arXiv:2304.01309v1 [math.AP] 3 Apr 2023

˘非局部守恒律的奥列伊尼克型估计及其在非局部到局部极限中的应用

GIUSEPPE MARIA COCLITE、MARIA COLOMBO、GIANLUCA CRIPPA、NICOLA DE NITTI、
ALEXANDER KEIMER、ELIO MARCONI、LUKAS PFLUG 和 LAURA V. SPINOLO

Abstract. 我们研究一类具有指数核的非局部守恒律，并证明涉及非局部项 $W := \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(\cdot)\exp(\cdot) * \rho$ 的量满足奥列伊尼克型熵条件。更确切地说，在对速度函数 V 作出不同组的假设下，我们分别证明 W 满足单侧利普希茨条件，并且 $V'(W)W\partial_x W$ 满足单侧界。作为推论，我们得到：当对指数核进行重标度使其收敛于狄拉克 δ 分布时，在初始数据本质有界但不必具有有界变差这一唯一假设下，非局部问题的弱解收敛于相应局部守恒律的唯一熵可容许解。

1. Introduction

我们研究如下非局部守恒律

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon(t,x) + \partial_x\big(V\big(W_\varepsilon[\rho_\varepsilon](t,x)\big)\rho_\varepsilon(t,x)\big) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}, \\ \rho_\varepsilon(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其速度函数为 $V\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，并具有指数加权的非局部影响

$$W_\varepsilon[\rho_\varepsilon](t,x) := \tfrac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty \exp\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\rho_\varepsilon(t,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 且 $T > 0$。我们注意到，对于 $(t,\ x) \in (0,\ T)\times\mathbb{R}$，非局部项 W_ε 满足以下方程：

$$\partial_x W_\varepsilon[\rho_\varepsilon](t,x) = \partial_x \tfrac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty \exp\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\rho_\varepsilon(t,y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{\varepsilon}W_\varepsilon[\rho_\varepsilon](t,x) - \tfrac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon(t,x). \tag{1.3}$$

近年来，非局部守恒律解的存在性与唯一性已得到深入研究：关于综述，请参见 [2, 11, 28, 30, 31] 及其中的参考文献。此外，当非局部权重趋于狄拉克 δ 分布时，非局部守恒律向相应局部模型的收敛也引起了广泛关注。文献中已有若干相关结果（见 [6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 29]）。特别是，最新的结果——[9, 15] ——在初始数据具有有界全变差的情况下给出了令人满意的答案。

我们的主要目标是证明涉及非局部项 W_ε 的量满足 *Oleˇinik* 型不等式。随后，我们利用这些不等式证明，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，方程 (1.1) 的解收敛到（局部）守恒律的唯一熵可容许解

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) + \partial_x\big(V(\rho(t,x))\rho(t,x)\big) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.4}$$

假设初始数据不一定具有有界变差，而仅为本质有界，这是相较于以往文献的一项新贡献。研究这一奇异极限问题的一个重点，是证明非局部方程的解在 L^1_{loc} 中预紧。我们的方法表明，这一结论源于最大值原理（关于 ε 一致）和 Oleˇınik 型估计；后者还排除了非熵激波的出现，从而保证了当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，解族 ρ_ε 的聚点满足熵可容许性。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35L65.*Key words and phrases.* 非局部守恒律、非局部通量、奇异极限、非局部到局部极限、熵条件、Oleˇinik 条件。

对于标量（局部）守恒律

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x f(\rho(t,x)) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}, \tag{1.5}$$

Oleˇınik 的著名结果 [38]（另请参阅以下与 Oleˇınik 的工作同时期的研究：Lax [35]；Ladyˇ zenskaya [33]；以及 Hopf [26]）指出，若 f 一致严格凸，即在 $\mathbb{R}$ 上有 $f''(\cdot) \geq \kappa > 0$，则 (1.5) 的任意熵可容许解都满足以下单侧利普希茨估计：

$$\rho(t,y) - \rho(t,x) \leq \frac{y-x}{\kappa t}, \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R},\ x\leq y.$$

Oleˇınik 估计为熵解提供了一种等价刻画，也是偏微分方程的非线性会对解产生正则化效应这一事实的一个例子：事实上，由于这一上界只允许出现递减跳跃，它意味着 L^∞ 数据会瞬时正则化为局部有界变差（$\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$）函数。相反，线性通量 $f(\rho) = b\rho$（其中 $b\in\mathbb{R}$）不会产生额外的正则性，因为解只是初始数据的平移：$\rho(t,\ x) = \rho(0,\ x-bt)$。

该不等式可以写成一种“尖锐”形式（见 [18, 25]）：当 $f''(\cdot)\geq 0$ 且此外不存在 f 为仿射函数的非平凡区间时（*Tartar* 条件 [39]），我们有

$$f'(\rho(t,y)) - f'(\rho(t,x)) \leq \frac{y-x}{t}, \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R},\ x\leq y.$$

若干不等 式已针对非凸（或非凹）通量建立了 Oleˇınik 型估计， ll
以及某些 守恒律系统（例如，见 [5, 8, 23, 27, 36]）。

正如 Lax 在 [34]，中指出的，Oleˇınik 不等式蕴含一维空间中严格凸标量守恒律的熵弱解半群 $(S_t)_{t>0}$ 在 L^1_{loc} 中的紧性。近期，研究者基于 Kolmogorov ε-熵的概念（见 [1, 20]），建立了关于 S_t 紧性的定量估计。

对于非局部守恒律，目前尚无上述类型的不等式。就此而言，文献中唯一可用的结果是 [14, 定理 3]，，其中在较强的假设下得到了 Oleˇinik 型估计：初始数据本身满足单侧利普希茨条件，且有正下界；以及 [17, 定理 3.10]（针对一类略有不同但相关的非局部方程，即非局部输运方程），其假设相当严格：初始数据是拟凹的，且其导数有上界。

1.1. 概述。 本文结构如下。第 2 节陈述主要结果，即涉及 W_ε 和 $V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$ 的 Oleˇinik 型不等式。

这些不等式的证明见第 3 节。作为推论，我们在第 4 节证明了初始数据属于 L^∞ 时的非局部到局部收敛。最后，第 5 节给出一些数值实验。

2. Main results

我们的主要结果是以下涉及非局部项 W_ε 的 Oleˇınik 型估计。更具体地说，在速度函数 V 满足不同假设的情况下，我们分别证明 W_ε 满足单侧利普希茨条件，而 $V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$ 满足单侧界。

定理 2.1 (Oleˇınik 型不等式，适用于 W_ε)。设 $0<\kappa_1<\kappa_2$ 和 $\rho_0\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_{\geq 0})$，并设 $V\in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 为非增速度函数，且满足以下条件中的至少一项：

$$V'(\xi) = -\delta < 0, \qquad \forall \xi \in [\text{本质下确界 } \rho_0,\ \text{本质上确界 } \rho_0]; \tag{2.1}$$

$$0 \leq V'(\xi) + V''(\xi)\xi \leq \kappa_1, \quad V'(\xi)\leq -\kappa_2, \quad \kappa_2-\kappa_1>0, \qquad \forall \xi\in[\operatorname{ess\,inf}\rho_0, \operatorname{ess\,sup}\rho_0]. \tag{2.2}$$

设 ρ_ε 为与 (1.1) 相关的柯西问题的解。则非局部项 W_ε 满足以下不等式：

$$\frac{W_\varepsilon(t,x)-W_\varepsilon(t,y)}{x-y} \geq -\frac{1}{\kappa t}, \qquad \textit{for all } t>0 \textit{ and } x,y\in\mathbb{R} \textit{ with } x\neq y, \tag{2.3}$$

取 $\kappa := \delta$（当假设 (2.1)成立时），或取 $\kappa := \kappa_2-\kappa_1$（当假设 (2.2) 成立时）。

注 2.2 (凸性/凹性假设)。 若我们假设通量严格凸（而非假设 (2.1) 或 (2.2)所蕴含的严格凹），速度递增，且卷积向左，则可以建立类似的结果。特别是，对于线性速度下凸通量的情形（即与 (2.1)设定相对应的情形），参见 [12]。

这里，我们考虑凹的情形，因为它与交通流模型相关（见 [21]）。

定理 2.3 (Ole˘ınik 型不等式，适用于 $V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$)。 设 $0<\kappa_1$ 和 $\rho_0\in L^\infty(\mathbb{R};\ \mathbb{R}_{\geq 0})$，并设 $V\in W^{2,\ \infty}{}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 是一个非增速度函数，且以下条件至少有一个成立：

$$0\leq(-V'(\xi)-V''(\xi)\xi)(\operatorname{ess\,sup}\rho_0-\operatorname{ess\,inf}\rho_0)\leq -V'(\xi)\xi,\qquad \forall\xi\in[\operatorname{ess\,inf}\rho_0,\operatorname{ess\,sup}\rho_0];\tag{2.4}$$

$$-V'(\xi)\leq V''(\xi)\xi\leq-(2-\kappa_1)V'(\xi),\tag{2.5}$$

$\forall\xi\in$[本性下确界 ρ_0, 本性上确界 ρ_0].

设 ρ_ε 为与(1.1)相关的柯西问题的解。那么，

$$\sup_{\mathbb{R}}V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon\leq\frac{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\kappa t},\qquad for\ all\ t>0,\tag{2.6}$$

其中 $\kappa:=1$ （假设(2.4) 成立时），或 $\kappa:=\kappa_1$ （假设(2.5) 成立时）。

注 2.4 (常数关于 TV(ρ_0) 的独立性)。 定理 *2.1* 和定理 *2.3* 中，不要求初始数据具有有界变差。

注 2.5 (关于速度函数和交通模型的假设)。 定理 *2.1* 和定理 *2.3* 中对速度函数 V 的假设可能显得相当严格。在证明中，我们利用这些条件处理由 $\partial_x W_\varepsilon$ 和 $V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$ 满足的方程，从而推出一种 *Riccati* 型微分不等式。尽管这些假设看起来颇为复杂，但若对初始数据施加某些限制，若干类知名交通模型仍满足这些假设。

(1) Greenshield 模型 $V(\xi)=v_{\max}(1-\xi/\rho_{\max})$ 满足假设 *(2.1)*（见 [21, 第 *3* 章，式 *(3.1.3)*]）。*(2) Underwood* 模型 $V(\xi)=v_0e^{(-\xi/\rho_{\max})}$，其中 $\rho_{\max}>0$ 和 $v_0>0$（见 [21, 第 *3* 章，式 *(3.1.5)*]），在约束 $\operatorname{ess\,inf}\rho_0\geq\frac{3-\sqrt{8}}{2}\operatorname{ess\,sup}\rho_0$ 下满足假设 *(2.4)*。*(3)* 广义 *Greenshield* 模型 $V(\xi)=v_0\left(1-\left(\frac{\xi}{\rho_{\max}}\right)^n\right)$，其中 $\rho_{\max}>0$ 和 $v_0>0$（见 [21, 第 *3* 章，式 *(3.1.6)*]），在约束 $\operatorname{ess\,inf}\rho_0\geq\frac{n}{n+1}\operatorname{ess\,sup}\rho_0$ 下满足假设 *(2.4)*。*(4)* 广义 *California* 模型 $V_\alpha(\xi)=v_0\left(\frac{1}{\xi^\alpha}-\frac{1}{\rho_{\max}^\alpha}\right)$，其中 $\rho_{\max}>0$ 和 $v_0>0$，且 $\alpha\in(0,1)$（参见 [21, 第 *3* 章，式 *(3.1.7)*]），满足假设 *(2.2)* 和 *(2.5)*。该速度在 $\xi=0$ 处并非局部利普希茨连续；但其变体 $V_\alpha(\xi)=v_{\max}\left(\frac{1}{\xi^\alpha+\frac{1}{v^\alpha}}-\frac{1}{\rho_{\max}^\alpha}\right)$ 是局部利普希茨连续的，并满足相同的假设；或者，我们也可以直接假设 $\rho_0\geq c_0>0$。

作为定理 2.1 和定理 2.3 的推论，我们得到以下非局部到局部收敛结果。与 [9, 15] 相比，关键区别在于我们不要求初始数据具有有界全变差；另一方面，对速度函数需要满足一些额外假设。

推论 2.6 (非局部到局部奇异极限问题)。 设以下条件之一成立：

– 定理 *2.1* 的假设成立；– 定理 *2.3* 的假设成立，且另外 $V'\leq-\kappa_2<0$ 对某个 $\kappa_2>0$成立。

设 ρ_ε 为非局部守恒律 (1.1) 的唯一弱解， ρ 为局部守恒律 (1.4)的唯一熵可容许解。那么， ρ_ε 及相应的非局部项W_ε都在 $L^1_{\text{loc}}([0,T)\times\mathbb{R})$内收敛至 ρ。

在深入证明主要结果之前，我们先回顾非局部守恒律 (1.1) 的以下适定性结果及其若干基本性质。特别地，我们注意到，非局部项 W_ε 具有更高的正则性，并满足一个带有非局部源项的局部输运方程。类似结论的证明可参见 [9, 定理 2.1 & 引理 3.1] （该结论部分依赖于 [28, 定理 2.20 & 定理 3.2 & 推论 4.3] 或 [11, 定理 2.1 & 推论 2.1]）、 [24, 定理 2.1], [15, 命题 2.1 & 推论 2.2], 或 [12] 。

定理 2.7（弱解的存在唯一性、最大值原理及非局部项的性质）。 设 $\rho_0 \in L^\infty$（$\mathbb{R}$； $\mathbb{R}_{\geq 0}$），并设 $V \in W^{2,\infty}{}_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}$）是一个非增速度函数。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在唯一的弱解 $\rho_\varepsilon \in C\big([0,T];\ L^1_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}$）$\big) \cap L^\infty$（（0， T）； L^∞（$\mathbb{R}$），它满足非局部守恒律 （1.1）。此外，最大值原理成立：

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x) \leq \rho_\varepsilon(t,x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \rho_0(x), \qquad \textit{for a.e. } (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}. \tag{2.7}$$

此外，非局部项 W_ε 满足以下性质：

(1) $W_\varepsilon \in W^{1,\infty}([0,T]\times\mathbb{R})$ 且 ess inf $\rho_0 \leq W_\varepsilon \leq$ ess sup ρ_0；

(2) $W_\varepsilon \in C^0\big([0,T];\ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$；(3) 若 $\rho_0 \in C^k(\mathbb{R})$，则 $W_\varepsilon \in C^{k+1}([0,T]\times\mathbb{R})$ 对于 $k \geq 0$。

此外，对于每个 $t \in [0,T]$，映射 $t \mapsto \mathrm{Lip}^-(\rho_\varepsilon(t,\cdot))$ 是从 $[0,+\infty)$ 到 $[0,+\infty)$的局部利普希茨连续函数。这里，$\mathrm{Lip}^-(\rho_\varepsilon)$：$= -\inf_{x<y} {}^{\rho_\varepsilon(y)-\rho_\varepsilon(x)}{}_{y-x}$ 。此外，~~W_ε 几乎~~处处满足以下输运方程：

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon(t,x) + V(W_\varepsilon(t,x))\partial_x W_\varepsilon(t,x) \\ \qquad = -\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty \exp(\frac{x-y}{\varepsilon}) V'(W_\varepsilon(t,y))\partial_y W_\varepsilon(t,y) W_\varepsilon(t,y)\,\mathrm{d}y, & (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}, \\ W_\varepsilon(0,x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty \exp(\frac{x-y}{\varepsilon})\rho_0(y)\,\mathrm{d}y, & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

我们注意到，(2.8) 可以等价地改写为

$$\partial_t W_\varepsilon + \partial_x(V(W_\varepsilon)W_\varepsilon) = g_\varepsilon - g_\varepsilon * \eta_\varepsilon, \qquad \textit{provided } \ g_\varepsilon = V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon, \tag{2.9}$$

并采用如下记号

$$\eta(\cdot) \coloneqq \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(\cdot)\exp(\cdot), \quad \eta_\varepsilon \coloneqq \varepsilon^{-1}\eta(\cdot/\varepsilon). \tag{2.10}$$

3. Proof of the Oleĭnik estimates

为证明 Oleĭnik 估计，对非局部守恒律 (1.1) 的初始数据进行正则化很有帮助。为此，我们需要以下稳定性结果（相关结果见 [9, 定理 3.1] 和 [12]）。

引理 3.1 (逼近). 考虑柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t\rho(t,x) + \partial_x(V(W[\rho](t,x))\rho(t,x)) = 0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$W[\rho](t,x) \coloneqq \int_x^{+\infty} \exp(x-y)\rho(t,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

我们还考虑以下柯西问题族

$$\begin{cases} \partial_t\rho_n(t,x) + \partial_x\left(V\left(W_n(t,x)\right)\rho_n(t,x)\right) = 0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}, \\ \rho_n(0,x) = \rho_{0,n}(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 和

$$W_n[\rho_n](t,x) := \int_x^{+\infty} \exp(x-y)\rho_n(t,y)\,\mathrm{d}y.$$

此外，我们进一步假设，对于某个适当的常数 $M > 0$，有

$$0 \leq \rho_{0,n} \leq M \ \textit{ a.e. for every } n, \qquad \rho_{0,n} \overset{\star}{\rightharpoonup} \rho_0 \ \textit{ weakly-* in } L^\infty(\mathbb{R}) \textit{ for } n\to\infty. \tag{3.3}$$

那么，

$$W_n \to W \quad \textit{ strongly in } L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\right).$$

注释 3.2 (更一般的核)。 若用更一般的核替换指数权重，引理 *3.1* 的结论仍然成立

$$\eta \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}_-\right), \quad \int_{\mathbb{R}_-} \eta(y)\,\mathrm{d}y = 1, \quad \eta' \geq 0.$$

引理 *3.1* 的证明。 根据最大值原理，(3.3) 中的第一个条件推出

$$0 \le \rho_n, W_n \le M \text{ a.e. and for every } n. \tag{3.4}$$

由 (3.4) 可知，取适当的子列后， $\rho_n \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ 的弱-*拓扑下收敛，其中极限函数 v 有界。由 Lebesgue控制收敛定理，这又意味着 $W_n \to v * \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(\cdot)\exp(\cdot)$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ 中强收敛。将 (3.2) 的分布形式取极限后，我们得出 v 与 (3.1) 的唯一有界分布解一致。引理得证。□

注 3.3 (时间连续性)。 利用 $[19,$ 引理 1.3。$3]$, 不失一般性地，我们可以假设函数 $t \mapsto \rho(t,\cdot)$ 和 $t \mapsto W(t,\cdot)$ 关于 $\mathbb{R}_+$ 连续取值于赋予 L^∞- 弱-*拓扑和强 L^1_{loc} 拓扑的 $L^\infty(\mathbb{R})$。在第 *4* 节中，我们将利用这条注释，对每个 $t>0$ 将非局部 *Ole˘ın* 不等式(2.3) 或(2.6) 取极限。

3.1. **奥莱˘尼克型估计（针对 W_ε）**。本节证明定理 2.1。基本思路是利用 W_ε满足的带非局部源项的输运方程，即 (2.8)。

定理 *2.1* 的证明。根据引理 3.1，只需证明初始数据为 $\rho_0 \in \mathcal{D} \cap C^2(\mathbb{R})$时的命题，因而只需考虑解 $\rho_\varepsilon \in C^2([0,T]\times\mathbb{R})$。这里，

$$\mathcal{D} := \big\{\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{TV}(\rho_0) < \infty,\ \rho_0(x) \in [0,\rho_{\max}] \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}\big\}. \tag{3.5}$$

对 (2.8) 关于 x 求导，得到

$$\begin{aligned}\partial_{tx}^2 W_\varepsilon =& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon - V'(W_\varepsilon)(\partial_x W_\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon}V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{\varepsilon^2}\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.6}$$

现在设 $m(t) := \min_{y\in\mathbb{R}} \partial_y W_\varepsilon(t,\ y)$，并且不失一般性地假设 $m(t) \le 0$。**情形 1：** 假设(2.2)。下面对 (3.6) 右端进行如下估计：

$$\begin{aligned}\partial_{tx}^2 W_\varepsilon =& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon - V'(W_\varepsilon)(\partial_x W_\varepsilon)^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{\varepsilon^2}\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y \\ \ge& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon - V'(W_\varepsilon)(\partial_x W_\varepsilon)^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{\varepsilon^2}m\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

（对最后一项进行分部积分）

$$\begin{aligned}=& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon - V'(W_\varepsilon)(\partial_x W_\varepsilon)^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{\varepsilon}mV'(W_\varepsilon)W_\varepsilon - \tfrac{1}{\varepsilon}m\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,\big(V'(W_\varepsilon)\partial_y W_\varepsilon + V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_y W_\varepsilon\big)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

考虑满足 $\bar{x}\in\mathbb{R}$，使得 $m(t) = \partial_x W_\varepsilon(t,\bar{x})$（于是我们知道 $\partial_{xx}^2 W_\varepsilon(t,\bar{x}) = 0$），并将前一个表达式代入 $x=\bar{x}$。由 (2.2)，可得

$$-\tfrac{1}{\varepsilon}m\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,\big(V'(W_\varepsilon) + V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon\big)\partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y \ge -\kappa_1 m^2$$

于是，我们推得

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) \ge -V'(W_\varepsilon)m(t)^2 - \kappa_1 m^2(t) \ge (\kappa_2-\kappa_1)m^2(t), \qquad t>0.$$

情形 2： 我们假设 (2.1)。 我们从下方估计 (3.6) 的右侧如下 s:

$$\begin{aligned}\partial_{tx}^2 W_\varepsilon =& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon + \delta(\partial_x W_\varepsilon)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon}W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & + \tfrac{\delta}{\varepsilon^2}\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,W_\varepsilon\partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y \\ =& -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon + \delta(\partial_x W_\varepsilon)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon}W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon \\ & + \tfrac{\delta}{\varepsilon^2}\int_x^\infty \exp\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,\Big(\varepsilon\partial_y W^\varepsilon(t,y) + \rho_\varepsilon(t,y)\Big)\partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon + \delta(\partial_x W_\varepsilon)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon} W_\varepsilon \partial_x W_\varepsilon \\
&\quad \underbrace{+\tfrac{\delta}{\varepsilon}\int_x^\infty \exp\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)(\partial_y W^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}y}_{\geq 0} + \tfrac{\delta}{\varepsilon^2}\int_x^\infty \exp\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\rho_\varepsilon \partial_y W_\varepsilon\,\mathrm{d}y \\
&\geq -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon + \delta(\partial_x W_\varepsilon)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon} W_\varepsilon \partial_x W_\varepsilon + \tfrac{\delta}{\varepsilon^2} m \int_x^\infty \exp\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\rho_\varepsilon\,\mathrm{d}y \\
&= -V(W_\varepsilon)\partial_{xx}^2 W_\varepsilon + \delta(\partial_x W_\varepsilon)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon} W_\varepsilon \partial_x W_\varepsilon + \tfrac{\delta}{\varepsilon} m W_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

我们固定 $\bar{x}\in\mathbb{R}$，使得 $m(t)=\partial_x W_\varepsilon(t,\ \bar{x})$（于是我们知道 $\partial_{xx}^2 W_\varepsilon(t,\ \bar{x})=0$），并在 $x=\bar{x}$ 处计算前一个表达式。得到

$$
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) \geq \delta m(t)^2 - \tfrac{\delta}{\varepsilon} W_\varepsilon(t,\bar{x}) m(t) + \tfrac{\delta}{\varepsilon} m(t) W_\varepsilon(t,\bar{x}) = \delta m(t)^2, \qquad t>0.
$$

结论。 在这两种情况下，我们都得到 Riccati 型微分不等式

$$
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) \geq \kappa m^2(t), \qquad t>0
$$

（分别取 $\kappa := (\kappa_1-\kappa_2)$ 或 $\kappa:=\delta$），由此可得

$$
\frac{W_\varepsilon(t,x)-W_\varepsilon(t,y)}{x-y} = \frac{1}{x-y}\int_y^x \partial_x W_\varepsilon(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \geq -\frac{1}{\kappa t}, \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y.
$$

□

3.2. Oleˇinik 型估计：针对 $V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$。 Oleˇinik 不等式针对 $g_\varepsilon = V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\partial_x W_\varepsilon$ 的证明，其基本思路是注意到该量满足方程

$$
\partial_t g_\varepsilon = (V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon + V'(W_\varepsilon))\partial_x W_\varepsilon \partial_t W_\varepsilon + V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon \partial_{tx}^2 W_\varepsilon.
$$

定理 *2.3* 的证明。 根据引理 3.1，只需对初始数据 $\rho_0\in\mathcal{D}\cap C^2(\mathbb{R})$ 证明该结论，因此只需考虑解 $\rho_\varepsilon\in C^2([0,T]\times\mathbb{R})$。集合 $\mathcal{D}$ 已在 (3.5) 中定义。

为简洁起见，令 $z_\varepsilon := \partial_x W_\varepsilon$。对 (2.9) 关于 x 求导，可得关于 z_ε 的下列方程：

$$
\partial_t z_\varepsilon = -V(W_\varepsilon)\partial_x z - V'(W_\varepsilon)z^2 - g_\varepsilon * \partial_x \eta_\varepsilon, \quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}. \tag{3.7}
$$

由 (2.9)、(3.7) 以及以下事实

$$
\partial_x \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(\eta_\varepsilon - \delta_0\right), \tag{3.8}
$$

其中 η_ε 与 (2.10) 中相同，可得

$$
\begin{aligned}
\partial_t g_\varepsilon &= (V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon + V'(W_\varepsilon))z_\varepsilon \partial_t W_\varepsilon + V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon \partial_t z_\varepsilon \\
&= h_\varepsilon z_\varepsilon\big(-V(W_\varepsilon)z_\varepsilon - g_\varepsilon * \eta_\varepsilon\big) + V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon\left(-V(W_\varepsilon)\partial_x z_\varepsilon - V'(W_\varepsilon)z_\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon}\left(g_\varepsilon * \eta_\varepsilon - g_\varepsilon\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

其中

$$
h_\varepsilon := V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon + V'(W_\varepsilon), \tag{3.10}
$$

and

$$
\partial_x g_\varepsilon = h_\varepsilon z_\varepsilon^2 + V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon \partial_x z_\varepsilon. \tag{3.11}
$$

现在分别考虑两种情况：

1. 对每个 $t\in[0,T]$，都存在 $x\in\mathbb{R}$，使得 $g_\varepsilon(t,x)>0$；2. 存在 $t\in[0,T]$，使得对每个 $x\in\mathbb{R}$，$g_\varepsilon(t,x)\leq 0$。

情形 1. 根据引理 3.1，不失一般性地，我们可以假设，对于每个 $\bar{t}>0$，都有$\rho_\varepsilon(\bar{t},\ \cdot)\in\mathcal{D}\cap C^2(\mathbb{R})$，因此 $W_\varepsilon(\bar{t},\ \cdot)\in\mathcal{D}\cap C^2(\mathbb{R})$。对于每个 $\bar{t}\in[0,T)$，$g_\varepsilon(\bar{t},\ \cdot)$ 都存在一个最大值点 $\bar{x}$。特别地，$\partial_x g_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x})=0$；由 (3.11)，可得

$$
\partial_x z_\varepsilon(\bar{t},\bar{x}) = -\frac{h_\varepsilon}{V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon} z_\varepsilon^2(\bar{t},\bar{x}). \tag{3.12}
$$

在 $(\bar{t},\ \bar{x})$ 处计算 (3.9)，得到

$$\partial_t g_\varepsilon(\bar{t},\bar{x}) = \left(-h_\varepsilon z_\varepsilon g_\varepsilon * \eta_\varepsilon - (V'(W_\varepsilon))^2 W_\varepsilon z_\varepsilon^2 - \frac{V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon}{\varepsilon}\left(g_\varepsilon * \eta_\varepsilon - g_\varepsilon\right)\right)(\bar{t},\bar{x}) \tag{3.13}$$
$$=: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

我们注意到 $\mathrm{III} \le 0$ 由于 $V' \le 0$、$W_\varepsilon \ge 0$ 和 $\bar{x}$ 是 $g_\varepsilon(\bar{t},\ \cdot)$ 的最大值点。此外，通过使用 ng 定义 g_ε 以及最大值原理，我们得到

$$\mathrm{II} = -\frac{g_\varepsilon^2}{W_\varepsilon} \le -\frac{1}{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} g_\varepsilon^2. \tag{3.14}$$

项 I 更为微妙，可以利用假设 (2.4) 或 (2.5) 加以控制。

情形 1a. 在假设 (2.4) 下，我们有 $h_\varepsilon \le 0$。因此，若 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) \ge 0$，则 $\mathrm{I} \le 0$。否则，假设 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) < 0$：由于 $z_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \partial_x \eta_\varepsilon$，回顾 (3.8) 可得

$$|z_\varepsilon| = \left|\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho_\varepsilon * \eta_\varepsilon - \rho_\varepsilon\right)\right| \le \frac{\operatorname{Osc}\rho_\varepsilon}{\varepsilon} \tag{3.15}$$

因此

$$|h_\varepsilon z_\varepsilon g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})| = |\mathrm{I}| \le \frac{\operatorname{Osc}\rho_\varepsilon}{\varepsilon}\,|h_\varepsilon g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})| \le \frac{|V'(W_\varepsilon)W_\varepsilon|}{\varepsilon}|g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})| \le |\mathrm{III}|, \tag{3.16}$$

其中，第二个不等式中用到了 (2.4) 和 $h_\varepsilon \le 0$，最后一个不等式中用到了 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) < 0$。特别地，这表明

$$\partial_t g_\varepsilon(\bar{t},\bar{x}) \le -\frac{1}{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} g_\varepsilon^2(\bar{t},\bar{x}), \tag{3.17}$$

由比较可得所需结论。

情形 1b. 在假设 (2.5) 下，我们有 $h_\varepsilon \ge 0$。若 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) \le 0$，则 $\mathrm{I} \le 0$。接下来考虑情形 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) > 0$。由于 $\bar{x}$ 是 $g_\varepsilon(\bar{t},\ \cdot)$ 的最大值点，因此 $g_\varepsilon * \eta_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x}) \le g_\varepsilon(\bar{t},\ \bar{x})$；于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + \mathrm{II} \le\ & -\left[h_\varepsilon z_\varepsilon g_\varepsilon + (V'(W_\varepsilon))^2 W_\varepsilon z_\varepsilon^2\right](\bar{t},\bar{x}) \\
=\ & -W_\varepsilon V'(W_\varepsilon) z_\varepsilon^2 (V''(W_\varepsilon)W_\varepsilon + 2V'(W_\varepsilon))(\bar{t},\bar{x}) \\
\le\ & -\kappa_1 W_\varepsilon (V'(W_\varepsilon))^2 z_\varepsilon^2(\bar{t},\bar{x}) \\
=\ & -\frac{\kappa_1}{W_\varepsilon} g_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})^2 \\
\le\ & -\frac{\kappa_1}{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} g_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})^2,
\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们使用了（2.5）。这就证明了（3.17），进而通过比较得到（2.6）。**情形 2**。我们通过如下方式定义 $\bar{t} \in [0,T]$

$$\bar{t} := \inf\{t \in [0,T] :\ g_\varepsilon(t,x) \le 0 \text{ for every } x \in \mathbb{R}\}. \tag{3.18}$$

假设 $\bar{t} > 0$，我们可以在区间 $[0,\bar{t})$ 上应用与**情形 1** 相同的论证。由于$t \mapsto \mathrm{Lip}^- \rho_\varepsilon(t)$ 是连续函数，因此 $t \mapsto \max g_\varepsilon(t,\ \cdot)$ 也是连续的，从而在 $[0,\bar{t}]$ 上证明了（2.6）。注意，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，$g_\varepsilon(t,\ x) \le 0$ 当且仅当 $\rho_\varepsilon(t,\ \cdot)$ 是非减的。因此，由于（1.1）保持初始数据的单调性（见 [2, 28]），所以，对于每个 $t \in (\bar{t},\ T]$，$\rho_\varepsilon(t,\ \cdot)$ 是单调非减函数，即 $g_\varepsilon(t) \le 0$。如果 $\bar{t} = 0$，那么我们可以直接应用保持单调性的论证。证明完毕。□

注 3.4（格林伯格模型）。考虑速度函数 $V(\xi) = v_0 \ln(\rho_{\max}/\xi)$，其中$v_0 > 0$ 且 $\rho_{\max} > 0$。该函数对应于 *Greenberg* 提出的、并有实验数据支持的一种交通模型（见 [21, 第 3 章，式（3.1.4）]）。形式上，*Ole˘ınik* 型估计仍然成立：事实上，回到 (3.13)，可得 $h_\varepsilon \equiv 0$；因此 $I = 0$，进而，由于 $III \le 0$ 以及 (3.14)，从（3.13）可推出

$$\partial_t g_\varepsilon(\bar{t},\bar{x}) \le -\frac{1}{\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} g_\varepsilon^2(\bar{t},\bar{x}),$$

由比较可得 (2.6)。假设初始密度有正下界，则可以使这一说明严格成立。

4. Proof of the convergence in the nonlocal-to-local singular limit

作为证明定理 2.6 的第一步，我们指出，定理 2.1 推出了一致 BV 估计（见 [3, 式 (4.3)] 和 [4, 引理 2.2 (ii) 与注 2.3]），因此 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$对于 $t>0$具有紧性。

引理 4.1 (BV 正则化与紧性). 设(2.3) 成立。那么，方程(2.8) 的解$W_\varepsilon(t,\cdot)$ 属于$\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，对每个 $t>0$ 均一致成立，与 $\varepsilon>0$ 无关：也就是说，对每个紧区间 $K\Subset\mathbb{R}$,

$$|W_\varepsilon(t,\cdot)|_{\mathrm{TV}(K)} \le 2\left(\frac{|K|}{2t}+\|W_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty(K)}\right). \tag{4.1}$$

这意味着集合 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 紧嵌入到 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$。

证明。 (4.1) 中的结论包含在 [3, 式 (4.3)] 或 [4, 引理 2.2 (ii) 与注 2.3] 中。第二个结论可仿照 [9, 定理 4.1]的证明得到。□

有了引理 4.1，我们便可直接在假设 (2.2) 或 (2.1) 下证明推论 2.6——也就是说，利用定理 2.1 中的 Oleˇınik 不等式 —— 论证方式与 [9, 推论 4.1 和定理 4.2] 类似。事实上，更简单地说，要证明 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的极限点是局部守恒律 (1.4) 的熵可容许解，只需在 (2.3) 中逐点取极限。

在假设 (2.4) 或 (2.5) 下证明定理 2.6——也就是说，利用定理 2.3 中的 Oleˇınik 不等式——则要微妙一些。事实上，我们无法直接推出 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$的一致 BV 界。在下文的引理 4.2 中，我们转而证明 W_ε^2 在 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$ 中等度有界，因此，族 W_ε 在 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$ 中预紧，且 W_ε 作为 $\varepsilon\to0$ 的极限点 W 是 (1.4) 的弱解。如此构造出的 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的极限点是局部守恒律的熵可容许解，这一点已由 [7] 证明。不过，我们仍在引理 4.3 中给出一个独立证明。我们指出，针对 W_ε^2 的 Oleˇınik 型不等式排除了极限 W中出现非熵激波的可能性。当 W 不具有有界变差时，推出它实际上是熵可容许解并非易事：我们通过利用 [22, 37]关于 Besov 正则性以及具有有限熵产生的守恒律之解的结构的最新结果来实现这一点。这似乎具有独立的研究价值。

最后，我们需要证明 ρ_ε 收敛到与 W_ε 相同的极限。如果我们对 W_ε 有一个全变差界，则由恒等式 (1.3) 可立即得到这一结论。若该界仅对 W_ε^2 成立，则需要进行更细致的分析，这将在引理 4.4 中完成。

引理 4.2 （在 L^1 中的预紧性）。 假设 （2.6） 和 $V'\le-\kappa_2$ 成立。那么序列 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 L^1_{loc}（（0，T） $\times\mathbb{R}$） 中预紧，并且 W_ε 的每个聚点都是（1.4） 的弱解。

证明。 **步骤 1：** 的预紧性。 由于 $V'<-\kappa_2$，因此由 g_ε（t，$\cdot$）$\le\frac{1}{\kappa t}$，我们得到

$$\partial_x W_\varepsilon^2(t,\cdot)\le\frac{2}{\kappa_2\kappa t} \tag{4.2}$$

and

$$\partial_t W_\varepsilon^2(t,\cdot) = -V(W_\varepsilon)\partial_x W_\varepsilon^2 - 2W_\varepsilon g_\varepsilon*\eta_\varepsilon \ge -\frac{2V(0)+2\max\rho_0}{\kappa\kappa_2 t}$$

对于 $t>0$。特别地，这表明 W_ε^2 在 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$（（0，$T$）$\times\mathbb{R}$）中等度有界。根据 Helly紧致性定理，存在一个子列 $W_{\varepsilon_k}^2$ 几乎处处收敛于某个函数 W^2。因此，W_{ε_k} 几乎处处收敛于 W，并且根据 Lebesgue控制收敛定理，$W_{\varepsilon_k}\to W$ 在 L^1_{loc}（（0，T）$\times\mathbb{R}$）中收敛。**步骤 2：** W $\mathbb{R}$)。首先是方程的弱解(1.4)。根据 (2.9)，只需证明 $g_\varepsilon-g_\varepsilon*\eta_\varepsilon\to0$ in $\mathcal{D}'([0,T)\times$ 固定 $\varphi\in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$，然后

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}}\varphi(g_\varepsilon-g_\varepsilon*\eta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}}\varphi g_\varepsilon*(\delta_0-\eta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}}\varphi*(\delta_0-\tilde\eta_\varepsilon)g_\varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\tilde\eta_\varepsilon(x):=\eta_\varepsilon(-x)$。由于 $\varphi(t,\cdot)*(\delta_0-\tilde\eta_\varepsilon)$ 一致收敛于 0，且在空间上关于 ε 和一致地指数衰减

$$\int_{-L}^{L}|g_\varepsilon(t,x)|\,\mathrm{d}x\le\|V'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathrm{TV}_{[-L,L]}W_\varepsilon^2(t,\cdot)$$

根据 (4.2)，其关于 L 至多线性增长，因此对于每个 $\varphi \in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}} \varphi(g_\varepsilon - g_\varepsilon * \eta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

现在固定 $\varphi \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$；由于 ρ_ε 是 (1.1) 的解，因此映射

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x$$

关于 t 是利普希茨连续的，并且在 $[0,T)$ 上对 ε 一致。因此，将 ρ_ε 替换为 $W_\varepsilon := \rho_\varepsilon * \eta_\varepsilon$后，结论仍然成立。特别地，由 (2.9) 可得

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} (g_\varepsilon - g_\varepsilon * \eta_\varepsilon)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x$$

关于 t 是利普希茨连续的，并且在 $[0,T)$ 上对 ε 一致。因此 $g_\varepsilon - g_\varepsilon * \eta_\varepsilon \to 0$ 在$\mathcal{D}'([0,T)\times\mathbb{R})$ 中。□

引理 4.3 (极限点的熵可容许性)。 设(2.6) 成立。若 W 是 W_ε的聚点，则 W 是(1.4)的熵可容许解。

证明。 由引理 4.2 可知， W 是 (1.4) 的弱解。此外，由于 W 是 W_ε的极限点，因此 $W^2 \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$。我们验证这意味着 $W \in B^{1/3,\infty,\infty}_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$：事实上，给定紧含于 $(0,T)\times\mathbb{R}$ 中的 Ω 以及充分小的 $h\in\mathbb{R}^2$，有

$$\int_\Omega |D_h W_\varepsilon|^3\,\mathrm{d}x \le \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_\Omega |D_h W_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x \le \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_{\Omega_h} |D_h W_\varepsilon^2| \le \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|h|\mathrm{TV}_{\Omega_h} W_\varepsilon^2,$$

其中 $\Omega_h := \{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R} : \mathrm{dist}(x,\Omega)\le |h|\}$，并且我们使用了 $0\le W_\varepsilon \le \|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$。属于 $B^{1/3,\infty,\infty}_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$ 的 Burgers 方程弱解 W具有动理学表述（见 [22, 定理 2.6]）；对于每个具有动理学表述的弱解，存在可数多个利普希茨连续曲线 $\gamma_n : [0,T)\to\mathbb{R}$，使得对每个熵-熵通量对 (e,f) 以及每个 $\varphi\in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}} \left(e(W)\partial_t\varphi + f(W)\partial_x\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \varphi\left[f(W^+) - f(W^-) - \dot\gamma_n(t)(e(W^+)-e(W^-))\right](t,\gamma_n(t))\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 $W^\pm$ 表示 W 沿 γ_n 的迹（见 [37]）。命题 2.3 中证明的关于 g_ε 的一致单侧界意味着，对每个 n 以及几乎处处的 $t\in(0,T)$，我们有 $W^+(t,\gamma_n(t)+) \ge W^-(t,\gamma_n(t)-)$。由于 $u\mapsto uV(u)$ 是凹函数，众所周知，具有 $W^+\ge W^-$ 的激波是熵的；也就是说，对每个凸熵 e 以及每个 $W^-\le W^+$，我们有

$$f(W^+) - f(W^-) - \dot\gamma_n(t)(e(W^+)-e(W^-)) \ge 0.$$

特别地，由 (4.3) 可知， W 是 (1.4) 的熵解。 □

引理 4.4 (收敛性 ρ_ε)。 假设 (2.6) 成立。那么函数 ρ_ε 在 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$ 中当 $\varepsilon\to 0$ 时收敛于 W。

证明。 由于核 η_ε 的特殊选取，我们有如下关系

$$\rho_\varepsilon = W_\varepsilon - \varepsilon\partial_x W_\varepsilon.\tag{4.4}$$

因此，由 (4.2) 可得

$$W_\varepsilon^2 - W_\varepsilon\rho_\varepsilon = W_\varepsilon(W_\varepsilon-\rho_\varepsilon) = \varepsilon W_\varepsilon z_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\partial_x W_\varepsilon^2 \to 0 \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R}),$$

从而存在一个序列 $\varepsilon_k\to 0$，使得 ρ_{ε_k} 在集合 $\{W\neq 0\}$ 中几乎处处收敛于 W。

现在讨论在集合 $\{W=0\}$ 上的收敛性。给定 $\bar t$， $L>0$，定义

$$A(\bar t, L) := \{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R} : x\in(-L - V_{\max}(\bar t - t), L + V_{\max}(\bar t - t))\},$$

其中 $V_{\max} = V(0) = \max V$。除去关于 $\bar t$ 和 L 的一个零测值集合后，我们可以假设，在 $\partial A(\bar t, L)\cap(0,T)\times\mathbb{R}$ 中，几乎处处的 $\mathcal{H}^1$ 点都是 W_{ε_k} 的勒贝格点，并且对每个 $k\in\mathbb{N}$， ρ_{ε_k} 也是如此。进一步取 ε_k 的一个子列（仍记作 ε_k），我们可以假设 W_{ε_k} 在 $(0,T)\times\mathbb{R}$ 中几乎处处收敛于 W。

给定 $h>0$，考虑一个递增函数 $\chi_h \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得

$$\chi_h(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\geq h,\\ 0 & \text{if } x\leq 0,\end{cases}$$

以及 φ_h $A(\bar t,\ L)$ 的特征函数的逼近，定义为

$$\varphi_h(t,x)=\chi_h(\bar t-t)\chi_h(x+L+V_{\max}(\bar t-t))\chi_h(L+V_{\max}(\bar t-t)-x).$$

用 φ_h 检验 (1.1)，并令 $h\to 0$，得到

$$\int_{-L-V_{\max}\bar t}^{L+V_{\max}\bar t}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-L}^{L}\rho_\varepsilon(\bar t,x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^+(\rho_\varepsilon)(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^-(\rho_\varepsilon)(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(\rho_\varepsilon)(t)&:=\left(\rho_\varepsilon V(W_\varepsilon)+V_{\max}\rho_\varepsilon\right)(t,L+V_{\max}(\bar t-t)),\\ \mathcal{F}^-(\rho_\varepsilon)(t)&:=\left(-\rho_\varepsilon V(W_\varepsilon)+V_{\max}\rho_\varepsilon\right)(t,-L-V_{\max}(\bar t-t))\end{aligned}$$

是量 ρ_ε 穿过 $A(\bar t,\ L)$ 侧边界的流出通量。由于 $\rho_{\varepsilon_k}\to W$ 属于集合 $\{W\neq 0\}$，且 $\rho_{\varepsilon_k}\geq 0$，因此

$$\limsup_{k\to\infty}\int_{-L-V_{\max}\bar t}^{L+V_{\max}\bar t}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-L}^{L}\rho_{\varepsilon_k}(\bar t,x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-L-V_{\max}\bar t}^{L+V_{\max}\bar t}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-L}^{L}W(\bar t,x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

类似地，注意到 $\xi\mapsto\mathcal{F}^{\pm}(\xi)$ 单调递增，我们有

$$\liminf_{k\to\infty}\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^+(\rho_{\varepsilon_k})(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^-(\rho_{\varepsilon_k})\,\mathrm{d}t\geq\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^+(W)(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^-(W)(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.7}$$

现在用 φ_h 检验 (2.9)，并令 $\varepsilon\to 0$：由于 $g_\varepsilon-g_\varepsilon*\eta_\varepsilon\to 0$ 在$[0,T)\times\mathbb{R}$上的分布意义下成立，我们得到

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\Big(W\partial_t\varphi_h+WV(W)\partial_x\varphi_h\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}}\rho_0(x)\varphi_h(0,x)\,\mathrm{d}x=0.$$

令 $h\to 0$，于是得到

$$\int_{-L-V_{\max}\bar t}^{L+V_{\max}\bar t}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-L}^{L}W(\bar t,x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^+(W)(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\bar t}\mathcal{F}^-(W)(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

比较 (4.5) 和 (4.8)，可知两个不等式 (4.6)、(4.7) 实际上都是等式，且 liminf 和 limsup 实际上都是极限。特别地，由于 $\rho_{\varepsilon_k}\geq 0$，根据 (4.6) 和 $\rho_{\varepsilon_k}\to W$ 在$\{W\neq 0\}$ 中可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\{W=0\}\cap[-L,L]}\rho_{\varepsilon_k}(\bar t,x)\,\mathrm{d}x=0$$

因此 $\rho_{\varepsilon_k}(\bar t)\to W_\varepsilon(\bar t)$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 中成立。由于极限 W 与我们所考虑的子列 ε_k 无关，我们得出

$$\rho_\varepsilon\to W\qquad\text{in } L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R}).$$ □

注 4.5 (密度下界的影响)。 如果我们还假设密度具有下界，则收敛结果的证明会更简单且自成一体：

$$\operatorname{ess\,inf}\rho_0\geq c_0>0. \tag{4.9}$$

由(4.9)，我们可以证明

$$\operatorname{ess\,inf}\rho_\varepsilon\geq\operatorname{ess\,inf}\rho_0\geq c_0>0. \tag{4.10}$$

注意，在这种情况下，上述广义 *California* 模型和 *Greenberg* 模型（它们在零密度处不是利普希茨连续的）是适定的。

由(2.6)、(4.10) 以及 $V'\leq-\kappa_2$ 的上界，我们推 ***deduce that***，对于任意 $t>0$,

$$\sup_{\mathbb{R}}\partial_x W_\varepsilon(t,\cdot)\geq-\frac{1}{\kappa\kappa_2 c_0 t}. \tag{4.11}$$

这意味着 $W_\varepsilon\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 关于 $\varepsilon>0$ 一致有界。特别地，设 W 是当 $\varepsilon\to 0$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ 时 W_ε 的一个聚点，则 W 满足 (1.4)，并且由于它是单侧利普希茨连续的，故与熵解 ρ 重合。

为了完成证明，我们只需证明 ρ_ε 也收敛到 ρ。我们沿用 [9] 中的论证：由 (3.8) 可得

$$\rho_\varepsilon = W_\varepsilon - \varepsilon \partial_x W_\varepsilon.$$

由于在 L^1_{loc} 中等度有界，两个序列 ρ_ε 和 W_ε 收敛到同一个极限函数 ρ。

推论 *2.6* 的证明。我们按以下步骤进行。

步骤 1： 利用定理 *2.1* 进行证明。我们假设 (2.3)，并应用引理 4.1 推出 $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 紧嵌入于 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$。接着，按照推论 4.1 和定理 4.2], 中的论证，我们得到 W_ε 收敛到局部守恒律 (1.4) 的唯一熵解，ρ_ε 也如此。我们只需特别注意，收敛在包含于开集 $t>0$ 中的每个紧集上都成立。为此，给定参数 $n\in\mathbb{N}$ 和测试函数 $\varphi\in C_c^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$，如同推论 4.1 和定理 4.2], 中的论证，利用 $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R})$ 中的紧性，我们可以在 $\varepsilon\to 0^+$ 时将熵不等式取极限，并推出

$$\begin{aligned} 0 \le & \underbrace{\int_{1/n}^{T}\int_{\mathbb{R}} \big(\eta(\rho(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + q(\rho(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}_{I_{1,n}} \\ & + \underbrace{\int_{0}^{1/n}\int_{\mathbb{R}} \big(\bar\eta(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + \bar q(t,x)\partial_x\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}_{I_{2,n}} + \int_{\mathbb{R}}\eta(\rho_0(x))\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中，根据 $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 上的一致 L^∞ 界，有 $\eta(\rho_\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar\eta$ 和 $q(\rho_\varepsilon) \overset{\star}{\rightharpoonup} \bar q$ 于 $L^\infty(\mathbb{R})$。令 $n\to\infty$，即可推出

$$0 \le \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \big(\eta(\rho(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + q(\rho(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}\eta(\rho_0(x))\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x,$$

其中我们用到了以下事实：$I_{2,\,n}\to 0$ 这是因为被积函数满足 L^1 界。

步骤 2： 利用定理 *2.3* 进行证明。我们假设 (2.6)，则结合引理 4.2、4.3 和 4.4 以及上述计算即可得出结论。□

5. Numerical experiments

本节通过一些数值模拟展示定理 2.1 和定理 2.3 的结果。对于非局部问题，我们采用一种基于特征线的非耗散求解器（更多细节见 [32]）。具体而言，我们考虑 Greenshields 速度函数 $V(\xi)=1-\xi$；图1和图2展示了在两种初始数据下 $t\mapsto \partial_x W_\varepsilon(t,\cdot)$ 的变化情况：连续初始数据（图1）和具有跳跃间断的初始数据（图2）。我们分别给出了指数核（图1和图2的上排）以及分段常数核 $\eta:=\varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}$（图1和图2的下排）的模拟结果；后者不在本文结果的适用范围内，但在这种情况下似乎也成立同样的结果。最后，图 3 展示了 Oleĭnik 不等式对 W 所产生的 BV 正则化效应。

6. Open problems

本文证明了指数核非局部守恒律的若干 Oleĭnik 型不等式。作为推论，我们在不对初始数据作单调性或全变差假设的情况下，获得了非局部到局部极限问题的一些收敛结果。未来仍有若干问题有待解决：

（1）更一般的速度函数情形（这也意味着初始数据更一般），这些函数和数据不满足定理 2.1 或定理 2.3 中的技术性假设；（2）更一般的非局部权重情形（即不一定是指数型），如 [15] 中所研究的情形。

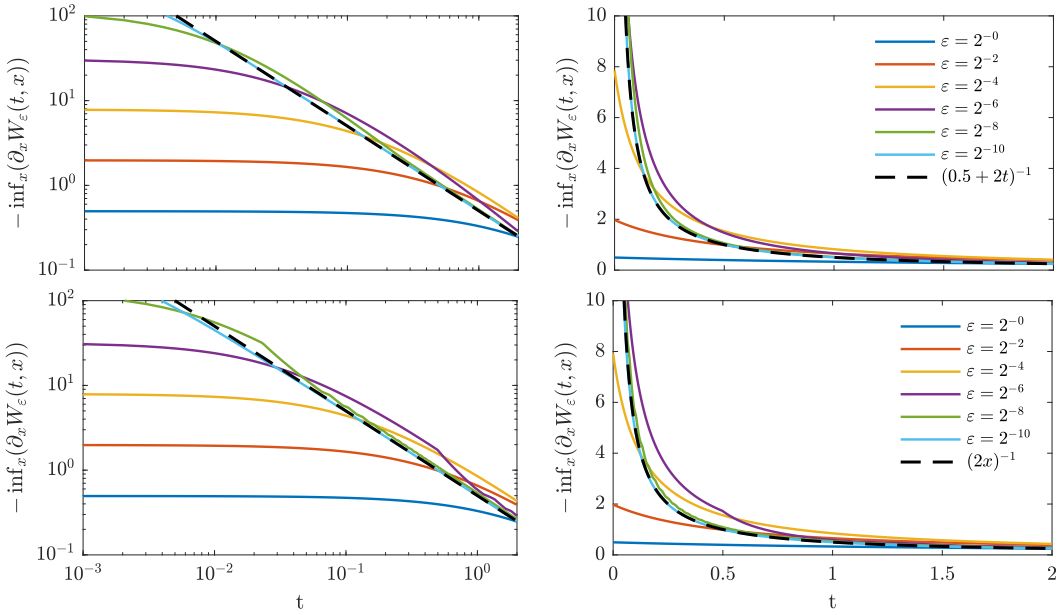

FIGURE 1. $-\inf \partial_x W_\varepsilon$的示意图。初始数据为 $\rho_0 := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-0.5,0.5)}$，速度为 $V(\xi) = 1-\xi$。TOP ROW：核 $\eta(\cdot) := \varepsilon^{-1}\exp(-\cdot\,\varepsilon^{-1})$。BOTTOM ROW：核 $\eta := \varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}$。

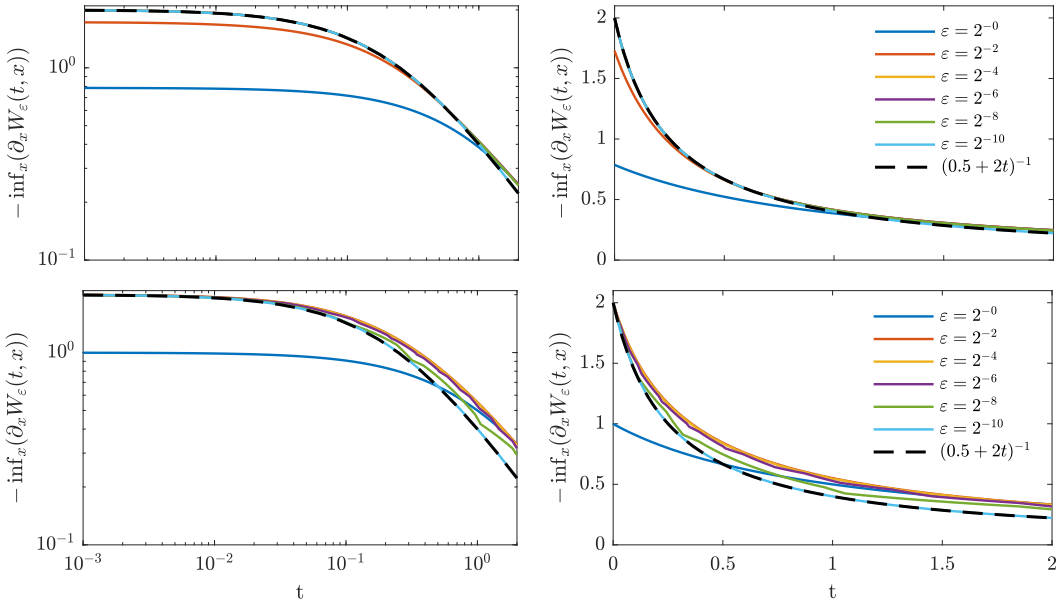

FIGURE 2. $-\inf_{x\in\mathbb{R}} \partial_x W_\varepsilon(t,x)$的示意图。初始数据为 $\rho_0(\cdot) := (1-2|\cdot|)\mathbb{1}_{(-0.5,0.5)}$，速度为 $V(\xi) = 1-\xi$。TOP ROW：核 $\eta(\cdot) := \varepsilon^{-1}\exp(-\cdot\,\varepsilon^{-1})$。BOTTOM ROW：核 $\eta(\cdot) := \varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(\cdot)$

.

ACKNOWLEDGMENTS

感谢 D. Serre 和 E. Zuazua 对本文主题提出的宝贵意见。

G. M. Coclite、N. De Nitti、E. Marconi 和 L. V. Spinolo 均为意大利国家高等数学研究所（INdAM）国家数学分析、概率论及其应用研究组（GNAMPA）的成员。G. M. Coclite 部分获得了国家研究项目

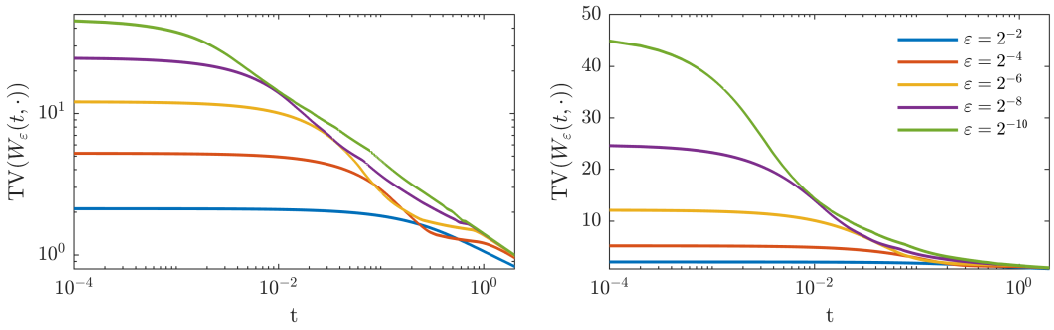

FIGURE 3. TV($W_\varepsilon(t,\cdot)$) 示意图。初始数据全变差无界时，即 $\rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(1/n+1,1/n+1+1/(2n(n+1)))}$，线性速度 $V(\xi) = 1-\xi$，且采用指数核，即 $\eta(\cdot) := \varepsilon^{-1}\exp(-\cdot\,\varepsilon^{-1})$ 时，非局部项 W_ε 的全变差。

“多尺度创新材料与结构”项目由意大利教育、大学与研究部资助（MIUR PRIN 2017，项目代码 2017J4EAYB），并由意大利教育、大学与研究部依据第232/2016号法律（卓越系项目，资助编号 CUP - D94I18000260001）资助。M. Colombo 获得 SNF 资助项目 182565 的支持。G. Crippa 获得 ERC StG 676675 FLIRT 项目和 SNF 212573 FLUTURA 项目的支持。N. De Nitti 获得亚历山大·冯·洪堡基金会和德国研究基金会（DFG）TRR-154 项目的部分资助。L. Pflug 获得 DFG 项目 416229255——SFB 1411 的资助。E. Marconi 获得玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助（编号 101025032）的支持。L. V. Spinolo 是 PRIN 2020 项目 20204NT8W4 的成员。

REFERENCES

[1] F. Ancona、O. Glass 和 K. T. Nguyen。标量平衡律的下界紧性估计。

Comm. Pure Appl., ( ): –

Math. 65 9 1303
1329，2012年。[2] S. Blandin 和 P. Goatin。交通流建模中出现的具有非局部通量的守恒律的适定性。*Numer. Math.*，132(2): 217–241，2016年。[3] F. Bouchut 和 F. James。具有不连续系数的一维输运方程。 *Nonlinear Anal.*，32 7 891( ): –933，1998年。[4] F. Bouchut、F. James 和 S. Mancini。具有单侧 Lipschitz 系数的多维输运方程的唯一性与弱稳定性。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，4(1): 1–25，2005年。[5] A. Bressan 和 R. M. Colombo。非线性守恒律系统中正波的衰减。

Ann. Scuola Norm., ( ): –。

Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 26 1 133 160, 1998
[6] A. Bressan 和 W. Shen。关于具有非局部通量的交通流：一种松弛表示。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，237 3 1213( ): –1236，2020年。[7] A. Bressan 和 W. Shen。非局部交通流模型极限解的熵可容许性。

Commun., ( ): –。

Math. Sci. 19 5 1447 1450, 2021
[8] K. S. Cheng。非凸标量守恒律的一个正则性定理。 *J. Differential Equations*，61 127，1986年 1 79( ): –。[9] G. M. Coclite、J.-M. Coron、N. De Nitti、A. Keimer 和 L. Pflug。用非局部守恒律逼近局部守恒律的一般结果：指数核的奇异极限问题。 *Ann. Inst. H.Poincaré Anal. Non Linéaire*，2022年。[10] G. M. Coclite、N. De Nitti、A. Keimer 和 L. Pflug。具有消失黏性的非局部守恒律奇异极限。 *Nonlinear Analysis*，211：论文编号 112370，12，2021年。[11] G. M. Coclite、N. De Nitti、A. Keimer 和 L. Pflug。具有 BV 核的非局部守恒律弱解的存在性与唯一性。 *Z. Angew. Math. Phys.*，73(6)：论文编号 241，2022年。[12] G. M. Coclite、N. De Nitti、A. Keimer、L. Pflug 和 E. Zuazua。非局部 Burgers 方程向局部 N 波的长时间收敛。 *Submitted*，2023年。[13] M. Colombo、G. Crippa、M. Graff 和 L. V. Spinolo。数值黏性在研究非局部守恒律的局部极限中的作用。 *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*，55(6)：2705–2723，2021年。[14] M. Colombo、G. Crippa、E. Marconi 和 L. V. Spinolo。非局部交通流模型的局部极限：收敛结果与全变差爆破。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*，38(5)：1653–1666，2021年。[15] M. Colombo、G. Crippa、E. Marconi 和 L. V. Spinolo。具有一般核的非局部交通流模型：奇异极限、熵可容许性与收敛速率。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，247(2)，2023年。[16] M. Colombo、G. Crippa 和 L. V. Spinolo。关于具有非局部通量的守恒律的奇异局部极限。

Arch., ( ): –。

Ration. Mech. Anal. 233 3 1131 1167, 2019

[17] J.-M. Coron、A. Keimer 和 L. Pflug。非局部输运方程——解的存在性与唯一性及其与相应守恒律的关系。 *SIAM J. Math. Anal.*, 52(6)：5500–5532，2020年。[18] C. M. Dafermos。双曲守恒律中的特征线：对解的结构与渐近行为的研究。载于 *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium (Edinburgh, 1976) Vol. I*，《数学研究札记》，第17号，第1–58页。Pitman，伦敦，1977年。[19] C. M. Dafermos。 *Hyperbolic conservation laws in continuum physics* 325 *Grundlehren der Mathematischen* ，第 卷。施 *Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 2016 普林格出版社，柏林，第4版，。[20] C. De Lellis 和 F. Golse。标量守恒律的定量紧性估计。 *Comm. Pure Appl. Math.*，58 7 989( )：–998，2005年。[21] M. Garavello 和 B. Piccoli。 *Traffic flow on networks. Conservation laws models*，第 1 *AIMS Series on Applied* 卷。美国数 *Mathematics* 2006 学科学研究所（AIMS），斯普林菲尔德，密苏里州，。[22] F. Ghiraldin 和 X. Lamy。程函方程熵解的最优 Besov可微性。 *Comm. Pure* ，( )：–。 *Appl. Math.* 73 2 317 349, 2020

[23] O. Glass。Oleinik不等式在一般一维标量守恒律中的推广。 *J. Hyperbolic Differ. Equ.*，5 1 113( )：–165，2008年。[24] P. Goatin 和 S. Scialanga。具有非局部速度的 LWR交通流模型的适定性与有限体积近似。 *Netw. Heterog. Media*，11(1)：107–121，2016年。[25] D. Hoff。多个空间变量中 Oleˇınik 熵条件的精确形式。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，276(2)：707–714，1983年。[26] E. Hopf。偏微分方程 $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$。 *Comm. Pure Appl. Math.*，3：201–230，1950年。[27] H. K. Jenssen 和 C. Sinestrari。关于非凸守恒律中特征线的扩展。

Proc. Roy. Soc. ，( )：–。 *Edinburgh Sect. A* 131 4 909 925, 2001

[28] A. Keimer 和 L. Pflug。非局部平衡律的存在性、唯一性与正则性结果。 *J. Differential Equations*，263 7 4023 4069，2017年 ( )：–。[29] A. Keimer 和 L. Pflug。关于用非局部守恒律逼近局部守恒律。

J. Math. Anal. ，( )：–。 *Appl.* 475 2 1927 1955, 2019

[30] A. Keimer、L. Pflug 和 M. Spinola。带阻尼的多维非局部平衡律的存在性、唯一性与正则性。 *J. Math. Anal. Appl.*，466(1)：18–55，2018年。[31] A. Keimer、L. Pflug 和 M. Spinola。有界区域上的非局部标量守恒律及其在交通流中的应用。 *SIAM J. Math. Anal.*，50(6)：6271–6306，2018年。[32] A. Keimer、L. Pflug 和 M. Spinola。非局部平衡律：非耗散数值格式的收敛理论。 *Submitted*，2020年。[33] O. A. Ladyˇzenskaya。构造拟线性双曲方程不连续解的一种方法：当“黏性系数”趋于零时，将其表示为相应抛物方程解的极限。

Trudy Moskov. ，：–。 *Mat. Obšč.* 6 465 480, 1957

[34] P. D. Lax。非线性双曲方程的弱解及其数值计算。

Comm. Pure Appl. ，：–。 *Math.* 7 159 193, 1954

[35] P. D. Lax。双曲守恒律系统。II。 *Comm. Pure Appl. Math.*，10：537–566，1957年。[36] P. G. LeFloch 和 K. Trivisa。连续 Glimm型泛函与稀疏波的扩展。

Commun. Math. ，( )：–。 *Sci.* 2 2 213 236, 2004

[37] E. Marconi。Burgers 方程熵缺陷测度的可整性。 *J. Funct. Anal.*，283(6)：论文编号 109568，19，2022年。[38] O. A. Ole ˘ 26 95 172, ınik。非线 1963 性微分方程的不连续解。 *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*，：–。[39] L. Tartar。补偿紧性及其在偏微分方程中的应用。载于 *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium Vol. IV* 39 *Res. Notes in Math.* 136 212 ，第{ }卷，第–页。Pitman，马萨诸塞州波士顿—伦敦，1979年。

(G. M. Coclite)

Politecnico di Bari Dipartimento di Meccanica Matematica e Management Via E. Orabona , , , , , 4 70125 Bari Italy.
Email address: giuseppemaria.coclite@poliba.it(M. Colombo) EPFL SB, Station 8, 1015 Lausanne, Switzerland.
Email address: maria.colombo@epfl.ch(G. Crippa)

Universität Basel Departement Mathematik und Informatik Spiegelgasse 1 4051 Basel Switzer- , , , , land.
Email address: gianluca.crippa@unibas.ch(N. De Nitti)

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg Department of Data Science Chair for , , , Dynamics Cauerstr. 11 91058 Erlangen Control and Numerics (Alexander von Humboldt Professorship), , , Germany.
Email address: nicola.de.nitti@fau.de(A. Keimer)

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg Department of Mathematics Cauerstr. , , , , 11 91058 Erlangen Germany.
Email address: alexander.keimer@fau.de(E. Marconi)

Università degli Studi di Padova Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita Via Trieste , , , , 63 35121 Padova Italy.
Email address: elio.marconi@unipd.it(L.Pflug)

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (1) Competence Unit for Scientific Comput- , , , , ing Martensstr. 5a 91058 Erlangen Germany; (2) Department of Mathematics Chair of Applied Mathematics , , , , (Continuous Optimization) Cauerstr. 11 91058 Erlangen Germany.
Email address: lukas.pflug@fau.de

（L.V. Spinolo） IMATI-CNR、 Via Ferrata 5、 27100 Pavia、 Italy.*Email address*: spinolo@imati.cnr.it