arXiv:2304.01306v1 [math.CO] 3 Apr 2023

刚性扩展图

Alan Lew*[2]、Eran Nevo†[1]、Yuval Peled‡[1]和Orit E. Raz§[1]

[1]爱因斯坦数学研究所，希伯来大学，耶路撒冷 91904，以色列[2]数学科学系，卡内基梅隆大学，匹兹堡，PA 15213，美国

摘要

Jord´an 和 Tanigawa 最近引入了图 G的 d维代数连通性 $a_d(G)$。这是衡量 G 的 d维刚性的一个定量指标，并推广了图的谱扩张这一研究充分的概念。我们提出了 $a_d(G)$的一个新下界，该下界由与 G 相关联的某些子图的谱扩张定义，这些子图对应于将其顶点划分为 d 个部分的划分。特别地，我们得到了图 G刚性的一个新充分条件。作为第一个应用，我们证明，对于每个 $d \geq 2$和 $k \geq 2d+1$，都存在一个由 k正则 d刚性扩展图构成的无限族。猜想上，不存在这样的 $2d$正则图族。其次，我们证明 $a_d(K_n) \geq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$，并猜想该结果在本质上是紧的。此外，我们研究了当 G 是一个极小 d刚性图时所能达到的极值 $a_d(G)$。

1 引言

图扩张是现代图论中最具影响力的概念之一，在离散数学和计算机科学中有着众多应用（见 [13, 18]）。直观地说，扩张子是一个“高度连通”的图，而定量衡量图的连通性或扩张性的一种标准方法，是使用其拉普拉斯矩阵中的谱隙。扩展图研究的一个主要主题是构造稀疏扩张子。特别是，有界度正则扩张图已在数学的各个领域得到广泛研究 [8, 19, 23, 7, 20]。本文研究一种谱图扩张的推广，该推广

*alanlew@andrew.cmu.edu。Alan Lew 得到了以色列科学基金会 ISF-2480/20 号资助的部分支持。

†nevo@math.huji.ac.il。Eran Nevo 得到了以色列科学基金会 ISF-2480/20 号资助的部分支持。

‡yuval.peled@mail.huji.ac.il.§oritraz@mail.huji.ac.il.

最近由 Jord´an 和 Tanigawa 通过图刚性理论引入 [14]。

d维框架是一个有序对 (G,p)，由图 $G=(V,E)$ 和映射 $p: V \to \mathbb{R}^d$ 构成。如果从 p 出发的顶点连续运动保持 G 中任意两个相邻顶点之间的距离，也保持任意两对顶点之间的距离，则称该框架是 d刚性的；框架刚性的背景介绍，参见例如 [4, 9] 。

Asimow 和 Roth 在 [1] 中证明，如果映射 p 是一般的（例如，p 的 $d|V|$ 坐标在有理数域上代数无关），那么 (G,p) 的框架刚性不依赖于映射 p。此外，他们还证明，对于一般的 p，刚性等价于以下更强的线性代数概念——无穷小刚性。

对于每个 $u,v \in V$，我们定义 $d_{uv} \in \mathbb{R}^d$ 为

$$d_{uv} = \begin{cases} \frac{p(u)-p(v)}{\|p(u)-p(v)\|} & \text{if } p(u) \neq p(v), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

以及 $\mathbf{v}_{u,\,v} := (1_u - 1_v) \otimes d_{uv} \in \mathbb{R}^{d|V|}$，其中 $\{1_u\}_{u\in V}$ 是$\mathbb{R}^{|V|}$ 的标准基，$\otimes$ 表示克罗内克积。等价地，

$$\mathbf{v}_{u,v}^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{u}{d_{uv}^T} & 0 & \dots & 0 & \overset{v}{d_{vu}^T} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

（归一化）刚性矩阵 $R(G,p) \in \mathbb{R}^{d|V|\times|E|}$ 是一个矩阵，其列向量为 $\mathbf{v}_{u,v}$，对所有 $\{u,v\} \in E$ 均如此。我们总是假设像 $p(V)$ 不包含于 $\mathbb{R}^d$ 中的任何仿射超平面。在这种情况下，可以证明（见 [1]），$\operatorname{rank}(R(G,p)) \leq d|V| - \binom{d+1}{2}$。如果框架 (G,p) 达到这一界限，即 $\operatorname{rank}(R(G,p)) = d|V| - \binom{d+1}{2}$，则称其为无穷小刚性。

如果一个图 G 相对于某个映射 p 是无穷小刚性的（或者等价地，对于所有一般映射 [1]都是无穷小刚性的），则称它在 $\mathbb{R}^d$ 中是刚性的，或称为 d-刚性。

对于 $d=1$ 和单射 $p: V \to \mathbb{R}^d$，刚性矩阵 $R(G,p)$ 等于 G 的关联矩阵，因此这两种刚性概念都与图连通性一致。我们可以扩展这一类比，定义图的拉普拉斯矩阵的高维版本，称为 (G,p) 的刚度矩阵，其定义为

$$L(G,p) = R(G,p)R(G,p)^T \in \mathbb{R}^{d|V|\times d|V|}.$$

我们用 $\lambda_i(A)$ 表示对称矩阵 A 的第 i 小特征值。由于 $\operatorname{rank}(L(G,p)) = \operatorname{rank}(R(G,p)) \leq d|V| - \binom{d+1}{2}$，$L(G,p)$ 的核的维数至少为 $\binom{d+1}{2}$。因此，$\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p)) \neq 0$ 当且仅当 (G,p) 是无穷小刚性的。

在 [14], Jord´an 中，Tanigawa 定义了 G, $a_d(G)$ 的 d 维代数连通度，定义如下：

$$a_d(G) = \sup\left\{\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p))\,\middle|\, p: V \to \mathbb{R}^d\right\}.$$

对于 $d = 1$, $L(G,p)$ 与图拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 相同，而$a_1(G) = a(G)$ 是通常所说的 G 的代数连通度，或拉普拉斯谱隙，由 Fiedler 于 [6] 引入。对于每个 $d \geq 1$, $a_d(G) \geq 0$，因为 $L(G,p)$ 是半正定的，并且 $a_d(G) > 0$ 当且仅当 G 是 d-刚性的。

下面的刚性扩展图概念推广了经典的（谱）扩展图概念，对应于 $d = 1$ 情形：

定义 1.1. 设 $d \geq 1$。一族规模不断增大的图 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为一族 d-刚性扩展图，若存在 $\epsilon > 0$ 使得对所有 $i \in \mathbb{N}$，$a_d(G_i) \geq \epsilon$。

众所周知，对于每个 $k \geq 3$，都存在由 k-正则（1 维）扩展图组成的图族（例如参见 [13]）。我们的主要结果将这一事实推广到一般的 d：

定理 1.2。设 $d \geq 1$ 和 $k \geq 2d+1$。那么，存在一个由 k-正则 d-刚性扩展图构成的无限族。

Jord´an 和 Tanigawa 曾猜想，不存在 $2d$-正则d-刚性扩张图族（参见 [14, 猜想 2]，其中给出了$d = 2$ 情形的陈述；一般情形见 [16, 猜想 6.2]）。显然，对于 $k < 2d$，也不存在 k-正则 d-刚性扩张图族，因为当 n 足够大时，这类图的边数少于 $dn - \binom{d+1}{2}$，因此甚至不是 d-刚性图。因此，假设这一猜想成立，我们的结果是紧的。

证明定理 1.2 的主要工具是一个关于$a_d(G)$ 的新下界，该下界以某些与 G 相关的子图的（1 维）代数连通度表示，其中 G 的顶点集被划分为 d 个部分。为方便起见，若 G 仅由一个顶点组成，我们令 $a(G) = \infty$。

设 $G = (V,E)$ 是一个图，且 $A, B \subset V$ 是两个不相交的集合。我们用 $G[A]$ 表示由 G 在 A 上诱导的子图，用 $G(A,B)$ 表示 G 的顶点集为 $A \cup B$、边集为 $E(A,B) = \{e \in E : |e\cap A| = |e\cap B| = 1\}$ 的子图。此外，若对所有 $i = 1,\ldots,d$ 都有 $A_i \neq \emptyset$，则称划分 $V = A_1 \cup \cdots \cup A_d$ 为非平凡划分。

定理 1.3. 设 $d \geq 2$。对于每个图 $G = (V,E)$ 和非平凡划分 $V = A_1 \cup \cdots \cup A_d$，都有

$$a_d(G) \geq \min\left(\left\{a(G[A_i])\right\}_{1\leq i\leq d} \bigcup \left\{\frac{1}{2}a(G(A_i,A_j))\right\}_{1\leq i<j\leq d}\right).$$

特别地，如果对于所有 $i \in [d]$，$G[A_i]$ 都是连通的，并且对于所有 $1 \leq i < j \leq d$，$G(A_i,A_j)$ 都是连通的，那么 G 是 d-刚性的。

注记 1.4. 在 $d=2$ 维的情形下，定理 1.3 中的陈述可以略作改进（去掉常数 $1/2$），得到

$$a_2(G) \geq \min\{a(G[A_1]), a(G[A_2]), a(G(A_1, A_2))\},$$

对于 V 的每个非平凡划分 A_1, A_2。

在 $d=2$ 的情形下，我们可以将定理 1.3 视为 Crapo [5, 定理 7]（一个特殊情形）的定量版本。对于 $d \geq 3$，定理 1.3 似乎除了给出 $a_d(G)$ 的一个下界外，还为 d-刚性提供了一个新的充分条件；我们认为这个充分条件本身也值得关注（这一充分条件也可以由 [17, 定理 5.5] 推导得出）。

为了从定理 1.3 推导出定理 1.2，我们考虑顶点集的一个平衡划分，并分别构造由该划分诱导出的每个 $\binom{d+1}{2}$ 子图。在主要情形 $k=2d+1$ 中，我们的“构造基元”是（1 维）扩展图，其最大度为 3，且很大比例的顶点度数为 2。这类图通过对经典构造中的 3-正则扩展图进行边细分而构造。在下文的定理 4.1 中，我们对边细分对图的代数连通度所产生的影响给出了估计。

作为定理 1.3 的另一项应用，我们将 $a_d(K_n)$ 已知下界从 [16, 定理 1.5] 稍作改进。

推论 1.5。设 $d \geq 3$ 和 $n \geq d+1$。那么

$$a_d(K_n) \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

此外，我们证明了关于 $a_d(G)$ 的以下上界，将 [14, 定理 4.2] 中 Jord´an 和 Tanigawa 证明的 $d=2$ 情形推广了。

定理 1.6。设 $d \geq 2$，并令 G 为一个图。那么，

$$a_d(G) \leq a(G).$$

定理 1.6 最近由 [22] 独立证明。我们的证明方法不同，采用了概率方法，我们认为它本身也很有意义。

最后，我们研究在 G 为极小 d-刚性图的条件下，$a_d(G)$ 可以有多小或多大。若图 G 是 d-刚性的，但对每条边 $e \in E$，$G \setminus e$ 都不是 d-刚性的，则称图 G 为极小 d-刚性图。对于 $d=1$，这类图恰好是生成树。这个问题与前面提到的猜想有关：不存在 $2d$-正则的 d-刚性扩张图（见猜想 8.2）。

在最小 d-刚性图中，$a_d(G)$ 由星图的一个 d-类比达到最大值。对于每个 $d \geq 1$ 和 $n \geq d+1$，令 $S_{n,\,d}$ 为一个由一个大小为 d 的团以及 $n-d$ 个额外顶点构成的图，其中每个额外顶点都与团中的所有顶点相邻，且不与任何其他顶点相邻。很容易验证，$S_{n,\,d}$ 是最小 d-刚性的。

定理 1.7。对于每个 $d \geq 1$ 和 $T \neq K_2$, K_3 一个最小 d-刚性图，均有

$$a_d(T) \leq 1,$$

且当 $T = S_{n,d}$ 时取等号。

这推广了 Fiedler 的一个结果（见 [6, 4.1], , Merris 在 [21, Cor. 2] 中给出了更明确的表述），对应于 $d = 1$ 的情形。注意，对于 $T = K_2$（它是一个极小 1-刚性图），我们有 $a_1(K_2) = 2$；对于$T = K_3$（它是一个极小 2-刚性图），我们有 $a_2(K_3) = \frac{3}{2}$（见 [14,Theorem 4.4]）。

考虑另一个极端，即在所有 n 顶点的 d-刚性图中，使 a_d 达到最小的图。Fiedler 在 [6] 中证明，对于每个连通图 G，都有 $a(G) \geq a(P_n) = 2(1 - \cos(\pi/n))$，其中 P_n 是 n 顶点路径（明确表述见[11] ）。我们猜想，在更高维度中也存在类似情形：在第 7.1 小节中，我们定义了广义路径图$P_{n,d}$，它们是某些 n 顶点的极小 d-刚性图，并在命题 7.7 中给出了它们的 d 维代数连通度的界，该界意味着 $a_d(P_{n,d}) = \Theta_d(1/n^2)$。我们猜想这些图是极值的：

猜想 1.8. 设 G 是一个具有 n 个顶点的 d-刚性图。那么，

$$a_d(G) \geq a_d(P_{n,d}).$$

本文结构如下：第 2 节介绍一些后文会用到的刚度矩阵结果。特别地，我们回顾在 [16] 中引入的下刚度矩阵 $L^-(G,p)$ 的定义。第 3 节证明定理 1.3。第 4 节研究边细分对图的谱隙的影响。第 5 节证明主要结果定理 1.2，展示了 $k \geq 2d+1$ 上 k-正则 d-刚性扩张图的存在性。第 6 节给出上界 $a_d(G) \leq a(G)$ 的证明（定理 1.6）。第 7 节研究极小 d-刚性图的 d 维代数连通性。最后，第 8 节提出若干开放问题和进一步研究的方向。

2 预备知识

有时，处理框架 (G,p) 的下刚度矩阵会更简单，其定义为

$$L^-(G,p) = R(G,p)^T R(G,p) \in \mathbb{R}^{|E|\times|E|}.$$

根据标准线性代数，我们有 $\text{rank}(L(G,p)) = \text{rank}(L^-(G,p)) = \text{rank}(R(G,p))$，并且 $L(G,p)$ 的非零特征值（包括重数）与 $L^-(G,p)$ 的非零特征值相同。特别地，假设

$|E| \geq d|V| - \binom{d+1}{2}$，我们有

$$\lambda_k(L(G,p)) = \lambda_{|E|-d|V|+k}(L^-(G,p)), \tag{1}$$

对每个 $k \geq \binom{d+1}{2} + 1$ 都成立。此外，$L^-(G,p)$ 的各项由以下引理明确给出。

引理 2.1（[16, 引理 2.1]）。设 (G,p) 是一个 d 维框架。那么，对每个 e, $e' \in E(G)$,

$$L^-(G,p)_{e,e'} = \begin{cases} 2 & \text{if } e = e' = \{u,v\} \text{ and } p(u) \neq p(v), \\ d_{uv} \cdot d_{uw} & \text{if } e = \{u,v\},\ e' = \{u,w\} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $d_{uv} \cdot d_{uw}$ 表示点积。当 $e = \{u,v\}$ 和 $e' = \{u,w\}$ 时，我们用 $\theta(e,e')$ 表示 d_{uv} 与 d_{uw} 之间的角。因此，$L^-(G,p)_{e,\ e'} = \cos(\theta(e,e'))$（按惯例，如果 $d_{uv} = 0$ 或 $d_{uw} = 0$，则 $\cos(\theta(e,e')) = 0$）。

3 $a_d(G)$ 的下界

我们转而证明定理 1.3，先从下面这个关于分块对角矩阵特征值的简单引理开始。

为方便起见，给定一个“0×0”矩阵 M，我们定义 $\lambda_1(M) = \infty$。

引理 3.1. 设 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个分块对角矩阵，其分块为 M_1、...、M_k，其中对每个 $1 \leq i \leq k$，$M_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 都是对称的。那么，对于任意 $1 \leq m \leq n$ 和满足 $m = 1 - k + \sum_{i=1}^{k} r_i$ 的 r_1、...、r_k，有

$$\lambda_m(M) \geq \min\{\lambda_{r_i}(M_i) : 1 \leq i \leq k\}.$$

证明。注意，M 的谱是 M_1、...、M_k 的谱的并集。令 $\lambda = \min\{\lambda_{r_i}(M_i) : 1 \leq i \leq k\}$。那么，至少有

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - r_i + 1) = n + k - \sum_{i=1}^{k} r_i = n - m + 1$$

M 的特征值大于或等于 λ。因此，λ 是 M 最小的 m 个特征值之一。也就是说，$\lambda_m(M) \geq \lambda$，证毕。 □

注 3.2. 请注意，在约定 $\lambda_1(M_i) = \infty$ for $M_i \in \mathbb{R}^{0\times 0}$ 的情况下，若一个或多个 $i \in [k]$ 取值为 $n_i = 0$ 和 $r_i = 1$，引理 3.1 仍然成立。

定理 1.3 的证明。假设 $V=[n]$，并记 $m=|E|-d|V|+\binom{d+1}{2}+1$。

若子图 $G[A_i]$ for $i\in[d]$ 或 $G(A_i,A_j)$ for $1\le i<j\le d$ 中有一个不连通，则结论显然成立。因此，我们假设这些子图均连通。特别地，对所有 $i\in[d]$，有 $|E(G[A_i])|\ge|A_i|-1$；对所有 $1\le i<j\le d$，有 $|E(G(A_i,A_j))|\ge|A_i\cup A_j|-1$。

设 $x_1,\dots,x_d\in\mathbb{R}^{d-1}$ 为边长为 1 的正则（$d-1$）维单纯形的顶点。对于每个 $c>0$，考虑嵌入$p_c:V\to\mathbb{R}^d$，其定义如下：

$$p_c(u)=(cx_i,u)$$

对每个 $i\in[d]$ 和 $u\in A_i$，均成立。

设 L^- 是矩阵 $L^-(G,p_c)$ 在 $c\to\infty$ 时逐项收敛得到的极限。注意，由于特征值的连续性，当 $c\to\infty$ 时，$\lambda_m(L^-(G,p_c))$ 收敛到 $\lambda_m(L^-)$。因此，

$$a_d(G)\ge\lim_{c\to\infty}\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p_c))=\lim_{c\to\infty}\lambda_m(L^-(G,p_c))=\lambda_m(L^-). \tag{2}$$

现在我们来为 $\lambda_m(L^-)$ 建立一个下界。

断言 3.3. 对于任意 $e,e'\in E$，均有

$$L^-_{e,e'}=\begin{cases}2 & \text{if } e=e',\\ \sigma(e,e') & \text{if } |e\cap e'|=1,\ e,e'\in E(G[A_i]) \text{ for some } i,\\ 1 & \text{if } |e\cap e'|=1,\ e,e'\in E(G(A_i,A_j)) \text{ for some } i\neq j,\\ 1/2 & \text{if } |e\cap e'|=1,\ e\in E(G(A_i,A_j)), e'\in E(G(A_i,A_k))\\ & \quad \text{for some } i\neq j\neq k,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases} \tag{3}$$

其中，$\sigma(e,e')=\operatorname{sign}((u-v)(u-w))\in\{\pm1\}$，如果 $e=\{u,v\}$ 且 $e'=\{u,w\}$。

证明。情形 $e=e'$ 和 $e\cap e'=\emptyset$ 可直接由引理 2.1 得出。对于其他情形，我们注意到，若 $u\in A_i$，$v\in A_j$ 对某个 $i\neq j$ 成立，则 d_{uv} 当 $c\to\infty$ 时收敛到 $(x_i-x_j,0)\in\mathbb{R}^d$。否则，若 $u,v\in A_i$，则对于每个 $c>0$，$d_{uv}=\operatorname{sign}(u-v)\cdot 1_d$，其中 1_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中的第 d 个单位向量。记 $e=\{u,v\}$ 和 $e'=\{u,w\}$，并通过利用引理 2.1 中的第二种情形进行分类讨论，得出该断言：

- 若 u、v、$w\in A_i$，则 $d_{uv}\cdot d_{uw}=\operatorname{sign}(u-v)\operatorname{sign}(u-w)=\sigma(e,e')$。
- 若 $u\in A_i$、v、$w\in A_j$，则 $d_{uv}\cdot d_{uw}\to\|x_i-x_j\|^2=1.$
- 如果 $u\in A_i$，$v\in A_j$，$w\in A_k$那么 $d_{uv}\cdot d_{uw}\to(x_i-x_j)\cdot(x_i-x_k)=1/2$，因为正则单纯形中两条边之间的角为 $\pi/3$。

- If $u, v \in A_i,\ w \in A_j$ then $d_{uv} \cdot d_{uw} \to \operatorname{sign}(u-v)1_d \cdot (x_i - x_j, 0) = 0$.

□

设 $E' = \cup_{1 \le i < j \le d} E(G(A_i, A_j))$，并令 Q 为一个 $E \times E$ 矩阵，其定义为

$$Q_{e,e'} = \begin{cases} |e \cap e'| & \text{if } e, e' \in E', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到，由于 $Q = N^T N$， Q 是半正定的，其中 $N \in \mathbb{R}^{V \times E}$ 是一个（无符号）关联矩阵，定义如下：

$$N_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in e \in E', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，根据 Weyl不等式（例如参见 [3, Theorem 2.8.1(iii)]），有：

$$\lambda_m(L^-) \ge \lambda_m(M), \tag{4}$$

其中，矩阵 $M = L^- - \frac{1}{2}Q$ 由下式直接给出：

$$M_{e,e'} = \begin{cases} 2 & \text{if } e = e' \in E(G[A_i]) \text{ for some } i, \\ \sigma(e,e') & \text{if } |e \cap e'| = 1,\ e, e' \in E(G[A_i]) \text{ for some } i, \\ 1 & \text{if } e = e' \in E(G(A_i, A_j)) \text{ for some } i \ne j, \\ 1/2 & \text{if } |e \cap e'| = 1,\ e, e' \in E(G(A_i, A_j)) \text{ for some } i \ne j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们注意到， M 是一个分块对角矩阵，并将其各块记为 M_i、 $i \in [d]$ 和 M_{ij}、 $1 \le i < j \le d$。块 M_i 的支撑集为 $E(G[A_i])$，且它等于 $G[A_i]$ 关于任意保序嵌入 $q_i : A_i \to \mathbb{R}$ 的（一维）下刚度矩阵。特别地，令 $r_i = |E(G[A_i])| - |A_i| + 2$，由 (1) 可得：

$$\lambda_{r_i}(M_i) = \lambda_2(L(G[A_i], q_i)) = a(G[A_i]). \tag{5}$$

此外，块 M_{ij} 的支撑集为 $E(G(A_i, A_j))$，且它等于 $1/2$ 乘以 $G(A_i, A_j)$ 关于任意满足 $q_{ij}(u) < q_{ij}(v)$（若 $u \in A_i$， $v \in A_j$）的嵌入 q_{ij} : $A_i \cup A_j \to \mathbb{R}$ 的（一维）下刚度矩阵。特别地，令 $r_{ij} = |E(G(A_i, A_j))| - |A_i \cup A_j| + 2$，由 (1) 可得：

$$\lambda_{r_{ij}}(M_{ij}) = \lambda_2\left(\frac{1}{2}L(G(A_i, A_j), q_{ij})\right) = \frac{1}{2}a(G(A_i, A_j)). \tag{6}$$

直接计算可得

$$1 - \binom{d+1}{2} + \sum_{i=1}^{d} r_i + \sum_{1 \le i < j \le d} r_{i,j} = |E| - d|V| + \binom{d+1}{2} + 1 = m.$$

因此，由引理 3.1、(5) 和 (6) 可得

$$\lambda_m(M) \geq \min\left(\left\{a(G[A_i])\right\}_{1\leq i\leq d} \bigcup \left\{\frac{1}{2}a(G(A_i,A_j))\right\}_{1\leq i<j\leq d}\right). \quad (7)$$

$a_d(G)$ 的所需下界由结合 (2)、(4) 和 (7) 得出。

特别地，由于对所有 $1 \leq i \leq d$， $G[A_i]$ 都是连通的，并且对所有 $1 \leq i < j \leq d$，$G(A_i, A_j)$ 都是连通的，因此 $a_d(G) > 0$，从而 G 是 d-刚性的。

□

为了在 $d = 2$ 的情形下推导更强的下界（如注记 1.4 所述），我们注意到，在这种情形下， L^- 本身是一个包含 3 个分块的分块对角矩阵，这些分块是 1 维下刚度矩阵 $L^-(G[A_1], q_1)$、$L^-(G[A_2], q_2)$ 和 $L^-(G(A_1, A_2)\ q_{12})$（也就是说，无需“校正”项 Q）。因此，按照我们在一般情形下对 M 所采用的相同推理，我们得到

$$a_2(G) \geq \lambda_m(L^-) \geq \min(\{a_2(G[A_1]), a_2(G[A_2]), a_2(G(A_1,A_2))\}),$$

其中 $m = |E| - 2|V| + \binom{2+1}{2} + 1$。

注 3.4. 定理 1.3 给出的 d-刚性判据在边数方面是极小的。也就是说，假设划分中的所有 $\binom{d+1}{2}$ 图均连通，则对于 $i \in [d]$， $G[A_i]$ 中至少有 $|A_i| - 1$ 条边；对于 $1 \leq i < j \leq d.$， $G(A_i, A_j)$ 中至少有 $|A_i| + |A_j| - 1$ 条边。总计至少需要

$$\sum_{i=1}^{d}(|A_i| - 1) + \sum_{1\leq i<j\leq d}(|A_i| + |A_j| - 1) = d|V| - \binom{d+1}{2}$$

G 中有这么多条边——恰好等于一个极小 d-刚性图的边数。

作为定理 1.3 的推论，我们得到了推论 1.5 的一个简明证明，该推论给出了 K_n 的 d 维代数连通度的下界。

推论 1.5 的证明。将顶点集 $[n]$ 划分为 d 个集合 A_1，.....， A_d，使各集合的大小尽可能相等。于是，每个 A_i 都由 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 个或 $\lceil \frac{n}{d} \rceil$ 个顶点组成。导出子图 $G[A_i]$ 恰好是由 $|A_i|$ 个顶点构成的完全图，因此

$$a(G[A_i]) \geq |A_i| \geq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

对所有 $i \in [d]$ 均成立。类似地，图 $G(A_i, A_j)$ 是完全二部图，因此

$$a(G(A_i, A_j)) = \min\{|A_i|, |A_j|\} \geq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

根据定理 1.3，我们得到

$$a_d(K_n) \geq \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

□

注 3.5. 对于 $d = 2$，Jord ´an 和 Tanigawa 在 *[14]*,中利用 Zhu 的一项结果（*[25]*）证明了 $a_2(K_n) = n/2$。将顶点集分成大小分别为 $\lfloor n/2 \rfloor$ 和 $\lceil n/2 \rceil$ 的两部分，我们得到界 $a_2(K_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。这为 n为偶数时的紧下界提供了一个简单证明。

我们猜想，推论 1.5 中得到的下界几乎是紧的:

猜想 3.6. 设 $d \geq 3$ 和 $n \geq d + 1$. 那么，

$$a_d(K_n) = \begin{cases} 1 & if\ d+1 \leq n \leq 2d, \\ \frac{n}{2d} & if\ n \geq 2d. \end{cases}$$

注意，这是 [16]中猜想 6.1 的一个强版本。

4 边细分下的扩张

本节旨在证明以下关于边细分对图的代数连通度影响的定理。设 $G = (V, E)$ 是一个没有孤立顶点的图。给定 G 中的一条边 e ，将 e 替换为一条包含 $m \geq 0$ 个新内部顶点的导出路径，称为对 e 进行含 m 个顶点的细分。

定理 4.1. 设 G 是一个最小度至少为 2、最大度为 Δ 的连通图，且 G' 是由 G 对 G 中的每条边进行至多含 m 个顶点的细分后得到的。那么，

$$a(G') \geq \frac{\min\left\{\frac{1}{\Delta}a(G), 4\right\}}{2(m+1)^2}.$$

令 $D(G)$ 为对角矩阵，其对角元为 $D(G)_{i,\ i}$ =deg$_G(i)$；令 $\mathcal{L}(G)$ $=D(G)^{-\frac{1}{2}}L(G)D(G)^{-\frac{1}{2}}$为 G 的归一化拉普拉斯矩阵。Xie、Zhang 和 Comellas 在 [24] 中研究了边细分对归一化拉普拉斯矩阵的影响。记 $s(G)$ 为 G 的细分图，即通过对 G 的每条边细分一个顶点而得到的图，从而将每条边细分为两条边。此外，令 $s^k(G)$ 为第 k 次迭代细分。也就是说， $s^k(G) = s(s^{k-1}(G))$（其中 $s^0(G) = G$）。

引理 4.2（[24, 引理 3.1]）。若 $\lambda \neq 1$ 是 $\mathcal{L}(s(G))$ 的一个特征值，则 $2\lambda(2-\lambda)$ 是 $\mathcal{L}(G)$ 的一个特征值。

为了将归一化拉普拉斯矩阵的谱隙与非归一化拉普拉斯矩阵的谱隙联系起来，我们将使用以下由 Higham 和 Cheng [12] 得出的结果。

引理 4.3（[12, 定理 3.2]）。设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵，且令 $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$，其中 $m \le n$。那么，对于每个 $1 \le i \le m$，

$$\lambda_i(X^T AX) = \theta_i \mu_i,$$

其中

$$\lambda_i(A) \le \mu_i \le \lambda_{i+n-m}(A)$$

and

$$\lambda_1(X^T X) \le \theta_i \le \lambda_m(X^T X).$$

引理 4.4. 设 G 是一个具有 n 个顶点、最小度为 $\delta > 0$、最大度为 Δ 的图。那么，对所有 $2 \le i \le n$，

$$\delta \le \frac{\lambda_i(L(G))}{\lambda_i(\mathcal{L}(\mathcal{G}))} \le \Delta.$$

证明. 由引理 4.3 可直接得出该结论，因为 $\mathcal{L}(G) = D(G)^{-\frac{1}{2}} L(G) D(G)^{-\frac{1}{2}}$，并且

$$(D(G)^{-\frac{1}{2}})^T D(G)^{-\frac{1}{2}} = D(G)^{-1}$$

其最小特征值为 $\frac{1}{\Delta}$，最大特征值为 $\frac{1}{\delta}$。 □

命题 4.5. 设 G 是一个连通图，其最小度至少为 2，最大度为 Δ。那么，

$$a(s^k(G)) \ge \frac{\min\left\{\frac{2}{\Delta} a(G), 8\right\}}{4^k}.$$

证明. 首先，我们将证明

$$\lambda_2(\mathcal{L}(s^k(G))) \ge \frac{\min\{\lambda_2(\mathcal{L}(G)), 4\}}{4^k}.$$

我们对 k 进行归纳论证。当 $k = 0$ 时，结论显然成立。设 $k \ge 1$，并设 $\lambda = \lambda_2(\mathcal{L}(s^k(G)))$。若 $\lambda \ge (1/4)^{k-1}$，则证毕。否则，假设$\lambda < (1/4)^{k-1}$。特别地，$\lambda < 1$。因此，由引理 4.2 可知，$2\lambda(2-\lambda)$ 是 $\mathcal{L}(s^{k-1}(G))$ 的一个特征值；由于 $0 < \lambda < 1$ (λ 为正，因为G 是连通的)，该特征值非零。因此，我们得到

$$\lambda_2(\mathcal{L}(s^{k-1}(G))) \le 2\lambda(2-\lambda).$$

根据归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda &\ge \frac{\lambda_2(\mathcal{L}(s^{k-1}(G)))}{2(2-\lambda)} \ge \frac{\lambda_2(\mathcal{L}(s^{k-1}(G)))}{4} \\ &\ge \frac{1}{4}\frac{\min\{\lambda_2(\mathcal{L}(G)), 4\}}{4^{k-1}} = \frac{\min\{\lambda_2(\mathcal{L}(G)), 4\}}{4^k}.\end{aligned}$$

最后，由引理 4.4，我们得到

$$a(s^k(G)) = \lambda_2(L(s^k(G))) \geq 2\lambda_2(\mathcal{L}(s^k(G))) \geq 2\frac{\min\{\lambda_2(\mathcal{L}(G)), 4\}}{4^k}$$
$$\geq \frac{\min\left\{\frac{2}{\Delta}\lambda_2(L(G)), 8\right\}}{4^k} = \frac{\min\left\{\frac{2}{\Delta}a(G), 8\right\}}{4^k}.$$

□

下一个引理证明，代数连通度关于边细分是单调的。

引理 4.6. 假设 $G' = (V', E')$ 是由 $G = (V, E)$ 将 G 的边 $e = uv$ 细分并加入 1 个新顶点 w 后得到的。那么，$a(G') \leq a(G)$。

证明. 若 G 不连通，则 $a(G) = a(G') = 0$，特别地，$a(G') \leq a(G)$。因此，我们可以假设 G 是连通的。

考虑相对于某个嵌入 $p' : V' \to \mathbb{R}$ 的一维刚性矩阵 $R(G', p')$，该嵌入满足 $p'(u) < p'(w) < p'(v)$；以及相对于 p' 在 $V = V' \setminus \{w\}$ 上的限制的 $R(G, p)$。不失一般性，假设 $R(G', p')$ 中最后两列分别为 $\mathbf{v}_{uw}$、$\mathbf{v}_{wv}$，$R(G, p)$ 中最后一列为 $\mathbf{v}_{uv}$，且其余各列均相同。也就是说，$R(G, p)$ 是将 $R(G', p')$ 的最后两列相加合并为一列后得到的。换言之，

$$R(G, p) = R(G', p')X$$

其中 $X \in \mathbb{R}^{E' \times E}$ 是一个矩阵，其行是 $|E|$ 标准单位行向量，其中最后一个单位行向量重复两次。因此，

$$L^-(G, p) = X^T L^-(G', p')X.$$

利用引理 4.3 和 $\lambda_1(X^T X) \geq 1$，我们得出，对于每个 $1 \leq i \leq |E|$

$$\lambda_i(L^-(G, p)) \geq \lambda_i(L^-(G', p')).$$

令 $i = |E| - |V| + 2 = |E'| - |V'| + 2$，利用 (1) 可得

$$a(G) = \lambda_2(L(G, p)) = \lambda_i(L^-(G, p)) \geq \lambda_i(L^-(G', p')) = \lambda_i(L^-(G', p')) = a(G'),$$

正如所述。 □

定理 4.1 的证明。令 $k = \lceil \log_2(m + 1) \rceil$。注意，$s^k(G)$ 是通过在 G 的每条边上添加 $\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = 2^k - 1$ 个顶点，由 G 得到的。由于 $2^k - 1 \geq m$，$s^k(G)$ 可以通过细分 G' 的一些边得到。因此，根据引理 4.6 中证明的单调性，我们有

$$a(G') \geq a(s^k(G)).$$

最后，由命题 4.5 可得

$$a(G') \geq a(s^k(G)) \geq \frac{\min\left\{\frac{2}{\Delta}a(G), 8\right\}}{4^k} \geq \frac{\min\left\{\frac{2}{\Delta}a(G), 8\right\}}{4^{\log_2(m+1)+1}} = \frac{\min\left\{\frac{1}{\Delta}a(G), 4\right\}}{2(m+1)^2}.$$

□

接下来，我们应用定理 4.1，证明存在具有所需度序列的（一维）扩展图；在定理 1.2 的证明中，这些图随后将用作构造 d 维刚性扩张图的构件。

推论 4.7。对于每个 $d \geq 1$，都存在 $c = c(d) > 0$ 以及一个由 $2dn$-顶点二分图组成的无限族 $(H_n)_{n=3}^{\infty}$，使得 $a(H_n) \geq c$，且每个部分由 n 个度数为 3 的顶点和 $(d-1)n$ 个度数为 2 的顶点组成。

˜证明。我们从一个无限族 $(H_n)_{n\geq 3}$ 的 $2n$-顶点 3-正则二分图开始，其中有 $a(H_n) \geq \epsilon$，对某个 $\epsilon > 0$成立。例如，随机的 $2n$-顶点 3-正则二分图以高概率具有这一性质，并且其代数连通度近乎最优，为 $3 - 2\sqrt{2} - o(1)$，如 $n \to \infty$ [2]所示。

˜为构造 H_n，我们对 H_n 的 $3n$ 条边进行细分，总共加入 $2(d-1)n$ 个新顶点，使得 (i) 每条边都被细分为偶数个新顶点，且 (ii) 尽可能均匀地将这些新顶点（成对）分配到各条边上。特别地，没有任何一条边被细分为超过 $2 \cdot \lceil (d-1)n/(3n) \rceil = 2\lceil (d-1)/3 \rceil$ 个新顶点。注意，由于所有边都被细分为偶数个顶点，H_n 是二分图，每个部分中都有 n 个度数为 3 的旧顶点和 $(d-1)n$ 个度数为 2 的新顶点。此外，由定理 4.1 可得

$$a(H_n) \geq \frac{\epsilon}{6\left(2\left\lceil \frac{(d-1)}{3} \right\rceil + 1\right)^2}.$$

□

5 刚性扩展图的存在性

我们将结合前几节的结果，证明对每个 $k \geq 2d+1$，都存在一族 k-正则的 d-刚性扩张图。

定理 1.2 的证明。对于所有 $k \geq 2d+1$ 和充分大的 n，我们将构造一个有 $2d^2n$ 个顶点的 k-正则图 G_n，使其满足 $a(G_n) \geq c(d)/2$（其中 $c(d) > 0$ 是推论 4.7 中的常数）。

我们从主要情形 $k = 2d+1$ 开始。图 $G = G_n$ 的顶点集 V 是 d 个集合 $V = A_1 \cup \cdots \cup A_d$ 的不交并，其中每个集合 A_i $i \in [d]$ 本身又被划分为 d 个不交子集 $A_i = B_{i,\ 1} \cup \cdots \cup B_{i,\ d}$。

所有 d^2 “原子”顶点子集 $B_{i,\ j}\ i\ j \in [d]$ 的大小均为 $2n$。特别地，$|V| = 2d^2n$。

我们可以并且将通过指定 $\binom{d+1}{2}$ 个子图 $G[A_i]$、 $i \in [d]$ 和 $G(A_i, A_j)$ $1 \le i < j \le d$ 来描述 G 的边集。对于 $1 \le i < j \le d$，图 $G(A_i, A_j)$ 的构造使其同构于推论 4.7 中的 $4dn$ 顶点二分图 H_{2n}。我们不精确指定 H_{2n} 与 $G(A_i, A_j)$ 之间的同构映射，但要求：(i) H_{2n} 的一个部分映射到 A_i，另一部分映射到 A_j；(ii) H_{2n} 中度数为 3 的 $4n$ 个顶点映射到 $B_{i,\ j}$ 和 $B_{j,\ i}$。

类似地，图 $G[A_i]$, $i \in [d]$ 同构于推论 4.7 中的 $2dn$ 顶点图H_n。我们要求，在从 H_n 到 $G[A_i]$ 的同构映射中， H_n 中度数为 3 的 $2n$ 个顶点映射到 $B_{i,\ i}$ （这里我们不使用 H_n 的二分结构）。

注意，推论 4.7 断言 $a(G[A_i]) \ge c(d)$ $\forall i \in [d]$, 并且$a(G(A_i, A_j)) \ge c(d)$ $\forall 1 \le i < j \le d.$。由定理 1.3，使用划分$A_1$,..., A_d，我们得到

$$a_d(G) \ge \frac{c(d)}{2},$$

（根据注记 1.4， $d = 2$ 的下界是此下界的两倍）。

最后，我们证明 G 是$(2d + 1)$-正则的。事实上，设$v \in B_{i,\ j}$是 G中的一个顶点。若 $i = j$，则 v 包含在来自 $G[A_i]$的 3 条边中，也包含在来自每个 $d - 1$ 图 $G(A_i, A_{i'})$ $\forall i' \ne i$的 2 条边中。这里我们稍微滥用了记号，将 $G(A_i, A_{i'})$记作 $= G(A_{i'}, A_i)$。类似地，若$i \ne j$，则 v 包含在来自 $G(A_i, A_j)$的 3 条边中、来自 $G[A_i]$ 的 2 条边中，以及来自每个 $d - 2$ 图 $G(A_i, A_{i'})$ $\forall i' \ne i, j$的 2 条边中。

为推出关于 $k > 2d+1$ 的结论，回想一下，Dirac 曾证明，每个 m 顶点图只要最小度至少为 $m/2$，就是哈密顿图。此外，若 m 为偶数，则 Dirac 哈密顿路径上奇数位置的边构成一个完美匹配。因此，若 n 足够大，则 $(2d + 1)$ 正则 $2d^2n$ 顶点图 $G = G_n$ 的补图 $\bar{G}$ 含有 $k -$ 个边不相交的完美匹配。我们可以将这些匹配加入 G，得到一个 k 正则图 G'_n；根据 a_d 关于添加边的单调性，该图满足 $a_d(G'_n) \ge a_d(G_n) \ge c(d)/2$。

□

6 $a_d(G)$ 的一个上界

本节证明定理 1.6，该定理指出，对每个图 G， $a_d(G) \le a(G)$。我们将在下文第 8 节讨论该定理是否紧。

我们将需要关于刚度矩阵的以下简单结果。

引理 6.1（Jord´an-Tanigawa [14, 3.2]）。设 $G = (V, E)$ 是一个图，并且

设 $p:\ V \to \mathbb{R}^d$ 且 $x \in \mathbb{R}^{d|V|}$。那么

$$x^T L(G,p)x = \sum_{\{u,v\}\in E} \langle x(u) - x(v), d_{uv}\rangle^2,$$

其中，$x(u) \in \mathbb{R}^d$ 由与顶点 u 对应的 x 坐标 d 组成。

我们还需要以下引理，该引理指出，在计算 $a_d(G)$ 时，只需考虑满足以下条件的映射 $p:\ V \to \mathbb{R}^d$ 是嵌入（即单射）。

引理 6.2（[16, 引理 2.4]）。设 $G = (V,E)$ 是一个图，且 $d \geq 1$。那么

$$a_d(G) = \sup\left\{\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p))\middle|\, p: V \to \mathbb{R}^d,\ p\ is\ injective\right\}.$$

定理 1.6 的证明。设 $p:\ V \to \mathbb{R}^d$ 是一个单射。我们要证明 $\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p)) \leq a(G)$。如果 (G,p) 不是无穷小刚性的，那么 $\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p)) = 0 \leq a(G)$，如所求。因此，我们可以假设 (G,p) 是无穷小刚性的。为方便起见，假设 $V = [n]$。设 $y \in \mathbb{R}^n$ 是 $L(G)$ 的一个特征向量，对应于特征值 $\lambda_2(L(G)) = a(G)$。假设 $\|y\| = 1$。

对于 $z \in S^{d-1}$，令 $x_z \in \mathbb{R}^{dn}$ 定义为

$$x_z(i) = y_i z \in \mathbb{R}^d$$

对于 $i \in [n]$。（直观地说，所有顶点都沿着方向 z 移动，顶点 i 以速度 y_i 移动。）然后，根据引理 6.1，

$$x_z^T L(G,p)x_z = \sum_{ij\in E} (y_i - y_j)^2 \langle z, d_{ij}\rangle^2.$$

令 z 在 S^{d-1} 上均匀分布。显然，如果 $y \in S^{d-1}$，那么 $\mathbb{E}_z[\langle z,y\rangle^2]$ 不依赖于 y，因为 z 是球对称的。因此，

$$\mathbb{E}_z[\langle z,y\rangle^2] = \frac{1}{d}\mathbb{E}_z\left[\sum_{i=1}^d \langle z,u_i\rangle^2\right] = \frac{\mathbb{E}[\|z\|^2]}{d} = \frac{1}{d},$$

其中 u_1, ..., u_d 是 $\mathbb{R}^d$. 的某个标准正交基

由于 p是单射，因此对所有 $i<j$，都有 $\|d_{ij}\| = 1$。也就是说，$d_{ij} \in S^{d-1}$，因此对所有 $i<j$，都有 $\mathbb{E}_z[\langle z,d_{ij}\rangle^2] = 1/d$。根据期望的线性性，

$$\mathbb{E}_z[x_z^T L(G,p)x_z] = \frac{1}{d}\sum_{ij\in E}(y_i - y_j)^2 = a(G)/d.$$

类似地,

$$x_z^T L(K_n,p)x_z = \sum_{i<j}(y_i-y_j)^2\langle z,d_{ij}\rangle^2.$$

注意，由于 $y\perp \mathbf{1}$ 和 $\|y\|=1$，我们有 $\sum_{i<j}(y_i-y_j)^2 = y^T L(K_n)y = n$。因此，我们得到

$$\mathbb{E}_z[x_z^T L(K_n,p)x_z] = \frac{1}{d}\sum_{i<j}(y_i-y_j)^2 = n/d.$$

Let

$$Z(z) = nx_z^T L(G,p)x_z - a(G)x_z^T L(K_n,p)x_z,$$

并注意 $\mathbb{E}_z[Z(z)]=0$。此外，对于任意满足 $y_i\neq y_j$ 的 i,j，有

$$\mathbb{P}(x_z^T L(K_n,p)x_z = 0) \le \mathbb{P}(\langle z,d_{ij}\rangle^2 = 0) = 0.$$

因此，向量 $z\in S^{d-1}$ 以概率 1 满足 $x_z\notin \ker L(K_n,p)$，并以正概率满足 $Z(z)\le 0$。特别地，存在某个 $z_0\in S^{d-1}$ 使得 $Z(z_0)\le 0$ 且 $x_{z_0}\notin \ker L(K_n,p)$。设 $x=x_{z_0}$，且 $0\neq q\in\mathbb{R}^{dn}$ 是 x 在 $L(K_n,p)$ 的像上的正交投影，因此 $x-q$ 是 x 在平凡无穷小运动空间上的正交投影。因此，有

$$\begin{aligned} q^T L(G,p)q &= x^T L(G,p)x \\ &\le \frac{a(G)}{n}x^T L(K_n,p)x \qquad (8)\\ &= \frac{a(G)}{n}q^T L(K_n,p)q \\ &\le a(G)\|q\|^2. \qquad (9)\end{aligned}$$

第一个等式成立，因为 (G,p) 是无穷小刚性的（因此 $\ker(L(G,p)) = \ker(L(K_n,p))$). 不等式 (8) 由 $Z(z_0)\le 0$ 得出，而过渡到 (9) 则是因为 $L(K_n,p)$ 的最大特征值为 n [14, 引理 4.3]。

由于 q 与 $L(G,p)$ 的 $\binom{d+1}{2}$ 维核正交，根据特征值的变分刻画可得

$$\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(G,p)) \le \frac{q^T L(G,p)q}{\|q\|^2} = a(G).$$

因此，由引理 6.2，$a_d(G)\le a(G)$。 □

7 极小刚性图

本节研究极小 d-刚性图的 d维代数连通度的极值。在命题 7.1 中，我们证明了

极小 d-刚性图的上界 $a_d(T) \leq 1$，并在命题 7.6 中证明“广义星形”图可以达到该上界。由此完成定理 1.7 的证明。本节最后讨论广义路径图及其代数连通度。

命题 7.1. 设 $d \geq 1$，并设 $T \neq K_2, K_3$ 是一个极小 d-刚性图。那么，

$$a_d(T) \leq 1.$$

证明命题 7.1 时，我们需要以下结果。

引理 7.2（Jord´an-Tanigawa [14, 引理 4.5]）。设 $d \geq 1$。设 $G = (V, E)$，并设 $v \in V$。那么，

$$a_d(G \setminus v) \geq a_d(G) - 1.$$

定理 7.3（[16, 定理 1.2]）。设 $d \geq 3$。那么

$$a_d(K_{d+1}) = 1.$$

命题 7.1 的证明。记 $T = (V, E)$。首先，若 $|V| = d + 1$，则$T = K_{d+1}$，且 $d \geq 3$，因为我们假设 $T \neq K_2, K_3$。因此，根据定理 7.3，$a_d(T) = 1$。

否则，我们断言在 T 中存在一个顶点 v，使得 $T \setminus v$ 不是d-刚性的。事实上，$|E| = d|V| - \binom{d+1}{2}$，因此 T 中的平均度为

$$\frac{2|E|}{|V|} = 2d - \frac{d(d+1)}{|V|} > d.$$

设 $v \in V$ 是 T 中度至少为 $d + 1$ 的顶点。那么，

$$|E(T \setminus v)| < |E| - d = d|V(T \setminus v)| - \binom{d+1}{2},$$

因此 $T \setminus v$ 不是 d-刚性的。特别地，$a_d(T \setminus v) = 0$，由引理 7.2，

$$a_d(T) \leq a_d(T \setminus v) + 1 = 1,$$

正如所声称的。 □

设 $d \geq 1$ 和 $n \geq d + 1$。设 $S_{n,d}$ 是顶点集为 $[n]$、边集为

$$E(S_{n,d}) = \{\{i, j\} : i \in [d], j \in [n] \setminus \{i\}\}.$$

容易验证，$S_{n,d}$ 是极小 d-刚性的。

我们考虑从 $S_{n,d}$ 到 $\mathbb{R}^d$的顶点映射：令$e_1, \ldots, e_d \in \mathbb{R}^d$为标准基向量。我们定义 p^*：$[n] \to \mathbb{R}^d$如下：

$$p^*(i) = \begin{cases} e_i & \text{if } 1 \leq i \leq d, \\ 0 & \text{if } d < i \leq n. \end{cases}$$

命题 7.4. $L(S_{n,d}, p^*)$的谱为

$$\left\{0^{(\binom{d+1}{2})}, 1^{(dn-\binom{d+1}{2}-d)}, (n-d/2)^{(d-1)}, n^{(1)}\right\}$$

（其中上标 (m) 表示相应特征值的重数 m）。特别地，$\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(S_{n,d}, p^*)) = 1$。

证明。使用下刚度矩阵$L^-(S_{n,d}, p^*)$ 会更方便。令 $E = E(S_{n,d})$。由于 $|E| = dn - \binom{d+1}{2}$，且 $L(S_{n,d}, p^*)$ 和$L^-(S_{n,d}, p^*)$ 具有相同的非零特征值，因此该结论等价于证明 $L^-(S_{n,d}, p^*)$ 的谱为

$$\left\{1^{(dn-\binom{d+1}{2}-d)}, (n-d/2)^{(d-1)}, n^{(1)}\right\}$$

记 $L^- = L^-(S_{n,d}, p^*)$。设 $i, j, k \in [n]$ 两两不同。设 $e = \{i, j\}$ 和 $e' = \{i, k\}$。由引理 2.1，可得

$$L^-_{e,e'} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } i, j, k \in [d], \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{if } i, j \in [d], k \in [n] \setminus [d], \\ 1 & \text{if } i \in [d], j, k \notin [d], \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$L^-_{e,e} = 2.$$

由对 L^- 的这一描述，以下关于 L^- 的特征向量的刻画显而易见：

命题 7.5. 设 $x \in \mathbb{R}^E$。当且仅当 x 是 L^- 的特征向量，且对应特征值为 λ 时，它满足以下条件：

1. 对所有 $1 \le i < j \le d$,

$$(\lambda - 2)x(\{i,j\}) = \frac{1}{2}\sum_{k\in[d]\setminus\{i,j\}} (x(\{i,k\}) + x(\{j,k\})) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k\in[n]\setminus[d]} (x(\{i,k\}) + x(\{j,k\})),$$

2. 对于所有 $i \in [d]$, $j \in [n] \setminus [d]$,

$$(\lambda - 2)x(\{i,j\}) = \sum_{k\in[n]\setminus([d]\cup\{j\})} x(\{i,k\}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k\in[d]\setminus\{i\}} x(\{i,k\}).$$

我们将找到一个由 L^- 的特征向量组成的 $\mathbb{R}^E$ 的基。

特征值 $\boldsymbol{n}$：定义 $\psi \in \mathbb{R}^E$ 为

$$\psi(e) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{if } i,j \in [d], \\ 1 & \text{if } i \in [d], j \in [n] \setminus [d] \end{cases}$$

对于每个满足 $i < j$ 的 $e = \{i,j\} \in E$。利用命题 7.5 不难验证，ψ 是 L^- 的特征向量，其特征值为 n。

特征值 $\boldsymbol{n - d/2}$：根据 d的奇偶性，我们分两种情况讨论：

首先，假设 d 是偶数。令 A 为 $[d]$ 的一个大小为 $d/2$的子集，并令$\bar{A}$ 为其在 $[d]$中的补图。定义 $\varphi_A \in \mathbb{R}^E$ 为

$$\varphi_A(e) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{if } e \subset A, \\ -\sqrt{2} & \text{if } e \subset \bar{A}, \\ 1 & \text{if } e = \{i,j\} \text{ where } i \in A \text{ and } j \in [n] \setminus [d], \\ -1 & \text{if } e = \{i,j\} \text{ where } i \in \bar{A} \text{ and } j \in [n] \setminus [d], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用命题 7.5 不难验证，φ_A 是 L^- 的特征向量，其特征值为 $n - d/2$。

我们将证明集合 $\{\varphi_A : A \subset [d]、|A| = d/2\}$ 的张成空间维数至少为 $d-1$。

对于 $A \subset [d]、|A| = d/2$，令 $\tilde{\varphi}_A$ 为 φ_A 在形如 $\{i, d+1\}$ 的边上的限制，其中 $i \in [d]$。只需证明 $X = \{\tilde{\varphi}_A : A \subset [d]、|A| = d/2\}$ 张成空间的维数至少为 $d-1$。

注意，X 恰好由 $\mathbb{R}^d$ 中一半坐标等于 1、另一半等于 -1 的所有向量组成。我们将证明，X 张成了 $\mathbb{R}^d$ 中坐标和为 0 的所有向量。事实上，令 e_1、.....、e_d 为 $\mathbb{R}^d$ 的标准基向量。由于向量 $e_i - e_j$、$i < j \in [d]$ 张成了坐标和为 0 的向量所构成的子空间，因此只需证明我们可以将 $e_i - e_j$ 写成 X 中向量的线性组合。事实上，我们可以令 u 为 X 中任意一个在第 i 个坐标上取值为 1、在第 j 个坐标上取值为 -1 的向量。令 v 由翻转 u 的第 i 和第 j 个坐标得到。显然，v 也属于 X。我们可以写成

$$e_i - e_j = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v.$$

因此，X 的张成空间由 $\mathbb{R}^d$中所有元素和为零的向量组成。因此，它的维数为 $d-1$。

因此，$\{\varphi_A$ 张成空间的维数也是$d-1$至少，这意味着L^- 中存在一组特征值为 $n - d/2$的 $d-1$ 个线性无关特征向量。

现在，假设 d 是奇数。对于 $d=1$ ，无需证明，因此假设 $d \geq 3$。令 $k \in [d]$, 设 B 是 $[d] \setminus \{k\}$ 的一个子集，其大小为（$d-1$）/2，并令 $\bar{B}$ 为它在 $[d] \setminus \{k\}$中的补图。我们定义$\phi_{k,\ B} \in \mathbb{R}^E$ 如下：

$$\phi_{k,B}(e) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{if } e \subset B, \\ -\sqrt{2} & \text{if } e \subset \bar{B}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{if } e = \{i,k\} \text{ for } i \in B, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{if } e = \{i,k\} \text{ for } i \in \bar{B}, \\ 1 & \text{if } e = \{i,j\} \text{ for } i \in B,\ j \in [n] \setminus [d], \\ -1 & \text{if } e = \{i,j\} \text{ for } i \in \bar{B},\ j \in [n] \setminus [d], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用命题 7.5 不难验证，$\phi_{k,\ B}$ 是 L^-的特征向量，对应的特征值为 $n-d/2$。

我们将证明集合 $\{\phi_{k,B}:\ k \in [d]$、$B \subset [d] \setminus \{k\}$、$|B| = (d-1)/2\}$ 张成空间的维数至少为 $d-1$。

对于满足 $|B| = (d-1)/2$的 $k \in [d]$ 和 $B \subset [d] \setminus \{k\}$，令 $\tilde{\phi}_{k,\ B}$ 为 $\phi_{k,\ B}$ 在形如 $\{i, d+1\}$、其中 $i \in [d]$的边上的限制。只需证明 $Y = \{\phi_{k,B}:\ k \in [d]$、$B \subset [d] \setminus \{k\}$、$|B| = (d-1)/2\}$ 张成空间的维数至少为 $d-1$。

注意，Y 恰好由 $\mathbb{R}^d$ 中某个坐标为 0、（$d-1$）/2 个坐标为 1 且（$d-1$）/2 个坐标为 -1的所有向量组成。我们将证明，Y 张成空间包含 $\mathbb{R}^d$ 中坐标之和为 0 的所有向量。这基本上沿用了我们处理偶数 d情形时的论证：

设 e_1、.....、e_d 是 $\mathbb{R}^d$的标准基向量。由于向量$e_i - e_j$、$i < j \in [d]$张成了坐标之和为 0 的向量所构成的子空间，因此只需证明我们可以将 $e_i - e_j$ 写成 Y中向量的线性组合。事实上，我们可以任取 u 为 Y 中一个 i 坐标为 1 且 j坐标为 -1 的向量（这里用到了 $d \geq 3$）。令 v 由 u翻转 i和 j 坐标得到。显然，v 也属于 Y。我们可以写成

$$e_i - e_j = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v.$$

因此，Y 的张成空间由 $\mathbb{R}^d$中所有元素和为零的向量组成。因此，其维数为 $d-1$。因此，L^- 存在一组 $d-1$ 个线性无关特征向量，其特征值为 $n-d/2$。

特征值 1：令 $i \in [d]$ 和 $j,k \in [n] \setminus [d]$。定义 $\Phi_{i,\ j,\ k} \in \mathbb{R}^E$ 为

$$\Phi_{i,j,k}(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e = \{i,j\}, \\ -1 & \text{if } e = \{i,k\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用命题 7.5 很容易验证，$\Phi_{i,\ j,\ k}$ 是 L^- 的特征值为 1 的特征向量。

令 $I = \{\Phi_{i,d+1,k} :\ \ i \in [d], k \in [n] \setminus [d+1]\}$。由于 I 中的每个向量 $\Phi_{i,d+1,k}$ 都有一条仅属于其支撑集的边（边 $\{i,k\}$），因此 I 线性无关。注意，$|I| = d(n-d-1)$。

现在，令 $i,j \in [d]$。定义 $\Psi_{i,j} \in \mathbb{R}^E$ 为

$$\Psi_{i,j}(e) = \begin{cases} \sqrt{2}(n-d) & \text{if } e = \{i,j\}, \\ -1 & \text{if } e = \{i,k\} \text{ or } e = \{j,k\} \text{ for } k \in [n] \setminus [d], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用命题 7.5 不难验证，$\Psi_{i,j}$ 是 L^- 的特征值为 1 的特征向量。令

$$J = \{\Psi_{i,j} : i,j \in [d], i < j\}.$$

我们有 $|J| = \binom{d}{2}$。注意，J 是线性无关集，因为 J 中的每个向量 $\Psi_{i,j}$ 的支撑集中都有一条仅属于它的边（边$\{i,j\}$）。此外，不难验证，I 中的向量与 J 中的向量正交。因此，$I \cup J$ 是一个

$$d(n-d-1) + \binom{d}{2} = dn - \binom{d+1}{2} - d$$

具有特征值 1 的 L^- 的线性无关特征向量。 □

命题 7.6。设 $d \geq 1$ 和 $n \geq d+1$。那么，除非 $d=2$ 和 $n=3$，否则我们有

$$a_d(S_{n,d}) = 1.$$

证明。由命题 7.1，我们有 $a_d(S_{n,\ d}) \leq 1$（注意 $S_{n,\ d} \neq K_3$，除非$d=2$ 和 $n=3$）。另一方面，由命题 7.4，$\lambda_{\binom{d+1}{2}+1}(L(S_{n,\ d}, p^*)) = 1$，因此 $a_d(S_{n,\ d}) = 1$。 □

确定图 $S_{n,\ d}$ 是否是定理 1.7 中唯一的极值情形，将会很有意思（对于 $d=1$，这是 Merris 的一个结果，[21, 推论 2]）。

7.1 广义路径图

设 $n \geq d+1$。令 $P_{n,\ d}$ 为顶点集 $[n]$ 上、边为

$$\{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n,\ j-i \leq d\}.$$

注意，对于 $d=1$，$P_n = P_{n,1}$，它只是一个有 n 个顶点的路径。不难验证，对于 $n \geq d+1$，$P_{n,d}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是极小刚性的。

如引言中所述，Fiedler [6] 证明，对于每个连通图 G，都有 $a_1(G) \geq a_1(P_n) = 2(1-\cos(\pi/n))$。对于 $d > 1$，我们

不知道 $a_d(P_{n,\ d})$ 的精确值，但以下结果给出了它的数量级：

命题 7.7。设 $d \geq 2$ 和 $n \geq d+1$。那么

$$1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil^{-1}\right) \leq a_d(P_{n,d}) \leq 2d-2\sum_{k=1}^{d}\cos(2k\pi/n).$$

对于 $d=2$，我们有一个稍好的下界，$a_2(P_{n,\ 2}) \geq 2(1-\cos(\pi/n))$。

对于足够大的 n，我们有 $1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil^{-1}\right) \approx 1-\cos\left(\frac{d\pi}{2n}\right) \approx \frac{d^2\pi^2}{8n^2}$。此外，$2d-2\sum_{k=1}^{d}\cos(2k\pi/n) \leq \frac{2\pi^2 d}{(d+1)(2d+1)\,3n^2}$。因此，$a_d(P_{n,\ d}) = \Theta_d(1/n^2)$。

命题 7.7 的证明。我们从下界开始。设 $A_i = \{k \in [n]:\ k \equiv i$ 对于 $i = 1,$ ....., d 取模 $d\}$。对于 $i \in [d]$，令 $n_i = |A_i|$；对于 $1 \leq i < j \leq d$，令 $n_{ij} = |A_i| + |A_j|$。注意，$n_i \leq \left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil$ 和 $n_{ij} \leq 2\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil$（对于 $d=2$，还有 $n_{12}=n$）。

容易验证，对于所有 $i \in [d]$，$G[A_i] \cong P_{n_i}$，且对于所有 $1 \leq i < j \leq d$，$G(A_i, A_j) \cong P_{n_{ij}}$。由于对于 $n \leq n'$，$a(P_n) = 2(1-\cos(\pi/n)) \geq 2(1-\cos(\pi/n')) = a(P_{n'})$，我们得到

$$a(G[A_i]) \geq 2\left(1-\cos\left(\pi\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil^{-1}\right)\right)$$

对于所有 $i \in [d]$，且

$$a(G(A_i,A_j)) \geq 2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil^{-1}\right)\right)$$

对于 $1 \leq i < j \leq d$。对于 $d=2$，我们可以给出稍好的上界$a(G(A_1, A_2)) \geq 2(1-\cos(\pi/n))$。对于 $d \geq 3$，由定理 1.3 可得

$$a_d(P_{n,d}) \geq 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil^{-1}\right),$$

且对于 $d=2$，由注记 1.4 可得

$$a_2(P_{n,2}) \geq 2(1-\cos(\pi/n)).$$

最后，我们证明这个上界：由定理 1.6 可得 $a_d(P_{n,\ d}) \leq a(P_{n,\ d})$。令 $C_{n,\ d}$ 为顶点集为 $[n]$、边为

$$\{\{i,j\}:\ 1 \leq i < j \leq n,\ j-i \leq d \text{ or } n-j+i \leq d\}.$$

我们可以将 $C_{n,d}$ 视为一种广义圈（事实上，$C_{n,1}$ 就是圈图 C_n）。注意，$P_{n,d}$ 是 $C_{n,d}$的子图，因此 $a(P_{n,d}) \leq a(C_{n,d})$。$C_{n,d}$ 的拉普拉斯矩阵的元素为

$$L(C_{n,d})_{i,j} = \begin{cases} 2d & \text{if } i=j, \\ -1 & \text{if } |j-i| \leq d \text{ or } n-|j-i| \leq d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这是一个循环矩阵，因此它的特征值为（例如参见 [10]）

$$\left\{2d - 2\sum_{i=1}^{d}\cos(2\pi mk/n) : m = 0, \dots, n-1\right\}.$$

我们得到

$$a_d(P_{n,d}) \le a(C_{n,d}) = 2d - 2\sum_{i=1}^{d}\cos(2\pi k/n).$$

□

8 总结

许多引人入胜的开放问题由此浮现。本文证明，对于 $k > 2d$，存在由 k-正则 d-刚性扩张图组成的图族；接下来，自然要寻找尽可能好的构造。

问题 8.1. 设 $d \ge 2$ 和 $k > 2d$ 为整数。什么是

$$c_d(k) := \sup_{(G_n)_{n\in\mathbb{N}}} \liminf_n a_d(G_n),$$

其中 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 遍历规模不断增大的 k-正则图族?

这个问题的一维情形或许是扩展图理论中最重要的问题。阿隆-博帕纳定理给出了 $c_1(k) \le k - 2\sqrt{k-1}$ 的上界，而达到该界的构造称为（单侧）拉马努金图 [19, 20]。对于 $d \ge 2$，定理 1.2 的证明给出了 $c_d(k)$ 的下界，该下界适用于所有$k \ge 2d+1$，其衰减速率的量级为 $1/d^2$，当 $d \to \infty$ 时成立。如果对于某个 $t \ge 3$ 有 $k \ge td$，则可以轻松调整我们的方法，得到 $c_d(k) \ge c_1(t)/2$ 的下界，且该下界与 d 无关。也就是说，在第 5 节中使用 t-正则二部拉马努金图，代替推论 4.7 中的细分图。关于 $c_d(2d+1) \to 0$ 在 $d \to \infty$ 时是否成立，仍是一个开放问题。

已知，当 T 是有界度树 [15], 时，$a(T) = O(1/n)$；我们猜想，这一现象可以推广到更高维数。

猜想 8.2. 固定整数 $d, b \ge 1$. 那么，

$$\max_{G_n} a_d(G_n) \to 0 \quad as\ n \to \infty,$$

其中 G_n 遍历所有最大度为 b 的极小 d-刚性 n-顶点图。

一个更强但仍然合理的猜想——即

$$\sup_{(G_n,p_n)} \lambda_{d(d+1)+1}(L(G_n, p_n)) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

其中 (G_n, p_n) 遍历最大度为 b 的、具有 n 个顶点且最小 d-刚性的图的所有 d-框架——将通过向图中添加一条边时的谱交错（参见 [16, 定理 2.3]），推出不存在 $2d$-正则的 d-刚性扩张图。

关于 G固定而 d 变化时， $a_d(G)$ 的取值之间的关系，我们提出定理 1.6 的以下加强猜想：

猜想 8.3.（单调性）设 $1 \le d' < d$ 为整数， G 为具有 n 个顶点的图。那么， $a_d(G) \le a_{d'}(G)$。

此外，我们尚不清楚定理 1.6 中的界是否紧，这引出了以下问题：

问题 8.4. 在所有连通图 G 上，$\sup_G(a_d(G)/a(G))$ 的值是多少？

目前我们所知、适用于每个 d 的该问题的最佳下界是 $1/d$，由广义星图 $S_{n,\,d}$ 给出。事实上， $a_d(S_{n,\,d}) = 1$，且 $a(S_{n,\,d}) = d$。对于特殊情形 $d = 2$，我们通过计算机计算得到 $a_2(P_{12,\,2}) \ge 0.667 \cdot a(P_{12,\,2})$（其中 $P_{n,\,d}$ 是广义路径图）。定理 1.6 仍有可能是紧的，我们猜测广义路径图可能是极值例子。

致谢

这项研究的部分工作是在 A.L. 担任希伯来大学爱因斯坦数学研究所博士后研究员期间完成的。

参考文献

[1] L. Asimow 和 B. Roth。《图的刚性》。《美国数学会汇刊》，245：279–289，1978年。[2] G. Brito、I. Dumitriu 和 K. D. Harris。《随机二部双正则图中的谱隙及其应用》。《组合学、概率与计算》，31(2)：229–267，2022年。[3] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers。《图的谱》。施普林格科学与商业媒体，2011年。[4] R. Connelly。《刚性》。载于《凸几何手册》A 部，第 223–271 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1993年。[5] H. Crapo。《平面框架的一般刚性》。法国国家信息与自动化研究院，（报告 1278），1990年。[6] M. Fiedler。《图的代数连通度》。《捷克斯洛伐克数学杂志》，23(2)：298–305，1973年。

[7] J. Friedman。《Alon 的第二特征值猜想的证明及相关问题》。《美国数学会回忆录》，195(910)：viii+100，2008年。[8] O. Gabber 和 Z. Galil。《线性规模超连通器的显式构造》。计算机与系统科学杂志，22(3)：407–420，1981年。[9]J. Graver、B. Servatius 和 H. Servatius。《组合刚性》。数学研究生教材。美国数学学会，1993年。[10] R. M. Gray。《Toeplitz 矩阵与循环矩阵：综述》。《通信与信息理论基础与趋势® 》，2(3)：155–239，2006年。[11] R. Grone、R. Merris 和 V. S. Sunder。《图的拉普拉斯谱》。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，11(2)：218–238，1990年。[12] N. J. Higham 和 S. H. Cheng。《修改优化问题中产生的矩阵的惯性》。《线性代数及其应用》，275：261–279，1998年。[13] S. Hoory、N. Linial 和 A. Wigderson。《扩展图及其应用》。《美国数学会通报》，43(4)：439–561，2006年。[14] T. Jord´an 和 S. Tanigawa。《随机子图的刚性与刚度矩阵的特征值》。《SIAM 离散数学杂志》，36(3)：2367–2392，2022年。[15] T. Kolokolnikov。《某些图族的代数连通度最大化》。《线性代数及其应用》，471：122–140，2015年。[16] A. Lew、E. Nevo、Y. Peled 和 O. E. Raz。《图的 d 维代数连通度》。arXiv 预印本 arXiv:2205.05530，2022年。[17] T. Lindemann。《空间框架的组合学方面》。博士论文，不来梅大学，2022年。[18] A. Lubotzky。《纯数学与应用数学中的扩展图》。《美国数学会通报》，49(1)：113–162，2012年。[19] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak。《拉马努金图》。《组合学》，8(3)：261–277，1988年。[20] A. Marcus、D. A. Spielman 和 N. Srivastava。《交错族 I：所有度数的二部拉马努金图》。载于《2013年 IEEE 第 54 届计算机科学基础年会》，第 529–537 页。IEEE，2013 年。

[21] R. Merris. 树的特征顶点。《线性与多重线性代数》，22(2):115–131，1987年。[22] J. F. Presenza、I. Mas、J. I. Giribet 和 J. I. Alvarez-Hamelin。任意图的 d 维代数连通度的一个新上界。arXiv 预印本 arXiv:2209.14893，2022年。[23] O. Reingold、S. Vadhan 和 A. Wigderson。熵波、之字形图乘积，以及新的常数度扩展图和提取器。载于第 41 届计算机科学基础年度研讨会论文集，第 3–13 页。IEEE，2000年。[24] P. Xie、Z. Zhang 和 F. Comellas。图的细分的归一化拉普拉斯谱。《应用数学与计算》，286:250–256，2016年。[25] G. Zhu。多智能体编队的定量分析：理论与应用。博士论文，普渡大学，2013年。