arXiv:2304.01283v1 [cs.LO] 3 Apr 2023

信念、知识与证据

Steffen Lewitzka*和 Vin´ıcius Pinto†

2023年4月5日

摘要

我们提出一种逻辑系统，将广为人知的经典认知概念——信念与知识——同证据概念结合起来，从而满足直观原理“证据导出信念与知识”。我们的方法基于第一作者此前的研究 [4, 5, 6]： 他引入了一种模态系统，其中包含用于推理直觉主义真理（即证明）的 $S5$式原理，并受 [1], 启发，将该系统与直觉主义信念和知识的概念结合起来。我们考察这一组合系统，并以经典证据概念取代构造性证明概念。由此得到一种逻辑，它将模态系统 $S5$ 与经典认知原理结合起来，其中 $\Box\varphi$ 表示认知意义上的“φ 是显然的”。受 [6], 启发，与文献中常见的可能世界语义不同，我们在此提出一种关系式框架语义，其中信念和知识并非通过可及关系建模，而是直接表示为命题集合（世界集合的集合）。

1 引言

本研究旨在将经典模态认识逻辑中公理化的、广为人知的信念与知识概念（例如，参见 [3, 7]）同恰当的证据（或确定性）概念结合起来，用单一逻辑系统将这种结合形式化，并提出直观的语义。

将证据（或确定性）引入经典认知逻辑的语境，需要先澄清一些概念。支撑我们证据概念的基本直觉和

*巴伊亚联邦大学 – UFBA，计算机研究所，计算机科学系，40170-110 巴西巴伊亚州萨尔瓦多，steffenlewitzka@web.de

†巴伊亚联邦大学 – UFBA，计算机研究所，计算机科学系，40170-110 巴西巴伊亚州萨尔瓦多

原理是什么？如何将这些直觉与通常的信念和知识等认知概念结合起来，恰当地形式化（公理化）？

直观地说，证据可以被视为知识和信念的一种理由或正当性依据（较强的形式）。哲学文献中也存在将证据等同于知识本身的观点。[1] 无论如何，蕴涵

$$\text{证据} \implies \text{知识、信念与真理}$$

无疑是可以接受的。此外，我们将在此假定证据不同于知识。当然，在构造性的直觉主义语境中，证据或确定性可以被理解为已实现的构造，即 BHK（Brouwer-Heyting-Kolmogorov）解释中直观意义上的证明，也就是直觉主义真理本身。如果我们以这种构造方式将证据解释为直觉主义真理，那么由 Artemov 和 Protopopescu 引入的直觉主义认知逻辑（IEL）[1]可以被视为证据（证明）与信念和知识的结合。在 IEL 中，认知概念依据直觉主义逻辑的 BHK 解释进行形式化。命题的知识 φ被给定为对φ 的验证（在直观意义上）。由于证明被视为最强形式的验证，证明能够产生知识和信念。IEL 的这一基本原理通过共反思公理 $\varphi \to K\varphi$得以形式化。

虽然在直觉主义认知语境中，证明或许是对证据（或确定性）概念的一种有说服力的解释，但问题在于，能否为经典认识逻辑找到某种恰当的经典对应概念。[2]

在近期的研究中，本文第一作者构建了一套用于推理直觉主义真理（即证明）的 Lewis 风格模态逻辑层级。在该研究中，作者主张， $L5$是这一层级中最强的逻辑，也是用于证明推理的最恰当系统，因为其 $S5$风格的公理按照扩展的 BHK 解释是直觉主义上可接受的；此外， $L5$ 具有基于直觉主义框架的关系语义，能够以通常且自然的方式反映直觉主义推理。这一方法背后的一个重要思想，是区分实际证明（已实现的构造，可立即获取）与可能证明（对构造的条件，这些条件不得与已实现的构造，即实际证明，相冲突）。在经典逻辑中，公式$\Box\varphi$表达的是： φ在直觉主义意义上为真，即 φ有一个实际证明。然而，

[1]我们并不打算展开更深入、更具限定性的哲学讨论。这里，我们旨在对自己的概念路径作出非常基础的澄清与论证。[2]当然，经典真理概念并不适合作为候选：经典反思原理 $K\varphi \to \varphi$“知识蕴含经典真理”将意味着知识与证据是等价的概念。

我们还需要对 $\Box\varphi$作出直觉主义解释（例如，考虑声称 $\Box\varphi$在直觉主义意义上成立的公式 $\Box\Box\varphi$）。以下关于 $\Box\varphi$ 的条款扩展了直觉主义逻辑的标准 BHK 解释：“ $\Box\varphi$ 的一个证明由对 φ的一个实际证明的展示给出。”

模态系统 $L5$的公理由以下模式给出：

(INT) 直觉主义命题逻辑 IPC 的所有定理 (A1) $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi)$ (析取性质) (A2) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$(直觉主义真理蕴含经典真) (A3) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ (分配公理) (A4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$(A5) $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$(排中律) $\varphi \vee \neg\varphi$ (排中律)

推理规则为肯定前件 MP 和直觉主义公理必然化 AN：“如果 φ 是直觉主义可接受的公理（即 (INT) 或 (A1)–(A5) 的一个实例），则推断 $\Box\varphi$为定理。”

实际上， $L5$的 $S5$式模态公理在直觉主义上是可接受的，即可以基于扩展的 BHK 解释得到论证。例如， $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ 的证明是一种构造，它能将 $\Box\varphi$ 的任意证明转换为 φ的证明。当然，根据扩展的 BHK 解释，这样的构造是立即可获得的，也就是说，该公式始终具有一个实际证明，并且在直觉主义上是有效的。实际证明的呈现本身应被视为一个实际证明，而实际证明总是可以被呈现出来（因为它是立即可获得的）。这就为公理 (A4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$提供了构造性论证。

按照扩展的 BHK 解释，为原理 (A5)提供论证要稍微复杂一些。然而，这对于理解我们将证据解释为证明的经典替代物至关重要，因此让我们来考察一下。首先，我们注意到以下原理 (1)是有效的：

(1) “如果 φ 没有实际证明，那么 $\Box\varphi$就不可能有证明。”

事实上， $\Box\varphi$的可能证明（即对构造的条件）尤其会包含这样一个必要条件： φ 有实际证明。根据假设，这样的实际证明并不存在。因此，上述原理成立。它可以在经典逻辑中形式化为

(2) $$\neg\Box\varphi \to \neg\Diamond\Box\varphi,$$

其中， $\Diamond$是由 $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$定义的可能性模态算子。在逻辑 $L5$的语境中， $\Diamond\varphi$ 表示“φ 有一个可能证明”。因此，上述公式等价于 $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$，即公理（A5）。这为经典解释下的模态原则（A5）提供了论证。下文将说明，（A5）在直觉主义逻辑下同样可以接受。

（1）蕴含如下结论

(3) “ $\Box\varphi$ 有实际证明，或者 $\neg\Box\varphi$有实际证明。”

事实上，如果 $\Box\varphi$ 没有实际证明，那么 φ也没有实际证明，而原理（1）表明 $\Box\varphi$不可能有证明。但是，如果 $\Box\varphi$ 没有可能证明，那么恒等函数作为一个直接给出的构造，就构成了 $\neg\Box\varphi = \Box\varphi \to \bot$的实际证明。[3] 因此，（3）成立。

现在假设 s 是 $\neg\Box\varphi$的一个证明，也就是 $\Box\varphi \to \bot$的证明。如果 s 只是一个可能证明，那么它包含这样一个条件： $\Box\varphi$ 没有证明。作为一个可能证明， s不得与实际证明相冲突。因此，根据原理（3）， $\neg\Box\varphi = \Box\varphi \to \bot$有一个实际证明。这个实际证明可以用恒等函数来举例说明。对它的呈现构成了 $\Box\neg\Box\varphi$的一个实际证明。我们已经给出了一种构造，可以将 $\neg\Box\varphi$的任意证明转换为 $\Box\neg\Box\varphi$的证明。因此，从扩展的 BHK 解释的意义上说，公理（A5）在直觉主义上是可接受的。

值得注意的是，尽管其主要研究对象是直觉主义证明， $L5$ 却是一种经典逻辑： $\Box\varphi$的经典真意味着 φ 在直觉主义上为真。Lewitzka [5] 将 $L5$ 与经过调整的直觉主义信念和知识概念结合起来，这些概念受到直觉主义认知逻辑 [1]的启发。由此得出的一些原理（采用认知逻辑的扩展语言）如下：

(A6) $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$

(A7) $\Box\varphi \to \Box K\varphi$（此公理也可以等价地替换为 $\Box\varphi \to K\varphi$）

[3]我们在此假设，否定联结词并非原始联结词，而是由蕴涵和假定义的，具体如下： $\neg\psi :=$ ($\psi \to \bot$)。

(A8) $K\varphi \to \neg\neg\varphi$

预计这些原理在直觉主义下是有效的。例如，(A8) 表达了一个已知命题 φ 不可能在直觉主义下为假（不存在证明表明 φ为假）。我们考虑这一组合系统（直觉主义公理必然化规则 AN 现在适用于所有公理 (INT)、(A1)–(A8)，但不适用于 (TND)），并提出以下问题：是否存在某种合理的方式，以经典证据概念或确定性替代构造性证明概念，同时保留上述（等价的）原理 (1)–(3)？这一问题自然而有趣，因为有许多例子表明，构造性或直觉主义形式化可以通过更强的原理加以扩展，而这些原理随后会导出经典规格（最突出、也可能是最基本的例子，是将直觉主义命题逻辑扩展为经典命题逻辑）。我们在此针对这一问题提出如下解决方案。

我们将公式 $\Box\varphi$ 解释为某种直观的认识论意义上的“φ 显而易见”，尤其是将经典逻辑的定律视为显而易见。因此，原先将 $\Box\varphi$解释为“φ 有实际证明”，现在改为“φ 显而易见”或“有关于 φ的证据（确定性）”。那么，上文的原理 (1) 可表述为

(4) “如果 φ 并非显而易见，那么关于 φ的证据是不可能的。”，即 $\neg\Box\varphi \to \neg\Diamond\Box\varphi$.

请注意，(1) 中给出的表达“ $\Box\varphi$的证明是不可能的”，在经典语境中应译为“$\Box\varphi$ 是不可能的”，即“关于 φ的证据是不可能的”。[4]

通过这种方式，我们能够在这一经典语境中为模态原则 (A5) 提供依据并加以保留，其中将 $\Box\varphi$ 解释为“φ是显然的”。这使证据这一概念呈现出相当静态的特征：如果命题 φ是显然的，那么它的证据便立即给定且可达（“此时此地”）；否则， φ 的证据永远无法确立（在给定模型的任何可达世界中都不能确立），也就是说，证据是不可能的。这一内在于经典模态逻辑$S5$的相当强的原则，是通过保留部分 $L5$-原则（这些原则与 BHK 解释相一致）而得到的，这些原则用于对上文讨论的证明进行推理。在对 $\Box\varphi$ 的新解释下，公理 (A2)–(A4) 也同样是合理的（由于 φ 的证据是一个立即可达的事实，我们可以假定它本身也是显然的；这可以视为对公理 (A4) 的一种论证）。唯一必须拒绝的公理是析取公理 (A1)。事实上，我们预期所有经典

[4]当然，即使关于 φ 的证据是不可能的， φ 在（经典意义上）为真仍有可能，即 $\Diamond\varphi$ 可能成立。

重言式都是显然的，尤其是 $x \vee \neg x$。但 $x \vee \neg x$ 的证据无法确保 x 或 $\neg x$中的任何一个具有证据。

2 语言与演算系统

作为我们逻辑系统的名称，我们提议使用 S5BKE（“模态系统 $S5$ 结合信念、知识与证据”）。S5BKE 的公式集 Fm 按惯例在命题变量集 $V = \{x_0, x_1, ...\}$、逻辑联结词 $\neg$、$\rightarrow$ 以及分别表示证据、知识和信念的算子 $\Box$、K、B 上归纳定义。S5BKE 的公理由以下公理模式给出：

(i) 具有经典重言式形式的每个公式都是公理 (ii) $K\varphi \rightarrow \varphi$（事实性）(iii) $K\varphi \rightarrow B\varphi$（知识蕴含信念）(iv) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (v) $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$(vi) $\Box\varphi \rightarrow K\varphi$（证据导出知识、信念和真理）(vii) $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$（知识的分配公理）(viii) $B(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (B\varphi \rightarrow B\psi)$（信念的分配公理）(ix) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$（证据的分配公理）

(x) $\neg B\bot$(信念一致性)

当然，这只是一个包含基本认知原理的最小系统。可以添加更强的公理（例如正内省和负内省，以及更多描述信念与知识之间相互作用的公理等），并通过下文介绍的语义框架对其进行建模。文献中的研究方法通常都假定信念一致性（公理 (x)）。不过，即使去掉这一假设，所得语义也不会有任何问题：只需做少量修改即可。

推理规则包括肯定前件 MP 和公理必然化规则 AN：“如果φ 是公理，那么 $\Box\varphi$是定理”。推导的概念按通常方式定义如下：

定义 2.1。公式 φ 从公式集 Φ中得到的推导（证明、演绎）是一个有限的公式序列 φ_1、.....、$\varphi_n = \varphi$，满足对于每个 i =1、.....、n，$\varphi_i \in \Phi$ 或 φ_i 是公理，或者 φ_i 是对公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$应用肯定前件所得的结果，其中 $1 \leq j$、$k < i$，或者 φ_i 是对 φ_j应用公理必然化规则所得的结果（在这种情况下，φ_j 是公理）。数字 n 称为该推导的长度。若存在从 Φ出发得到 φ的推导，我们称 φ 可由 Φ 推出，记作：$\Phi \vdash \varphi$。定理是可由空集推出的公式。我们用 $\vdash \varphi$代替 $\varnothing \vdash \varphi$。

3 语义

对于布尔代数，我们使用以下记号：$\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$，其中$B$是论域，$\vee$、$\wedge$、$\neg$、0、1 分别是通常表示并、交、补、最小元和最大元的运算。其他布尔函数按显而易见的方式定义，例如 $a \to b := \neg a \vee b$。请注意，我们不区分对象语言 $\neg$、$\to$ 中的符号（逻辑联结词）与代数结构中相应函数的符号。通常可以根据上下文清楚地区分二者，我们也希望不会造成混淆。如果要强调给定的代数结构 $\mathcal{B}$，我们可以用 $\vee^{\mathcal{B}}$、$\wedge^{\mathcal{B}}$、.....表示代数运算。

定义 3.1. 模型 $\mathcal{M}$ 由一个布尔代数构成，其中指定了一个超滤子 TRUE，以及算子 $\Box$、B、K，分别表示证据、信念和知识；也就是说，它是一个结构 $\mathcal{M} = (M, \text{TRUE}\ \vee, \wedge, \neg, 0, 1, \Box, B, K)$，满足以下条件：

(i) 对任意 $a \in M$,

$$\Box a = \begin{cases} 1, \textit{ if } a = 1 \\ 0, \textit{ else}. \end{cases}$$

(ii) 对于布尔代数的每个超滤子 U，集合

- $KNOW(U) := \{a \in M \mid Ka \in U\}$ *("knowledge at U")*
- $BEL(U) := \{a \in M \mid Ba \in U\}$ *("belief at U")*

是满足 KNOW (U) $\subseteq U \cap$ BEL(U) 的真滤子。[5]

[5]注意，条件 $KNOW(U) \subseteq U$特别意味着滤子 $KNOW(U)$ 是正规的。若我们希望舍弃信念的一致性公理 $\neg B_\perp$，那么这里就应承认 $BEL(U)$ 不是正规的。

我们将布尔代数中的元素 $m \in M$ 称为命题。指定的超滤子 TRUE $\subseteq M$ 表示真命题的集合。已知命题和相信的命题集合分别由 KNOW := KNOW (TRUE) 和 BEL := BEL(TRUE) 给出。最大元 $1 \in M$ 代表显而易见的命题。

给定模型 $\mathcal{M}$ 的一个赋值（或赋值）是一个函数 γ: $V \to M$，它以规范方式扩展为函数 γ: $Fm \to M$，更确切地说： $\gamma(\neg\varphi) = \neg\gamma(\varphi)$ 且 $\gamma(\varphi \to \psi) = \gamma(\varphi) \to \gamma(\psi)$ $(= \neg\gamma(\varphi) \vee \gamma\psi)$。解释是一个由模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 $\gamma \in M^V$ 组成的有序对 $(\mathcal{M}, \gamma)$。满足关系定义如下：

$$(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi :\Leftrightarrow \gamma(\varphi) \in TRUE.$$

当然，该定义可扩展到公式集合，如下所示：$(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \Phi :\Leftrightarrow (\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi$ 对所有 $\varphi \in \Phi$均成立。

定义 3.2。逻辑后承关系按通常方式定义：

$$\Phi \Vdash \varphi :\Leftrightarrow Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\varphi\})$$

其中，对于任意公式集合 Ψ，Mod(Ψ) 表示所有满足 Ψ的解释所构成的类。

以下有用的观察结论源自关于布尔代数的著名事实（例如，参见 [2]）。

事实 3.3. 设 $\mathcal{B}$ 是一个论域为 M 的布尔代数。那么以下结论成立。

(i) 任意真滤子都是所有包含它的超滤子的交集。

(ii) 对所有 a、$b \in M$、$a \leq b$，当且仅当对于任意超滤子 U，$a \in U$ 蕴含 $b \in U$。

定理 3.4（可靠性）。对于任意公式集 $\Phi \cup \{\varphi\}$，我们有

$$\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \Vdash \varphi.$$

证明。为了证明该演算系统相对于我们的代数语义是可靠的，只需证明所有公理和推理规则都是可靠的。对于肯定前件规则，我们可以这样论证：由于集合 $TRUE$ 是一个滤子，对于任意 a、$b \in M$，若 $a \in TRUE$ 且 $a \to b \in TRUE$，则 $b \in TRUE$。鉴于公理必然化规则，我们尤其需要证明，在任意给定的布尔代数中，并在任意赋值下，所有公理的解释都是最大元。对于形式为经典命题演算（CPC）定理的公理，这一点显然成立；它们的解释始终是

任意布尔代数的最大元。至于其他公理，设 $\mathcal{M}$ 是一个最大元为 1 的模型，且赋值 $\gamma\colon V \to M$。

考虑公理 $K\varphi \to \varphi$。那么我们有 $\gamma(K\varphi \to \varphi) = K\gamma(\varphi) \to \gamma(\varphi) = 1$ 当且仅当 $K\gamma(\varphi) \leq \gamma(\varphi)$。根据模型的定义：对于任意超滤子 U，$K\gamma(\varphi) \in U$ 意味着 $\gamma(\varphi) \in$ KNOW (U) 意味着 $\gamma(\varphi) \in U$。由引理 3.3(iii)可知，$K\gamma(\varphi) \leq \gamma(\varphi)$。对于 $K\varphi \to B\varphi$，我们可以运用相同的论证，因为 KNOW $(U) \subseteq$ BEL(U)，进而 $B\gamma(\varphi) \in U$。

对于 $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$，我们给出类似的论证。设 U 是一个超滤子，并假设 $\gamma(K(\varphi \to \psi)) \in U$。如果 $\gamma(K\varphi) \in U$，注意到 $\gamma(\varphi)$ 和 $\gamma(\varphi \to \psi)$ 都属于 KNOW (U)。因此 $\gamma(\psi)$ 也成立，因为 KNOW (U) 是一个滤子。这意味着 $\gamma(K\psi) \in U$，据此我们可以说 $\gamma(K\varphi \to K\psi) \in U$。最后，我们证明了：对于任意超滤子 U，$\gamma(K(\varphi \to \psi)) \in U$ 意味着 $\gamma(K\varphi \to K\psi) \in U$，因此 $\gamma(K(\varphi \to \psi)) \leq \gamma(K\varphi \to K\psi)$。对于 $B(\varphi \to \psi) \to (B\varphi \to B\psi)$ 的证明是类似的。

至于 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$，如果前件的取值为 0，证明显然。反过来，假设 $\gamma(\Box(\varphi \to \psi)) = 1$，我们必须证明 $\gamma(\Box\varphi \to \Box\psi) = 1$。根据 $\Box$ 的定义，我们有 $\gamma(\varphi \to \psi) = 1$，因此 $\gamma(\varphi) \leq \gamma(\psi)$。和之前一样，假设 $\gamma(\Box\varphi) = 1$。那么 $\gamma(\varphi) = 1$，并且还有 $\gamma(\psi) = 1$，由此得到 $\gamma(\Box\varphi \to \Box\psi) = 1$。

最后，对于 $\Box\varphi \to K\varphi$，假设 $\gamma(\Box\varphi) = 1$，我们有 $\gamma(\varphi) = 1$。根据引理 3.3(i)，集合 $\{1\}$ 是所有超滤子的交集。那么，如果 $\gamma(K\varphi) \neq 1$，就存在一个超滤子 U，使得 $\gamma(K\varphi) \notin U$。换言之，$1 = \gamma(\varphi) \notin$ KNOW (U)，这是不可能的，因为 KNOW (U) 是一个滤子。因此，必定有 $\gamma(K\varphi) = 1$。

根据模型中对 $\Box$ 的定义，公理 $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ 和 $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ 的可靠性显而易见。

对推导长度进行归纳，即可得出演算系统的可靠性。

□

我们定义如下同一性联结词 $\equiv$，它作用于 Fm：[6]

$$\varphi \equiv \psi := \Box(\varphi \leftrightarrow \psi).$$

直观来说，$\varphi \equiv \psi$ 表示 φ 和 ψ 指称同一个命题。我们将 $\equiv$ 称为命题同一性联结词。事实上，我们有如下结果：

引理 3.5. 对于任意模型 $\mathcal{M}$ 和任意赋值 $\gamma\colon V \to M$，

$$(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \gamma(\varphi) = \gamma(\psi).$$

[6]请回想，在模态逻辑 $S5$ 中，$\Box\varphi \to \psi \wedge \Box\psi \to \varphi$ 公式 $\Box(\varphi \to \psi \wedge \psi \to \varphi)$ 和 $(\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box(\psi \to \varphi))$ 在逻辑上等价，因为分配于合取之上。

在句法层面，联结词 $\equiv$ 的表现也符合预期：

定理 3.6. 替换原理成立，即以下方案是一个定理:[7]

$$(\varphi \equiv \psi) \to (\chi[x := \varphi] \equiv \chi[x := \psi]).$$

定理 3.7. $\Box\varphi \leftrightarrow (\varphi \equiv \top)$ 是一个定理。（实际上，$\Box\varphi \equiv (\varphi \equiv \top)$ 是一个定理。）

证明。 $\varphi \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \top)$ 是经典命题演算的一个定理。现在，应用公理必然化规则和分配公理。 □

定理 3.8（完备性）。对于任意集合 $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$，我们有

$$\Phi \Vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi.$$

证明。设 $\Phi \nvdash \varphi$。与经典命题演算中完全相同，可以推出 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ 是相容的。如果存在一个满足该集合的解释，那么 $\Phi \Vdash \varphi$ 就不可能成立。因此，只需证明任何相容集都是可满足的。设 Ψ 是一个相容的公式集。根据佐恩引理，存在一个极大相容扩张$\Gamma \supseteq \Psi$。我们在 Fm 上定义一个关系：

$$\varphi \approx \psi :\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \equiv \psi.$$

那么， $\approx$ 是一个同余关系，即它是一个与该语言的逻辑联结词、模态算子和认知算子相容的等价关系。我们用 $\overline{\varphi}$ 表示 φ 模 $\approx$的同余类，并且 $\overline{\Phi} := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \Phi\}$。下面，我们构造一个模型 $\mathcal{M}$ ，其论域为 $M := \overline{Fm}$，$0 := \bot$，$1 := \top$，并指定超滤子 $\mathrm{TRUE} := \overline{\Gamma}$。由于 $\approx$ 是一个同余关系，运算 $\overline{\varphi} \vee \overline{\psi} := \overline{\varphi \vee \psi}$, $\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} := \overline{\varphi \wedge \psi}$, $\neg\overline{\varphi} := \overline{\neg\varphi}$, $\Box\overline{\varphi} := \overline{\Box\varphi}$,$B\overline{\varphi} := \overline{B\varphi}$, $K\overline{\varphi} := \overline{K\varphi}$ 均定义良好。此外，如果 $\varphi \in \Gamma$ 且 $\varphi \approx \psi$，那么 $\psi \in \Gamma$。我们证明

$$\mathcal{M} = (M, TRUE, \vee, \wedge, \neg, 0, 1, \Box, B, K)$$

是一个模型。 $\mathcal{M}$ 是一个布尔代数，因为定义布尔代数类的所有方程都成立。事实上，对于任意形如$\varphi \leftrightarrow \psi$的经典重言式， $\varphi \equiv \psi$ 都是一个定理（应用公理必然化规则），因此我们得到 $\varphi \approx \psi$。特别地，TRUE 是该布尔代数的一个超滤子。剩下只需检验定义 3.1 的条件 (i) 和 (ii)。

条件 (i) 成立：回顾一下，根据定理 3.7， $\Box\varphi \leftrightarrow (\varphi \equiv \top)$ 是一个定理，且

[7] $\varphi[x := \psi]$ 是将 ψ 代入 φ中每个变元 x 后得到的结果。

因此是 Γ 的一个元素。所以 $\overline{\varphi} = \overline{\top}$ 当且仅当 $\varphi \approx \top$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \varphi \equiv \top$ 当且仅当 $\Box\varphi \in \Gamma$ 当且仅当 $\overline{\Box\varphi} \in \overline{\Gamma}$ 当且仅当 $\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$。因此，

$$\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma} \Leftrightarrow \overline{\varphi} = \overline{\top},$$

对所有 $\varphi \in Fm$。现在，只需证明以下各项成立：

$$\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma} \Rightarrow \Box\overline{\varphi} = \overline{\top}$$
$$\Box\overline{\varphi} \notin \overline{\Gamma} \Rightarrow \Box\overline{\varphi} = \overline{\bot}.$$

根据公理 (iv) 和上述等价关系，我们得到：$\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ 蕴含 $\Box\varphi \in \Gamma$蕴含 $\Box\Box\varphi \in \Gamma$ 蕴含 $\Box\overline{\Box\varphi} \in \overline{\Gamma}$ 蕴含 $\overline{\Box\varphi} = \overline{\top}$蕴含 $\Box\overline{\varphi} = \overline{\top}$。
根据 Γ 的极大一致性、公理 (v) 和上述等价关系，我们得到：$\Box\overline{\varphi} \notin \overline{\Gamma}$ 蕴含 $\neg\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ 蕴含 $\Box\neg\Box\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ 蕴含 $\neg\Box\overline{\varphi} = \overline{\top}$蕴含$\Box\overline{\varphi} = \overline{\bot}$蕴含 $\Box\overline{\varphi} = \overline{\bot}$。

那么条件 (i) 得证：

$$\Box\overline{\varphi} = \begin{cases} \overline{\top}, \text{ if } \overline{\varphi} = \overline{\top} \\ \overline{\bot}, \text{ else.} \end{cases}$$

条件 (ii) 可直接由公理得出。回顾一下，KNOW (U) 是一个滤子，当且仅当满足以下条件：$\top \in$KNOW (U) 且 $\overline{\varphi} \to \overline{\psi}, \overline{\varphi} \in$KNOW ($U$) 蕴含 $\overline{\psi} \in$KNOW (U)。 □

定义 3.9。一个框架 $\mathcal{F} = (W, P, E_K, E_B, w_T)$ 由以下内容构成

- 一个非空的世界集合 W，其中包含一个指定世界 $w_T \in W$，
- 一个集合 $P \subseteq Pow(W)$，其中包含 $\varnothing$ 和 W，且在以下条件下封闭：若 $A, B \in P$，则集合 $A \cap B, A \cup B, \sim A := P \setminus A, KA := \{w \in W \mid A \in E_K(w)\}$ 和 $BA := \{w \in W \mid A \in E_B(w)\}$ 均为 P 的元素，
- 一个函数 E_K：$W \to Pow(P)$，使得对每个 $w \in W$，$E_K(w) \subseteq P$ 都是 P 上的一个滤子，即 $E_K(w)$ 是一个非空集合，并满足以下条件：若 $A, B \in E_K(w)$，则 $A \cap B \in E_K(w)$；若 $A \in E_K(w)$ 且 $A \subseteq B \in P$，则 $B \in E_K(w)$；此外，对每个 $w \in W$，$E_K(w)$ 都满足以下事实性条件：$A \in E_K(w)$ 蕴含 $w \in A$。
- 一个函数 E_B：$W \to Pow(P)$，使得对于每个 $w \in W$，E_B都是 P上的真滤子，并且 $E_K(w) \subseteq E_B(w)$。

直观地说， P 是所有命题的集合， $E_K(w)$是在世界 w中已知的命题集合， $E_B(w)$是在世界 w中被相信的命题集合， KA是表示“A 已知”的命题，而 BA 是表示“A 被相信”的命题。

定义 3.10。给定一个框架 $\mathcal{F} = (W, P, E_K, E_B)$，赋值（或赋值函数）是一个函数 $g\colon V \to P$。元组 $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, g)$ 称为基于框架的模型，其世界 $w \in W$ 与公式之间的满足关系定义如下：

- $w \vDash x :\Leftrightarrow w \in g(x)$
- $w \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow w \nvDash \varphi$
- $w \vDash \varphi \to \psi :\Leftrightarrow w \nvDash \varphi$或 $w \vDash \psi$
- $w \vDash \Box\varphi :\Leftrightarrow w' \vDash \varphi$，对所有 $w' \in W$
- $w \vDash K\varphi :\Leftrightarrow \varphi^* \in E_K(w)$，其中 $\varphi^* := \{w \in W \mid w \vDash \varphi\}$
- $w \vDash B\varphi :\Leftrightarrow \varphi^* \in E_B(w)$

最后，对于任意基于框架的模型 $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, g)$ 和任意公式 $\varphi \in Fm$，我们定义：

$$\mathcal{K} \vDash \varphi :\Leftrightarrow w_T \vDash \varphi.$$

于是，逻辑后承的基于框架的关系按显而易见的方式给出：$\Phi \Vdash_f \varphi$:
$\Leftrightarrow \mathcal{K} \vDash \Phi$ 蕴含 $\mathcal{K} \vDash \varphi$，对于任意基于框架的模型 $\mathcal{K}$。

注释 3.11. 设 $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, g)$ 是一个基于框架的模型，其命题集合为 P。我们将 $g\colon V \to P$ 扩展为函数 $g\colon Fm \to P$，递归定义如下：

- $g(\neg\varphi) := P \smallsetminus g(\varphi)$
- $g(\varphi \to \psi) := (P \smallsetminus g(\varphi)) \cup g(\psi)$
- $g(K\varphi) := \{w \in W \mid g(\varphi) \in E_K(w)\}$
- $g(B\varphi) := \{w \in W \mid g(\varphi) \in E_B(w)\}$
- $g(\Box\varphi) = W$ *if* $g(\varphi) = W$; $g(\Box\varphi) = \varnothing$ *otherwise.*

然后，通过对公式进行归纳法，并同时考虑所有世界 $w \in W$，可以证明，对于任意 $\varphi \in Fm$ 和任意 $w \in W$，都有： $w \vDash \varphi \Leftrightarrow w \in g(\varphi)$。
因此， $g(\varphi) = \{w \in W \mid w \vDash \varphi\} = \varphi^* \in P$。

注记 3.12（内省知识的坍缩问题）。与文献中常见的模态认知逻辑关系语义（参见 *[3, 7]*）不同，我们不通过特定的可及关系来建模知识（信念）。相反，我们用一个函数来表示知识，该函数为每个世界分配命题集合。这样，我们避免了强形式的知识坍缩为证据。例如，假设知识由通常的可及关系表示，并满足正内省和负内省，即满足 $S5$ 风格的公理。那么，知识恰好由全关系给出，与证据相同。也就是说，知识坍缩为证据。然而，这一点并不能从公理中推导出来。我们对知识的建模在语义层面避免了坍缩问题。

定理 3.13。对于每个（代数）模型 $\mathcal{M}$ 和每个赋值 $\gamma\colon\ V \to M$，都存在一个基于框架的模型 $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, g)$，使得对于所有公式 $\varphi \in Fm$，

$$(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K} \vDash \varphi.$$

证明。设 $\mathcal{M}$ 是一个模型，$\gamma \in M^V$ 是一个赋值。令 W 为构成 $\mathcal{M}$基础的布尔代数的所有超滤子所组成的集合，并令 $w_T := \mathrm{TRUE} \in W$为指定世界。对于每个 $m \in M$，我们定义

$$m^+ := \{w \in W \mid m \in w\}.$$

Then

$$P := \{m^+ \mid m \in M\}$$

是所需框架的命题集合，并且

$$E_K(w) := \{m^+ \subseteq W \mid m \in KNOW(w)\},$$
$$E_B(w) := \{m^+ \subseteq W \mid m \in BEL(w)\}$$

分别是在 w 处已知命题和相信的命题的集合。事实上，对于所有 m、$m' \in M$，我们都有

$$m^+ \cap m'^+ = (m \wedge m')^+$$
$$m^+ \cup m'^+ = (m \vee m')^+$$
$$\sim (m^+) = (\neg m)^+$$
$$K(m^+) = \{w \in W \mid m^+ \in E_K(w)\} = (Km)^+$$
$$B(m^+) = \{w \in W \mid m^+ \in E_B(w)\} = (Bm)^+$$
$$W = 1^+$$
$$\varnothing = 0^+$$

因此， P 满足所需的闭包性质。然后很容易看出，集合 $E_K(w)$ 和 $E_B(w)$ 也对交集封闭。假设 $m^+ \in E_K(w)$ 且 $m^+ \subseteq m'^+$，其中某个 $m' \in M$。那么，对于底层布尔代数属于模型 $\mathcal{M}$ 的任意超滤子 w'，我们有： $m \in w'$ 蕴含 $m' \in w'$。这等价于条件 $m \to m'$ 属于所有超滤子，也就是说 $m \to m' = 1$。特别地， $m \to m' \in KNOW(w)$，因此 $(m \to m')^+ \in E_K(w)$。由于 $m^+ \in E_K(w)$，我们得到 $m'^+ \in E_K(w)$。因此， $E_K(w)$ 是一个滤子。类似地，可以证明 $E_B(w)$ 是一个滤子。最后，我们证明 $E_K(w)$ 的事实性条件。假设 $m^+ \in E_K(w)$。那么，根据 $KNOW(w)$ 的定义， $m \in KNOW(w) \subseteq w$。因此， $w \in m^+$。我们已经证明 $\mathcal{F} = (W, E_K, E_B, w_T)$ 是一个框架。赋值 g: $V \to P$ 定义为 $g(x) := \gamma(x)^+$。然后根据归纳法和注释 3.11，

$$g(\varphi) = \gamma(\varphi)^+,$$

对所有 $\varphi \in Fm$。那么对于任意 $w \in W$ 和 $\varphi \in Fm$:

$$w \vDash \varphi \Leftrightarrow w \in \varphi^* \Leftrightarrow w \in g(\varphi) \Leftrightarrow w \in \gamma(\varphi)^+ \Leftrightarrow \gamma(\varphi) \in w.$$

特别地:

$$(\mathcal{F}, g) \vDash \varphi \Leftrightarrow w_T \vDash \varphi \Leftrightarrow \gamma(\varphi) \in w_T = TRUE \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi.$$

□

推论 3.14。我们的逻辑相对于基于框架的语义是完备的： $\Phi \Vdash_f \varphi$ 蕴含 $\Phi \vdash \varphi$。

证明。设 $\Phi \nvdash \varphi$。那么根据相对于代数语义的完备性， $\Phi \nVdash \varphi$。因此，存在一个模型（$\mathcal{M}$, γ），使得（$\mathcal{M}$, γ） $\vDash \Phi$ 且（$\mathcal{M}$, γ） $\nvDash \varphi$。然后由定理 3.13 可得到一个具有该性质的基于框架的模型。因此， $\Phi \nVdash_f \varphi$。 □

参考文献

[1] S. Artemov 和 T. Protopopescu, 《直觉主义认知逻辑》, The Review of Symbolic Logic 9(2), 266–298, 2016。[2] A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev, 《模态逻辑》, Clarendon Press, 牛津, 1997。[3] R. Fagin、J. Y. Halpern、Y. Moses 和 M. Y. Vardi, 《关于知识的推理》, The MIT Press, 2003。

[4] S. Lewitzka，《经典命题逻辑与直觉主义命题逻辑的模态逻辑融合》，《逻辑与计算杂志》27(1), 201–212，2017，在线发表：2015年7月20日。[5] S. Lewitzka，《经典命题逻辑与直觉主义命题逻辑结合的认知逻辑扩展》，IGPL逻辑杂志25(3), 309–324，2017。[6] S. Lewitzka，《关于证明与知识的推理》，纯数学与应用逻辑年刊170(2), 218–250，2019。[7] J.-J. Ch. Meyer 和 W. van der Hoek，《面向人工智能与计算机科学的认知逻辑》，剑桥大学出版社，1995。