$.[13] 那么，这个局部可逆循环实现了一个与该映射等价（至多相差符号）的自同构。

$$\gamma_k \mapsto \begin{cases} \gamma_{k+4} & k \equiv 0 \pmod 4 \\ \gamma_k & k \not\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}. \tag{58}$$

[13]这些算符 L_k 构成了$\mathbf{i}\gamma_{k-1}\gamma_k$的一个表示。该表示的逆（即从马约拉纳算符代数到矩阵代数的代数同态）称为 Jordan–Wigner 变换：$\gamma_k \sim \prod_{i\le k} L_i$。

例如，该电路变换算符 $X_0 = L_0 \cong \mathbf{i}\gamma_{-1}\gamma_0 \mapsto \mathbf{i}\gamma_{-1}\gamma_4 \cong L_0L_1L_2L_3L_4$，这解释了弦的长度为何会增长。我们观察到，沿着任意切口 $\mathbb{Z} = ((-\infty, \mathfrak{c}) \cap \mathbb{Z}) \cup ([\mathfrak{c}, \infty) \cap \mathbb{Z})$，每个循环都有一个马约拉纳穿过切口（从位置 $< \mathfrak{c}$ 移动到 $\geq \mathfrak{c}$）。[14]

6.4 有隙动力学与周期加倍

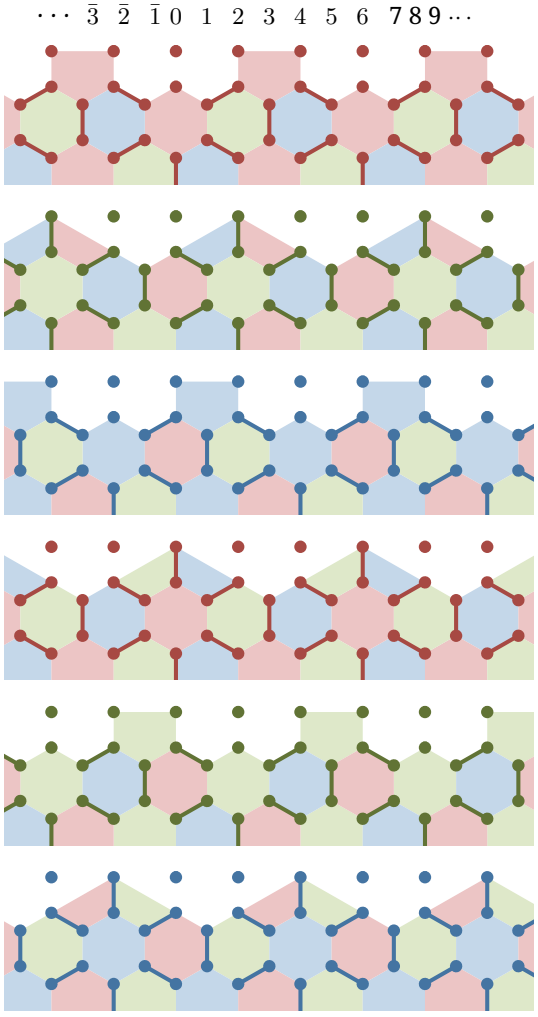
对于量子纠错的应用，我们希望找到一种平面实现，其边界由多个有隙区段组成。对于 LR 循环的真空混合，如果基码不允许任何完全支撑于边界区段小邻域内的非平凡逻辑算符，我们就称边界的特定区段为**有隙**。非平凡逻辑算符必须涉及延伸到有隙区域之外的对象。例如，终止于有隙区域、但延伸至体区的弦逻辑算符是允许的。

如果边界 MQCA 是恒等算符，那么可以通过测量边界逻辑算符，使任意平面实现产生能隙。例如，考虑图 15所示的三角形平面构型，其中逻辑代数由 $\{L_k \,|\, k \in \mathbb{Z}_{2N}\}$ 生成，并遵循马约拉纳链代数。通过向基稳定子群中加入 $\{L_{2k} \,|\, k \in [a, b]\}$ 或 $\{L_{2k+1} \,|\, k \in [a, b]\}$ ，可以沿边界构造有隙区域。对于目前讨论的边界电路，这需要测量三体或更高权重的算符。

对于某些量子计算架构，仅使用权重为 2 的算符来确定边界逻辑算符可能更有利。以下电路使用额外的辅助量子比特（放置在边缘上“偶数”格点旁），为之字形

[14]这里我们并未对费米子（M）量子元胞自动机作出任何严格论断。不过，这种联系很可能并非巧合。

边缘。



$$
\begin{aligned}
M_0 &= E_R^X \cup \{X_{6j-2}X_{6j-1}\,, X_{6j+1}X_{6j+2}\,, \\
&\qquad X^{6j-2}\,, X^{6j+0}\,, X^{6j+2} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M_1 &= E_G^Y \cup \{Y_{6j+0}Y_{6j+1}\,, Y_{6j+3}Y_{6j+4}\,, \\
&\qquad Y^{6j+0}\,, Y^{6j+2}Y_{6j+2}\,, Y^{6j+4} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M_2 &= E_B^Z \cup \{Z_{6j-4}Z_{6j-3}\,, Z_{6j-1}Z_{6j+0}\,, \\
&\qquad Z^{6j-4}\,, Z^{6j-2}\,, Z^{6j+0} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M_3 &= E_R^X \cup \{X_{6j-2}X_{6j-1}\,, X_{6j+1}X_{6j+2}\,, \\
&\qquad X^{6j-2}\,, X^{6j+0}X_{6j+0}\,, X^{6j+2} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M_4 &= E_G^Y \cup \{Y_{6j+0}Y_{6j+1}\,, Y_{6j+3}Y_{6j+4}\,, \\
&\qquad Y^{6j+0}\,, Y^{6j+2}\,, Y^{6j+4} \mid j \in \mathbb{Z}\},\\
M_5 &= E_B^Z \cup \{Z_{6j-4}Z_{6j-3}\,, Z_{6j-1}Z_{6j+0}\,, \\
&\qquad Z^{6j-4}\,, Z^{6j-2}Z_{6j-2}\,, Z^{6j+0} \mid j \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

考虑步骤 $4 \to 5 \to 0$。在步骤 4，Y_2、Y_3Y_4 和 Y^4（作用于格点 4 旁的辅助量子比特）被稳定化。步骤 5 之后，Z_2Z_3 和 Z_4Z^4 均已测量，步骤 4 中的乘积 $Y_2Y_3Y_4Y^4$ 仍保留在 ISG 中。它们的组合还会将算符 $X_2X_3X_4X^4$ 置于 ISG_5 中。在步骤 0，测量 X^4，由此推断出算符 $X_2X_3X_4$——电路（50）的一个逻辑算符（52）。类似论证将表明，$Z_0Z_1Z_2 \in \mathrm{ISG}_2$ 和 $Y_4Y_5Y_6 \in \mathrm{ISG}_4$。更多细节见 §E.3.4。每个循环中，体区面片算符都会测量两次，边界算符则检查三次。

沿平面边界的线段执行此边界序列，即可实现平面纠错码；相邻线段交替错开该周期的 3 个测量步骤。[15]此方案每个元胞使用三个辅助量子比特（仅为视觉美观）。这里，每个辅助量子比特仅在循环的一部分中使用；每个元胞使用一个辅助量子比特的类似版本见 §E.3.5。

[15]在拓扑量子场论图景中（详见讨论 §7），这些区段交替出现，分别对应 e- 和 m- 任意子凝聚。每对相邻区段之间的陷阱中都有一个马约拉纳零模。

6.5 备注

Suchara 等人 [50] 指出，将 Kitaev 蜂窝模型视为静态子系统码时，它不具有任何逻辑量子比特。与 HH 码中的凯库勒图案不同，一种自然的做法是根据方向对蜂窝晶格的边进行三分划分，[16] 然后考虑周期为 3 的测量电路，每次测量一个方向上的所有边。我们指出，此测量电路并非局域可逆，因为相邻步骤由大型共轭元素组成，类似于§2.2中的迭代隐形传态示例。

体区 $\mathbb{Z}_2$值指标在以下意义下是非手征的：它在空间反射或电路反转下保持不变。值得注意的是，HH码在保持面元着色不变的反射下具有不变性。然而，对于HH码的任何保持周期且局域可逆的终止（或任何具有非平凡 $\mathbb{Z}_2$ 指标的体相局域可逆循环的此类边界），边界 MQCA 必须具有非零指标，而这确实会破坏反射对称性（命题 4.4.2）。在前几小节所采用的之字形边界上，反射对称性因面元着色而被破坏，且边界电路具有手征动力学。然而，沿着图 12所示的“扶手椅”边界，边缘测量序列必须明确破坏反射对称性、改变电路周期性，或违反局部可逆性。

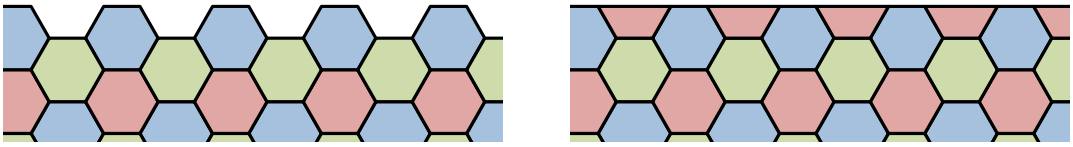


图 12：沿“扶手椅”边缘的 HH蜂窝码的可能边界终止方式。两种几何结构均具有（左右）反射对称性。因此，沿这些边界的任何电路都必须明确破坏反射对称性（通过测量操作集合）、改变电路周期性，或违反局部可逆性。

例如，Vuillot 对 HH码的平面实现 [24] 的边界几何如图 12（右）所示。将边界格点标记为整数，R 步由测量 $\{X_{2a}X_{2a+1} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ 组成，而 B 步由测量 $\{Z_{2a-1}Z_{2a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ 组成。与例 §2.2 类似，这两个步骤并非局域可逆。附录 E.4.1 给出了一个周期加倍的（6 步）LR 循环，具有有隙边界，即不存在非平凡的边界逻辑算符。附录 E.4.2 给出了一个打破反射对称性的 3 步 LR 循环。另一方面，文献 [22] 通过将体相序列改为周期为 6 的循环来规避这一问题：$\mathrm{R} \to \mathrm{G} \to \mathrm{B} \to \mathrm{R} \to \mathrm{B} \to \mathrm{G} \to \mathrm{R}$。这个长度为 6 的序列实际上按照 §3.1 的意义与长度为零的序列简单等价，因为后半部分恰好是前半部分的逆序。因此，它的 $\mathbb{Z}_2$ 指标为零。

7 讨论

通过将局域性和可逆性应用于测量电路，我们引入了测量量子元胞自动机，从而能够刻画 Floquet 测量电路中的边界反常。酉情形中的许多概念都可以延伸到测量电路中：局部可逆测量循环（LRMC）类似于有限深度幺正电路（FDUC）；测量量子元胞自动机（MQCA）推广了量子元胞自动机

[16] 三分划分将 Kitaev 蜂窝模型的各项划分为 X-、Y- 和 Z-键，如 [43] 所述。

（QCA）；MQCA 指数是 Clifford 量子元胞自动机中 GNVW 指数的推广。如果我们要对幺正电路和测量电路及其各自的 QCA 进行比较，我们的研究表明，在一维中，长程测量电路可以实现任意一维量子元胞自动机。此外，在二维长程测量电路的边界处，我们观察到了反常效应，而这些效应不可能在纯一维长程测量电路中发生。滥用记号地，我们有类别层级

$$\mathrm{FDUC} \subset \mathrm{QCA} \cong \mathrm{LRMC} \subset \mathrm{MQCA} \tag{60}$$

在一维中。

对于二维中的拓扑 LR 循环，通过考察诱导边界动力学，在一个温和（或许是多余的）假设下，我们定义了一个 $\mathbb{Z}_2$值指标。通过利用一维泡利稳定子码的分类分析独立的一维 LR 循环，我们证明，无论边界的具体细节如何，该指标对于二维体区都是定义良好的。我们的 $\mathbb{Z}_2$ 指标是拓扑混合等价下的不变量，但由于一个相当无趣的原因，它并不完备：我们对拓扑混合的定义不允许基码之间存在非平凡的有能隙边界。我们预计，对于二维量子比特上的拓扑 LR 循环，一组完备的不变量由我们的 $\mathbb{Z}_2$ 指标以及一个非负整数构成，后者用于计数基码与环面码 FDUC 等价的副本数。如果后者为零，那么前者也应为零。基于示例，我们进一步预计，我们的 $\mathbb{Z}_2$ 指标完全决定了对于二维量子比特上的拓扑 LR 循环，在边界处是否存在没有局域逻辑算符的真空混合。注意，我们没有考虑任何对称性（位点内、反幺正、等等），考虑这些对称性后，分类似乎会丰富得多 [51]。

我们考察了两个拓扑 LR 循环的例子：第§5 节中的 WPT 模型和第 §6节中的 HH码13，两者都展现了反常边界动力学。它们边界处出现的局域逻辑代数都同构于马约拉纳链代数。两个 LR 循环都实现了一个非平凡的体相自同构，将电与磁逻辑算符互换。众所周知，在 Wen plaquette模型中平移一个格点会在涌现的任意子理论上实现非平凡自同构，而这正是平移电路所实现的操作。在 HH码中，每个周期都会将一条可逆畴壁泵送穿过系统。这两项观察都与图13所示的拓扑量子场论图景一致。

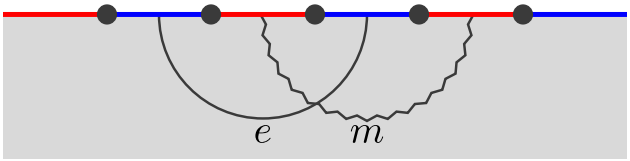


图 13：二维环面码的一条边界，由交替排列的 e （蓝色）和 m （红色）凝聚体组成。局域逻辑算符由连接相邻边界的 e 弦和 m 弦生成。

这个指标的拓扑量子场论图像相当简单。在图13 中，我们展示了二维环面码的一条边界，它由交替的 e 和 m 凝聚态描述。在每一对相邻的 e 和 m 边界之间（图13中的黑点所示），畴壁处困有一个马约拉纳零模。局域逻辑算符由连接同类型次近邻边界的 e弦和 m弦生成，如图13所示。这些局域逻辑算符满足马约拉纳链代数(29)，并且类似于在$\{L_{2j}\}$ 和$\{L_{2j+1}\}$ 中讨论的算符§5和§6。现在考虑这样一种情形：我们有一个 LR 循环，其基态稳定子群由图13 描述（或者与之等价，差别至多是一个有限深度幺正电路）。如果该电路

实现了一个非平凡的体相自同构 φ（即交换 e 和 m），那么每个 e弦都必须映射为一个 m弦，反之亦然。然而，由于基态稳定子群固定不变，e与 m凝聚的边界图样不会改变。这意味着，边界逻辑代数（由边界弦算符生成）在自同构 φ作用下必须发生非平凡变换。在保持局域性的同时实现这一点的一种方式，是平移一个马约拉纳；每个 e弦和 m弦都会映射为其正左侧（或右侧）的弦，对应于边界 MQCA 指数 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}\,\alpha_\varphi = \pm\frac{1}{2}$。（这里，$\alpha_\varphi$是由体拓扑 LR 循环诱导的某个边界 MQCA，它实现了拓扑自同构 α。）这种异常的边界作用源于非平凡的体相自同构，以及体区与边缘动力学之间的体边对应。鉴于马约拉纳的量子维数为 $\sqrt{2}$，我们可以以 2 为底对 MQCA 指数取指数：$I(\alpha) = 2^{\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}\,\alpha}$。我们可以将指数化后的 MQCA 指数解释为畴壁的量子维数，模去 2 的整数次幂。

我们的结果可推广至作用于 p维量子位上的泡利稳定子，其中维数为任意素数 p。在一维中，每个 LR 循环都有一个整数 MQCA 指数；定理4.6并未利用量子比特维数为 2 这一点的任何特殊性质，但泡利群模去相位因子后构成向量空间，这一点很重要，因此我们需要素数维量子位。从技术上说，我们用到了向量空间的任意子空间都是直和项这一事实，而在非域的系数环上，这一性质并不总是成立。对§5 中的 WPT 模型，可直接推广至 $\mathbb{Z}_p$，其边界代数满足

$$L_j L_k = s_{j,k} L_k L_j \quad \text{where } s_{j,k} = \begin{cases} \exp\left[\frac{2\pi i}{p}(j-k)\right] & |j-k| = 1, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{61}$$

该模型的一个循环再次将 $L_k \mapsto L_{k+1}$ 变换为 MQCA 指数为 $1\ 2$。因此，对于每个素数 p，我们都有一个$\mathbb{Z}_2$ 指标，适用于一类二维拓扑 LR 循环；该类别由定理 4.8 的条件所规定。更一般地，考虑作用于 N维量子位上的泡利稳定子，其中 N 为任意正整数，可以设想二维体拓扑 LR 循环具有一个取值于 $\bigoplus_{\text{素数 } p|N} \mathbb{Z}_2$ 的不变量，即对 N 的每个素因子都有一个 $\mathbb{Z}_2$-指标。如果这一设想成立，那么不同素数维量子位在任何动力学作用下都不应彼此混合。

我们也可以将这些思想推广到费米子系统。在酉情形下，费米子与玻色子情形的主要区别在于，(Clifford) f-QCA 的 GNVW 指数以 $\frac{1}{2}$ [52] 为量子化单位。我们可以定义 f-LRMC，其中稳定子是玻色子的（即由偶数个费米子算符组成）；还可以将 f-MQCA 定义为费米子代数（或其商空间）上的保局域性自同构。假设我们也能将 MQCA 指数推广到相应的费米子版本，那么就像 LRMC $\subseteq$ f-LRMC 一样，我们可以构造具有任意整数 f-MQCA 指数的一维电路。以下论证表明，纯一维电路的 f-MQCA 指数可能必须是整数。若以马约拉纳基表示一条一维费米子链，则代数的玻色子扇区由费米子双线性项生成，这恰好就是马约拉纳链代数 (29)。任何 f-LRMC 都必须由马约拉纳链代数中的算符构成。若能构造一个 f-LRMC $\mathfrak{C}_f$，其 f-MQCA 指数为 $1\ 2$，那么我们就能根据 Wen 的 plaquette 模型的边界逻辑代数，在其边界上构造一个“表示”电路 $\mathfrak{C}_b$；该边界逻辑代数是费米子双线性项代数的一种表示。这会使边界 MQCA 指数改变 $1\ 2$，这与我们的主要结果之一——定理 4.8——直接矛盾。我们还可以给出另一种论证。我们可以把测量平移看作背景码上的一个幺正电路，该背景码的一个子系统中存在平移不变态。若要使 MQCA 指数为二分之一，就必须将算符代数平移一个马约拉纳模，但并不存在

由一组完备的对易算符指定、且在单个马约拉纳模平移下保持不变的一维量子态。因此，我们预期一维中 LRMC ≅ f-LRMC。[17]

在本研究中，我们始终考察不考虑噪声或错误时测量电路的动力学。我们发现，像 Bacon–Shor 码 [53] （可将其视为对“规范”算符进行测量的周期为 2 的序列）或 Vuillot 提出的 HH 码边界 [24] 这类非局部可逆码容易受到错误影响 [54, 24]，并且在热力学极限下没有错误阈值。类似于§2.2中的迭代隐形传态示例，共轭基的非局域性意味着，要追踪逻辑算符的动力学，需要根据测量结果中的一长串结果进行经典校正。随着系统规模增大，累积的测量错误将变得无法纠正。值得探究的是，对于拓扑码，局部可逆性是否能为存在错误阈值提供一个易于检验的条件。

最后，我们设想*Floquet*拓扑码的定义条件。假设我们将“Floquet码”解释为一种涉及对不对易稳定子进行某种测量序列的码。我们看到，许多子系统码，例如 Bacon–Shor码 [53], Bombin的红宝石晶格码 [55], 以及三量子比特子系统表面码 [56]，都可归类为Floquet码。我们可以将Floquet拓扑码定义为任何具有拓扑基稳定子码的LR 循环，这当然包括许多近期工作 [17, 18, 19]。当然，也可以通过将高权重算符拆分为二体和三体算符的序列，同时保留原码的拓扑特性，从而将静态拓扑纠错码“Floquet化” [56, 57, 58]。还可以进一步要求测量电路在逻辑算符之间实现非平凡的自同构，这样便可排除这类Floquet化的码；但这也会排除CSS蜂窝Floquet码 [18, 19]!

注：在准备本手稿期间，我们了解到 [59, 60] 也研究了 Floquet码的边界动力学，所采用的方法与本文互为补充。文献 [59] 研究了以费米子表示的 HH码的 幺正化版本，并通过“手征幺正指标” [15, 52]刻画了幺正电路的边界动力学。

致谢

D.A. 感谢 Margarita Davydova、Andrew Potter 和 Zheng-han Wang 富有启发性的讨论。Z.L. 感谢 Beni Yoshida 的有益讨论。R.M. 感谢 Margarita Davydova 和 Nathanan Tantivasadakarn 富有启发性的交流。

Z.L. 获 Perimeter Institute 支持；Perimeter Institute 的研究部分由加拿大政府通过创新、科学与经济发展部以及安大略省政府通过学院与大学部提供支持。R.M. 获美国国家科学基金会 DMR-1848336 号拨款支持。

参考文献

[1] E. Knill，容错后选择量子计算：方案（2004），arXiv:quant-ph/0402171。

[17]这种等价关系可能在所有维度上都成立，因为可以在 d 维玻色系统中构造涌现费米子 ≥ 2。

[2] Sergey Bravyi 和 Alexei Kitaev，利用理想 Clifford门和含噪辅助量子比特实现通用量子计算，《物理评论A》71，022316（2005），arXiv:quant-ph/0403025。[3] Matthew P.A. Fisher、Vedika Khemani、Adam Nahum 和 Sagar Vijay，随机量子电路，Annual Review of Condensed Matter Physics 14，335–379（2023年）。[4] Daniel Gottesman 和 Isaac L. Chuang，利用量子隐形传态和单量子比特操作证明通用量子计算的可行性，《自然》402，390–393（1999），arXiv:quant-ph/9908010。[5] Hans J. Briegel 和 Robert Raussendorf，相互作用粒子阵列中的持续纠缠，《物理评论快报》86，910（2001），arXiv:quant-ph/0004051。[6] Michael A. Nielsen，基于测量和量子存储器的量子计算，《物理快报A》308，96–100（2003），arXiv:quant-ph/0108020。[7] Fenner Harper、Rahul Roy、Mark S. Rudner 和 S. L. Sondhi，Floquet系统中的拓扑与对称性破缺，Annual Review of Condensed Matter Physics 11，345–368（2020年），arXiv:1905.01317。[8] Mark S Rudner 和 Netanel H Lindner，Floquet拓扑绝缘体中的能带结构工程与非平衡动力学，《自然·物理》2，229–244（2020年）。[9] Takashi Oka 和 Hideo Aoki，石墨烯中的光伏霍尔效应，《物理评论B》79，081406（2009），arXiv:0807.4767。[10] Takuya Kitagawa、Erez Berg、Mark Rudner 和 Eugene Demler，对周期驱动量子系统的拓扑刻画，《物理评论B》82，235114（2010年），arXiv:1010.6126。[11] Netanel H. Lindner、Gil Refael 和 Victor Galitski，半导体量子阱中的Floquet拓扑绝缘体，《自然·物理》7，490–495（2011），arXiv:1008.1792。[12] Mark S. Rudner、Netanel H. Lindner、Erez Berg 和 Michael Levin，周期驱动二维系统中的反常边缘态与体边对应，《物理评论X》3，031005（2013年），arXiv:1212.3324。[13] Hoi Chun Po、Lukasz Fidkowski、Takahiro Morimoto、Andrew C. Potter 和 Ashvin Vishwanath，多体局域玻色子的手性Floquet相，《物理评论X》6，041070（2016）。[14] Fenner Harper 和 Rahul Roy，玻色子和费米子相互作用系统中的Floquet拓扑序，《物理评论快报》118，115301（2017），arXiv:1609.06303。[15] Hoi Chun Po、Lukasz Fidkowski、Ashvin Vishwanath 和 Andrew C. Potter，周期驱动Kitaev模型及更广泛系统中的激进手性Floquet相，《物理评论B》96，245116（2017），arXiv:1701.01440。[16] Matthew B. Hastings 和 Jeongwan Haah，动态生成的逻辑量子比特，Quantum 5，564（2021年），arXiv:2107.02194。[17] David Aasen、Zhenghan Wang 和 Matthew B. Hastings，哈密顿量的绝热路径、拓扑序的对称性与自同构码，《物理评论B》106，085122（2022年），arXiv:2203.11137。[18]Margarita Davydova、Nathanan Tantivasadakarn 和 Shankar Balasubramanian，无母子系统码的Floquet码（2022），arXiv:2210.02468。[19]Markus S. Kesselring、Julio C. Magdalena de la Fuente、Felix Thomsen、Jens Eisert、Stephen D. Bartlett 和 Benjamin J. Brown，任意子凝聚与颜色码（2022），arXiv:2212.00042。[20] Zhehao Zhang、David Aasen 和 Sagar Vijay，X-cube Floquet码（2022），arXiv:2211.05784。

[21] Adam Paetznick、Christina Knapp、Nicolas Delfosse、Bela Bauer、Jeongwan Haah、Matthew B. Hastings 和 Marcus P. da Silva，《使用基于马约拉纳的量子比特的平面 Floquet 码的性能》，PRX Quantum 4, 010310（2023年）。[22] Jeongwan Haah 和 Matthew B. Hastings，《蜂窝码的边界》，Quantum 6, 693（2022年），arXiv:2110.09545。[23] Craig Gidney、Michael Newman 和 Matt McEwen，《平面蜂窝码的基准测试》，Quantum 6, 813（2022年），arXiv:2202.11845。[24] Christophe Vuillot，《平面 Floquet 码》（2021年），arXiv:2110.05348。[25] D. Gross、V. Nesme、H. Vogts 和 R. F. Werner，《一维量子游走与元胞自动机的指标理论》，Commun. Math. Phys. 310, 419–454（2012年），arXiv:0910.3675。[26] Jeongwan Haah、Lukasz Fidkowski 和 Matthew B. Hastings，《高维中的非平凡量子元胞自动机》，Commun. Math. Phys. 398, 469–540（2022年），arXiv:1812.01625。[27] M. Freedman 和 M. B. Hastings，《量子元胞自动机的分类》，Commun. Math. Phys. 376, 1171–1222（2020年），arXiv:1902.10285。[28] Wilbur Shirley、Yu-An Chen、Arpit Dua、Tyler D. Ellison、Nathanan Tantivasadakarn 和 Dominic J. Williamson，《由手征半子表面拓扑序及其他机制产生的三维量子元胞自动机》，PRX Quantum 3, 030326（2022年）。[29] Yu-An Chen 和 Po-Shen Hsin，《精确可解的格点哈密顿量与引力反常》（2022年），arXiv:2110.14644。[30] Jeongwan Haah，《可逆子代数》（2022年），arXiv:2211.02086。[31] Carolyn Zhang 和 Michael Levin，《二维相互作用 Floquet 系统的体边对应》（2022年），arXiv:2209.03975。[32]Charles H. Bennett、Gilles Brassard、Claude Cr´epeau、Richard Jozsa、Asher Peres 和 William K. Wootters，《通过经典信道与爱因斯坦–波多尔斯基–罗森信道传送未知量子态》，Phys. Rev. Lett. 70, 1895（1993年）。[33] Xiao-Gang Wen，《精确可解模型中的量子序》，Phys. Rev. Lett. 90, 016803（2003年），arXiv:quant-ph/0205004。[34] Michael Freedman、Jeongwan Haah 和 Matthew B. Hastings，《量子元胞自动机的群结构》，Commun. Math. Phys. 389, 1277–1302（2022年），arXiv:1910.07998。[35] Sergey Bravyi、Matthew Hastings 和 Spyridon Michalakis，《拓扑量子序：对局域微扰的稳定性》，J. Math. Phys. 51, 093512（2010年），arXiv:1001.0344。[36] Jeongwan Haah，《作为自由模之间映射的对易泡利哈密顿量》，Commun. Math. Phys. 324, 351–399（2013年），arXiv:1204.1063。[37] Rahul M. Nandkishore 和 Michael Hermele，《分形子》，Annual Review of Condensed Matter Physics, 10, 295–313（2019年），arXiv:1803.11196。[38] Michael Pretko、Xie Chen 和 Yizhi You，《分形子物态》，International Journal of Modern Physics A 35, 2030003（2020年），arXiv:2001.01722。[39]S. B. Bravyi 和 A. Yu. Kitaev，《带边界晶格上的量子码》（1998年），arXiv:quant-ph/9811052。[40] Jeongwan Haah，《二维格点上素数维量子比特的平移不变拓扑泡利稳定子码的分类》，J. Math. Phys. 62, 012201（2021年），arXiv:1812.11193。[41] Dirk-M. Schlingemann、Holger Vogts 和 Reinhard F. Werner，《关于 Clifford 量子元胞自动机的结构》，J. Math. Phys. 49, 112104（2008年），arXiv:0804.4447。

[42] Jeongwan Haah, 《幺正动力学的拓扑相：Clifford 范畴中的分类》（2022年），arXiv:2205.09141。[43] A. Kitaev, 《精确可解模型及其扩展中的任意子》，Ann. Phys. 321, 2–111（2006年），arXiv:cond-mat/0506438。[44] J. Avron、R. Seiler 和 B. Simon, 《一对投影算子的指标》，Journal of Functional Analysis 120, 220–237（1994年）。[45] Peter D. Lax, 《泛函分析》，纯粹与应用数学（John Wiley & Sons，2002年）。[46] Donald Sarason, 《Fredholm 算子的乘法定理》，The American Mathematical Monthly 94, 68–70（1987年）。[47] Kamil P Michnicki, 《具有幂律能垒的三维拓扑量子存储器》，Phys. Rev. Lett. 113, 130501（2014年），arXiv:1406.4227。[48] Elia Portnoy, 《细分流形构造的局域量子码》（2023年），arXiv:2303.06755。[49] Sergey Bravyi 和 Barbara Terhal, 《基于稳定子码的二维自纠错量子存储器不可能性定理》，New J. Phys. 11, 043029（2009年），arXiv:0810.1983。[50] Martin Suchara、Sergey Bravyi 和 Barbara Terhal, 《拓扑子系统码的构造与噪声阈值》，J. Phys. A: Math. Theor. 44, 155301（2011年）。[51] Corey Jones, 《准局域代数的 DHR 双模与对称量子元胞自动机》（2023年），arXiv:2304.00068。[52] L. Fidkowski、H. C. Po、A. C. Potter 和 A. Vishwanath, 《二维费米子 Floquet 相的相互作用不变量》，Phys. Rev. B 99, 085115（2019年），arXiv:1703.07360。[53] Dave Bacon, 《用于自纠错量子存储器的算子量子纠错子系统》，Phys. Rev. A 73, 012340（2006年），arXiv:quant-ph/0506023。[54] John Napp 和 John Preskill, 《最优 Bacon-Shor 码》（2012年），arXiv:1209.0794。[55] H. Bombin, 《拓扑子系统码》，Phys. Rev. A 81, 032301（2010年），arXiv:0908.4246。[56] Sergey Bravyi、Guillaume Duclos-Cianci、David Poulin 和 Martin Suchara, 《具有三量子比特校验算子的子系统表面码》，Quantum Info. and Comput. 13, 0963–0985（2012年），arXiv:1207.1443。[57] Rui Chao、Michael E. Beverland、Nicolas Delfosse 和 Jeongwan Haah, 《基于马约拉纳的量子比特的表面码设计优化》，Quantum 4, 352（2020年），arXiv:2007.00307。[58] Craig Gidney, 《五边形上的成对测量表面码》（2022年），arXiv:2206.12780。[59] Joseph Sullivan、Rui Wen 和 Andrew C. Potter, 《扭转缺陷网络中的 Floquet 码与 Floquet 相》（2023年），arXiv:2303.17664。[60] Brenden Roberts、Sagar Vijay、Ashvin Vishwanath 和 Arpit Dua, 《Floquet 码的拓扑不变量》（2023年），即将发表。[61] A. R. Calderbank、E. M Rains、P. W. Shor 和 N. J. A. Sloane, 《量子纠错与正交几何》，Phys. Rev. Lett. 78, 405–408（1997年），arXiv:quant-ph/9605005。

A 一些代数

命题 A.1. 设 A 和 B 是有限维 $\mathbb{F}$-向量空间 P 中的自正交子空间，该空间配备了辛形式 λ。令 $S = A \cap B$。对于任意子空间 $\perp$，表示其在 P中的正交补。以下条件等价。

(a) 线性映射 $B/S \ni b + S \mapsto \lambda(b, \cdot) \in (A/S)^*$ 和 $A/S \ni a + S \mapsto \lambda(a, \cdot) \in (B/S)^*$ 均为满射。*(b)* *(a)*中的线性映射均为单射，即 $A^\perp \cap B = S = A \cap B^\perp$。*(c)* 诱导的双线性映射 $A/S \times B/S \ni (a + S, b + S) \mapsto \lambda(a, b) \in \mathbb{F}$ 是非奇异的，即 *(a)*中的线性映射均为线性同构。*(d)* 存在一个子空间 $L \subseteq P$，使得 $L + A = A^\perp$ 和 $L + B = B^\perp$。*(d')* 存在一个子空间 $H \subseteq P$，在其上 λ 限制为非奇异形式，且 $H + A = A^\perp$ 和 $H + B = B^\perp$。*(e)* 对任意 $p \in S^\perp$，存在 $a \in A, b \in B$，使得 $\lambda(p - a, B) = 0$ 且 $\lambda(p - b, A) = 0$。*(f)* $A^\perp/A$ 和 $B^\perp/B$ 是典范同构的，其中同构 $A^\perp/A \to B^\perp/B$ 对每个 $a' + A$（此处 $a' \in A^\perp$）的定义方式是：寻找满足 $a' + a \in B^\perp$ 的 $a \in A$，并定义$a' + A \mapsto a' + a + B$。

若 *(d')* 成立，则这些和是正交和。

定理 2.1 是正文中针对 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ 的这个命题的特例。这里，(a–e) 与2.1(a–e)逐项对应。感兴趣的读者可以使用 [61] 轻松完成转录。(f) 则用于 MQCA 的抽象定义。

证明。(a) $\leftrightarrow$ (b) $\leftrightarrow$ (c)：线性满射意味着定义域的维数至少与陪域的维数相同。因此，(a) 意味着 A/S、B/S 及其对偶空间的维数都相同。线性单射意味着陪域的维数至少与定义域的维数相同。因此，(b) 意味着 A/S、B/S 及其对偶空间的维数都相同。在维数相同的有限维空间之间，满射或单射自动就是同构。同构既是满射也是单射。

(a,b,c) $\to$ (d')：对于任意 $p \in S^\perp$，我们有 $\lambda(p, \cdot) \in (B/S)^*$ 定义良好。但 (a) 表明，这个线性泛函等于某个 $a(p) \in A$对应的 $\lambda(a(p), \cdot)$，这意味着对所有 $p \in S^\perp$，$p - a(p) \in B^\perp$。根据 (b)，这样的 $a(p)$ 在相差一个 S 的意义下唯一。特别地，由于 $A^\perp \subseteq S^\perp$，我们将线性子空间 H定义为 $\{a' - a(a') | a' \in A'\}$ 的 $\mathbb{F}$-张成，其中 A' 满足 $\{a' + A | a' \in A'\}$ 是 $A^\perp/A$的任意一组基。根据构造，$H \subseteq B^\perp$。显然，$H \subseteq A^\perp + A$ 且 $A^\perp \subseteq H + A$。注意到 $A \subseteq A^\perp$，可得 $H + A = A^\perp$。由于 $\lambda(a' - a(a')\ a'' - a(a'')) = \lambda(a', a'')$，$\lambda$ 限制在 H 上的形式与其在 $A^\perp/A$ 上的形式相同，而后者是非奇异的。因此，$H \perp A$ 意味着 $H \cap A = 0$；类似地，$H \cap B = 0$。由于 $H \subseteq B^\perp$，我们有 $B^\perp \supseteq B + H$。根据 (c)，我们知道 $\dim A^\perp = \dim B^\perp$ 且 $\dim A = \dim B$，所以必有 $B^\perp = B \oplus H$。

(d) $\leftrightarrow$ (d') 假设 (d)。将 L 分解为双曲子空间 H 与自正交子空间 S的正交和：$L = H \oplus S$。根据假设，$S \perp A$，此外，由该分解可得$S \perp S$ 和 $S \perp H$。因此，$S \subseteq (H + S + A)^\perp = (A^\perp)^\perp = A$。所以，

$A^\perp = A + L = A + S + H = A + H$。类似地，$S \subseteq (H + S + B)^\perp = B$ 和 $B^\perp = B + H$。这就是 (d')。显然，(d') 蕴含 (d)。

(d') $\to$ (c)：L 上的 λ 非奇异性意味着 $P = L \oplus L^\perp$。$L \subseteq A^\perp$ 意味着 $A \subseteq L^\perp$；同理，$B \subseteq L^\perp$。于是，$A^\perp \cap B = (L \oplus A) \cap B = A \cap B = S = A \cap (L \oplus B) = A \cap B^\perp$。

(a) $\to$ (e)：根据假设，$\lambda(p, \cdot) \in (A/S)^*$。由 (a)，选取满足 $\lambda(p, \cdot) = \lambda(b, \cdot)$的 $b \in B$。由对称性，可找到满足 $\lambda(p, \cdot) = \lambda(a, \cdot)$的 $a \in A$。

(e) $\to$ (a)：如果 $f \in (A/S)^*$，那么我们可以将 f 延拓为 $S^\perp/S$上的某个线性泛函，它可表示为 $\lambda(p, \cdot)$，其中 $p \in S^\perp$。由 (e)，可找到某个 b使得 $\lambda(p - b, A) = 0$。由此可得 $f = \lambda(b, \cdot)$，因此 $B/S \to (A/S)^*$ 是满射。由对称性，(a) 得证。

(d) $\leftrightarrow$ (f)：假设 (d)，则 $A^\perp/A \cong L \cong B^\perp/B$。此外，由于每个 $a' \in A^\perp$ 都可以分解为 $a' = a_0 + l$（此处 $a_0 \in A$），并且任何满足 $a' + a \in B^\perp$ 的 $a \in A$ 都必须具有 $a = s - a_0$（此处 $s \in S = A \cap B$）的形式，我们知道 $a' + a + B$ 在 $B^\perp/B$中是良定义的。因此，同构的 $A^\perp/A \cong B^\perp/B$ 不依赖于 L的选择。假设 (f)，我们通过为 $A^\perp/A$选择一个基，为基中的每个 $a' + A$ 找到一个 a（可能不唯一），并由 $a' + a$张成 L，来定义一个 L（可能不唯一）。显然，$L \oplus A = A^\perp$。$L \cap B = 0$ 和 $L + B = B^\perp$分别由 $A^\perp/A \to B^\perp/B$的单射性和满射性推出。 □

广义泡利矩阵和傅里叶变换。设 $p > 1$ 为整数，$\omega = e^{2\pi \mathrm{i} k/p}$为一个本原的 p次单位根，其中 $\gcd(p, k) = 1$。设 $|a\rangle$ 对 $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ 张成 $\mathbb{C}^p$。广义泡利矩阵为 $X = \sum_{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} |j+1\rangle\langle j|$ 和 $Z = \sum_{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^j |j\rangle\langle j|$。定义离散傅里叶变换 $F = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} |a\rangle\, \omega^{ab}\, \langle b|$。容易验证

$$XZ = \omega^{-1} ZX, \qquad FF^\dagger = \mathbf{1}, \qquad FXF^\dagger = Z. \tag{62}$$

由于 $\{X^a Z^b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ 在希尔伯特–施密特内积下构成一组正交归一的算符基，因此我们可以在此基下展开 F。这些是单个量子位的矩阵恒等式，但推广起来很直接。

引理 A.2. 如果 A 和 B 是有限维复向量空间上的酉算子，使得

$$A^p = B^p = \mathbf{1}, \quad AB = \omega^{-1} BA, \quad \Big|\{\omega^k \in \mathbb{C} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\Big| = p, \tag{63}$$

那么存在某些 $\lambda_{a,b} \in \mathbb{C}$ 以及一个幺正算符 U，使得

$$U = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \lambda_{a,b} A^a B^b, \qquad UAU^\dagger = B\,. \tag{64}$$

若 p 为奇数，则 $\lambda_{a,\,b}$ 可以选择为 $p^{-1}\omega^{-((p+1)/2)^2}$<style id="7'">$(a-b)$ ^{2}。

证明。由于 B 是一个酉算子，存在一个特征向量 $|k\rangle$ 属于 B，其中本征值必为 p次单位根，记作 ω^k。然后，对易关系表明，对于任意 $n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$|\bar{n}\rangle = A^{n-k} |\bar{k}\rangle$ 是 B 的一个本征向量，其本征值为 ω^n。因此，A 和 B 在由以下向量的$\mathbb{C}$-线性张成空间上的作用 $\{|\bar{n}\rangle : n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ 是 X, Z的一个表示。由于 X, Z 的代数是单的，该表示在酉变换意义下唯一。对于 $A = X$ 和 $B = Z$，声明中的这样的 U 由傅里叶变换存在，对于更一般的 A, B也是如此。当 p 为奇数时对 $\lambda_{a,b}$ 的特殊选择可由直接计算得到。 □

B MQCA 指数的详细说明

重新讨论 (23),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R^{/\mathcal{S}} &= \{x\mathcal{S} \in \mathcal{L}/\mathcal{S} \mid x \in \mathcal{L}, \operatorname{Supp}(x) \subseteq R\},\\
\mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}} &= \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{(k,\infty)}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}} &= \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{(-\infty,k)}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{L}_{\infty}^{/\mathcal{S}} &= \mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}}\mathcal{L}_{-\infty}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{F} &= (\mathcal{L}/\mathcal{S})\Big/\mathcal{L}_{\infty}^{/\mathcal{S}},\\
\mathcal{F}_{<a} &= (\mathcal{L}_{<a}^{/\mathcal{S}}\mathcal{L}_{+\infty}^{/\mathcal{S}})\Big/\mathcal{L}_{\infty}^{/\mathcal{S}}.
\end{aligned} \tag{65}$$

回想一下，$a \le b$ 和$\mathcal{F}_\circ$是一个子群，使得$\mathcal{F}_{<a} \subseteq \mathcal{F}_\circ \subseteq \mathcal{F}_{<b\circ}$ 令 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_\circ$ 和$\iota : \mathcal{F}_\circ \to \mathcal{F}$ 分别为投影映射和包含映射，满足 $\nu\iota = \mathbf{id}_{\mathcal{F}_\circ}$。我们希望证明 $\phi = \nu\bar{\alpha}|_{\mathcal{F}_\circ} : \mathcal{F}_\circ, \xrightarrow{\iota} \mathcal{F} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{F} \xrightarrow{\nu} \mathcal{F}_\circ$ 是 Fredholm 算子，且其 Fredholm 指数与 a, b, ν的选择无关。

命题*4.2* *MQCA* 指数是良定义的。

定义一个映射

$$\eta : \mathcal{F}_\circ \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{F} \xrightarrow{\bar{\alpha}^{-1}} \mathcal{F} \xrightarrow{\nu} \mathcal{F}_\circ . \tag{66}$$

假设 α 和 α^{-1} 的作用范围至多为 r，因此对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，有 $\bar{\alpha}(\mathrm{F}_{<k}) \subseteq \mathrm{F}_{<k+r}$ 以及 $\bar{\alpha}^{-1}(\mathrm{F}_{<k}) \subseteq \mathrm{F}_{<k+r}$。由于投影 ν在$\mathrm{F}_{<a}$上作用为恒等算符，因此对于任意 $f \in \mathrm{F}_{<a-2r}$，都有 $\eta(\phi(f)) = \eta(\bar{\alpha}(f)) = f$。取任意子空间$\mathrm{E} \subset \mathrm{F}_\circ$，使得$\mathrm{F}_\circ = \mathrm{F}_{<a-2r} \oplus \mathrm{E}$。我们看到$(\eta\phi - \mathbf{1})(\mathrm{F}_{<a}) = (\eta\phi - \mathbf{1})(\mathrm{E})$。这里，$\mathrm{E} \cong \mathrm{F}_\circ/\mathrm{F}_{<a-2r}$ 包含于$\mathrm{F}_{<b}/\mathrm{F}_{<a-2r}$中，也就是从$\mathrm{L}_{<b}/$到$\mathrm{L}_{<a-2r}$的典范映射的像。由于区间 $[a-2r, b)$ 内只有有限个量子比特，该像是有限维的。因此，E是有限维的，$\eta\phi - \mathbf{1}$的像也是如此。交换 α 和 α^{-1}的角色可知，$\phi\eta - \mathbf{1}$ 也是有限秩的。因此，η 是 ϕ的伪逆，这意味着 ϕ 是 Fredholm 算子。

若 a', b', ν' 是其他一些可使其成为 Fredholm 映射 ϕ' 的选择，则令 $a'' = \min(a, a')$，并考虑一个投影到 $\mathcal{F}_{<a''}$ 的新投影 ν''，它给出一个新的 Fredholm 映射 ϕ''。只需证明 $\operatorname{ind}(\phi) = \operatorname{ind}(\phi'')$，因为根据对称性，我们也有 $\operatorname{ind}(\phi') = \operatorname{ind}(\phi'')$。我们沿着下图追踪

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}_\circ & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}_\circ \\
{\scriptstyle \iota''}\uparrow & & & & & \searrow^{\nu''} & \downarrow{\scriptstyle \nu''} \\
\mathcal{F}_{<a''} & & & & & & \mathcal{F}_{<a''}
\end{array} \tag{67}$$

其中 ι, ι'' 是包含映射。

我们声称，与图中三角形相关的差值 $\Delta = (\nu''\nu\bar{\alpha}\iota - \nu''\bar{\alpha}\iota) : \mathcal{F}_\circ \to \mathcal{F}_{<a''}$具有有限秩。为此，我们回顾一下，两个投影算子 ν 和 ν'' 在 $\mathcal{F}_{<a''}$上都是恒等算符。因此，差值 Δ在 $\mathcal{F}_{<a''-r}$ 上为零，其中 r 是 $\bar{\alpha}$的作用范围（也称为传播范围）。因此，

$\Delta(\mathrm{F}_\circ) = \Delta(\mathrm{E})$，其中 E 是一个子空间，满足 $\mathrm{F}_{<a''-r} \oplus \mathrm{E} = \mathrm{F}_\circ$。这个直和补 E 不一定唯一，但总是与 $\mathrm{F}_\circ/\mathrm{F}_{<a''-r}$同构，而后者包含于 $\mathrm{F}_{<b}/\mathrm{F}_{<a''-r}$；后者是 $\mathrm{L}_{<b}/\mathrm{L}_{<a''-r}$的典范像。由于区间 $[a''-r, a) \subset \mathbb{Z}$中只有有限多个量子比特，因此该像是有限维的。因此， Δ 具有有限秩。根据 Fredholm 指数的稳定性 (20)，可得 $\mathrm{ind}(\phi'') = \mathrm{ind}(\nu''\nu\bar{\alpha}\iota\iota'')$。其中，后一个映射，即图中最长的映射链，等于 $\nu''\phi\iota''$。

剩下需要证明的是 $\mathrm{ind}(\nu''\phi\iota'') = \mathrm{ind}(\phi)$。为此，我们使用 Fredholm 指数的复合规则 (21)。包含映射 ι'' 是单射，其核为零，因此 $\mathrm{ind}(\iota'') = -\dim$ 余核 $\iota'' = -\dim \mathrm{F}_\circ/\mathrm{F}_{<a''}$，而我们已经证明它是有限的。另一方面，投影 $\nu'' : \mathrm{F}_\circ \to \mathrm{F}_{<a''}$ 是满射，因此 $\mathrm{ind}(\nu''|_{\mathcal{F}_\circ}) = \dim$ 核$(\nu''|_{\mathcal{F}_\circ}) = \dim \mathrm{F}_\circ/\mathrm{F}_{<a''\circ}$ 因此，$\mathrm{ind}(\iota'') + \mathrm{ind}(\nu''|_{\mathcal{F}_{<a}}) = 0$，引理得证。 □

B.1 性质

证明*4.3* 关于 *MQCA* 指数的性质。

(第 1 项) 这可由 Fredholm 指数的直和法则 (21) 得出。

（条目 2）设 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{<a} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个投影，也是包含映射 $\iota : \mathcal{F}_{<a} \to \mathcal{F}$的左逆，即 $\nu\iota = \mathbf{1}$ on $\mathcal{F}_{<a\circ}$ 于是，

$$\begin{aligned} \nu\bar{\alpha}\bar{\beta}\iota &= \nu\bar{\alpha}(\iota\nu + \mathbf{1} - \iota\nu)\bar{\beta}\iota \\ &= \nu\bar{\alpha}\iota\nu\bar{\beta}\iota + \nu\bar{\alpha}(\mathbf{1} - \iota\nu)\bar{\beta}\iota \\ &= (\nu\bar{\alpha}\iota)(\nu\bar{\beta}\iota) + \nu\bar{\alpha}(\mathbf{1} - \iota\nu)\bar{\beta}\iota\,. \end{aligned} \tag{68}$$

这里，最后一项是有限秩的，因为 β 保持局域性：对于所有 $f \in \mathcal{F}_{<a-r}$，我们知道 $\bar{\beta}(f) = \iota\nu\beta(f)$，其中 r是 β的传播范围，而 $\mathcal{F}_{<a}/\mathcal{F}_{<a-r}$是有限维的。因此，

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\bar{\beta}\iota) &= \mathrm{ind}((\nu\bar{\alpha}\iota)(\nu\bar{\beta}\iota)) \\ &= \mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\iota) + \mathrm{ind}(\nu\bar{\beta}\iota), \\ \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha\beta) &= \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta). \end{aligned} \tag{69}$$

（条目 3）由于 U 保持局域性，它限制为一个同构 $\mathrm{L}^{/\mathcal{S}}_{\pm\infty} \to \mathrm{L}^{\prime/\mathcal{S}'}_{\pm\infty}$，因此 $\bar{}$诱导出一个保持局部性的同构 $U : \mathrm{F} \to \mathrm{F}'_\circ$。若 $\nu : \mathrm{F} \to \mathrm{F}_{<a}$ 是一个投影，即 $\bar{}$是包含映射 $\iota : \mathrm{F}_{<a} \to \mathrm{F}$ 的左逆，令 $\mathrm{F}'_\circ = U(\mathrm{F}_{<a})$ 为 F'的一个子空间。若 r是 U的传播范围，则 $\mathrm{F}'_{<a-r} \subseteq \mathrm{F}'_\circ \subseteq \mathrm{F}'_{<a+r\circ}$ 令 $\iota' : \mathrm{F}'_\circ \to \mathrm{F}'$为包含映射，并为其选取一个左逆 $\nu' = \bar{U}\iota\nu\bar{U}^{-1} : \mathrm{F}' \to \mathrm{F}'_\circ$。显然， $\nu'\bar{U}\iota : \mathrm{F}_{<a} \to \mathrm{F}'_\circ$是一个同构，其逆为 $\nu\bar{U}^{-1}\iota'$。二者都是指标为零的 Fredholm 算子。由于 $\bar{U}^{-1}\iota' = \iota\nu\bar{U}^{-1}\iota'$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(U\alpha U^{-1}) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\nu'(\bar{U}\bar{\alpha}\bar{U}^{-1})\iota') \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ind}((\nu'(\bar{U}\iota\nu\bar{U}^{-1})(\bar{U}\bar{\alpha}\bar{U}^{-1})\iota') \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\nu'\bar{U}\iota) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\iota) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\nu\bar{U}^{-1}\iota') \\ &= 0 + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) + 0. \end{aligned} \tag{70}$$

（条目 4）在这种情况下 $\mathcal{L} = \mathcal{P}$，$\mathcal{S} = \{1\}$。一切又回到了计算一维酉克利福德量子元胞自动机指标的常规方法。众所周知，任何一维酉量子元胞自动机都与平移 [25] 在有限深度量子电路意义下等价。已知 GNVW 指数在有限深度量子电路下保持不变，而我们的 MQCA 指数在由酉门构成的半无限阵列深度 1 变换下保持不变，因此在任意有限深度量子电路下也保持不变。对于平移，直接计算即可得到结果。 □

B.2 流的测量

关于 *MQCA* 指数作为流的度量的 *4.4* 的证明。结合下文的 B.1、B.2、B.3、B.4、B.5、和B.6 。 □

引理 B.1。 设 B 是二维晶格 $\mathbb{Z}^2$ 上具有局域性参数 ℓ 的拓扑 *Pauli* 稳定子群。对于一个具有有限宽度的垂直延伸条带 $I \subseteq \mathbb{Z}^2$ ，令 $S = B_I$ 为 B 的子群，由所有支撑在 I 上的元素组成，该子群是一维 *Pauli* 稳定子群。那么，对于任意 a、$b \in \mathbb{Z}$，维数$(S/(S_{<a}S_{>b})) < \infty$ 。

证明。 由于 $\mathcal{S}_{<a}$ 会随着 $a \to +\infty$ 的增大而增大，而 $\mathcal{S}_{>b}$ 会随着 $b \to -\infty$的增大而增大，因此只需在 $a \ll b$时证明该引理。假设 $a + \ell < b$。如果某个元素 $S \in \mathcal{S}$的支撑不与 I的（竖直）区间 $[a, b]$ 相交，那么 S 在 b 上方的张量因子 $S_\uparrow$ 与 $\mathcal{B}$的每个 ℓ-局域生成元对易，因此是$\mathcal{B}$ 的一个元素，因为$\mathcal{B}$ 是拓扑的。对于 S 在 a下方的张量因子 $S_\downarrow$ ，同样适用，因此 $S \in \mathcal{S}_{<a}\mathcal{S}_{>b}$。所以，商空间 $\mathcal{S}/(\mathcal{S}_{<a}\mathcal{S}_{>b})$ 的任何非零元素都必须在区间 $[a, b]$ 上非平凡地作用，而其中彼此独立的这类算符的数量至多为该区间 $[a, b]$上的泡利群的维数，这是有限的。

□

引理 B.2. 若对于某个 ℓ，S 是 ℓ-局部生成的，那么对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}$，$\dim(S/(S_{<a}S_{>b})) < \infty$ 。

证明. 由于当 $a \to +\infty$ 增大时 $\mathcal{S}_{<a}$ 也随之增大，而当 $b \to -\infty$ 增大时 $\mathcal{S}_{>b}$ 也随之增大，因此只需在 $a \ll b$ 时证明该引理。$\mathcal{S}/\mathcal{S}_{<a}\mathcal{S}_{>b}$ 由支撑在区间 $(a - 2\ell, b + 2\ell)$ 上的 ℓ-局域生成元生成。该区间上只能有有限多个生成元。 □

引理 B.3. 若对于某些 $a, b \in \mathbb{Z}$，$\dim(S/(S_{<a}S_{>b})) < \infty$，那么对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}$，$\dim(F_{<a} \cap F_{>b}) < \infty$。

证明. 注意到

$$\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b} = \left(\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a}\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{+\infty} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b}\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{-\infty}\right)/\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\infty} = \left((\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b})\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\infty}\right)/\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\infty}, \tag{71}$$

其中第二个等式是因为 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{-\infty} \subseteq \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a}$ 且 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{+\infty} \subseteq \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b}$。因此，我们只需证明对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}$，$\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b}$ 是有限维的。

首先，假设 $a \leq b$。我们按如下方式将 $\mathrm{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathrm{L}^{/\mathcal{S}}_{>b}$ 嵌入到 $\mathrm{S}/(\mathrm{S}_{<a}\mathrm{S}_{>b})$ 中。如果 $L + \mathrm{S} \in \mathrm{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathrm{L}$，那么显然，对于某个 $L_1 \in \mathrm{L}_{<a}$，有 $L + \mathrm{S} = L_1 + \mathrm{S}$；并且对于某个 $L_2 \in \mathrm{L}_{>b}$，有 $L + \mathrm{S} = L_2 + \mathrm{S}$。由此可得 $L_1 L_2 \in \mathrm{S}$。利用这一点，我们定义一个映射 $[L] \mapsto [L_1 L_2] \in \mathrm{S}/\mathrm{S}_{<a}\mathrm{S}_{>b}$。该映射是良定义的：如果 L_1' 和 L_2' 是不同的选择，那么 $L_1 L_1' \in \mathrm{S}$，因此 $L_1 L_1' \in \mathrm{S}_{<a}$，类似地，$L_2 L_2' \in \mathrm{S}_{>b}$，这意味着 $(L_1 L_2)(L_1' L_2') \in \mathrm{S}_{<a}\mathrm{S}_{>b}$。该映射必定是单射。事实上，如果 $[L]$ 映射到零，那么 $L_1 L_2 \in \mathrm{S}_{<a}\mathrm{S}_{>b}$，从而可得 $L_1 \in \mathrm{S}_{<a}$ 和 $L_2 \in \mathrm{S}_{>b}$，因为 $a \leq b$。这意味着 $[L] = 0 \in \mathrm{L}/\mathrm{S}$。

为处理 $a > b$ 的情况，我们注意到，我们已经知道 $\dim \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>a} < \infty$。于是，$\dim(\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b})/(\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{<a} \cap \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>a}) \leq \dim \mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>b}/\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{>a} < \infty$，由此完成证明。 □

引理 B.4. 假设 维数$(F_{<a} \cap F_{>b}) < \infty$ 对某些（因而对所有） $a, b \in \mathbb{Z}$成立。那么，对任意$a \in \mathbb{Z}$，都存在 $b_0 \leq a$，使得对所有 $b \leq b_0$，都有

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\dim(\mathcal{F}_{<a} \cap \bar{\alpha}^{-1}\mathcal{F}_{>b}) - \dim(\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b})\Big). \tag{72}$$

证明。 我们把以下内容留给读者证明：若假设 $\dim(\mathcal{F}_{<a}\cap\mathcal{F}_{>b})<\infty$ 对某些 a 和 b成立，那么它对所有 a 和 b都成立；读者可以利用这样一个事实：对于任意 $a'\geq a$ 和 $b'\leq b$，$\mathcal{F}_{<a'}/\mathcal{F}_{<a}$ 和$\mathcal{F}_{>b'}/\mathcal{F}_{>b}$ 总是有限维的。

由于 α 具有局域性保持性质，因此存在 $a'\geq a$ 使得 $\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})\subseteq\mathcal{F}_{<a'}$。显然，对于任意 b，我们有

$$\mathcal{F}_{<a'}\supseteq(\mathcal{F}_{>b}\cap\mathcal{F}_{<a'})+(\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})\cap\mathcal{F}_{<a}) \tag{73}$$

右侧对所有 $b<a$ 取并集，显然就是左侧。由于$\mathcal{F}_{<a'}/(\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})\cap\mathcal{F}_{<a})$是有限维的，这个并集会在某个有限的 $b=b'<a$处稳定，从而得到等式

$$\mathcal{F}_{<a'}=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'})+(\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})\cap\mathcal{F}_{<a}). \tag{74}$$

现在，由于$\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'}\supseteq\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a}$，我们找到一个向量子空间$\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'}$，使得

$$\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'}=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a})\oplus\mathcal{F}_1\,. \tag{75}$$

根据（74），我们知道右侧$\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'}$ 可通过$\mathrm{F}_{<a'}$ 中的某些元素扩展得到；这些元素属于$(\mathcal{F}_{<a})\cap\mathcal{F}_{<a}$，并张成一个向量子空间$\mathcal{F}_2$，使得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2&\subseteq\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})\cap\mathcal{F}_{<a}\,,\\ \mathcal{F}_{<a'}&=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a'})\oplus\mathcal{F}_2\,,\end{aligned} \tag{76}$$

so

$$\mathcal{F}_{<a'}=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a})\oplus\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2\,. \tag{77}$$

我们将其与$\mathcal{F}_{<a}$取交集：

$$\mathcal{F}_{<a}=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a})\oplus(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_{<a})\oplus\mathcal{F}_2=(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a})\oplus\mathcal{F}_2 \tag{78}$$

其中$\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_{<a}=0$ 根据（75）。

为定义 Fredholm 指数，我们选择一个投影 $\nu:\mathrm{F}\to\mathrm{F}_{<a}$，它是包含映射 $\iota:\mathrm{F}_{<a}\to\mathrm{F}$ 的左逆。我们选择另一个映射 $\mu:\mathrm{F}\to\mathrm{F}_{<a'}\to\mathrm{F}_{<a}$，它在 F_2 上是恒等算符，但 $\mu(\mathrm{F}_{>b'}\cap\mathrm{F}_{<a'})=0$；见（76）。映射 μ 实际上是到 F_2 的投影，但我们将陪域设为与 ν 的陪域相同，因此可以考虑 $\mu-\nu$。注意，根据构造，$(\ker\mu)\cap\mathrm{F}_{<a'}=\mathrm{F}_{>b'}\cap\mathrm{F}_{<a'}$。

我们声称，$(\mu-\nu)\bar{\alpha}\iota\colon\mathrm{F}_{<a}\to\mathrm{F}_{<a}$是有限秩。容易验证，$(\mu-\nu)\,\bar{\alpha}\iota$在 $\bar{\alpha}^{-1}(\mathrm{F}_2)\subseteq\mathrm{F}_{<a}\cap\bar{\alpha}^{-1}(\mathrm{F}_{<a})$上为零；其在 $\bar{\alpha}$ 下的像为$\mathrm{F}_2=\mathrm{im}\,\mu\subseteq\mathrm{im}\,\nu$。因此，只需证明$\mathrm{F}_{<a}/\bar{\alpha}^{-1}(\mathrm{F}_2)$是有限维的。然而，该商空间同构于 $\bar{\alpha}(\mathrm{F}_{<a})/\mathrm{F}_2$,，根据（76），它属于$\mathrm{F}_{<a'}/\mathrm{F}_2\cong\mathrm{F}_{>b'}\cap\mathrm{F}_{<a'}$。根据假设，后者是有限维的。

根据 (20)，我们知道 $\mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\iota)=\mathrm{ind}(\mu\bar{\alpha}\iota)$。现在来计算后者。核由满足 $x\in\mathcal{F}_{<a}$ 的 $\bar{\alpha}(x)\in(\ker\mu)\cap\mathcal{F}_{<a'}=\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a}$组成。因此，$x\in\mathcal{F}_{<a}\cap\bar{\alpha}^{-1}(\mathcal{F}_{>b'}$。接着可以验证

$$\ker(\mu\bar{\alpha}\iota)=\mathcal{F}_{<a}\cap\bar{\alpha}^{-1}(\mathcal{F}_{>b'}). \tag{79}$$

接下来，根据定义，余核$(\mu\bar{\alpha}\iota)=\mathcal{F}_{<a}/\mu\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})$，但 $\mathcal{F}_2=\mathrm{im}\,\mu$是 $\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})$ 的一个子空间，依照构造，故 $\mu\bar{\alpha}(\mathcal{F}_{<a})=\mathcal{F}_2$。由 (78) 可见

$$\dim\mathrm{coker}(\mu\bar{\alpha}\iota)=\dim(\mathcal{F}_{<a}/\mathcal{F}_2)=\dim(\mathcal{F}_{>b'}\cap\mathcal{F}_{<a}). \tag{80}$$

由于对于任何更小的 74，(b') 都成立，因此证明完成。 □

引理 B.5。 设 L 是一个局部生成泡利群在完整的一维泡利群中的交换子，并且 维数$(F_{<a} \cap F_{>b})$ $< \infty$ 对某些 a、$b \in \mathbb{Z}$成立。若 α^{refl}*on* $L^{\mathrm{refl}}/S^{\mathrm{refl}}$ 是 *MQCA*，它由一维直线中任意一点处的空间反射作用于 *MQCA* α *on* L/S 得到，则 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha^{\mathrm{refl}}) = -\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha)$。

证明。 我们声称，只要 $a+\ell < b$，其中 ℓ 是假设中生成集 G 的局域性参数，而 $\mathcal{L}$ 是其交换子，则 $\mathcal{F}/(\mathcal{F}_{<a}+\mathcal{F}_{>b})$ 是有限维的。如果泡利算符 $P \in \mathcal{L}$ 的支撑不与区间 $[a,b]$ 相交，那么可以检验 G 中的 ℓ- 局域生成元是否分别与 P 的左右张量因子满足对易关系。由于 $\mathcal{L}$ 是 G 的交换子， P 的左张量因子属于 $\mathcal{L}_{<a}$ ，右张量因子属于 $\mathcal{L}_{>b}$，因此 P 在 $\mathcal{F}/(\mathcal{F}_{<a}+\mathcal{F}_{>b})$ 中表示零类别。因此，$\mathcal{F}/(\mathcal{F}_{<a}+\mathcal{F}_{>b})$ 必须由 $\mathcal{L}$ 中在有限区间 $[a,b]$ 上非平凡作用的元素生成。这样的元素中线性无关的只有有限多个。

根据构造，$\bigcap_{b\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{>b} = 0$ ，因为我们已经将“无穷群”模掉了。因此，$\lim_{b\to\infty} \dim(\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b}) = 0$。由于我们假设 $\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b}$ 是有限维的，这个极限零值必定在某个有限的 b 处取得。令 $a, b \in \mathbb{Z}$，其中 $a+\ell < b$，使其满足

$$\mathcal{F}_{<a} \cap \mathcal{F}_{>b} = 0. \tag{81}$$

因此，存在一个子空间 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{<a} \oplus \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}_{>b}\,. \tag{82}$$

令 $\nu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{<a}$ 为到第一个直和项的投影， $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}_{>b}$ 为到其余部分的投影。它们分别是包含映射 $\iota_\nu : \mathcal{F}_{<a} \to \mathcal{F}$ 和 $\iota_\mu : \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}_{>b} \to \mathcal{F}$ 的左逆。我们可以写作 $\mathbf{1} = (\nu,0) + (0,\mu)$。

由于 $\dim \mathcal{F}' < \infty$，我们有 $\mathcal{F}_{>b} \oplus \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_{>b'}$对于某个 $b' < b$。然后，由 4.2可清楚看出 t

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\iota_\nu), \\ \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha^{\mathrm{refl}}) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\mu\bar{\alpha}\iota_\mu). \end{aligned} \tag{83}$$

由（21），直和（$\nu\bar{\alpha}\iota_\nu$） $\oplus$（$\mu\bar{\alpha}\iota_\mu$）是 Fredholm，其指标为两者指标之和。该直和也可以写作（ν，0）$\bar{\alpha}$（ν，0）$+$（0，μ）$\bar{\alpha}$（0，μ）。我们断言存在一个映射

$$(\nu,0)\bar{\alpha}(\nu,0) + (0,\mu)\bar{\alpha}(0,\mu) - \mathbf{1} : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \tag{84}$$

具有有限秩。事实上，该映射在 $\mathcal{F}_{<a-r} \oplus \mathcal{F}_{>b+r}$ 其中 r 是 α的传播范围。根据本证明的第一段，我们知道 $\mathcal{F}_{<a-r} \oplus \mathcal{F}_{>b+r}$ 的补空间是有限维的。由于 $\mathrm{ind}(\mathbf{1}) = 0$，由（20）可得

$$\mathrm{ind}(\nu\bar{\alpha}\iota_\nu) + \mathrm{ind}(\mu\bar{\alpha}\iota_\mu) = \mathrm{ind}((\nu\bar{\alpha}\iota_\nu) \oplus (\mu\bar{\alpha}\iota_\mu)) = \mathrm{ind}(\mathbf{1}) = 0. \tag{85}$$

证明至此完成。 □

引理 B.6. 假设 *B.5* 的假设。若对于两个 *MQCA* α， β 在 $\mathcal{L}/\mathcal{S}$ 上，存在第三个 *MQCA* γ 和 a，$b \in \mathbb{Z}$ 使得 $\gamma|_{\mathcal{F}_{<a}} = \alpha|_{\mathcal{F}_{<a}}$ 且 $\gamma|_{\mathcal{F}_{>b}} = \beta|_{\mathcal{F}_{>b}}$，则 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta)$。

证明。 MQCA 指数由 MQCA 对 $\mathcal{F}_{<a}$的作用定义，因此 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\gamma)$。另一方面，空间反射 MQCA γ^{refl} 的 MQCA 指数由 γ 对 $\mathcal{F}_{>b}$的作用确定，因此 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\gamma^{\mathrm{refl}}) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\beta^{\mathrm{refl}})$。由 B.5 可得结论。 □

证明*4.6* 一维 *LR* 循环的 *MQCA* 指标是整数。 一条有限伊辛链有两个逻辑算符 Z 和 X。算符 X 是全量子比特翻转逻辑算符 $X = X^{\otimes n}$，其中 $n \geq 0$ 是链的长度。不存在其他等价的代表元，它是由 X 张量积构成的逻辑算符 X。共轭逻辑算符 Z 是一个单量子比特算符 Z，可以放置在链上的任意位置。伊辛链的支撑与 X相同。对于（半）无限链，全量子比特翻转逻辑算符的支撑不是有限的。

应用结构定理4.5，我们的 $\mathcal{L}/\mathcal{S}$ 由以下元素生成： X 有限伊辛链的像，以及 Z 所有链的像。无穷远处的群， $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{+\infty}$ 和 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{-\infty}$，由以下元素生成： $\bar{Z}$ 无限伊辛链的像，因此商空间 $\mathcal{F}$ 恰好由有限链的所有逻辑算符生成。我们选取一个投影 ν，将其映射到由有限链上所有支撑在（$-\infty$，0）的逻辑算符构成的群。因此， ν 的像与某些量子比特构成的完整泡利群同构。[18]

为考察 MQCA 的局域性保持性质，我们对晶格进行压缩，使每条链最多支撑在两个相邻格点上；这种压缩或粗粒化可能非常不均匀，量子比特的数量也可能如此。尽管如此，由于支撑可能重叠的伊辛链只有有限条，并且我们只有有限伊辛链，因此压缩后任一格点上的量子比特数都是有限的。将每条伊辛链替换为位于压缩后链的支撑范围内任一格点上的一个量子比特。于是，MQCA 在这个新的量子比特晶格上定义了一个每个格点含有限个量子比特的幺正 Clifford QCA。MQCA 指数与压缩无关，因此等于幺正 Clifford QCA 的指标，而我们知道该指标是一个整数。

□

B.3 条带几何

4.7 的证明 其中 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_{\mathrm{strip}}) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_1) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_2)$。

在此证明中，为简化记号，我们省略下标“strip”。因此，$\mathcal{L}$、$\mathcal{A}$和 $\mathcal{F}$ 分别表示条带上所有有限支撑元素构成的群、条带上所有稳定子构成的群，以及根据（23）得到的商群。根据 §3.3中的讨论，我们有两个单射$\mathcal{L}_1^{/\mathcal{A}_1} \to \mathcal{L}^{/\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{L}_2^{/\mathcal{A}_2} \to \mathcal{L}^{/\mathcal{A}}$。将它们结合起来，可得一个映射

$$\psi : \mathcal{L}_1^{/\mathcal{A}_1} \oplus \mathcal{L}_2^{/\mathcal{A}_2} \to \mathcal{L}^{/\mathcal{A}}. \tag{86}$$

现在考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{/\mathcal{A}_1}_{1,\infty} \oplus \mathcal{L}^{/\mathcal{A}_2}_{2,\infty} & \hookrightarrow & \mathcal{L}_1^{/\mathcal{A}_1} \oplus \mathcal{L}_2^{/\mathcal{A}_2} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{/\mathcal{A}}_{\infty} & \hookrightarrow & \mathcal{L}^{/\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{87}$$

[18]有人可能已经注意到，在我们构造 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}$ 的过程中，无穷远处的群 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\pm\infty}$ 除了作为 α 下的不变子群外，并未发挥任何重要作用。在这里，无穷远处的群使得将 MQCA 约化为作用于局域算子全代数上的酉 QCA 变得很容易。对不变子群作任何系统性的选择，例如 $\mathcal{L}^{/\mathcal{S}}_{\pm\infty}$，都会定义一个指标。这样一个指标是否有用，则是另一个问题。

该图中的各行都是正合的。群$\mathcal{L}_n^{/\mathcal{A}}{}_{,\infty}$ 表示 $\mathcal{L}_n^{/\mathcal{A}}{}_{,+\infty}\mathcal{L}_n^{/\mathcal{A}}{}_{,-\infty}$，映射 ψ_∞ 是 ψ 的限制。该交换图定义了一个映射

$$\varphi : \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}. \tag{88}$$

对于条带的任意垂直位置 k，我们将 φ 限制到 $(\mathcal{F}_1)_{<k} \oplus (\mathcal{F}_2)_{<k}$，并定义：

$$\varphi_{<k} : (\mathcal{F}_1)_{<k} \oplus (\mathcal{F}_2)_{<k} \to (\mathcal{F})_{<k}\,. \tag{89}$$

我们将证明：

(i) ψ 是单射。(ii) dim ker $\varphi < \infty$，因此
dim ker $\varphi_{<k} < \infty$。(iii) dim 余核 $\varphi_{<k} < \infty$。

这些结论将按如下方式推出 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_1) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_2)$ 的关系。回顾一下，边界 MQCA $\alpha_{1,2}$ 和条带 MQCA α 的指标由如 (26) 所示映射的 Fredholm 指标定义。考虑以下图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}_{<k} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F}_{<k} \\
\uparrow{\scriptstyle \varphi_{<k}} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{<k}} \\
(\mathcal{F}_1)_{<k} \oplus (\mathcal{F}_2)_{<k} & \xrightarrow{\iota_1 \oplus \iota_2} & \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\bar{\alpha}_1 \oplus \bar{\alpha}_2} & \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\nu_1 \oplus \nu_2} & (\mathcal{F}_1)_{<k} \oplus (\mathcal{F}_2)_{<k}
\end{array} \tag{90}$$

在此图中，根据 $\varphi_{<k}$ 具有有限维的核和余核这一结论，$\varphi_{<k}$ 是 Fredholm 映射。顶行三个映射的复合是条带 MQCA 指数对应的 Fredholm 映射（见 (26)），其中 ι 是包含映射，μ 是投影。底行是边界 MQCA 指数对应映射的直和，其中 ι_1 和 ι_2 是包含映射，ν_1 和 ν_2 是投影。左侧方块交换，这是由 φ 和 $\varphi_{<k}$的定义所致。中间方块交换，因为 $\bar{\alpha}$ 在 $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$上的限制是 $\bar{\alpha}_1 \oplus \bar{\alpha}_2$。右侧方块未必交换，但由于该方块导致的差异（从左下角出发）是有限秩的：定义域中 r 大于各 MQCA 传播范围的子群 $(\mathrm{F}_1)_{<k-r} \oplus (\mathrm{F}_2)_{<k-r}$ 在两种情况下都映射到相同结果。因此，由 (20) 可得

$$\mathrm{ind}\big(\varphi_{<k}(\nu_1 \oplus \nu_2)(\bar{\alpha}_1 \oplus \bar{\alpha}_2)(\iota_1 \oplus \iota_2)\big) = \mathrm{ind}(\mu\bar{\alpha}\iota\varphi_{<k}). \tag{91}$$

利用 Fredholm 指数的复合规则（4.3），我们得到：

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}(\mu\bar{\alpha}\iota) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}\big((\nu_1 \oplus \nu_2)(\bar{\alpha}_1 \oplus \bar{\alpha}_2)(\iota_1 \oplus \iota_2)\big) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_1) + \mathrm{Ind}^{\mathrm{M}}(\alpha_2). \tag{92}$$

接下来只需证明这三项结论。

(i) ψ 是单射。

假设两个边界逻辑算符 $Q_i \in \mathcal{L}_i$ 的乘积是一个条带稳定子，$Q_1Q_2 \in \mathcal{A}$。我们必须证明 $Q_1 \in \mathcal{A}$ 和 $Q_2 \in \mathcal{A}$。根据假设，$Q_1Q_2 = \prod A$，其中 $A \in \mathcal{A}$ 是局域条带稳定子生成元。这些 A's 不需要支撑在 Q_1Q_2 的支撑附近，但它们的数量是有限的。我们将整个条带划分为三个区域，其中两个是界面区域 I_1 和 I_2，每个区域的宽度为 10ℓ，而体区记作 I_b，即 $I_1 \cup I_2$ 的补集。我们已经假设，拓扑码的条件对支撑于 I_b上的所有算符和区域都成立。因此，我们将这些因子 A 分为三类：第 1 类是

那些与 I_1 相交的，类别 2 是那些与 I_2 相交的，类别 b 是那些完全支撑于 I_b 上的。我们有 $Q_1Q_2 = A_1A_2A_b$，其中 A_i 是类别 i（$i = 1,\ 2,\ b$）中所有那些 A 的乘积。等价地，$(Q_1A_1^{-1})\ (Q_2A_2^{-1}) = A_b$。

现在，注意对于 $i = 1,\ 2$，乘积 $Q_iA_i^{-1}$的支撑位于 I_i'，即边界 i附近一个宽度为 20ℓ的条带。要使它们的乘积 A_b 的支撑位于 I_b，就必须有 $Q_iA_i^{-1}$的支撑位于 $I_i' \cap I_b$。于是，每个 ℓ-局域稳定子 $S \in \mathcal{A}$ 都必须与 $Q_1A_1^{-1}$和 $Q_2A_2^{-1}$对易，因为S 不可能同时与它们二者重叠。但 $Q_1A_1^{-1}$和 $Q_2A_2^{-1}$的支撑都位于 I_b，而拓扑码的第一条条件意味着，对于 $i = 1,\ 2,\ Q_iA_i^{-1} \in \mathcal{A}$ 分别成立，进而意味着对于 $i = 1,\ 2,\ Q_i \in \mathcal{A}$ 成立。

(ii) $\dim \ker \varphi < \infty$。

由 (i) 可知 $\ker \psi = 0$。对交换图 (87) 应用蛇引理可得

$$\ker \varphi \cong \ker(\operatorname{coker} \psi_\infty \to \operatorname{coker} \psi). \tag{93}$$

这里，陪域$\mathcal{L}_\infty^{/\mathcal{A}}$（即 ψ_∞）是一维系统在无穷远处的逻辑商群。其中，任意垂直位置 k 处每个有效格点上的量子位数取决于该位置条带的宽度，而根据假设，该宽度有统一上界。因此，结构定理 4.5 意味着只有有限多个（半）无限伊辛链。因此，$\mathcal{L}_\infty^{/\mathcal{A}}$ 是有限维的，所以 $\dim \ker\ \varphi \le \dim \operatorname{coker} \psi_\infty \le \dim \mathcal{L}_\infty^{/\mathcal{A}} < \infty$。

(iii) 余核 $\varphi_{<k} < \infty$的维数。只需证明

$$\dim \frac{\mathcal{L}_{<k}}{(\mathcal{L}_1)_{<k} + (\mathcal{L}_2)_{<k} + \mathcal{A}} < \infty. \tag{94}$$

为说明我们将要采用的方法，考虑 $P = P_1P_2 \in \mathcal{L}$，其中 P_1 和 P_2 分别支撑在垂直区域 $V_1 \supseteq I_1$ 和 $V_2 \supseteq I_2$上，且 V_1 和 V_2 之间的距离大于 ℓ，因此 $\mathcal{A}$ 的每个 ℓ-局域生成元至多与 V_1 和 V_2之一重叠。于是，P_1 和 P_2 都属于$\mathcal{L}^{\text{strip}}$。接着，算符 P_1 和 P_2 可分别借助$\mathcal{A}$中的某些元素，局域化到 I_1 和 I_2。因此，P 属于 φ的像。注意，P_1, P_2 的局域化可能会使其支撑在垂直方向上扩大，但扩大幅度不超过 10ℓ。因此，若 $P = P_1P_2 \in \mathcal{L}_{<k-10\ell}$，则 $P \in \operatorname{im}\ \varphi_{<k}$。所以，余核 $\varphi_{<k}$的非零类在$\mathcal{L}$ 中的任一代表元，其支撑要么在垂直方向上没有任何“间隙”，要么在 $k-10\ell$和 k之间的垂直位置窗口上作用非平凡。显然，作用于该窗口的那些算符构成有限维空间，因为其 $\mathbb{F}_2$-维数受该条带窗口中的量子位数量限制。剩下的问题是，$\mathcal{L}$ 中有多少算符需要具有无间隙支撑。

任取一个逻辑算符 $Q \in \mathrm{L}_{<k}$，并考虑将其截断为 Q_1，例如限制在 50ℓ 邻域内、以 I_1 为中心的部分。见图 14。于是，Q_1 会在 I_b 上产生一些激发；I_b 是位于 I_1 与 I_2 之间的区域。然而，3.1 节中拓扑码的条件 (ii) 意味着，可以通过某个有限支撑算子将这些激发移至固定位置，例如 $u \in I_b$；该算子的支撑位于距 I_1 不超过 80ℓ 的范围内。类似地，考虑将 Q 截断为 Q_2，限制在 50ℓ 邻域内、以 I_2 为中心的部分，并通过某个有限支撑算子将 Q_2 产生的任意激发移至固定位置 $v \in I_b$；该算子的支撑位于距 I_2 不超过 80ℓ 的范围内。由于 Q_1 和 Q_2 所导致的所有激发都由一个有限支撑算子产生，拓扑码的条件 (iii) 会通过某个算子消去移至 u 和 v 处的激发；该算子的支撑位于连接 u 与 v 的直线的 10ℓ 邻域 B 内。因此，我们将 Q 变形为 Q'，其中 Q' 支撑在“桥接区域” B 以及两个垂直区域上，而这两个垂直区域分别位于距 I_1 和 I_2 不超过 80ℓ 的范围内。由于余核 $\varphi_{<k}$ 的非零类的任意代表，只要支撑在 $< k-10\ell$ 上，就必定穿过该桥接区域，

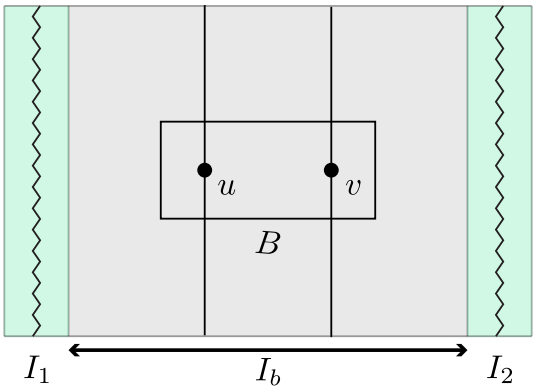


图14：证明 4.7 中区域的几何结构。对于任意逻辑算符，我们都能找到一个等价的逻辑算符，其支撑位于边界附近 I_1，I_2 以及桥接区域 B 内，且高度较小。

由此可知，余核 $\varphi_{<k}$ 的维数不超过 B 中量子位的数量，加上垂直坐标介于 $k-10\ell$ 与 k 之间的窗口中的量子位数量。 □

C 一维泡利稳定子群的结构

这里我们证明 4.5 ，并为方便读者在此重述。本文的这一节不依赖其他章节中的任何结果。

定理 4.5。 设一维晶格 $\mathbb{Z}$ 或有限周期晶格的每个格点 k 上都有有限个素数维数为 p 的 q_k 量子位。设 A 是一个泡利稳定子群，其生成元至多作用于两个相邻格点。则存在一个由单点 *Clifford*酉门组成、深度为 *1* 的 *Clifford* 电路，可将 A 映射为若干独立伊辛链的稳定子群，以及一些完全解纠缠的量子比特和最近邻贝尔对。每条伊辛链可以是无限的，也可以是有限的，但每个格点 k 至多参与 q_k 条伊辛链。在长度为 L的有限周期晶格上，每条伊辛链至多占据 L 个量子位。

本证明中的每个量子位都具有固定的素数维数 $p\in\{2、3、5、7、11、.....\}$，因此我们将使用 $\mathbb{F}$ 表示素数域，而不是 $\mathbb{F}_p$。按照惯例， Z、 X 表示广义泡利算符或 Weyl算符

$$Z=\sum_{a\in\mathbb{F}}\exp\left[\frac{2\pi\mathbf{i}a}{p}\right]|a\rangle\langle a|\,,\qquad\qquad X=\sum_{a\in\mathbb{F}}|a+1\rangle\langle a|\,. \tag{95}$$

伊辛耦合是指跨越两个相邻格点 j 和 $j+1$ 的 $Z_jZ_{j+1}^\dagger$。回顾一下，按照约定，一个格点上的伊辛链由一个量子位及其上的稳定子 Z 组成，因此它与系统的其余部分完全解缠。

C.1 化简至无限晶格

假设我们已有适用于无限晶格的定理 $\mathbb{Z}$。那么，我们可以如下证明适用于任意有限周期晶格的定理 $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$，其中 L 是格点数。如果 $L=1$ 或者 2，证明留给读者；参见下文的 C.2 。如果 $L\geq 3$，那么由于稳定子的每个生成元 $P_iP'_{i+1}$

有限周期系统的群 $\mathcal{S}$ 仅作用于两个相邻格点 $i, i+1 \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$，我们可以通过生成元 $P_j P'_{j+1}$（对所有 $j = i \mod L$）在无限晶格上定义一个提升稳定子群 $\mathcal{A}$；提升稳定子群由$\mathcal{S}$的 2 格点局部生成集的选择决定，而不仅仅由群 $\mathcal{S}$决定。

无限晶格的定理为每个格点 U_j 提供单格点克利福德算子 $j \in \mathbb{Z}$，借助这些算子，该提升稳定子群$\mathcal{A}$ 变为一组独立伊辛链和贝尔对的稳定子群。注意，U_j不必遵守周期性 L，也就是说，对于某些 j，可能有 $U_j \neq U_{j+L}$。由于每个贝尔对只在两个格点上被识别，因此只要提升系统中存在贝尔对，有限系统中也会存在贝尔对。提取出所有贝尔对后，剩下的是$\mathcal{A}$中的伊辛链。考虑一个包含 n 个格点的伊辛链。如果 $n = 1$，则有一个量子比特处于固定乘积态，并且与系统的其余部分解纠缠。这意味着有限系统中也有一个处于固定量子态的解纠缠量子比特。类似地，如果 $n \leq L$，则也可以在有限系统中使用n 单格点克利福德算子辨识出该伊辛链。提取出所有此类伊辛链后，我们得到一个有限系统，其中提升中的伊辛链（如果存在）始终占据多于 L 个格点。

假设我们已为$\mathcal{S}$ 选定了一个非冗余的2-格点局部生成集，并定义了提升$\mathcal{A}$，使其在 L 个或更少格点上不包含贝尔对或伊辛链。假设$\mathcal{A}$中嵌入了一条伊辛链。那么，对于某个 $j \in \mathbb{Z}$，必有 $Z_j Z_{j+L}^\dagger \in (U_j U_{j+L})\mathcal{A}(U_j U_{j+L})^\dagger$。在有限链中，该稳定子是$\mathcal{S}$ 在 L 条键上的2-格点局部生成元之积，其支撑位于单个格点 $i = j \bmod L$上。根据假设，由于不存在长度为一个格点的伊辛链，这样的稳定子必须是恒等算符；但这违反了$\mathcal{S}$ 不具有任何冗余生成元这一假设。因此，在提取 L 个或更少格点上的贝尔对和伊辛链后，提升$\mathcal{A}$ 必然变为平凡群。至此，我们完成了从有限周期情形到无限情形的约化。

C.2 约化为经典码

引理 C.1. 对于有限多个量子位上的任意一组独立对易泡利算符 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，存在一个克利福德幺正算子 U，使得对所有 j，$UP_jU = Z_j$，其中 Z_j 是作用于量子位 j 上的单量子位泡利算符。

证明。 这可由以下事实重新表述：有限维辛空间中的任意自正交子空间都可扩展为拉格朗日子空间，并且任意两个拉格朗日子空间彼此等距。

□

引理 C.2. 给定二分系统上的有限泡利稳定子群 S，且其中没有元素的支撑仅落在任一参与方上，则存在一个解纠缠克利福德算子 $U \otimes V$，使得 $(U \otimes V)S(U \otimes V)^\dagger$ 的支撑仅涉及一组量子位对 $(i, 1), (i, 2)$，其中第二个指标表示参与方；存在一个生成集，使得每个生成元均为 $X_{i,1} \otimes X_{i,2}$ 或 $Z_{i,1} \otimes Z_i^\dagger{}_{,2}$。

如果一对量子位 i 支撑两个生成元，则它是一个贝尔对；否则，稳定子群是伊辛耦合。

证明。 我们按$\mathcal{S}$的阶进行归纳法。定义各参与方上泡利算符群$\mathcal{S}_1$,$\mathcal{S}_2$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{P \in \mathcal{P}_1 \,|\, P \otimes Q \in \mathcal{S} \text{ for some } Q\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{Q \in \mathcal{P}_2 \,|\, P \otimes Q \in \mathcal{S} \text{ for some } P\}, \end{aligned} \tag{96}$$

其中$\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$ 分别是相应参与方上所有泡利算符构成的群。对于 $P \in \mathcal{S}_1$, ，假设存在两个算符 Q, Q'，使得 $P\otimes Q, P\otimes Q'$均属于$\mathcal{S}$。那么，它们的乘积 $\mathbf{1}\otimes Q^{-1}Q'$也属于$\mathcal{S}$，且支撑在第二个参与方上；除非 $Q = Q'$ ，否则这将违反假设，因为$\mathcal{S}$ 不包含任何非平凡标量，即若某个 $\eta \in \mathbb{C}$满足 $\eta\mathbf{1} \in \mathcal{S}$ ，则 $\eta = 1$。因此，对于 P，第二个参与方上存在唯一的 Q，使得 $P \otimes Q \in \mathcal{S}$。由此得到一个群同态

$$\phi : \mathcal{S}_1 \ni P \mapsto Q \in \mathcal{S}_2 \,, \tag{97}$$

根据构造，该映射是满射。注意，S_1 和S_2 总是包含相位因子，因为（$-\mathbf{1}$）$\otimes$（$-\mathbf{1}$）$\in \mathsf{S}$。如果 ϕ（P）$= \mathbf{1}$，那么 $P \otimes \mathbf{1} \in \mathsf{S}$，根据假设， P必为恒等算符。因此， ϕ 是单射，进而是群同构。如果S_1 是非阿贝尔的，那么一对不对易元素 P、 $P' \in \mathsf{S}_1$对应于一对不对易元素 Q、 $Q' \in \mathsf{S}_2$。这对元素 $P \otimes Q$、 $P' \otimes Q'$定义了一个贝尔对。将范围限制到S_1中 P、 P'的交换子（即S_1中所有与 P、 P'均对易的元素）以及S_2,中 Q、 Q'的交换子后，我们就降低了二部稳定子群的阶数。因此，现在可以假设S_1 是阿贝尔的，S_2也因此是阿贝尔的。根据C.1，我们可以找到一个 Clifford $U \otimes V$，使得S映射到由{Z_1、$_j \otimes Z_2^\dagger$、$_j \,|\, j = 1$、2、.....}生成的群，即伊辛耦合。

□

现在，让我们将这两个事实应用于一维稳定子群 A。回想一下，假设 A 由作用于相邻两个格点的算符生成。不失一般性，我们可以假设 A 不含任何单格点算符；如果含有，我们就能找到一个单格点 Clifford，将该单格点算符映射为单量子位算符 Z ，并移除由此稳定的量子位。对于任意格点 $i \in \mathbb{Z}$，我们将 A($i, i+1$) $\subseteq$ A 记为 A 中支撑在这两个格点上的所有元素构成的子群。应用 C.2，去掉所有贝尔对量子位。接着，根据上文 C.2 的证明，我们知道，对于所有 i，$\mathsf{B}'_i = \mathsf{A}(i, i+1)_1$ （键 $(i, i+1)$ 的“左群”）与 $\mathsf{B}''_{i+1} = \mathsf{A}(i, i+1)_2$ （键 $(i, i+1)$ 的“右群”）同构，且两者都是阿贝尔群。此外，由于 A 是阿贝尔群， i 右侧键的左群 B'_i 与 i左侧键的右群 B''_i 对易。对于每个格点 i，令 B_i 为由 B'_i 和 B''_i 生成的阿贝尔群。这个更大的群 B_i 不一定是 A 的子群。由于 B_i 是阿贝尔群，存在一个作用于格点 i 的 Clifford，可将 B_i 变为仅由 Z 的张量积构成的群。因此，经过若干单格点 Clifford 变换后，群 A 完全由单量子位 Z 的张量积生成；在 4.5 的证明结束前，我们都作此假设。

下面我们将通过两种互补的方法完成证明。第一种方法是分析逻辑算符的结构，第二种方法是分析稳定子算符的结构。

C.3 查看逻辑算符

由于稳定子群 $\mathcal{A}$ 仅由泡利 Z 的张量积构成，因此 X型逻辑算符决定了一切。我们允许将泡利 X 的“无限张量积”作为逻辑算符。[19]因此，$\mathcal{X}$ 中所有针对 $\mathcal{A}$ 的 X型逻辑算符，可以等同于所有可能无限的比特串组成的集合，其中每个量子位对应一位（$\in \mathbb{F}$），且比特串与稳定子指数的点积为零。这个集合 $\mathcal{X}$ 是一个 $\mathbb{F}$向量空间。对于任意格点集合 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 和任意比特串 x，令 $\Pi_S(x)$ 表示 x 在 S上的子串。它是一个 $\mathbb{F}$线性投影。我们简记

[19]严格来说，无限张量积并未定义。我们相信，感兴趣的读者能够弥补这一“空白”。

为 $\Pi_{<k} = \Pi_{\{j\in\mathbb{Z}|j<k\}}$、 $\Pi_{>k} = \Pi_{\{j\in\mathbb{Z}|j>k\}}$ 和 $\Pi_k = \Pi_{\{k\}}$。稳定子群 $\mathcal{A}$ 的两体局域性意味着以下结论。

引理 C.3。 如果 $x \in X$ 在格点 k 上为零，即 $\Pi_{\{k\}}(x) = 0$，那么左子串 $\Pi_{<k}(x)$ 和右子串 $\Pi_{>k}(x)$ 都属于 X。

证明。 每个双格点局域稳定子生成元只与左、右子串中的一个相交，而不会同时与两者相交。因此，如果 x 是逻辑的，那么每个稳定子生成元都必须分别与左、右子串对易。

□

我们将 $\mathcal{X}(S)$ 记作任意 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 对应的空间，即 $\mathcal{X}$ 中所有支撑在 S 上的比特串所构成的空间。（在前面的章节中，我们用下标表示这一概念。）等价地，$\mathcal{X}(S) = \mathcal{X} \cap \ker \Pi_{\mathbb{Z}\setminus S}$。特殊情况可使用更简短的记号：

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(\check{k}) &:= \mathcal{X}(\mathbb{Z} \setminus \{k\}), \\
\mathcal{X}(<k) &:= \mathcal{X}(\{\ldots, k-3, k-2, k-1\}), \\
\mathcal{X}(>k) &:= \mathcal{X}(\{k+1, k+2, k+3, \ldots\}), \\
\mathcal{X}(\check{k}) &= \mathcal{X}(<k) \oplus \mathcal{X}(>k) \qquad \text{by C.3.}
\end{aligned} \tag{98}$$

引理 C.4。 如果 $L \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个连续区间（可能是无限的），那么交集 $X(L) \cap (\sum_{k\in L} X(\check{}k))$ 由比特串生成，其中每个比特串都支撑在 L的真子集上。也就是说，$X(L) \cap (\sum_{k\in L} X(\check{}k)) = \sum_{k\in L} X(L) \cap X(\check{}k)$。

证明。 注意，当 $j < k$ 时，$\mathcal{X}(<j) \subseteq \mathcal{X}(<k)$；当 $j > k$ 时，$\mathcal{X}(>j) \subseteq \mathcal{X}(>k)$。$\check{}$ 根据定义，任意元素 $z \in \sum_{k\in L} \mathcal{X}(k)$ 都是若干元素的有限 和，其中每个元素都属于某个 $k' \in L$ 对应的 $\mathcal{X}(\check{}k')$。给定 z，令 L' 为所有这些 k' 构成的有限集合。我们有

$$z \in \sum_{k'\in L'} \mathcal{X}(\check{k}') = \sum_{k'\in L'} \mathcal{X}(<k') + \mathcal{X}(>k') = \mathcal{X}(<L'_{\max}) + \mathcal{X}(>L'_{\min}) \tag{99}$$

其中， $L'_{\min}$ 是 L' 中最左侧的格点， $L'_{\max}$ 是最右侧的格点。令 $z = x+y$，其中 $x \in \mathcal{X}(>L'_{\min})$且 $y \in \mathcal{X}(<L'_{\max})$。若 $L = \mathbb{Z}$，则证毕。若 L 是向左延伸的半无限集合，那么x 单独负责 z 在 L右侧的比特，这意味着 $x \in \mathcal{X}(L)$，因为 L 是一个区间。因此， x 支撑在 L的一个真子集上，且实际上是有限子集。显然， y 支撑在 L的真子集上，证毕。若 L 是向右延伸的半无限集合，则可用对称的论证。若 L 是有限的，那么 x 负责 z 在 L右侧的比特，而 y 负责 L左侧的比特。这意味着 x， $y \in \mathcal{X}(L)$的支撑中至少缺少一个格点，证毕。

□

运用C.3 和C.4，我们将证明

引理 C.5。对于任意区间 $L \subseteq \mathbb{Z}$，若对所有 $M \subsetneq L$，$X(M) = 0$，则存在某个 Y，使得 $X = X(L) \oplus Y$，且对所有 $k \in L$， $\Pi_k(Y) \cap \Pi_k(X(L)) = 0$。此外，$X(L)$ 恰好是由 n 个独立伊辛链构成的 X- 逻辑空间，其中 $n =$ 维数 $_{\mathbb{F}} X(L) \leq$ 最小值 $_{k\in L} q_k$，而 q_k 是格点 k 上的量子位数量。

经过基变换后， $\mathbb{F}^{q_k}$（所有 q_k 分量列向量构成的向量空间）中交集为零的两个子空间，可以使其支撑在互不相交的分量集合上。因此，引理的含义是：在任意一个 L 支撑着一个非零元素的格点 $x \in \mathcal{X}$区间上，如果不存在非零元素

X 中的元素支撑在 L 的任意真子集上，那么存在一个 X 的基，其中包含 x ；经过某种单格点受控-X 操作后，比特串 x 会变成 L 上的一个比特串，且在 L 的每个格点上恰有一个非零比特；其他任何基元素都不会与 x 重叠。

证明。 假设在 L 上不存在“更短”的逻辑算符。根据 C.4，这意味着 $\mathcal{X}(L) \cap \check{} \sum_{k\in L} \mathcal{X}(k) = 0$。因此，存在一个 $\mathbb{F}$-子空间 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$，使得

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(L) \oplus \mathcal{Y}, \qquad \text{and} \qquad \sum_{k\in L} \mathcal{X}(\check{k}) \subseteq \mathcal{Y}. \tag{100}$$

（为找到这样的 Y，我们可以将 X $(L) \oplus \sum_{k\in L}$ X $(\check{}k)$ 的一组基扩充为 X 的一组基。）令 $k \in L$ 为任意格点。对于所有非零的 $x \in$ X(L)， $\Pi_k(x)$ 必须非零；否则，C.3 会给出 X (L) 中支撑在 L 的真子集上的元素，而根据假设，这些元素总是为零。这意味着投影 Π_k : X $(L) \to \mathbb{F}^{q_k}$ （其中 q_k 是格点 k 上的量子位数量）是单射，因此 Π_k(X (L)) $\subseteq \mathbb{F}^{q_k}$ 与维数为 $n = \dim_{\mathbb{F}}$ X $(L) \leq q_k$ 的 X (L) 同构。特别地，存在一种基变换，使得对于 Π_k(X (L)) 支撑上的每个量子位，X (L) 中都有唯一一个基元素在该量子位上的非零位为 1。由于 k 是任意的，我们可以看出，X (L) 恰好是独立伊辛链的 X-逻辑空间。

还需要将 X (L) 的支撑与 Y 的支撑分离。令 $g \in \Pi_k$(Y) $\cap \Pi_k$(X (L))，其中$\check{}g = \Pi_k(y)$ 对 $y \in$ Y 成立，而 $g = \Pi_k(x)$ 对 $x \in$ X (L) 成立，从而 $\Pi_k(x - y) = 0$。于是，根据 Y 的构造， $x - y \in$ X $(k) \subseteq$ Y，这意味着 $x \in$ Y。但同样根据 Y 的构造，我们有 $x \in$Y $\cap$X $(L) = 0$。因此， Π_k(Y) $\cap \Pi_k$(X (L)) $= 0$。

□

由此我们完成了4.5的C.5 证明，因为我们总能一次提取非零条数的伊辛链，并从最短的链开始。如果读者希望满足集合论上的严谨性，那么可以考虑由所有直和项组成的集合$\{\mathcal{X}'\}$，这些直和项是$\mathcal{X}'$的$\mathcal{X}$，满足$\mathcal{X} = \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}'$对于某个$\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X}$，且经过某个单格点基变换后，这两个直和项的支撑不相交，并且$\mathcal{X}'$ 是某个独立伊辛链族的 X逻辑空间。该集合按包含映射构成偏序，不难验证，任意全序链都有一个上界，即其并集，而且该并集也属于此集合。于是，佐恩引理表明存在一个极大元；根据C.5 ，这个极大元不可能在$\mathcal{X}$中留下任何部分。

C.4 查看稳定子

忽略相位因子后，将 B_i 视为一个 $\mathbb{F}$-向量空间 $X_i \cong \mathbb{F}^{q_i}$ 是很方便的（不要与泡利 X算符混淆——这里不需要它）。这里没有辛形式；所有相关的群都是阿贝尔群。子群 $\mathrm{B}'_i = \mathrm{A}(i, i+1)_1 \subseteq \mathrm{B}$ $\vec{}$ i i 和 $\mathrm{B}''_i = \mathrm{A}(i-1, i)_2 \subseteq \mathrm{B}$ 分别给出 X_i 的子空间 X_i 和 X_i 。上文 C.2 的证明 $\vec{}$ 中的群同构 ϕ : $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ ，对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，都成为一个 $\mathbb{F}$- 线性同构 $\phi_{i\to i+1}$: $X_i \to X_{i+1}$ 。这个线性同构 $\phi_{i\to i+1}$ 不一定定义在整个 X_i 上。$(\phi_{i-1\to i})^{-1}$ 在 X_i 上也不一定成立。

[{"id":0,"output":"让我们说，一个由 $\mathbb{F}$-线性空间 $\{X_i | i \in \mathbb{Z}\}$ 组成的集合是一个 **线性空间链** ，或简称为 $\vec{}$ $\vec{}$链，如果对每个 i 都存在子空间 $X_i, X_i \subseteq X_i$ ，并且存在线性同构 $\phi_{i\to i+1}$: $X_i \to X_{i+1}$。这些子空间可以是零空间。我们可以将两个链取直和，从而得到另一个链：$\{X_i\} \oplus \{X'_i\} = \{X_i \oplus X'_i\}$，其中 $\phi_{i\to i+1} \oplus \phi'_{\to i+1}$: $\vec{X}_i \oplus \vec{X}'_i \to X_{i+1} \oplus X'_{i+1}$。如果对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $X_i = 0$ ，则线性空间链 $\{X_i\}$为零。"}]

在此证明中，我们将使用区间记法，例如 $[a, b)$，表示晶格 $\mathbb{Z}$ 上一组连续的格点。需要指定区间的边界时，我们会这样表示，例如，

存在一个区间 $I=(a-1,b+1)$，其中 $a\in[-\infty,-1]$ 且 $b\in[3,\infty]$。这意味着，若 $a=-\infty$ 或 I 以 a 为最小元素，则 I 向左无界；否则，情况相反。类似地，若 $b=\infty$ 或 I 以 b 为最大元素，则 I 向右无界；否则，情况相反。这里，按照惯例，$-\infty-1=-\infty$ 和 $\infty+1=\infty$。

区间 $I=(a-1,b+1)$ 上的伊辛链，其中 $a,b\in[-\infty,\infty]$ 给出一个线性空间链：$X_i\cong\mathbb{F}$ 对所有 $i\in a-1\ b+1$　$X_i=0$　$X_i=X_i$　$i>a$　$X_a=0$ (,) 均成立，其他情况则不成立；但对于有限的 a，则.....；对于 $i<b$，$X_i=X_i$ 成立，但对于有限的 b，$X_b=0$ 成立。或者，伊辛链由一个向量序列 $x_i\in X_i$ 确定，该序列满足：对于所有 $i\in(a-1,b)$，$x_{i+1}=\phi_{i\to i+1}(x_i)$ 非零；但对于 $i\notin(a-1,b+1)$，$x_i=0$。如果链 $\{X_i\}$ 的 $\sup_i\dim X_i=1$，那么该链对应于一条伊辛链，或对应于一组支撑在互不相交区间上的伊辛链。我们将区间 $I=(a-1,b+1)$ 上的向量序列 $\{x_i\in X_i\,|\,i\in I\}$ 简称为伊辛序列，只要对于所有 $i\in(a-1,b)$，$X_i\ni x_i\mapsto\phi_{i\to i+1}(x_i)=x_{i+1}\in X_{i+1}$，无论它是否构成 $\{X_i\}$ 的直和项。例如，若 $\vec{X}_{-1}=\binom{0}{1}=X_0$ 且 $\vec{X}_0=\binom{1}{0}=X_1$，并且所有其他子空间 $X_i,\vec{X}_i$ 均为零，那么序列 $\{\binom{1}{1}\in X_0\}$ 是一个仅含一个元素的伊辛序列，但不构成直和项；它甚至无法扩展为一个直和项。

我们首先描述伊辛序列构成直和项的条件。记 $\hat{}$ 为 X_i 交集

$$\hat{X}_i=X_i\cap\vec{X}_i. \tag{101}$$

引理 C.6. 在链 $\{X_i\}$ 中，$(a-1,b+1)$ 上的伊辛序列 $\{x_i\}$（其中 $a,b\in[-\infty,\infty]$）是直和项，当且仅当存在子空间 $Y_i\subseteq X_i$ 和 $\vec{Y}_i\subseteq\vec{X}_i$，使得

$$\begin{cases}\langle x_i\rangle\oplus Y_i=X_i & for\ i\in(a,b+1),\\ \langle x_i\rangle\oplus\vec{Y}_i=\vec{X}_i & for\ i\in(a-1,b),\\ Y_i\cap\hat{X}_i=\vec{Y}_i\cap\hat{X}_i & for\ i\in(a,b),\\ \phi_{i\to i+1}:\vec{Y}_i\cong Y_{i+1} & for\ i\in(a-1,b),\\ \hat{X}_a\subseteq\vec{Y}_a & if\ a>-\infty,\\ \hat{X}_b\subseteq Y_b & if\ b<\infty.\end{cases} \tag{102}$$

证明。“仅当”方向容易验证；若 $\{X_i\}=\langle x_i\rangle\oplus\{Y_i\}$，则 Y_i 和 $\vec{Y}_i$ 满足所有这些性质。

为证明“若”方向，我们需要构造 $\{\langle x_i\rangle\}$ 的直和补。我们假设 $\vec{}$ 对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 都有 $X_i=X_i+X_i$；否则，X_i+X_i 在 X_i 中的任意直和补自动就是一个直和项。定义 $\{Z_i=Z_i+\vec{Z}_i\}$ 为

$$\begin{aligned}(Z_i,\vec{Z}_i)&=(Y_i,\vec{Y}_i) && \text{for } i\in(a,b),\\ (Z_a,\vec{Z}_a)&=(X_a,\vec{Y}_a) && \text{if } a>-\infty,\\ (Z_b,\vec{Z}_b)&=(Y_b,\vec{X}_b) && \text{if } b<\infty,\\ (Z_i,\vec{Z}_i)&=(X_i,\vec{X}_i) && \text{for } i\notin(a-1,b+1).\end{aligned} \tag{103}$$

首先，我们证明对于所有 $i\in\mathbb{Z}$，$X_i=x_i\oplus Z_i$。若 $i\in\mathbb{Z}\setminus(a-1,b+1)$，则 $x_i=0$ 且 $X_i=Z_i$，因此 $X_i=x_i\oplus Z_i$。若 $a\in\mathbb{Z}$，则 $x_a+Z_a=x_a+X_a+\vec{Y}_a$，根据 (102) 的第二行，这等于 $X_a+\vec{X}_a=X_a$。若 $x_a\in Z_a=X_a+\vec{Y}_a$，则对某个 $x_a\in X_a$ 和 $\vec{y}_a\in\vec{Y}_a$，有 $x_a=x_a+\vec{y}_a$。由 (102) 的第五行可知 $x_a-\vec{y}_a=x_a\in\vec{X}_a\cap X_a=\hat{X}_a\subseteq\vec{Y}_a$。于是，$0\neq x_a\in\vec{Y}_a$，但是

这与 (102) 的第二行矛盾。因此，$x_a \notin Z_a$ 且 $x_a \cap Z_a = 0$，所以当 $a > -\infty$ 时，$x_a \oplus Z_a = X_a$。利用 (102) 的第一行和第六行，采用对称论证可得：当 $b < \infty$ 时，$x_b \oplus Z_b = X_b$。若 $i \in (a, b)$，则由 (102 $x_i + Z_i = X_i$ $x_i = y_i + \vec{y}_i \in Z_i$ $y_i \in Y_i$) 的第一行和第二行可得 $x_i + Z_i = x_i + Y_i + \vec{Y}_i = x_i + Y_i + x_i + \vec{Y}_i = X_i + \vec{X}_i = X_i$，因此 。假设对某个 ˆ ˆ 有 $\vec{y}_i \in Y_i$。由于 $x_i \in X_i$，我们有 $x_i - y_i = \vec{y}_i \in X_i \cap Y_i \subseteq X \cap Y_i = X_i \cap Y_i$，其中最后一个等号由 (102) 的第三行得出，因此 $\vec{y}_i \in Y_i$。然而，此时 $0 \neq x_i = y_i + \vec{y}_i \in Y_i \cap x = 0$。因此，$x_i \cap Z_i = x_i \cap (Y_i + \vec{Y}_i) = 0$ 且 $x_i \oplus Z_i = X_i$。

其次，我们展示母链的同构 $\{X_i\}$ 限制为沿着 $\{Z_i\}$ 的同构。(102) 的第四行处理区间的“内部”：对于 $i \in (a-1, b)$ 我们有 $\phi_{i \to i+1}|_{\vec{Z}_i}$： $\vec{Z}_i = \vec{Y}_i \xrightarrow{\cong} Y_{i+1} = Z_{i+1}$。区间的“外部”保持不变：对于$i \in \mathbb{Z} \setminus (a-1, b)$ 我们有 $\phi_{i \to i+1}|_{\vec{Z}_i}$： $\vec{Z}_i = \vec{X}_i \xrightarrow{\cong} X_{i+1} = Z_{i+1}$。

□

注意，对于任意线性空间 E, F, G，若满足 $G \subseteq F$，很容易证明，

$$(G + E) \cap F = G + (E \cap F). \tag{104}$$

引理 C.7. 对于任意满足 $X_0 \neq 0$ 的线性空间链 $\{X_i = X_i + \vec{X}_i\}$，任意无限 *Ising* 序列 $\{x_i \in X_i \,|\, i \in (a-1, b+1)\}$ 都构成一个直和项，其中 $x_a \in \vec{X}_a \,|\, \hat{} \, X_a$（如果 $a > -\infty$），或者 $x_b \in X_a \,|\, \hat{} \, X_b$（如果 $b < \infty$）。

证明。对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，我们任取子空间 W_i，$\vec{W}_i$ 使得 $X_i = \hat{X}_i \oplus W_i$，并且 $\vec{X}_i = \hat{X}_i \oplus \vec{W}_i$.

($a > -\infty, b = \infty$) 我们有 $x_a \in \vec{X}_a \setminus \hat{} \, X_a$。任取子空间 $\vec{V}_a$ 使得 $\vec{W}_a = \langle x_a \rangle \oplus \vec{V}_a$，并且 ˆ ¯ 定义 $Y_a = X_a \oplus V_a$。对于 $k > a$，我们递归地定义

$$\begin{aligned} Y_k &= \phi_{k-1 \to k}(\vec{Y}_{k-1}), \\ \hat{W}_k &= Y_k \cap \vec{X}_k, \\ \vec{Y}_k &= \hat{W}_k \oplus \vec{W}_k. \end{aligned} \tag{105}$$

我们需要检查 (102) 的前三行；其余部分要么空泛成立，要么由构造显然可得。第三行是显然的：$Y_k \cap X_k = W_k \cap X_k = Y_k \cap X_k$。前两行通过在 k 中使用归纳法即可直接得到。基础情形是 $x_a \oplus \vec{Y}_a = \vec{X}_a$，这由构造可知。接着，对于 $k > a$，有 $x_k \oplus Y_k = \phi_{k-1 \to k}(x_{k-1} \oplus \vec{Y}_{k-1}) = X_k$。进而，利用 (104)，我们有 $x_k \oplus \vec{Y}_k = x_k \oplus (Y_k \cap \vec{X}_k) \oplus \vec{W}_k = ((x_k \oplus Y_k) \cap \vec{X}_k) \oplus \vec{W}_k = (X_k \cap \vec{X}_k) \oplus \vec{W}_k = \vec{X}_k$。至此归纳步骤完成；若 $a > -\infty$，则引理得证。

($a = -\infty$, $b < \infty$) 左右对称的论证证明了引理 $b < \infty$。使用$\phi_{i \leftarrow i+1}$ 的 $\phi_{i \to i+1}$的逆。

($a = -\infty$, $b = \infty$) 在这种情况下，对所有 $i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \hat{} \, X_i$。取任意满足 $\hat{} \, X_0 = \langle x_0 \rangle \oplus \hat{} \, W_0$ 的子空间 ˆ W_0。定义 $Y_0 = W_0 \oplus \hat{} \, W_0$ 和 $\vec{Y}_0 = \vec{W}_0 \oplus \hat{} \, W_0$。那么，$\langle x_0 \rangle \oplus Y_0 = X_0$，$\langle x_0 \rangle \oplus \vec{Y}_0 = \vec{X}_0$，ˆ ˆ ¯ ˆ 以及 $Y_0 \cap X_0 = W_0 = Y_0 \cap X_0$。我们按照 $a > -\infty$ 情形向右推演，按照 $b < \infty$ 情形向左推演。

□

我们将寻找一个构成直和项的有限伊辛序列，论证将对序列长度使用归纳法。为此，下面对 (102) 的分离¯很有用，它将使对所需子空间 Y_i, Y_i 的条件看起来与短一个位点的区间上的条件相似。对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，我们用 $\phi_{i \leftarrow i+1}$ 表示 $\phi_{i \to i+1}$的逆。

引理 C.8. 设 $\{x_i \,|\, i \in [a,b]\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 上的一个伊辛序列。定义

$$\hat{\hat{X}}_{b-1} = \hat{X}_{b-1} \cap \phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b), \qquad \hat{\hat{X}}_{a+1} = \hat{X}_{a+1} \cap \phi_{a\to a+1}(\hat{X}_a). \tag{106}$$

那么，对于子空间 $\vec{Y}_i$，Y_i，(107) $\Longleftrightarrow$ (102) $\Longleftrightarrow$ (108)：

$$(i)\begin{cases} \langle x_i\rangle \oplus Y_i = X_i & for\ i \in [a+1, b-1], \\ \langle x_i\rangle \oplus \vec{Y}_i = \vec{X}_i & for\ i \in [a, b-2], \\ Y_i \cap \hat{X}_i = \vec{Y}_i \cap \hat{X}_i & for\ i \in [a+1, b-2], \\ \phi_{i\to i+1} : \vec{Y}_i \cong Y_{i+1} & for\ i \in [a, b-2], \\ \hat{X}_a \subseteq \vec{Y}_a, \\ \hat{\hat{X}}_{b-1} \subseteq Y_{b-1}, \end{cases} \quad (ii)\begin{cases} \langle x_b\rangle \oplus Y_b = X_b, \\ \langle x_{b-1}\rangle \oplus \vec{Y}_{b-1} = \vec{X}_{b-1}, \\ Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1} = \vec{Y}_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}, \\ \phi_{b-1\to b} : \vec{Y}_{b-1} \cong Y_b, \\ \exists T \subseteq \vec{Y}_{b-1} \ :\ \phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b) = \hat{\hat{X}}_{b-1} \oplus T. \end{cases} \tag{107}$$

$$(i)\begin{cases} \langle x_i\rangle \oplus Y_i = X_i & for\ i \in [a+2, b], \\ \langle x_i\rangle \oplus \vec{Y}_i = \vec{X}_i & for\ i \in [a+1, b-1], \\ Y_i \cap \hat{X}_i = \vec{Y}_i \cap \hat{X}_i & for\ i \in [a+2, b-1], \\ \phi_{i\to i+1} : \vec{Y}_i \cong Y_{i+1} & for\ i \in [a+1, b-1], \\ \hat{X}_b \subseteq Y_b, \\ \hat{\hat{X}}_{a+1} \subseteq \vec{Y}_{a+1}, \end{cases} \quad (ii)\begin{cases} \langle x_{a+1}\rangle \oplus Y_{a+1} = X_{a+1}, \\ \langle x_a\rangle \oplus \vec{Y}_a = \vec{X}_a, \\ Y_{a+1} \cap \hat{X}_{a+1} = \vec{Y}_{a+1} \cap \hat{X}_{a+1}, \\ \phi_{a\to a+1} : \vec{Y}_a \cong Y_{a+1}, \\ \exists S \subseteq Y_{a+1} \ :\ \phi_{a\to a+1}(\hat{X}_a) = \hat{\hat{X}}_{a+1} \oplus S. \end{cases} \tag{108}$$

注意，条件组与式 (102) 中的条件组相似。边界格点 b 或 a被 $b-1$ 或 $a+1$取代。式 (102) 中的边界条件 $\hat{}X_b \subseteq Y_b$ 被式 (107) 中一个相似的条件 $\hat{}X_{b-1} \subseteq Y_{b-1}$ 取代。式 (102) 中的边界条件 $\hat{}X_a \subseteq \vec{Y}_a$ 被式 (108) 中一个相似的条件 $\hat{}X_{a+1} \subseteq \vec{Y}_{a+1}$ 取代。

证明。 我们只证明 (102) $\Longleftrightarrow$ (107)；对称的论证可证明 (102) $\Longleftrightarrow$(108)。

假设存在子空间 $Y_{b-1} \subseteq X_{b-1}$ 和 $Y_b \subseteq X_b$，使得 $\phi_{b-1\to b}$：$Y_{b-1} \cong Y_b$。这是将式 (102) 的第四行应用于最右侧格点的结果。于是，式 (102) 第六行中的边界条件 $\hat{}X_b \subseteq Y_b$ 等价于 $\phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{}X_b) \subseteq \vec{Y}_{b-1}$。后一个条件意味着存在 $T \subseteq \vec{Y}_{b-1}$，使得 $\phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{}X_b) = \hat{}X_{b-1} \oplus T$。显然，$\hat{}X_{b-1} \subseteq \vec{Y}_{b-1}$。如果我们进一步假设 $\hat{}Y_{b-1} \cap \hat{}X_{b-1} = \vec{Y}_{b-1} \cap \hat{}X_{b-1}$（式 (102) 的第三行），那么 $\hat{}X_{b-1} \subseteq Y_{b-1}$。反过来，如果对某个 $T \subseteq \vec{Y}_{b-1}$，我们有 $\hat{}\hat{}\hat{}\phi_{b-1\leftarrow b}\ X_b = X_{b-1} \oplus T$ $X_{b-1} \subseteq Y_{b-1}$ $\phi_{b-1\leftarrow b}\ X_b \subseteq (\hat{}\,)\hat{}$，并且 $\hat{}$，那么 $\hat{}X_{b-1} \subseteq \vec{Y}_{b-1}$，因此 $(\hat{}\,)\hat{}\hat{}Y_{b-1}$。综上，若假设 $\phi_{b-1\to b}$： $Y_{b-1} \cong Y_b$ 且 $\vec{Y}_{b-1} \cap X_{b-1} = Y_{b-1} \cap X_{b-1}$，那么

$$\hat{X}_b \subseteq Y_b \iff \phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b) \subseteq \vec{Y}_{b-1} \iff \begin{cases} \hat{\hat{X}}_{b-1} \subseteq Y_{b-1}, \\ \exists T \subseteq \vec{Y}_{b-1} \ :\ \phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b) = \hat{\hat{X}}_{b-1} \oplus T. \end{cases} \tag{109}$$

现在，(107)(i) 的前四个条件显然与 (102) 的条件相同，但右端除外；而 (107)(ii) 的前四个条件涵盖了右端。(102) 的左边界条件 $\hat{}X_a \subseteq \vec{Y}_a$ 出现在 (107)(i) 中。(107)(i) 的第六行与 (107)(ii) 的第五行合起来，依据 (109)，等价于右边界条件 $\hat{}\,X_b \subseteq Y_b$。因此，(102) $\Longleftrightarrow$ (107)。 □

为便于下面的归纳法，对于任意链 $\{X_i\}$，我们通过下表定义两个新链 $\{C_i = C_i + \vec{C}_i\}$ˆ ˆ 和 $\{D_i = D_i + \vec{D}_i\}$ 。两个特殊子空间 ˆ X_a 和 ˆ X_b 定义见 (106)。

C_i	0	0	$\hat{\hat{X}}_{a+1}$	X_i			
$\vec{C}_i$	0	$\phi_{a\leftarrow a+1}(\hat{\hat{X}}_{a+1})$	$\vec{X}_{a+1}$	$\vec{X}_i$			
i	$(-\infty,\ a-1]$	a	$a+1$	$[a+2, b-2]$	$b-1$	b	$[b+1,\infty)$
D_i	X_i				X_{b-1}	$\phi_{b-1\to b}(\hat{\hat{X}}_{b-1})$	0
$\vec{D}_i$	$\vec{X}_i$				$\hat{\hat{X}}_{b-1}$	0	0

(110)

新链的同构 ϕ^C， ϕ^D 以显然的方式继承自原链 $\{X_i\}$。

引理 C.9。 设 $\{x_i \neq 0 \,|\, i \in [a,b]\}$ 是 $\{X_i\}$ 的有限伊辛序列。如果 $\{x_i \,|\, i \in [a,b-1]\}$ 构成 $\{D_i\}$ 的一个直和项，那么 $\{x_i \,|\, i \in [a,b]\}$ 构成 $\{X_i\}$ 的一个直和项。由对称性，如果 $\{x_i \,|\, i \in [a+1,b]\}$ 构成 $\{C_i\}$ 的一个直和项，那么 $\{x_i \,|\, i \in [a,b]\}$ 构成 $\{X_i\}$ 的一个直和项。

证明。 我们只证明第一个结论；第二个结论由左右对称性得出。

该假设给出子空间 $\hat{X}_i \subseteq X_i$ 和 Y_i 的 $\vec{D}_i$ 的 $\vec{X}_i$ 对于 $i \in [a+1, b-1]$，满足 (107)(i)。我们必须找到 $\vec{Y}_{b-1} = \phi_{b-1\leftarrow b}(Y_b)$ 满足 (107)(ii)。为此，我们取一个子空间 T 使得

$$\phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b) = \hat{\hat{X}}_{b-1} \oplus T \tag{111}$$

根据 X_{b-1} 式（106）中$X_{b-1} \subseteq Y_{b-1}$ 的定义，显然 $X_{b-1} = (Y_{b-1} \cap X_{b-1}) \cap \phi_{b-1\leftarrow b}(X_b)$，我们看到 $(Y_{b-1} \cap X_{b-1}) \cap T = 0$，因此

$$(Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) \oplus T \subseteq \vec{X}_{b-1}. \tag{112}$$

由此可得

$$\begin{aligned}((Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) \oplus T) \cap \hat{X}_{b-1} &\subseteq ((Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) + \phi_{b-1\leftarrow b}(\hat{X}_b)) \cap \hat{X}_{b-1} \\ &= (Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) + \hat{\hat{X}}_{b-1} && \text{due to (104)} \\ &= Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1} && (\hat{\hat{X}}_{b-1} \subseteq \hat{X}_{b-1}).\end{aligned} \tag{113}$$

若 $x_{b-1} \in (Y_{b-1} \cap X_{b-1}) \oplus T$，那么，由于 $x_{b-1} \in X_{b-1}$ 也成立，我们必有 $x_{b-1} \in Y_{b-1} \cap X_{b-1}$，但（107）（i）的第一行表明 $X_{b-1} = \langle x_{b-1}\rangle \oplus Y_{b-1}$，这意味着 $x_{b-1} \notin Y_{b-1}$，矛盾。因此，

$$\langle x_{b-1}\rangle \oplus (Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) \oplus T \subseteq \vec{X}_{b-1}. \tag{114}$$

因此，存在一个子空间 V，使得

$$\langle x_{b-1}\rangle \oplus \underbrace{(Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) \oplus T \oplus V}_{\vec{Y}_{b-1}} = \vec{X}_{b-1}, \tag{115}$$

其中我们定义了 $\vec{Y}_{b-1}$。关于 (107)(ii)，第一、二、四和五行现在显而易见。为证明 (107)(ii) 的第三行，我们断言 $V \cap \hat{} X_{b-1} = 0$。假设 $v \in V \cap \hat{} X_{b-1}$。由 $X_{b-1} = x_{b-1} \oplus Y_{b-1}$，我们得到 $v = fx_{b-1} + y_{b-1}$，其中 $f \in \mathbb{F}$ 和 $y_{b-1} \in Y_{b-1}$。于是，$y_{b-1} = v - fx_{b-1} \in \hat{} X_{b-1}$，因此 $y_{b-1} \in Y_{b-1} \cap \hat{} X_{b-1}$。但是，$0 = fx_{b-1} + y_{b-1} - v \in x_{b-1} \oplus (Y_{b-1} \cap \hat{} X_{b-1}) \oplus V$ 必须是唯一的表达式，这意味着 $v = 0$。因此，

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1} &= ((Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) \oplus T \oplus V) \cap \hat{X}_{b-1} \\ &= (Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}) + (V \cap \hat{X}_{b-1}) \qquad \text{due to (104), (113)} \\ &= Y_{b-1} \cap \hat{X}_{b-1}. \end{aligned} \tag{116}$$

证明可由 C.6 完成。 □

接下来，我们构造一个在某种意义下极大的伊辛序列。对于任意 $i < j$，我们按如下方式递归定义$\phi_{i\to j}$：

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(\phi_{i\to i}) = X_i, \quad \phi_{i\to i} = \mathrm{id}|_{X_i}, \\ &\mathrm{dom}(\phi_{i\to j}) = (\phi_{i\to i+1})^{-1}(X_{i+1} \cap \mathrm{dom}(\phi_{i+1\to j})), \quad \phi_{i\to j} = \phi_{i+1\to j} \circ \phi_{i\to i+1}. \end{aligned} \tag{117}$$

换言之，若 $i < j$，则 $\phi_{i\to j}$ 的定义域由所有满足以下条件的 $x_i \in X_i$ 构成：序列 $x_{k+1} = \phi_{k,k+1}(x_k) \in \vec{X}_{k+1}$ for $k \in [i, j)$ 有定义。映射 $\phi_{i\to j}$ 将 $\vec{X}_i$ 的一个子空间同构映射到 X_j的一个子空间。对于 $i \le j$，我们用 $\phi_{i\leftarrow j}$ 表示 $\phi_{i\to j}$的逆。箭头左侧的位置索引总是小于或等于右侧的位置索引。

假设给定一条链 $\{X_i\}$，满足 $X_0 \neq 0$。考虑满足$j < 0$的 $\mathrm{dom}(\phi_{j\leftarrow 0}) \subseteq X_0 \subseteq X_0$。显然，其维数随着 $j \searrow -\infty$ 单调不增。因此，维度必然稳定到某个极限

$$\lim_{j\searrow -\infty} \dim \mathrm{dom}(\phi_{j\leftarrow 0})$$

经过有限步后。如果这个极限为零，那么存在一个有限的 $a \in (-\infty, -1]$，使得 $\mathrm{im}(\phi_{a+1\leftarrow 0}) \cap \hat{} X_{a+1} \neq 0$，但 $\mathrm{im}(\phi_{a\leftarrow 0}) \cap \hat{} X_a = 0$。然后，我们选取一个向量 $x_0 \in \mathrm{dom}(\phi_{a\leftarrow 0})$，并从 x_0 开始向左应用 ϕ；根据 $\phi_{a\leftarrow 0}$ 的定义，我们得到 $x_a, x_{a+1}, \ldots, x_{-1}, x_0$。我们向右应用 ϕ，直到在某个 $b \in [0, \infty]$ 处必须停止：要么对所有 $n > 0$ 都存在 $\phi_{0\to n}(x_0) = x_n$，要么 b 是有限的，因此 $x_{b-1} \in \vec{X}_{b-1}$，但 $x_b \in X_b \backslash \hat{} X_b$。如果极限为正（$\lim_{j\searrow -\infty} \dim \mathrm{dom}(\phi_{0,j}) > 0$），此时 $a = -\infty$，那么我们只需任选一个 $x_0 \in \bigcap_{j<0} \mathrm{dom}(\phi_{0,j})$，并为 $i \in (-\infty, b+1)$ 定义一个向量序列 x_i，其中各向量由 ϕ 联系起来。我们称序列 $\{x_i \,|\, i \in (a-1, b+1)\}$ 为完整序列。尽管左边界 a 由链 $\{X_i\}$ 和 $X_i \neq 0$ 确定，右边界 b 则由链和 $x_0 \in \mathrm{dom}(\phi_{a\leftarrow 0})$ 的选择共同确定。完整伊辛序列 $\{x_i \in X_i \,|\, i \in (a-1, b+1)\}$ 也取决于 x_0。

引理 C.10. *对于任意满足 $X_0 \neq 0$ 的线性空间链 $\{X_i = X_i + \vec{X}_i\}$，任意有限完整 Ising 序列都是一个直和项。*

证明. 我们将使用 C.6 和 C.8 中关于直和项的子空间刻画 Y_i，$\vec{Y}_i \subseteq X_i$。设 $I = [a, b] = (a-1, b+1)$ 是定义有限完整 Ising 序列的有限区间，其中 $a < 0 \le b$。我们将先对 $b \ge 0$ 在 $a = -1$ 的条件下使用归纳法，再对 $a < 0$使用归纳法。

（归纳法 i）基础情形是 $a = -1$ 和 $b = 0$，因此完整 Ising 序列由两个元素 x_{-1} 和 x_0组成。根据构造，$a = -1$ 意味着 $\mathrm{im}(\phi_{-1\leftarrow 0}) \cap \hat{} X_{-1} = 0$。由于 $\hat{} X_{-1} \subseteq$

$\mathrm{im}(\phi_{-1\leftarrow 0}) = \vec{X}_{-1} \cong X_0 = \mathrm{dom}(\phi_{-1\leftarrow 0})$ ，我们发现 $\hat{} X_{-1} = 0$。因此，条件变为 (102)

$$\begin{aligned} \langle x_0\rangle \oplus Y_0 = X_0\,, \qquad & \langle x_{-1}\rangle \oplus \vec{Y}_{-1} = \vec{X}_{-1}\,, \\ \phi_{-1\to 0} : \vec{Y}_{-1} \cong Y_0\,, \qquad & \hat{X}_0 \subseteq Y_0\,. \end{aligned} \tag{118}$$

由于 $b = 0$，我们必须有 $x_0 \notin \vec{X}_0$。因此，$\langle x_0\rangle \oplus \hat{} X_0 \subseteq X_0$。令 Z_0 为 X_0 中 $\langle x_0\rangle \oplus \hat{} X_0$ 的任意直和补，因此 $X_0 = \langle x_0\rangle \oplus \hat{} X_0 \oplus Z_0$。定义 $Y_0 = \hat{} X_0 \oplus Z_0$ 和 $\vec{Y}_{-1} = \phi_{-1\leftarrow 0}(Y_0)$。它们满足全部四个条件。

（归纳 ii）归纳假设是，该引理对任意 $I = [-1, b']$ where$0 \le b' < b$ 都成立。我们将证明该引理对 $I = [-1, b]$ 成立。

我们声称，$\{d_i = x_i \in D_i \,|\, i \in [a, b-1]\}$ 是由式 (110) 定义的新链 $\{D_i\}$ 的完整 Ising 序列。在原点左侧，对于所有 $j < 0$ ，均有 dom($\phi^D_{j\leftarrow 0}$) =dom($\phi_{j\leftarrow 0}$)，因为它们由满足 $i \le 0$ 的 $\phi_{i-1\leftarrow i} = \phi^D_{i-1\leftarrow i}$ 决定。因此，我们可以在新链中构造一个包含 $d_0 = x_0 \in D_0 = X_0$ 的完整 Ising 序列，并且其左侧（$a \le j \le 0$）和右侧（$0 < j < b$）的序列元素 d_j 与原序列中的元素相同。在原链 $\{X_i\}$ 中，根据完整 Ising 序列的定义，我们有 $x_b \notin \hat{} X_b$，这意味着 $x_{b-1} \notin \hat{} X_{b-1}$。因此，我们无法将 $\phi^D_{b-1\to b}$ 应用于 d_{b-1}。由此可知，$\{d_i = x_i \,|\, i \in [a, b-1]\}$ 是新链的一个完整 Ising 序列。

现在，将归纳假设应用于新链$\{D_i\}$ 及其完整 Ising 序列$\{x_i \,|\, i \in [a, b-1]\}$ 可知它构成 $\{D_i\}$ 的一个直和项。根据 C.9，我们完成这一归纳步骤。

（归纳法 iii）归纳假设是：当 $I = [a', b]$ where $b \in [0, \infty)$ 任意但 $a < a' < 0$ 时，引理成立。我们将证明 $I = [a, b]$ 的引理。[20]

我们声称，$\{c_i = x_i \in C_i \,|\, i \in [a+1, b]\}$ 是由 (110) 定义的新链 $\{C_i\}$ 的完整 Ising 序列。首先，我们必须证明 $\phi^C_{a+1\leftarrow 0} \neq 0$ but $\phi^C_{a\leftarrow 0} = 0$。由 (110) 可知 $\phi^C_{a+1\leftarrow 0} = \phi_{a+1\leftarrow 0} \neq 0$。由于 $\{x_i \in X_i \,|\, i \in [a, b]\}$ 是完整的，我们知道 im($\phi_{a\leftarrow 0}$) $\cap \hat{} X_a = 0$，这意味着 $\phi_{a\to a+1}$(im($\phi_{a\leftarrow 0}$)) $\cap \phi_{a\to a+1}(\hat{} X_a) = 0$。根据定义，$\phi_{a\to a+1}$(im($\phi_{a\leftarrow 0}$)) $= \phi_{a\to a+1}(\hat{} X_a) \cap \hat{}$ im($\phi_{a+1\leftarrow 0}$)。因此，im($\phi_{a+1\leftarrow 0}$)$\cap \phi_{a\to a+1}(\hat{} X_a) = 0$，这意味着 im($\phi_{a+1\leftarrow 0}$)$\cap \hat{} X_a = 0$，或者等价地$\phi^C_{a\leftarrow 0} = 0$。其次，我们必须证明序列 $x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_0, \ldots$ 一直延伸到 x_b，但不会更远；这一点显然成立，因为在原点右侧，新链与原链完全相同。因此，$\{x_i \,|\, i \in [a+1, b]\}$ 是 $\{C_i\}$ 的完整伊辛序列。

将归纳假设应用于新链 $\{C_i\}$ 及完整 Ising 序列 $\{x_i \,|\, i \in [a+1, b]\}$ 可知，它是 $\{C_i\}$的一个直和项。根据 C.9，我们完成了这一步归纳，从而证明了该引理。

□

引理 C.11。 任意满足 $\{X_i\}$ 且 维数为 $X_k > 1$ （其中 k ）的线性空间链，都是两个非零子链的直和。

$\vec{}$ $\vec{}$证明。不失一般性，我们可以假设 $X_i + X_i = X_i$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$；若 $X_i + X_i \neq X_i$ 对于$\vec{}$某个 i，则 $X_i + X_i$在 X_i中的任一直和补都会给出一个非零直和项，即单点 $\vec{}$ $\vec{}$上的伊辛链 i。又因为 $X_k = X_k + X_k \neq 0$，所以 $X_{k-1} \cong X_k \neq 0$ 或 $X_k \cong X_{k+1} \neq 0$。通过平移原点，我们可以假设 $X_0 \neq 0$。于是存在一个非零的完整 Ising 序列。若它是有限的，则由 C.10可知；若它是无限的，则由 C.7可找到一个非平凡直和项。 □

[20]这里的论证大体上与（归纳 ii）中的相同，但有一点不同：我们对完整 Ising 序列的定义并非左右对称。

递归应用 C.11，再利用佐恩引理，我们便完成了定理 4.5的证明。

D WPT 模型的更多内容

D.1 水平（底部）边界。

同样的思路适用　于水平顶部边界的构造，这里同样适用。令

$$\mathrm{ISG}_{B(y_b)\cdot} = \left\langle \left\{ P_0(x,y-1)\,, Z_{x,y-1/2} \mid x\in\mathbb{Z},\, y-y_b\in\mathbb{Z}_+ \right\} \cup \left\{ Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y<y_b \right\} \right\rangle \tag{119}$$

混合电路由 5 个步骤组成。首先，通过测量 $\{Z_{x,0}\,|\,x\in\mathbb{Z}\}$，将 $\mathrm{ISG}^{B(0)}$ $\to$ 转换为 $\mathrm{ISG}^{B(1)}$，然后对 $y>0$ 应用体平移电路，将 ISG 恢复为 $\mathrm{ISG}^{B(0)}$。

$$\mathrm{ISG}_0^{(B)} = \mathrm{ISG}_{B(0)}\,, \tag{120a}$$

$$\mathrm{ISG}_1^{(B)} = \mathrm{ISG}_{B(1)}\,, \tag{120b}$$

$$\mathrm{ISG}_2^{(B)} = \left\langle \left\{ P_1(x,y)\,, X_{x,y-1/2}X_{x,y} \mid x\in\mathbb{Z},\, y\in\mathbb{Z}_+ \right\} \cup \left\{ Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y\le 0 \right\} \right\rangle, \tag{120c}$$

$$\mathrm{ISG}_3^{(B)} = \mathrm{ISG}_{B(1/2)}\,, \tag{120d}$$

$$\mathrm{ISG}_4^{(B)} = \left\langle \left\{ P_3(x,y)\,, X_{x,y-1}X_{x,y-1/2} \mid x\in\mathbb{Z},\, y\in\mathbb{Z}_+ \right\} \cup \left\{ Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y<0 \right\} \right\rangle. \tag{120e}$$

$\mathrm{ISG}_0^{(B)}$ 的局域逻辑算符由 $L_j = X_{j,0}Z_{j+1,0}$生成。经过一个循环后，这些算符的变换方式为 $L_j\mapsto L_{j-1}$。

或者，我们可以在第一步沿着 $y=0$ 行测量 X，逻辑算符则会向相反方向移动。

$$\begin{aligned}\mathrm{ISG}_1^{(B')} = \Big\langle &\left\{ P_0(x,y)\,, Z_{x,y-1/2} \mid x\in\mathbb{Z},\, y\in\mathbb{Z}_+ \right\} \\ &\cup \left\{ X_{(x,0)} \mid x\in\mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ Z_{x,y} \mid (x,y)\in\Lambda,\, y<0 \right\} \Big\rangle.\end{aligned} \tag{121}$$

D.2 反转边界流——重新审视垂直边界

在§5.1 中，我们构造了 WPT（$x\le 0$）电路与平凡（$x>0$）电路之间的混合电路，其中边界逻辑算符沿着与体电路相同的方向向下移动。这里我们构造另一种混合电路（在相同几何结构下，对这一对体电路进行混合），但边界逻辑算符改为向上移动。

该构造基于以下观察：式 (43) 和 (45) 中的混合具有相反的指标。电路 (45) 与 (43) 的逆的复合是一个将逻辑量子态平移两个单位的一维 LR 环：　$L_j\mapsto L_{j+2}$。对此最简单的实现是一个涉及逻辑量子态的三步电路 L_j，它们遵循代数 (29)，以及一条带有算符 (Z_k, X_k)（其中 $k\in\mathbb{Z}$）的辅助量子比特链：

$$\langle Z_k \mid k\in\mathbb{Z}\rangle \xrightarrow{1} \langle L_kZ_{k-1}X_k \mid k\in\mathbb{Z}\rangle \xrightarrow{2} \langle X_k \mid k\in\mathbb{Z}\rangle \tag{122}$$

$$\xleftarrow[3]{}$$

在步骤 0， Z_k 生成的基稳定子群具有由 L_k 生成的逻辑。在相邻的 ISG 对之间，它们共享的逻辑为，对于 $k \in \mathbb{Z}$： $L_k Z_{k-1} Z_{k+1}$ （步骤 0 和 1）、 $L_{k+2} X_k X_{k+2}$（步骤 1 和 2）以及 L_k （步骤 2 和 0）。在一个循环下，逻辑从步骤 0 到步骤 3 变换 $L_k \mapsto L_k Z_{k-1} Z_{k+1} \mapsto L_{k+2} X_k X_{k+2} \mapsto L_{k+2}$ 。

垂直混合是一个 7 步循环，结合了 (37) 与 (122)：

$$\mathrm{ISG}^{(R')}_{7n+t} = \mathrm{ISG}^{(R)}_{4n+t} \qquad t \in \{0,1,2,3,4\}, \tag{123a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ISG}^{(R')}_{7n+5} = \Big\langle &\{P_0(x,y)\,, Z_{x+2,y-1/2} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{Z_{0,y} X_{0,y+1} Z_{1,y} X_{1,y+1} \mid y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y) \in \Lambda,\, x \geq 2\}\Big\rangle\,,\end{aligned} \tag{123b}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ISG}^{(R')}_{7n+6} = \Big\langle &P_0(x,y)\,, Z_{x+2,y-1/2} \mid x \in \mathbb{Z}_-,\, y \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{X_{1,y} \mid y \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z_{x,y} \mid (x,y) \in \Lambda,\, x \geq 2\}\Big\rangle\,.\end{aligned} \tag{123c}$$

该混合体的指标与(37) 与一个纯粹的一维平移电路（向上移动）堆叠后的指标相同，但不会改变边界逻辑代数。

E 更多关于HH码

弦算符。我们首先简要讨论体区 HH码的逻辑弦算符。（如 §2.3 中所述，这些对象从技术上讲并不是算符，而是局域有限乘积。）我们通过颜色标签和泡利标签来标记弦算符：对于 $C \in \{R, G, B\}$ 和 $p \in \{X, Y, Z\}$， Str^p_C 表示沿连接一条由 C-面元组成的路径的 C-边取泡利 p 算符乘积。回忆一下， C-边连接两个 C-面元。如果两个 C-面元通过一条 C-边相连，我们称它们相邻。例如，在蜂窝晶格上，每个 C-面元恰好有 6 个相邻的 C-面元。一条由 C-面元组成的路径是相邻 C-面元的一个（无限或有限周期）序列。注意， Str^p_C （限制在任意有限区域时）由 E^p_C 生成，并且对于任意 C'、 p'，都与 $E^p_{C'}$ 和 $E^{p'}_C$ 对易。

按照这一记号，每个 ISG 的逻辑弦算符由以下算符生成：

$$\begin{aligned}\mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}: &\quad \mathrm{Str}^Y_R \sim \mathrm{Str}^Z_R\,, \quad \mathrm{Str}^X_G \sim \mathrm{Str}^X_B\,, \\ \mathrm{ISG}_{\mathbf{G}}: &\quad \mathrm{Str}^X_G \sim \mathrm{Str}^Z_G\,, \quad \mathrm{Str}^Y_R \sim \mathrm{Str}^Y_B\,, \\ \mathrm{ISG}_{\mathbf{B}}: &\quad \mathrm{Str}^X_B \sim \mathrm{Str}^Y_B\,, \quad \mathrm{Str}^Z_R \sim \mathrm{Str}^Z_G\,.\end{aligned} \tag{124}$$

我们用 $\sim$ 符号表示两个逻辑代表元之间存在由 ISG 构成的局域有限乘积关系。由于该模型是局域可逆的，每一对步骤都有一对共同的弦算符。

E.1 与 WPT 模型混合

我们可以在 HH 码与 WPT 模型之间构造一种拓扑混合（参见 §5），且其中没有局域逻辑算符。首先，在平面的一半放置本节所述边界的 HH 码，使边界逻辑算符每个循环都向左移动；在平面的另一半放置 WPT 模型的一个边界，该边界也向左移动。为使这两个模型在时间上同步，应在 HH 码中加入一个额外的空闲步骤，

使其每个循环包含四个步骤（例如连续两个 B 步骤）。为使两个模型满足晶格匹配条件，WPT 模型的每个元胞都应对应图 11 所示边界上的 3 个格点。在这种设置下，基底逻辑代数由两份马约拉纳链代数生成：分别来自 HH 码和 WPT 模型的 $L_j^{\mathbf{R}\prime}$ 和 L_j^{WP}（对应 $j \in \mathbb{Z}$）。晶格匹配条件确保 $L_j^{\mathbf{R}\prime}$ 和 L_j^{WP} 在空间上彼此邻近。我们按照 §5.3 的思路将这两个边界粘合起来（尽管两个体区不同）。设 $L_j^{\mathbf{R}\prime}(t)$ 和 $L_j^{WP}(t)$ 分别表示第 t 步逻辑算符的演化；根据构造，我们预期 $L_j^{\mathbf{R}\prime/WP}(t+4) = L_{j-1}^{\mathbf{R}\prime/WP}(t)$。接下来，利用初始混合中的 ISG 构造一个新的粘合电路，并为所有 $j \in \mathbb{Z}$ 添加稳定子 $L_j^{\mathbf{R}\prime}(t)\, L_j^{WP}(t)$。这就是所需的无局域逻辑算符混合，证明 WPT 模型与 HH 码在拓扑混合等价意义下属于同一类别。

E.2 具有手性边缘的平面实现

这里我们考虑（有限）平面上的 HH码。若要使全局电路的周期性保持为每个循环 3 步，则 MQCA 指数必须非零，且沿着码的边界保持恒定。也就是说，任何周期为 3 的平面实现都必须具有沿边缘流动的信息手性动力学流。

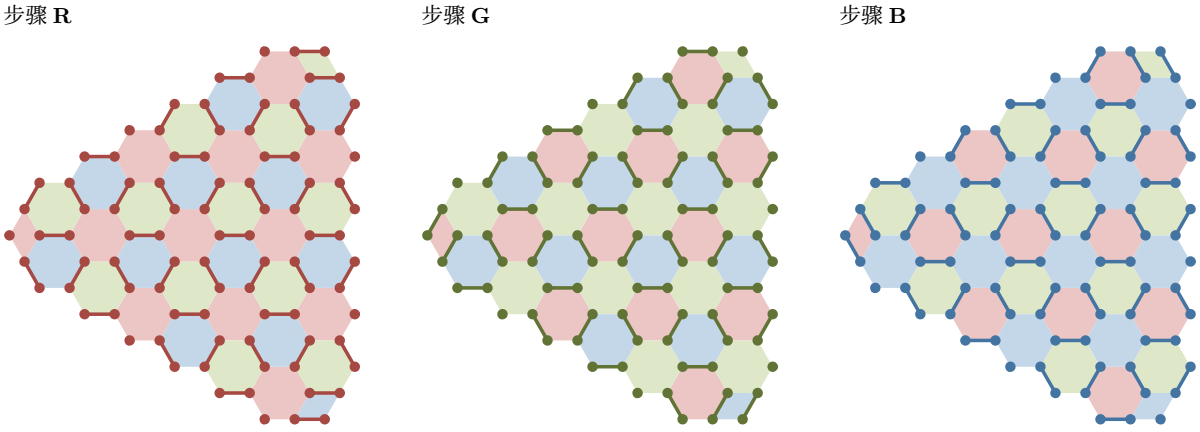


图 15：具有手性边界动力学的 HH码平面构型。**R**、**G**、**B** 步分别涉及对单个格点和格点对的测量，使用泡利算符 X、Y、Z。存在大量边界逻辑算符（数量与周长成正比），它们遵循周期链的马约拉纳链代数。边界逻辑算符沿逆时针方向演化。

图15 展示了三角形几何结构的一种可能实现。三角形的每条边都是§6.2中所述的锯齿形截断边界，角上的面元则替换为菱形。逻辑代数由边界上形如(52)的三体和四体算符生成。对于大小为 N 的三角形（图中所示为 $N = 7$），边界逻辑算符满足具有 $2N$ 个格点的周期链的马约拉纳链代数(29)。（$2N$ 算符并非彼此独立；其乘积$\prod_{\text{even } i} L_i$和$\prod_{\text{odd } i} L_i$属于ISG。）经过一个周期后，边界算符沿逆时针方向移动一个位置。

图中的平面六边形几何16（请勿与单个面元混淆）需要更为细致的构造。与三角形几何不同，这些边并非全部同构；红、绿、蓝的面元标记沿六条边中的三条按顺时针方向排列，沿另外三条则按逆时针方向排列。如果我们尝试实现以下电路

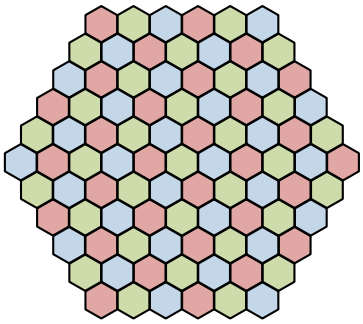


图 16：采用六边形几何结构的 HH 码平面构型。

§6.2 沿每条边界，半数边具有逆时针传播动力学，另一半具有顺时针传播动力学；六边形的相邻边上，信息流的方向相反。由于逻辑算符无法在任何顶点处累积，这意味着某些角上会产生“马约拉纳贝尔对”，它们朝相反方向传播，并在不同角上被测量出系统。为了在整个平面六边形边界上保持固定的手性，我们需要沿交替的边界交替实施“向前移动”（例如 §E.3.3）和“向后移动”（例如 §6.2 ）边界电路。

E.3 锯齿形边缘的各种边界电路

我们展示了 HH 码之字形边界处各种测量电路的局部可逆性。我们还将追踪电路动力学下逻辑算符的变换。全文使用以下记号。

- $\bar{n}$ 表示 $-n$ （整数 n）。
- 最上方一行上的格点依次编号，其中“0”位于红色六边形的尖端。
- 泡利算符 X_n、Y_n、Z_n 作用于上边界的格点 n。
- 某些边界电路会使用辅助量子比特。辅助量子比特（视觉上）会放置在某个边界格点的上方。泡利算符 X^n，Y^n，Z^n （带上标 n）作用于格点 n上方的辅助量子比特。

- 如果一个面元/多边形被着色（红色、绿色或蓝色之一），则表示 ISG 中包含一个面元算符，该算符是作用于每个面元/多边形顶点上的泡利算符的乘积（分别对应 $\prod_v X_v$、$\prod_v Y_v$ 或 $\prod_v Z_v$ ）。– 着色的面元也可能由其他面元算符稳定。（例如，红色面元也可能由 $\prod_v Z_v$ 稳定。）– 未着色的面元/多边形也可能由某个面元算符稳定；为避免视觉拥挤，我们可能不会为所有可能的多边形着色。

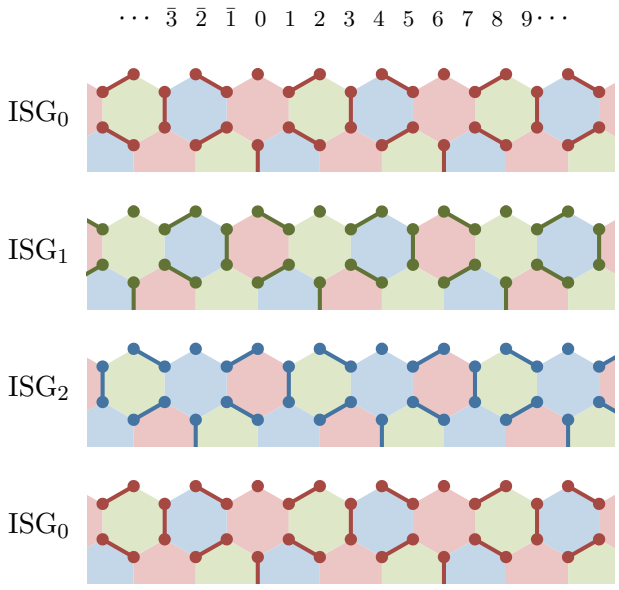
- 在**可逆性** 列下：每个区块（$\mathcal{A}$，$\mathcal{S}$，$\mathcal{B}$）描述一对（ISG_t，ISG_{t+1}），其中$\mathcal{S} = \mathrm{ISG}_t \cap \mathrm{ISG}_{t+1}$，以及共轭基$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$。
- **“逻辑算符 ”**列跟踪逻辑算符的演化。ISG_t 与 ISG_{t+1} 之间的条目属于共享逻辑空间。
- $\mathcal{S}_0 = \left\langle P_R^X,\ P_G^Y,\ P_B^Z \right\rangle$。它们是每一步的公共稳定子。
- $E_{R'}^X, E_{G'}^Y, E_{B'}^Z$ 由与一个六边形晶格片相邻的（其中三分之二）非垂直取向的边组成

。它们包括边界算符，例如 $Y_0Y_1 \in E^Y_{G'}$。它们绝不会包括单点泡利算符或涉及辅助量子比特的算符。

- 此处 $\langle\{P\}\rangle_{+t}$ 表示由集合 P 及其水平平移所生成的群。例如，$\langle Z_4\rangle_{+t} = \langle Z_{6j+4} \mid j \in \mathbb{Z}\rangle$。

E.3.1 截断边界I.

这是在 §6.2 中引入的周期-3电路。每个元胞有 2 个独立的逻辑生成元，MQCA 指数为 $-\frac{1}{2}$。

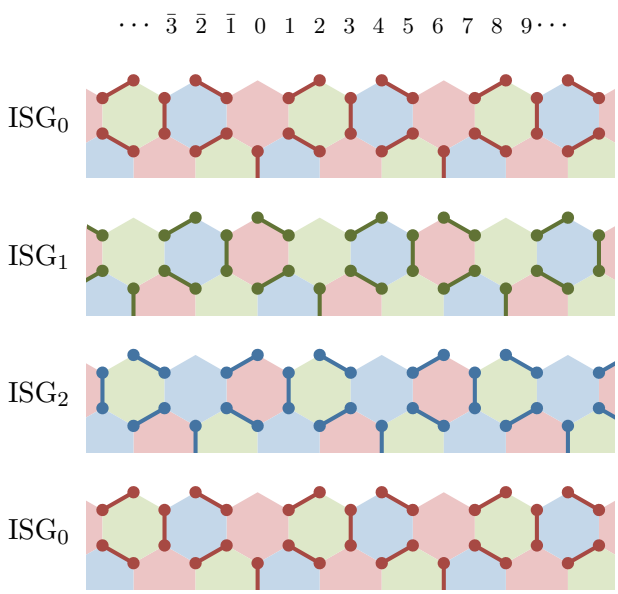


可逆性	逻辑算符	
	$Z_{\bar2}Z_{\bar1}Y_1Y_2$	$X_2X_3X_4$
$A = \langle E^X_R, X_0\rangle_{+t}$	↓	↓
$S = \langle S_0, P^{X/Y}_B\rangle_{+t}$	$Y_{\bar2}Y_{\bar1}Y_1Y_2$	$X_0X_1X_3X_4$
$B = \langle E^Y_{G'}, Y_2\rangle_{+t}$	↓	↓
$A = \langle E^Y_{G'}, Y_2\rangle_{+t}$	$Y_{\bar4}Y_{\bar3}Y_{\bar1}Y_0$	$Z_0Z_1Z_3Z_4$
$S = \langle S_0, P^{Y/Z}_R\rangle_{+t}$	↓	↓
$B = \langle E^Z_B, Z_{\bar2}\rangle_{+t}$	$X_{\bar4}X_{\bar3}X_{\bar1}X_0$	$Z_{\bar2}Z_{\bar1}Z_1Z_2$
$A = \langle E^Z_B, Z_{\bar2}\rangle_{+t}$	↓	↓
$S = \langle S_0, P^{Z/X}_G\rangle_{+t}$	$X_{\bar4}X_{\bar3}X_{\bar2}$	$Z_{\bar2}Z_{\bar1}Y_1Y_2$
$B = \langle E^X_R, X_0\rangle_{+t}$		

边界逻辑商代数即为马约拉纳链代数。将 $\mathbf{ISG_R}$ 的逻辑算符通过 $Z_{6n-2}Z_{6n-1}Y_{6n+1}Y_{6n+2} \cong \mathbf{i}\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}$ 和 $X_{6n+2}X_{6n+3}X_{6n+4} \cong \mathbf{i}\gamma_{2n}\gamma_{2n+1}$ 对应到费米子算符后，这个 MQCA 等价于费米子变换 $\gamma_k \mapsto \gamma_{k-1}$。（由于每个费米子都以相同方式平移，这个电路有一个特殊性质：在反复应用 MQCA 时，逻辑算符的大小仍然有界。）

E.3.2 截断边界 II.

这是在 §6.3 中引入的周期-3电路。每个元胞有 4 个独立的逻辑生成元，MQCA 指数为 $+\frac{1}{2}$。



可逆性

$$\begin{array}{l} A = \langle E^X_{R'} \rangle_{+t} \\ S = \langle S_0, P^{X/Y}_B \rangle_{+t} \\ B = \langle E^Y_{G'} \rangle_{+t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = \langle E^Y_{G'} \rangle_{+t} \\ S = \langle S_0, P^{Y/Z}_R \rangle_{+t} \\ B = \langle E^Z_{B'} \rangle_{+t} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = \langle E^Z_{B'} \rangle_{+t} \\ S = \langle S_0, P^{Z/X}_G \rangle_{+t} \\ B = \langle E^X_{R'} \rangle_{+t} \end{array}$$

逻辑算符

$$X_0 \downarrow$$

$$X_0X_1X_2 \downarrow$$

$$Z_0Z_1X_2Y_3Y_4 \downarrow$$

$$Z_0Z_1Y_2X_3Y_4Z_5Z_6 \downarrow$$

$$(Z_0Z_1Z_2)(X_2X_3X_4)(Y_4Y_5Y_6)X_6$$

存在 3 个额外的逻辑生成元

（每个元胞）由所有 ISG 共享 s:

$$\{X_{6j+2}X_{6j+3}X_{6j+4}\ ,\ Y_{6j-2}Y_{6j-1}Y_{6j}\ ,\ Z_{6j}Z_{6j+1}Z_{6j+2} \mid x \in \mathbb{Z}\}. \tag{125}$$

该模型（包括边界）存在 ℓ-局部共轭基，其 $\ell = 1$。从$L(0) = X_0 \in \mathrm{ISG}_{\mathbf{R}}$开始，其算符大小线性增长为大小 $L(t)$ =大小 $L(0) + 2t$。这里，我们将大小 $L(t)$ 定义为所有等价表示中的最小大小。该模型达到了2.5中确立的界限。

边界逻辑商代数也与马约拉纳链代数相同。不过，与由以下算符生成的两条马约拉纳链进行比较更为方便： β_k 和 γ_k ： $Z_{6n+0}Z_{6n+1}Z_{6n+2} \cong \mathbf{i}\gamma_{3n+0}\gamma_{3n+1}$、 $X_{6n+2}X_{6n+3}X_{6n+4} \cong \mathbf{i}\gamma_{3n+1}\gamma_{3n+2}$、 $Y_{6n+4}Y_{6n+5}Y_{6n+6} \cong \mathbf{i}\gamma_{3n+2}\gamma_{3n+3}$以及 $X_{6n} \cong \mathbf{i}\gamma_{3n}\beta_n$。该 MQCA 等价于费米子变换 $\beta_n \mapsto \beta_{n+1}$, $\gamma_n \mapsto \gamma_n$。

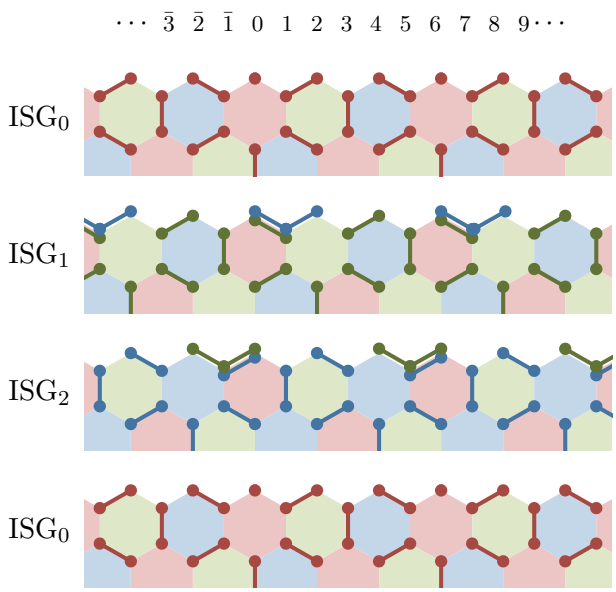
E.3.3 向前移动边界。

我们给出一个周期-3电路，其逻辑算符均匀地向右平移。该电路每个元胞有两个逻辑生成元，并实现一个指标为 $+\frac{1}{2}$ 的 MQCA。其基稳定子群与§6.2中的相同。因此，该电路与§6.2 中的电路复合后，得到一个周期-6 LR 循环，其边界 MQCA 为恒等映射。

测量序列为

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{R}} &= E_R^X \cup \{X_{6j-2}X_{6j-1}\,, X_{6j+1}X_{6j+2}\,, X_{6j+0} \mid j \in \mathbb{Z}\}\,, \\ M_{\mathbf{G}} &= E_G^Y \cup \{Y_{6j+0}Y_{6j+1}\,, Y_{6j+3}Y_{6j+4}\,, Z_{6j+0}Z_{6j+1}Z_{6j+2} \mid j \in \mathbb{Z}\}\,, \\ M_{\mathbf{B}} &= E_B^Z \cup \{Z_{6j-4}Z_{6j-3}\,, Z_{6j-1}Z_{6j+0}\,, Y_{6j-2}Y_{6j-1}Y_{6j+0} \mid j \in \mathbb{Z}\}\,. \end{aligned} \tag{126}$$

注意，步骤 **G** 包含泡利 Y 和泡利 Z 测量，步骤 **B**也是如此。这个电路确实实现了一个局部可逆循环，ISG 如下所示。



可逆性

$A = \langle E_R^X, X_0 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_B^{X/Y} \rangle_{+t}$
$B = \langle E_G^Y, Z_0Z_1Z_2 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_G^Y, Z_0Z_1Z_2 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_R^{Y/Z} \rangle_{+t}$
$B = \langle E_B^Z, Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_B^Z, Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_G^{Z/X} \rangle_{+t}$
$B = \langle E_R^X, X_0 \rangle_{+t}$

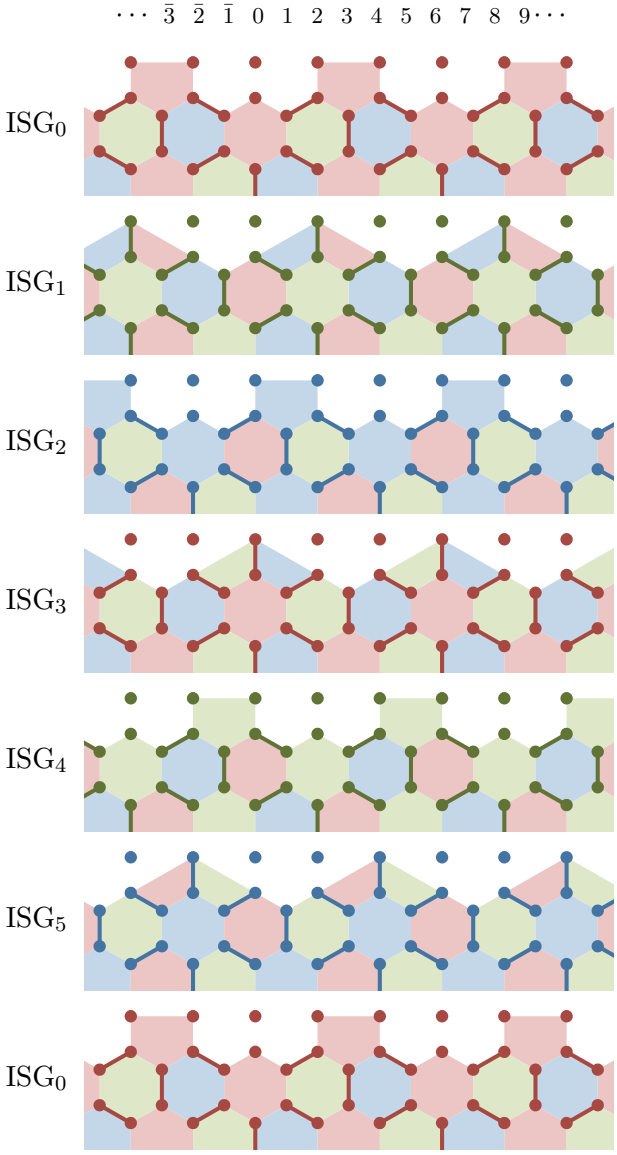
逻辑算符

$Z_{\bar{2}}Z_{\bar{1}}Y_1Y_2$	$X_2X_3X_4$
↓	↓
$Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_1Y_2$	$X_0X_1X_3X_4$
↓	↓
$Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0 \times Y_2Y_3Y_4$	$Z_2Z_3Z_4 \times Z_6Z_7Z_8$
↓	↓
$X_2X_3X_5X_6$	$Z_4Z_5Z_7Z_8$
↓	↓
$X_2X_3X_4$	$Z_4Z_5Y_7Y_8$

采用ISG_0 作为该电路的基稳定子后，该电路实现的逆向 MQCA 与§E.3.1中的相同，尽管中间的电路步骤并未逆转。

E.3.4 有隙边界与三个辅助量子比特。

这是一个来自 §6.4 的周期为6的电路。我们在每个偶数格点上方放置一个辅助量子比特——每个元胞有3个辅助量子比特。不存在非平凡的局域逻辑算符。



可逆性

$A = \langle E_{R'}^{X}, X^0, X^2, X^4 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_B^{X/Y}, X_0X_1X_2X^2, X^2X_2X_3X_4 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{G'}^{Y}, Y^0, Y_2Y^2, Y^4 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_{G'}^{Y}, Y^0, Y_2Y^2, Y^4 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_R^{Y/Z}, Z_0Z_1Z_2Z^2, Z^2Z_2Z_3Z_4 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{B'}^{Z}, Z^0, Z^2, Z^4 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_{B'}^{Z}, Z^{\bar{2}}, Z^0, Z^2 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_G^{Z/X}, Z_{\bar{2}}Z_{\bar{1}}Z_0Z^0, Z^0Z_0Z_1Z_2 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{R'}^{X}, X^{\bar{2}}, X_0X^0, X^2 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_{R'}^{X}, X^{\bar{2}}, X_0X^0, X^2 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_B^{X/Y}, Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0Y^0, Y^0Y_0Y_1Y_2 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{G'}^{Y}, Y^{\bar{2}}, Y^0, Y^2 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_{G'}^{Y}, Y^{\bar{4}}, Y^{\bar{2}}, Y^0 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_R^{Y/Z}, Y_{\bar{4}}Y_{\bar{3}}Y_{\bar{2}}Y^{\bar{2}}, Y^{\bar{2}}Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{B'}^{Z}, Z^{\bar{4}}, Z^{\bar{2}}Z^{\bar{2}}, Z^0 \rangle_{+t}$

$A = \langle E_{B'}^{Z}, Z^{\bar{4}}, Z^{\bar{2}}Z^{\bar{2}}, Z^0 \rangle_{+t}$
$S = \langle S_0, P_G^{Z/X}, X_{\bar{4}}X_{\bar{3}}X_{\bar{2}}X^{\bar{2}}, X^{\bar{2}}X_{\bar{2}}X_{\bar{1}}X_0 \rangle_{+t}$
$B = \langle E_{R'}^{X}, X^{\bar{4}}, X^{\bar{2}}, X^0 \rangle_{+t}$

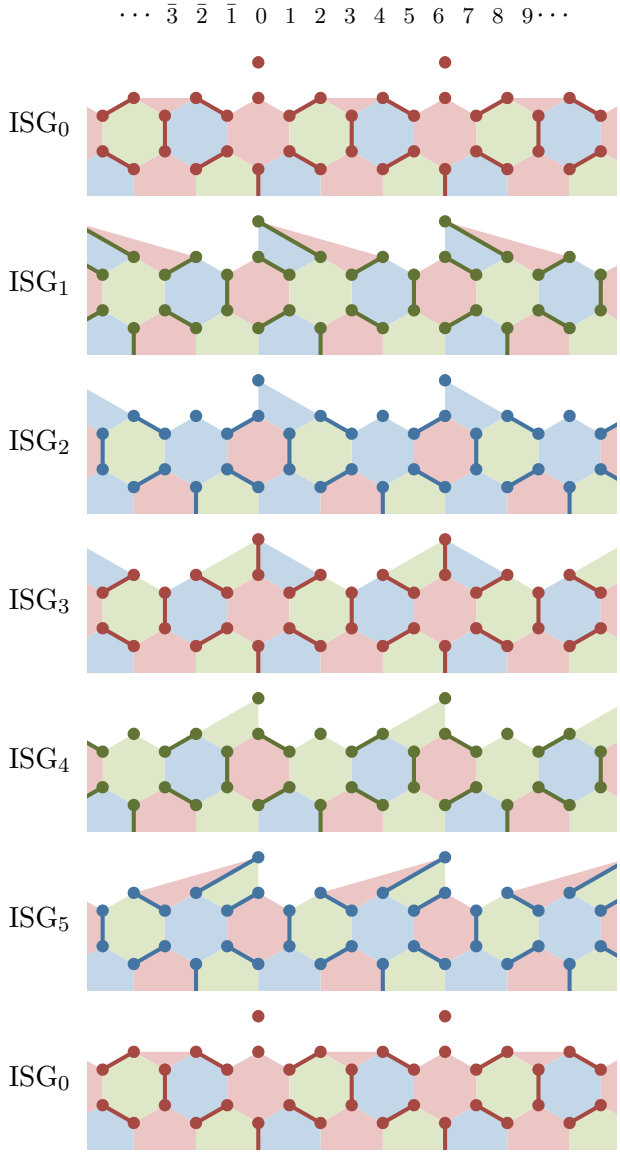
由于边界是有能隙的，只有一种半无限弦算符（124）可以终止于边缘。

- 对于 ISG_0，$\mathrm{Str}_{G/B}^{X}$ 可以在边界处终止，但 $\mathrm{Str}_{R}^{Y/Z}$ 不能。
- 对于 ISG_1，$\mathrm{Str}_{G}^{Z/X}$ 可以在边界处终止，但 $\mathrm{Str}_{B/R}^{Y}$ 不能。
- 对于 ISG_2，$\mathrm{Str}_{R/G}^{Z}$ 可以在边界终止，但 $\mathrm{Str}_{B}^{X/Y}$ 不能。

与 ISG_t 相比，ISG_{t+3} 的终止规则进行了互换。

E.3.5 有隙边界，带一个辅助量子比特。

这是 §6.4 中电路的周期 6 变体。我们在 $6\mathbb{Z}$ 的每个格点上方放置一个辅助量子比特。不存在非平凡的局域逻辑算符。



可逆性

$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_R^X, X^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_B^{X/Y}, X_0X_1X_2X^0, X^0X_2X_3X_4 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_G^Y, Y_2Y^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_G^Y, Y_2Y^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_R^{Y/Z}, Z_0Z_1Z_2Z^0, Z^0Z_2Z_3Z_4 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_B^Z, Z^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_B^Z, Z^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_G^{Z/X}, Z_{\bar{2}}Z_{\bar{1}}Z_0Z^0, Z^0Z_0Z_1Z_2 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_R^X, X_0X^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_R^X, X_0X^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_B^{X/Y}, Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0Y^0, Y^0Y_0Y_1Y_2 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_G^Y, Y^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_G^Y, Y^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_R^{Y/Z}, Y_{\bar{4}}Y_{\bar{3}}Y_{\bar{2}}Y^0, Y^0Y_{\bar{2}}Y_{\bar{1}}Y_0 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_B^Z, Z_{\bar{2}}Z^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

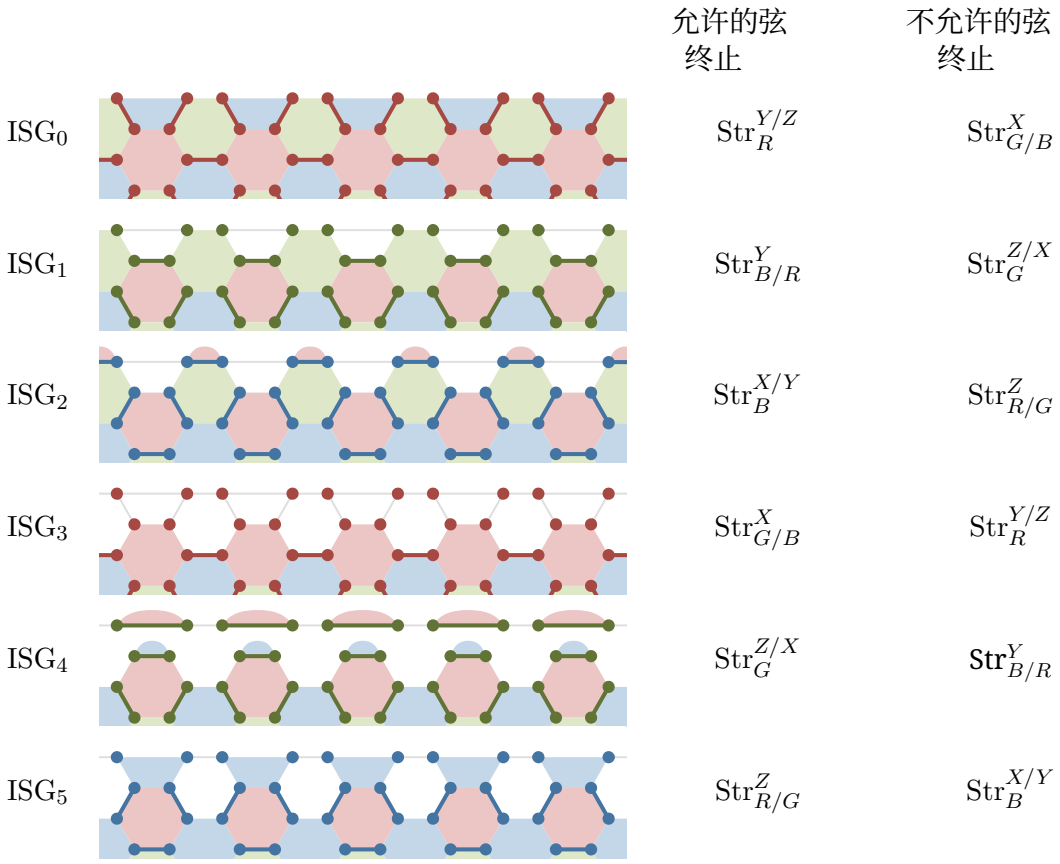
$$
\begin{aligned}
A &= \langle E_B^Z, Z_{\bar{2}}Z^0 \rangle_{+t} \\
S &= \langle S_0, P_G^{Z/X}, X_{\bar{4}}X_{\bar{3}}X_{\bar{2}}X^0, X^0X_{\bar{2}}X_{\bar{1}}X_0 \rangle_{+t} \\
B &= \langle E_R^X, X^0 \rangle_{+t}
\end{aligned}
$$

该模型与前一种情况几乎完全相同。半无限弦算符的终止规则也完全相同。

E.4 扶手椅边缘的各种边界电路

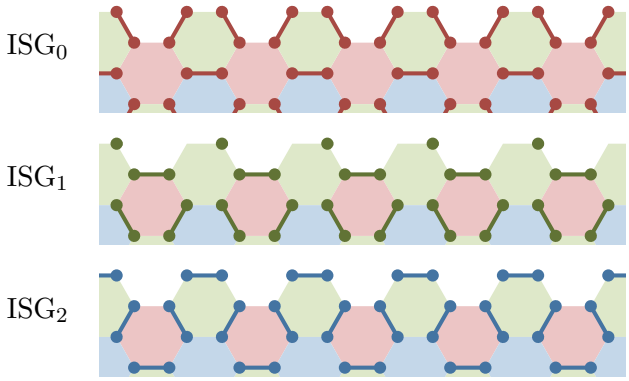
E.4.1 有能隙的扶手椅形边界

我们在扶手椅边缘上提出了一种不含非平凡逻辑算符的测量序列。该测量电路仅由一体和二体测量构成，可能与量子纠错有关。局部可逆性的验证留待读者完成。



E.4.2 扶手椅边界 II

这是沿扶手椅边缘运行的周期-3电路。每个元胞有 2 个独立的逻辑生成元，MQCA 指数为 $+\frac{1}{2}$。



ISG_0 的逻辑算符构成由 $L_{2n} = Z_{6n-3}Z_{6n-2}Z_{6n-1}Z_{6n+0}$和 $L_{2n+1} = X_{6n+0}X_{6n+1}$生成的马约拉纳链代数。经过一个循环，MQCA 将

$$L_{2n} \mapsto L_{2n+1}\,, \qquad\qquad L_{2n-1} \mapsto L_{2n-1}L_{2n}L_{2n+1}\,, \tag{127}$$

展现出算符尺寸增长。通过将逻辑算符对应到费米子算符，即$L_{2n} =$**i**$\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}$ 和 $L_{2n+1} =$ **i** $\gamma_{2n}\gamma_{2n+1}$，此 MQCA 等价于费米子变换$\gamma_{2n-1} \mapsto \gamma_{2n+1}$、 $\gamma_{2n} \mapsto \gamma_{2n}$。