用于反散射的受扰正紧算子的正则化分解法

Isaac Harris
普渡大学数学系，印第安纳州西拉斐特 47907 邮箱：
harri814@purdue.edu

arXiv:2304.01324v1 [math.AP] 3 Apr 2023

摘要

本文研究数据算子受到噪声污染时因子分解法的一种正则化策略。因子分解法是一种用于形状重建问题的定性方法。这类方法具有计算简单、对待重建物体所需的先验知识较少等优点。本文重点证明所提出的正则化策略能够产生稳定的重建结果。我们将通过解析和数值方法证明，该策略适用于反形状问题，即在导电边界条件下恢复各向同性散射体。我们还提出了一种根据噪声水平选取正则化参数的策略。文中给出了二维散射体的数值示例。

关键词：因子分解法 · 正则化 · 形状重建

数学学科分类: 35J05, 35Q81, 46C07

1 引言

我们旨在研究一种用于因子分解法的正则化策略，以证明该方法对于添加到正紧数据算子中的噪声具有稳定性。这是一种定性重建方法，可用于解决许多反形状问题。因子分解法最初由 [29]提出，用于根据远场测量值重建声软或声硬散射体。多年来，因子分解法已成为形状重建中一种实用的分析与计算工具。参见论文 [9, 11, 13, 14, 16, 22, 23, 27, 37, 40] 及其中的参考文献，了解因子分解法在求解椭圆型和双曲型偏微分方程反形状问题中的应用。

因子分解法的核心思想，是将待重建的未知区域与数据算子的值域联系起来。具体做法是考察一个线性不适定方程：当且仅当“采样点”位于感兴趣区域内时，该方程才有解。因此，可以利用皮卡德判据重建该区域。为此，需要构造一个成像泛函，它是一个级数，其通项的分子由内积定义，分母则是一个紧算子的特征值，

构成分母的特征值。这可能导致重建过程不稳定，因为分母会迅速趋近于零。为稳定数值重建， [5] 中的作者提出了广义线性采样法，借鉴因子分解法的思想推导出一种新的成像泛函。 [1, 5] 中的分析将因子分解法与线性采样法联系起来 [18] （其他应用见 [17, 35, 39] ）。 [24, 27] 进一步研究了这一思路，并采用任意合适的正则化方案，推导出与 [5]中类似的成像泛函。

文献 [24, 27] 中提出的成像泛函称为正则化分解法。本文证明，该方法对数据中的噪声具有稳定性。本文的工作主要受到 [1, 2, 21, 30, 36] 中分析的启发。这些文献研究了不同的成像泛函，涵盖从定性重建方法到提供精确且稳定的形状重建方法。为证明正则化分解法对测量数据中的噪声具有稳定性，我们将运用扰动理论的结果来证明主要结论。

本文其余部分安排如下。我们首先讨论分析中将用到的一些扰动理论结果。先介绍一些已知结果，随后给出针对所研究问题所需的推广。这将使我们能够证明，正则化分解法对数据中添加的噪声具有稳定性。接着，我们将运用该理论重建具有导电边界的各向同性散射体。为此，我们将对远场算子进行因子分解，并分析该因子分解中的算子，以证明我们的理论成立。最后，我们将给出二维情形下重建散射体的一些数值示例。在数值实验中，我们将推导一种用于选取正则化参数的解析方法。

2 扰动理论的结果

本节将讨论一些与扰动理论相关的抽象结果，这些结果将用于证明本文的主要结论。我们需要的结果涉及作用于希尔伯特空间上的自伴紧算子的扰动。我们将回顾 [28, 36] 中的一些结果与分析。我们的工作受到 [24, 27] 中研究的启发；该研究提出了因子分解法的正则化变体。此方法已应用于漫射光学断层成像 [24], 、电阻抗断层成像 [22] 和反散射 [25]。在上述论文中，相关结果适用于已知未扰动数据算子的情形；而我们希望将这些结果推广到只能获取受扰动数据算子的情形。

2.1 正自伴紧算子理论

首先，我们假设 K 和 $K^\delta : X \longrightarrow X$ 是作用于希尔伯特空间 X上的一对正自伴紧算子。我们还假设， K^δ 是算子的一种扰动

K，满足 $\|K - K^\delta\| \leq \delta$，其中某个 $0 < \delta \ll 1$，且 $\|\cdot\|$ 表示算子范数。根据希尔伯特-施密特定理，这两个算子都可以正交对角化，使得

$$Kx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n)_X x_n \quad \text{and} \quad K^\delta x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\delta \big(x, x_n^\delta\big)_X x_n^\delta$$

其中，λ_n 和 $\lambda_n^\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ 是按非递增顺序排列的特征值，并且当 $n \to \infty$ 时趋于零。这里，x_n 和 x_n^δ 是相应的特征函数，它们构成了 X 的标准正交基。

谱具有连续性，即谱之间的豪斯多夫距离满足

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{spec}(K), \operatorname{spec}(K^\delta)\big) \leq \|K - K^\delta\|$$

其中，我们用 $\operatorname{spec}(\cdot)$ 表示自伴紧算子 [28] 的特征值集合。现在，假设对于固定的 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\operatorname{dist}\big(\lambda_n, \operatorname{spec}(K) \setminus \{\lambda_n\}\big) = \inf\big\{|\lambda_n - \lambda_m| \ : \ \lambda_n \neq \lambda_m \ \text{ with } \lambda_m \in \operatorname{spec}(K)\big\} \geq \rho$$

对于某个 $\rho > 0$，则可以像 [28] 中那样定义对应于特征值 λ_n 和 λ_n^δ 的特征子空间上的谱投影，其定义为

$$P_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_n} (\lambda I - K)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda \quad \text{and} \quad P_n^\delta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_n} \big(\lambda I - K^\delta\big)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

其中，$\Gamma_n = \partial B(\lambda_n; \rho/2)$，条件是 $\rho/2 > \delta$。这里，我们将积分路径集合定义为

$$\partial B(\lambda_n; \rho/2) = \big\{\xi \in \mathbb{C} \ : \ |\xi - \lambda_n| = \rho/2 \ \text{ for some given } \rho > 0\big\}.$$

因此，积分是在复平面中的闭曲线 Γ_n 上进行的。注意，由于我们假设 $\rho/2 > \delta$，这意味着 Γ_n 与 $\operatorname{spec}(K)$ 或 $\operatorname{spec}(K^\delta)$ 的交集为空。事实上，由于我们假设 $\operatorname{dist}\big(\lambda_n, \ \operatorname{spec}(K) \setminus \{\lambda_n\}\big) \geq \rho$，因此有

$$\operatorname{dist}\big(\Gamma_n, \operatorname{spec}(K)\big) \geq \rho/2$$

并且，根据三角不等式，我们很容易得到

$$\operatorname{dist}\big(\Gamma_n, \operatorname{spec}(K^\delta)\big) \geq \rho/2 - \delta \quad \text{which is assumed to be positive.}$$

因此，根据弗雷德霍姆择一定理（例如参见 [28, 36]），式（1）中的围道积分是定义良好的有界线性算子。

根据 [36]中的定理 4.2，我们有如下范数估计

$$\big\|P_n - P_n^\delta\big\| \leq \frac{\delta}{\rho/2 - \delta} \quad \text{provided that} \quad \rho/2 > \delta. \tag{2}$$

由于我们关注的是 $0 < \delta \ll 1$ 的情形，因此假设 $\delta \in (0,\ 1/4)$，由此可取 $\rho/2 = \sqrt{\delta}$。据此，利用式 (2) 进行简单计算可得

$$\left\|P_n - P_n^\delta\right\| \leq 2\sqrt{\delta} \quad \text{provided that} \quad \delta \in (0, 1/4). \tag{3}$$

现在，根据 [36] 命题 4.3，投影算子可表示为

$$P_n x = \sum_{\lambda=\lambda_n} (x, x_n)_X x_n \quad \text{and} \quad P_n^\delta x = \sum_{\lambda=\lambda_n^\delta} \left(x, x_n^\delta\right)_X x_n^\delta$$

即，投影到由对应于某个特定特征值的正交归一特征函数张成的空间上。因此，我们有

$$\sum_{\lambda=\lambda_n^\delta} |(x, x_n^\delta)_X|^2 - \sum_{\lambda=\lambda_n} \left|\left(x, x_n\right)_X\right|^2 = \|P_n^\delta x\|_X^2 - \|P_n x\|_X^2 \leq 4\|x\|^2 \left\|P_n^\delta - P_n\right\|. \tag{4}$$

上述估计是根据 X 上的范数定义和三角不等式得到的（详情见 [36] ）。据此，我们现在可以将这些结果推广到将希尔伯特空间映射到其对偶空间的正算子。

2.2 标准扰动结果的推广

本节将把上述针对正自伴紧算子的扰动理论推广到将 X 映射到其对偶空间 X^*的正紧算子。为此，我们假设 A 和 A^δ： $X \to X^*$ 作用于复希尔伯特空间X ，且均为正且紧的。与上一节相同，我们假设 A^δ 是 A 的一个扰动，并满足不等式

$$\|A - A^\delta\| \leq \delta \quad \text{for some} \quad 0 < \delta \ll 1. \tag{5}$$

这里，我们假设$\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{X \times X^*}$表示 X与X^*之间的半双线性对偶配对。此外，我们假设 H 是希尔伯特枢轴空间，因此该对偶配对与 H 上的内积一致，并且 H 与 $X \subset H \subset X^*$（稠密嵌入）构成一个盖尔范三元组。

为了应用自伴紧算子的理论，我们令 R： $X^* \to X$ 表示由里斯表示定理给出的双射等距映射，使得

$$R\ell = x_\ell \quad \text{where} \quad (x\,, x_\ell)_X = \langle x\,, \ell \rangle_{X \times X^*} \quad \text{for all} \quad x \in X. \tag{6}$$

注意，由于对偶配对是半双线性的，因此 R 是线性等距映射。因此，我们有 RA 和 RA^δ： $X \to X$ ，并且满足

$$\|RA - RA^\delta\| = \|A - A^\delta\| \leq \delta.$$

注意，算子 $RA\colon\ X \to X$ 满足

$$\big(x\,,(RA)x\big)_X = \langle x\,,Ax\rangle_{X\times X^*} > 0 \quad \text{ for all } \quad x \in X\setminus\{0\}$$

由于假设 A 为正， RA^δ 同理。根据 [6] 的推论 7.3（另见 [34] 中的定理 3:10-3），我们知道 RA 和 RA^δ 是作用于复希尔伯特空间 X 上的正自伴紧算子。这意味着我们可以得到第 2.1 节中的结果和估计，其中 $K = RA$ 和 $K^\delta = RA^\delta$。由此，我们令

$$\{\lambda_n; x_n\} \in \mathbb{R}_{>0}\times X \quad \text{ and } \quad \{\lambda_n^\delta; x_n^\delta\} \in \mathbb{R}_{>0}\times X$$

分别表示 RA 和 RA^δ 的特征值及正交归一函数。根据谱的连续性，我们有

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{spec}(RA), \operatorname{spec}(RA^\delta)\big) \le \delta.$$

现在，我们 可以定义相应的正交归一对偶基 ℓ_n 和 $\ell_n^\delta \in X^*$，使得

$$R\ell_n = x_n \quad \text{and} \quad R\ell_n^\delta = x_n^\delta \quad \text{for all} \quad n\in\mathbb{N}, \quad \text{respectively.}$$

注意， X^* 也是一个希尔伯特空间，其内积为

$$(\ell,\varphi)_{X^*} = (x_\ell, x_\varphi)_X \quad \text{ for all } \quad \ell,\varphi\in X^* \quad \text{ where } \ R\ell = x_\ell \ \text{ and } \ R\varphi = x_\varphi.$$

根据 [24]，中的分析，我们有

$$\{\lambda_n; x_n; \ell_n\} \in \mathbb{R}_{>0}\times X\times X^* \quad \text{ and } \quad \{\lambda_n^\delta; x_n^\delta; \ell_n^\delta\} \in \mathbb{R}_{>0}\times X\times X^*$$

分别对应于算子 A 和 A^δ的奇异值分解。

由此，我们现在可以给出主要的扰动结果，用于研究上一节中的正则化分解法。为此，按照与 [36] 类似的方式，我们需要定义

$$N(\delta) = \sup\Big\{ n\in\mathbb{N} \ :\ \operatorname{dist}\big(\lambda_n, \operatorname{spec}(RA)\setminus\{\lambda_n\}\big) \ge 2\sqrt{\delta} \ \text{ and } \ 8n\sqrt[4]{\delta} \le 1\Big\}. \tag{7}$$

注意，与 $\delta\to 0^+$ 一样，我们有 $N(\delta)\to\infty$。现在，我们证明一个重要结果，以将正则化分解法推广到将希尔伯特空间 X 映射到对偶空间的受扰正紧算子。

定理 2.1。 假设 A 和 $A^\delta:\ X\to X^*$ 为正紧算子，且满足(5)。那么，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $\lambda_n^\delta\to\lambda_n$ 当 $\delta\to 0^+$ 时成立，同时还有

$$\sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \Big] \le \sqrt[4]{\delta}\|\ell\|_{X^*}^2$$

其中 $N(\delta)$ 由 (7) 定义，前提是对于任意 $\ell\in X^*,\ \ \delta\in(0,1/4)$。

证明。 证明开始时，注意到根据谱的连续性，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有估计 $|\lambda_n^\delta - \lambda_n| \le \delta$，从而证明了特征值的收敛性。

为证明所声称的估计，我们首先注意到，由(6)可得

$$\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*} = (x_n, x_\ell)_X \quad \text{and} \quad \langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*} = (x_n^\delta, x_\ell)_X \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}$$

其中 $x_\ell = R\ell$。因此，我们有

$$\sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \Big] = \sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|(x_\ell\,, x_n^\delta)_X|^2 - |(x_\ell\,, x_n)_X|^2 \Big].$$

现在，令 $M(\delta)$ 为来自 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_{N(\delta)}$ 的不同特征值的个数。由此，我们可以利用(4)得到

$$\sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \Big] = \sum_{n=1}^{M(\delta)} \|P_n^\delta x_\ell\|_X^2 - \|P_n x_\ell\|_X^2$$

其中， P_n 和 P_n^δ 分别由(1)给出，其中的自伴紧算子分别为 RA 和 RA^δ。我们再次利用(4)，可得到估计

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N(\delta)} &\Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \Big] \\
&\le M(\delta) \max\Big\{ \|P_n^\delta x_\ell\|_X^2 - \|P_n x_\ell\|_X^2 \ : \ n \le N(\delta) \Big\} \\
&\le N(\delta) \max\Big\{ 4\|x_\ell\|_X^2 \big\|P_n - P_n^\delta\big\| \ : \ n \le N(\delta) \Big\},
\end{aligned}$$

其中我们利用了 $M(\delta) \le N(\delta)$ 这一事实。现在，由(3)可得

$$\max\Big\{ 4\|x_\ell\|_X^2 \big\|P_n - P_n^\delta\big\| \ : \ n \le N(\delta) \Big\} \le 8\sqrt{\delta}\|x_\ell\|_X^2$$

因为我们假设 $\delta \in (0,\ 1/4)$。由 R 是等距映射这一事实，我们有等式 $\|x_\ell\|_X = \|\ell\|_{X^*}$。结合上述不等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \Big] &\le 8N(\delta)\sqrt{\delta}\|\ell\|_{X^*}^2 \\
&\le \sqrt[4]{\delta}\|\ell\|_{X^*}^2
\end{aligned}$$

利用 $8N(\delta)\sqrt[4]{\delta} \le 1$ 这一事实，证明该断言。 □

请注意，定理 2.1 的改写版本在算子映射到 X 自身的情况下仍然成立。利用这一结果，我们可以证明正则化因子分解方法对于含噪数据是稳定的。此外，只需补充映射满足.....这一假设，我们就可以去掉 X 为复希尔伯特空间这一假设

$$(x, y) \longmapsto \langle y\,, Ax\rangle_{X\times X^*}$$

是对称的，详见 [24] 。

3 带误差的正则化因子分解法

本节将研究受扰正算子 $A^\delta: X \to X^*$ 的正则化分解法。与上一节一样，我们假设 X 是一个无限维希尔伯特空间，而 X^* 是相应的对偶空间，其中 $X \subseteq H \subseteq X^*$ 与希尔伯特枢轴空间 H 构成一个盖尔范三元组。在分析中，我们假设 A^δ 是算子 $A: X \to X^*$ 的扰动，且满足 (5)。假设算子 A 具有如下因子分解

$$A = S^*TS \quad \text{with} \quad S : X \to V \quad \text{and} \quad T : V \to V \tag{8}$$

其中 V 也是一个希尔伯特空间。 S 的伴随算子是映射 $S^*: V \to X^*$，满足等式

$$(Sx, v)_V = \langle x, S^*v\rangle_{X\times X^*} \quad \text{for all} \quad v \in V \text{ and } x \in X.$$

此外，我们假设算子 S 是紧且单射的，而算子 T 在 Range(S) 上有界且严格强制。注意，根据算子 A 的因子分解可知，它也是正且紧的。

在 [24], 中，证明了可以将 Range(S^*) 与 A 的奇异值分解联系起来，记作 $\{\lambda_n;\ x_n;\ \ell_n\} \in \mathbb{R}_{>0} \times X \times X^*$，使得

$$\ell \in \mathrm{Range}(S^*) \quad \text{if and only if} \quad \sum \frac{1}{\lambda_n} |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 < \infty \tag{9}$$

（当 A 将 X 映射到自身时，参见 [21] ）。注意，由于 $\lambda_n \to 0$随 $n \to \infty$ （迅速）变化，已证明了（9）的一个正则化版本。这是因为在形状重建问题中，使用（9）可能会导致一些数值不稳定性（例如参见 [25]）。在上述假设下，证明了

$$\ell \in \mathrm{Range}(S^*) \quad \text{if and only if} \quad \liminf_{\alpha\to 0} \langle x^\alpha\,, Ax^\alpha\rangle_{X\times X^*} < \infty \tag{10}$$

其中， x^α 是 $Ax = \ell$的正则化解。为了定义正则化解x^α ，我们再次使用 A 的奇异值分解，由此得到

$$x^\alpha = \sum \frac{\phi_\alpha(\lambda_n)}{\lambda_n} \overline{\langle x_n, \ell\rangle}_{X\times X^*}\, x_n$$

其中我们用到了

$$(\ell_n\,,\ell)_{X^*} = \langle x_n\,,\ell\rangle_{X\times X^*} \quad \text{for all} \quad n\in\mathbb{N} \quad \text{where} \quad R\ell_n = x_n.$$

这里，我们假设对于 $\alpha>0$，滤波函数族 $\phi_\alpha(t):\,\big[0,\|A\|\big]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足对于 $0<t\leq\|A\|$

$$\lim_{\alpha\to 0}\phi_\alpha(t)=1,\quad \phi_\alpha(t)\leq C_{\text{reg}} \quad \text{and} \quad \phi_\alpha(t)\leq C_\alpha t \quad \text{for all } \alpha>0 \tag{11}$$

其中，常数 C_{reg} 与正则化参数 α 无关。Tikhonov 正则化和 Landweber 迭代的滤波函数分别为

$$\phi_\alpha(t)=\frac{t^2}{t^2+\alpha} \quad \text{and} \quad \phi_\alpha(t)=1-\left(1-\beta t^2\right)^{1/\alpha}, \tag{12}$$

（例如，参见 [31]）。对于 Landweber 迭代，我们假设 $\alpha=1/m$，其中某个 $m\in\mathbb{N}$ 和常数 $\beta<1/\|A\|^2$。请注意，方程（11）中对滤波函数的假设是正则化理论中的标准假设。

接下来，我们将证明一个与（10）类似的结果，其中使用扰动算子 A^δ。在应用中，当测量值受到随机噪声污染时，通常会出现这种情况。我们还需要最后一个假设，即对于所有

$$\phi_\alpha(\lambda_n^\delta)\longrightarrow\phi_\alpha(\lambda_n) \quad \text{as} \quad \delta\longrightarrow 0^+ \quad \text{for all} \quad \alpha>0. \tag{13}$$

因此，我们假设 $\phi_\alpha(t)$ 关于 $0\leq t\leq\|A\|$ 连续。式 (12) 中给出的滤波函数满足这一条件。显然，对于式 (12) 中的两个滤波函数，我们有 $C_{\text{reg}}=1$，并且

$$C_\alpha=1/(2\sqrt{\alpha}) \quad \text{and} \quad C_\alpha=\sqrt{\beta/\alpha}$$

分别对应 Tikhonov 正则化和 Landweber 迭代（例如，参见 [31] 的定理 2.8）。注意，条件 $\phi_\alpha(t)\leq C_\alpha t$ 意味着映射 $t\mapsto\phi_\alpha^2(t)/t$ 在 $t>0$ 且 $\phi_\alpha^2(t)/t=0$ 于 $t=0$ 时，在 $\big[0,\|A\|\big]$ 上一致连续。

由此可知，现在使用 A^δ 的奇异值分解，记为 $\{\lambda_n^\delta;\ x_n^\delta;\ \ell_n^\delta\}\in\mathbb{R}_{>0}\times X\times X^*$，则有

$$x^{\delta,\alpha}=\sum\frac{\phi_\alpha(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}\overline{\langle x_n^\delta,\ell\rangle}_{X\times X^*}\,x_n^\delta \tag{14}$$

其中 $x^{\delta,\,\alpha}$ 是 $A^\delta x=\ell$ 的正则化解。注意，在（14）中我们使用了这一事实：

$$(\ell\,,\ell_n^\delta)_{X^*}=\langle x_\ell\,,\ell_n^\delta\rangle_{X\times X^*} \quad \text{for all} \quad n\in\mathbb{N} \quad \text{where} \quad R\ell=x_\ell.$$

根据式 (14) 中给出的 $x^{\delta,\,\alpha}$ 的表达式，我们现在可以证明本节的主要结果，即将式 (10) 中的结果推广到扰动算子 A^δ。

定理 3.1。 设 $A^\delta : X \to X^*$ 是正紧算子，是满足 (5) 的算子 $A: X \to X^*$ 的扰动。假设 $A = S^*TS$ 使得 S 是紧且单射的，并且 T 在值域 (S) 上严格强制。则有

$$\ell \in Range(S^*) \iff \liminf_{\alpha\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} \langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} < \infty$$

其中 $x^{\delta,\alpha}$ 是由(14) 给出的正则化解，对应于 $A^\delta x = \ell$。

证明。注意，由于 $\{\lambda_n^\delta; x_n^\delta; \ell_n^\delta\} \in \mathbb{R}_{>0} \times X \times X^*$ 是紧算子 A^δ 的奇异值分解，我们有 $A^\delta x_n^\delta = \lambda_n^\delta \ell_n^\delta$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$均成立。因此，我们看到

$$A^\delta x^{\delta,\alpha} = \sum \phi_\alpha(\lambda_n^\delta)\overline{\langle x_n^\delta, \ell\rangle}_{X\times X^*}\, \ell_n^\delta$$

根据 (14)，由 ℓ_n^δ 是关于对偶配对的 x_n^δ 的对偶基这一事实，可得等式

$$\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} = \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta} |\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2.$$

以类似的方式，我们有

$$\langle x^{\alpha}, Ax^{\alpha}\rangle_{X\times X^*} = \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n)}{\lambda_n} |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2.$$

为了证明这一结论，我们对该量进行上下界估计

$$\liminf_{\alpha\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} \langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*}$$

用 $\liminf_{\alpha\to 0^+} \langle x^{\alpha}, Ax^{\alpha}\rangle_{X\times X^*}$ 进行估计，并应用方程 (10) 中的结果。

为此，我们现在将证明上述上界。因此，假设 $N(\delta)$ 由（7）定义，则有

$$\begin{aligned}\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} &= \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta} |\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \qquad (15)\\ &= \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta} |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 + \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big]\\ &\qquad + \sum_{n=N(\delta)+1}^{\infty} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta} |\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2.\end{aligned}$$

注意，由于 A 在 X^*中具有稠密值域，这意味着 A 有无穷多个不同的特征值（因为 X 是无限维的），因此当 $\delta \to 0^+$时， $N(\delta)$趋于无穷大。

为了证明所需的上界，我们首先考虑方程（15）第二行中的中间项

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}\Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big] \\ \le C_\alpha^2 \sum_{n=1}^{N(\delta)} \lambda_n^\delta \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big] \\ \le C_\alpha^2 \lambda_1^\delta \sum_{n=1}^{N(\delta)} \Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big].\end{aligned}$$

注意，在第一个不等式中，我们使用了式 (11) 中关于滤波函数的假设，以及奇异值 λ_n^δ 按非递增顺序排列这一事实。根据定理 2.1，我们有

$$\sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}\Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big] \le C_\alpha^2\, \lambda_1^\delta\, \sqrt[4]{\delta}\, \|\ell\|_{X^*}^2.$$

现在，我们将估计式 (15) 中的最后一项，使得

$$\begin{aligned}\sum_{n=N(\delta)+1}^{\infty} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 &\le C_\alpha^2 \sum_{n=N(\delta)+1}^{\infty} \lambda_n^\delta |\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \\ &\le C_\alpha^2 \lambda_{N(\delta)+1}^\delta \sum_{n=N(\delta)+1}^{\infty} |\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \\ &\le C_\alpha^2 \lambda_{N(\delta)+1}^\delta \|\ell\|_{X^*}^2.\end{aligned}$$

这里，我们使用了以下事实：对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$(\ell_n^\delta, \ell)_{X^*} = \langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}$，并且 ℓ_n^δ 是 X^* 中的正交归一序列。将这两个估计与式 (15) 结合起来，我们有

$$\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \le \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 + C_\alpha^2 \lambda_{N(\delta)+1}^\delta \|\ell\|_{X^*}^2 + C_\alpha^2 \lambda_1^\delta \sqrt[4]{\delta}\|\ell\|_{X^*}^2.$$

我们看到，对上述不等式取 $\liminf_{\delta\to 0^+}$，即可得到估计

$$\liminf_{\delta\to 0^+} \langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \le \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n)}{\lambda_n}|\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2.$$

这是通过标准论证证明第一项收敛到所需估计，而其他项趋于零得到的。由此，我们得到上界

$$\liminf_{\alpha\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} \langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \le \liminf_{\alpha\to 0^+} \langle x^\alpha, Ax^\alpha\rangle_{X\times X^*}. \tag{16}$$

现在，我们证明一个类似的下界，以完成证明。因此，我们再次需要估计

$$\begin{aligned}\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} &= \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \\ &\geq \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 + \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}\Big[|\langle x_n^\delta, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - |\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2\Big]\end{aligned}$$

根据前面的估计，我们有

$$\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \geq \sum_{n=1}^{N(\delta)} \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n^\delta)}{\lambda_n^\delta}|\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2 - C_\alpha^2\lambda_1^\delta\sqrt[4]{\delta}\|\ell\|_{X^*}^2. \tag{17}$$

再次对上述不等式 (17) 取 $\liminf_{\delta\to 0^+}$，得到

$$\liminf_{\delta\to 0^+}\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \geq \sum \frac{\phi_\alpha^2(\lambda_n)}{\lambda_n}|\langle x_n, \ell\rangle_{X\times X^*}|^2$$

其中我们再次利用了当 $\delta \to 0^+$ 时，$N(\delta) \to \infty$，以及谱的连续性。因此，与证明上界时一样，我们取 $\liminf_{\alpha\to 0^+}$，得到

$$\liminf_{\alpha\to 0^+}\liminf_{\delta\to 0^+}\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} \geq \liminf_{\alpha\to 0^+}\langle x^\alpha, Ax^\alpha\rangle_{X\times X^*}. \tag{18}$$

结合方程 (16) 和 (18) 中的估计，我们有

$$\liminf_{\alpha\to 0^+}\langle x^\alpha, Ax^\alpha\rangle_{X\times X^*} < \infty \iff \liminf_{\alpha\to 0^+}\liminf_{\delta\to 0^+}\langle x^{\delta,\alpha}, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} < \infty$$

由方程 (10) 可直接得出该结果，从而证明了这一结论。 □

我们看到，方程 (10) 和定理 3.1 中新得到的结果与 [5] 中的结果相似（另见 [3]）。在 [5], 中，作者提出了广义线性采样法（GLSM）。简而言之，GLSM 考虑对泛函进行最小化

$$\mathcal{J}_\alpha(x;\ell) = \alpha\langle x, Ax\rangle_{X\times X^*} + \|Ax-\ell\|_{X^*}^2$$

其中 A 具有因子分解（8）（对 T 的限制较少）。对于这种情况，可以证明该泛函的极小化元为

$$x^\alpha = \sum \frac{\lambda_n}{\alpha\lambda_n + \lambda_n^2}\overline{\langle x_n, \ell\rangle}_{X\times X^*}x_n.$$

N请注意，这意味着与 GLSM 对应的滤波函数为

$$\phi_\alpha(t) = \frac{t}{\alpha + t} \tag{19}$$

并注意，对于所有 $t > 0$

$$\lim_{\alpha\to 0} \phi_\alpha(t) = 1, \quad \phi_\alpha(t) \le 1 \quad \text{and} \quad \phi_\alpha(t) \le C_\alpha t \quad \text{for all} \quad \alpha > 0$$

其中 $C_\alpha = 1/\alpha$。因此，我们可以看到，针对扰动算子 A^δ 的 GLSM 符合本文提出的理论。由此，若 $x^{\delta,\,\alpha}$ 是以下问题的极小化元

$$\mathcal{J}_\alpha^\delta\big(x;\ell\big) = \alpha\langle x\,, A^\delta x\rangle_{X\times X^*} + \|A^\delta x - \ell\|_{X^*}^2$$

其中 A 和 A^δ 满足定理 3.1 的假设，我们可以得出

$$\ell \in \mathrm{Range}(S^*) \iff \liminf_{\alpha\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} \langle x^{\delta,\alpha}\,, A^\delta x^{\delta,\alpha}\rangle_{X\times X^*} < \infty.$$

这为数值重建提供了另一类可用的滤波函数。此外，这简化了 [5] 中关于扰动的正数据算子的情形的结果。有关 GLSM 的更多应用和若干示例，请参阅 [4, 38, 41] 。

4 散射中的反形状问题应用

本节将把第 3 节建立的理论应用于一个反散射问题。这里，我们将考虑如何根据测得的远场数据重建带有导电涂层的各向同性散射体。针对这一问题的因子分解法最初在 [8] 中进行了研究，另一种因子分解则近期在[15]中进行了研究。借助 [15] 中推导出的远场算子的新因子分解，我们将证明定理 3.1 可应用于这一反形状问题。需要指出的是，当给定的扰动数据算子将一个希尔伯特空间映射到其自身时，定理 3.1 中的对偶配对应替换为该希尔伯特空间上的内积。

我们用 u 表示由 $u = u^s + u^i$ 给出的总场。这里，入射平面波表示为 $u^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}}$，其波数为 $k > 0$，入射方向为 $\hat{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$（即使用单位圆/球面）用于照射散射体 D。在本节中，散射体$D \subset \mathbb{R}^d$（其中 $d = 2$ 或 3）是一个具有 C^2 边界 ∂D 的单连通开集，其单位外法向量为 ν。入射平面波与散射体相互作用时，会产生散射场 $u^s \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，该散射场满足边值问题

$$\begin{aligned} &\Delta u^s + k^2 n(x) u^s = -k^2\big(n(x) - 1\big)u^i && \text{in } \mathbb{R}^d\backslash\partial D \\ &[\![u^s]\!] = 0 \quad \text{and} \quad [\![\partial_\nu u^s]\!] = -\eta(x)\big(u^s + u^i\big) && \text{on } \partial D. \end{aligned} \tag{20}$$

Here，法向导数对任意 ϕ 给定为 $\partial_\nu \phi = \nu \cdot \nabla \phi$。此外，我们有

$$[\![\phi]\!] := (\phi^+ - \phi^-) \quad \text{and} \quad [\![\partial_\nu \phi]\!] := (\partial_\nu \phi^+ - \partial_\nu \phi^-)$$

其中，'−'和'+'分别对应于从 D的内部或外部对 ∂D 取迹。最后，为了封闭该系统，我们对散射场 u^s 施加索末菲辐射条件，其形式为

$$\partial_r u^s - \mathrm{i}k u^s = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{(d+1)/2}}\right) \quad \text{as} \quad r = |x| \to \infty \tag{21}$$

该条件关于角变量$\hat{x} = x/r$一致成立。

我们假设折射率 $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$和电导率 $\eta \in L^\infty(\partial D)$满足相应条件。在 [8], 中已证明，只要满足

$$\Im(n) \geq 0 \ \text{ a.e. in } D \quad \text{and} \quad \Im(\eta) \geq 0 \ \text{ a.e. on } \partial D$$

其中，$\mathrm{supp}(n-1) = D$。因此，众所周知，对于任意入射方向$\hat{y}$，散射场 u^s 具有如下渐近行为（例如参见 [12]）：

$$u^s(x, \hat{y}) = \gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|^{(d-1)/2}} \left\{ u^\infty(\hat{x}, \hat{y}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \quad \text{as} \quad |x| \longrightarrow \infty$$

其中，常数 γ 定义为

$$\gamma = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \quad \text{for} \quad d = 2 \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{4\pi} \quad \text{for} \quad d = 3.$$

这里，远场模式 u^∞ 同时依赖于观测方向$\hat{x}$和入射方向$\hat{y}$。给定测得的远场模式，我们可以定义相应的远场算子，记为 F，其形式为

$$(Fg)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^\infty(\hat{x}, \hat{y}) g(\hat{y}) \, \mathrm{d}s(\hat{y}) \quad \text{for} \quad g \in L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \tag{22}$$

将映射 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$到其自身。

现在，为了应用定理 3.1，我们需要对远场算子 F进行因式分解。为此，我们有 [15] 中的积分恒等式

$$u^s(x) = k^2 \int_D (n(\omega) - 1) \Phi(x, \omega) \big(u^s(\omega) + u^i(\omega) \big) \, \mathrm{d}\omega + \int_{\partial D} \eta(\omega) \Phi(x, \omega) \big(u^s(\omega) + u^i(\omega) \big) \, \mathrm{d}s(\omega) \tag{23}$$

已得到证明。在方程 (23) 中，我们令 $\Phi(x,y)$ 表示亥姆霍兹方程的辐射基本解，其定义为

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) & \text{for} \quad d=2, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{for} \quad d=3 \end{cases} \tag{24}$$

对于 $x \neq y$，其中 $H_0^{(1)}$ 是零阶第一类汉克尔函数。注意，方程 (23) 对应于散射问题 (20)–(21) 的利普曼–施温格积分方程。利用方程 (23)，可得因子分解

$$F = H^* T H$$

with

$$H : L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow L^2(D) \times L^2(\partial D) \quad \text{given by} \quad Hg = \big(v_g\big|_D \,,\, v_g\big|_{\partial D}\big)$$

及其伴随算子 H^*: $L^2(D) \times L^2(\partial D) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 为

$$H^*(\varphi\,,\,\psi) = \int_D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}}\psi(x)\,\mathrm{d}s(x).$$

这里，v_g 是 Herglotz 波算子，定义为

$$v_g(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}} g(\hat{y})\,\mathrm{d}s(\hat{y}).$$

中间算子 T: $L^2(D) \times L^2(\partial D) \longrightarrow L^2(D) \times L^2(\partial D)$ 定义为

$$T(f,h) = \big(k^2(n-1)(f+w)\big|_D \,,\, \eta(h+w)\big|_{\partial D}\big)$$

对于任意 $(f,\ h) \in L^2(D) \times L^2(\partial D)$，其中 $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 是下列方程的唯一解

$$\begin{aligned} &\Delta w + k^2 n(x) w = -k^2\big(n(x)-1\big)f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \backslash \partial D \\ &[\![w]\!] = 0 \quad \text{and} \quad [\![\partial_\nu w]\!] = -\eta(x)\big(w+h\big) \quad \text{on} \quad \partial D \end{aligned} \tag{25}$$

并满足辐射条件 (21)。

为了应用定理 3.1，我们需要研究算子H 和 T的解析性质。因此，注意到 H 由作用于 L^2（D）和L^2（∂D）的积分算子构成，其核为解析函数，这意味着 H是紧的。现在，为了证明 H 的单射性，我们假设 $g \in \mathrm{Null}(H)$，这意味着

$$v_g\big|_D = 0 \quad \text{and} \quad v_g\big|_{\partial D} = 0.$$

利用 $\Delta v_g + k^2 v_g = 0$ 属于 $\mathbb{R}^d$ 这一事实，我们可知，由唯一延拓可得 $v_g = 0$属于 $\mathbb{R}^d$。这意味着 $g = 0$ ，因为 Herglotz 波算子是单射的（例如参见[19]）。接下来，我们考虑算子 T的严格强制性。一般而言， T 在 H的值域上并非严格强制。为了解决这个问题，我们将使用增广远场算子

$$F_\sharp = \big|\Re(F)\big| + \big|\Im(F)\big|$$

其中

$$\Re(F) = \frac{1}{2}(F + F^*) \quad \text{and} \quad \Im(F) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(F - F^*).$$

注意，根据定义， $\Re(F)$ 和 $\Im(F)$ 是自伴紧算子，因此可以通过谱分解（即希尔伯特–施密特定理）计算其绝对值。现在，我们回顾 [15] 中关于算子 T 的解析性质的以下结果。

引理 4.1。 设 $T\colon L^2(D) \times L^2(\partial D) \longrightarrow L^2(D) \times L^2(\partial D)$ 由下式给出

$$T(f, h) = \big(k^2(n-1)(f+w)\big|_D\,,\, \eta(h+w)\big|_{\partial D}\big)$$

其中 $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 是式 (25) 的辐射解。若 $\Re(n-1)$ 和 $\Re(\eta)$均为一致正定（或负定），则有：

1. $\Re(T)$ 是一个强制算子与一个紧算子之和。
2. 当 k 不是透射特征值时，$\overline{\Im(T)}$ 在值域(H) 上为正 .

根据引理 4.1 的结果，我们可以得出增广远场算子的因子分解为

$$F_\sharp = H^* T_\sharp H$$

其中，中间算子 $T_\sharp$ 在 $L^2(D) \times L^2(\partial D)$上严格强制。这一结论由 [32]中定理 2.15 的证明给出。注意，在引理 4.1 中，我们必须假设波数 k 不是相应的透射特征值。这些特征值可视为满足以下条件的波数 k ： 存在非散射入射波。关于 (20)–(21) 的相应透射特征值问题，已有多篇论文进行了研究。在[7] 中，证明了实值系数情形下存在无穷多个特征值；在 [26] 中，证明了当$|n-1|^{-1} \in L^\infty(D)$ 且 $\eta^{-1} \in L^\infty(\partial D)$ 时，透射特征值集合是离散的，而这正符合我们的假设。

现在，我们需要证明的最后一点是：对于依赖于采样点 $z \in \mathbb{R}^d$ 的某个 $\ell_z \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$，有 $\ell_z \in \mathrm{Range}(H^*)$ 当且仅当 z 位于散射体 D 中。为此，我们令

$$\ell_z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cdot\hat{y}}$$

它是式 (24) 中定义的基本解 $\Phi(z,\ y)$ 的远场模式。有了这一点，我们现在可以将值域 $\mathrm{Range}(H^*)$ 与散射体 D 联系起来。

定理 4.1。 设 $H^*:\ L^2(D)\times L^2(\partial D)\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 由下式给出

$$H^*(\varphi\,,\,\psi)=\int_D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}}\varphi(x)\,dx+\int_{\partial D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cdot\hat{y}}\psi(x)\,ds(x).$$

于是我们有

$$z\in D\iff \ell_z\in \mathrm{Range}(H^*).$$

证明。 为证明该结论，我们首先注意到 $H^*(\varphi,\,\psi)=v^\infty$，其中函数 v 由下式给出

$$v=\int_D \Phi(\cdot\,,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial D}\Phi(\cdot\,,x)\psi(x)\,\mathrm{d}s(x).$$

因此，我们有 v 是亥姆霍兹方程的体积势与单层势之和。根据体积势和单层势的映射性质，我们有 $v\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$。现在，利用单层势法向导数跨越 ∂D 的跳跃关系（例如参见 [33]），我们有 v 是下列方程的唯一解

$$\begin{aligned}&\Delta v+k^2v=0\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^d\backslash\overline{D}\quad\text{and}\quad\Delta v+k^2v=-\varphi\quad\text{in}\quad D\\&[\![v]\!]=0\quad\text{and}\quad[\![\partial_\nu v]\!]=-\psi\quad\text{on}\quad\partial D\end{aligned}\tag{26}$$

并满足辐射条件 (21)。

现在，为证明该结论，我们假设 $z\in D$。于是，我们有 $\Phi(z,\cdot)$ 是亥姆霍兹方程在 $\mathbb{R}^d\backslash\{z\}$中的光滑解。这意味着 $\Phi(z\,,\cdot)\big|^+_{\partial D}\in H^{3/2}(\partial D)$。根据提升定理，我们有一个 $w_z\in H^2(D)$，其中

$$w_z^-=\Phi^+(z\,,\cdot)\quad\text{on}\quad\partial D.$$

因此，我们令

$$v_z=\begin{cases}w_z & \text{in}\quad D\\ \Phi(z\,,\cdot) & \text{in}\quad\mathbb{R}^d\backslash\overline{D}\end{cases}$$

并注意到 $v_z\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 是方程 (26) 的辐射解，且满足

$$\varphi_z=-(\Delta w_z+k^2w_z)\in L^2(D)\quad\text{and}\quad\psi_z=\big(\partial_\nu w_z^- -\partial_\nu\Phi^+(z\,,\cdot)\big)\in L^2(\partial D).$$

由于 $\Phi(z,\cdot)=v_z$属于 $\mathbb{R}^d\backslash D$，因此我们有 $\ell_z=v_z^\infty$，这意味着 $\ell_z=H^*(\varphi_z,\psi_z)$。

为通过反证法继续论证，假设 $z\in\mathbb{R}^d\backslash D$，且满足

$$\ell_z=H^*(\varphi_z,\psi_z)\quad\text{for some}\quad(\varphi_z,\psi_z)\in L^2(D)\times L^2(\partial D).$$

这意味着存在方程 (26) 的一个辐射解，记为 $v_z\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，使得 $\Phi(z,\ \cdot)=v_z$在 $\mathbb{R}^d\backslash\big(D\cup\{z\}\big)$ 中成立，这由 Rellich 引理可知。利用椭圆正则性（例如参见 [20]），可知 v_z在任意球 $B(z,\ \epsilon)\subset\mathbb{R}^d\backslash D$ 内连续。因此，v_z在 z 附近有界，但 $\Phi(z,\ \cdot)$ 在 z 处有奇点，这就产生了矛盾，从而证明了该结论。 □

利用定理 4.1，我们已经具备所需的一切，可以证明正则化分解法适用于我们的问题。事实上，结合本节中的分析，可得以下定理。该定理将散射体 D 与受随机噪声扰动的测量远场算子联系起来。

定理 4.2。 假设 $F^\delta : L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 是由式 (22) 给出的远场算子 F 的扰动，其中 $F_\sharp^\delta$ 是一个正紧算子。若 k 不是透射特征值，且 $\Re(n-1)$ 和 $\Re(\eta)$ 均一致正定（或负定），则

$$z \in D \iff \liminf_{\alpha\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} \left(g_z^{\delta,\alpha}, F_\sharp^\delta g_z^{\delta,\alpha}\right)_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty$$

其中，$g^{\delta}{}_{,z}{}^{\alpha}$是 $F_\sharp^\delta g = \ell_z$的正则化解。

一般而言，对于已知的噪声水平 $0 < \delta \ll 1$，可以采用下一节所述方法中的 $\alpha = \alpha(\delta)$。下一节将通过数值计算对此进行探讨。此外，也可以像文献 [3]中那样，放宽对系数 $n(x)$的假设。

5 数值示例

这里，我们将给出几个数值示例，以说明前几节证明的理论结果。本节将使用 MATLAB R2022a 进行数值重构。为此，我们将根据与式 (20)–(21) 对应的远场模式 u^∞ 恢复散射体 D 。在所有示例中，为简单起见，我们假设参数 n 和 η 为常数，其取值为

$$n = 4 + 2\mathrm{i} \quad \text{and} \quad \eta = 2 + \mathrm{i}.$$

因此，我们得出 (20)–(21) 是适定的，并且可以使用定理 4.2 根据测得的远场算子恢复该散射体。

为了继续，我们需要合成计算远场模式。为此，回顾一下，散射场 $u^s(x,\ \hat{}y)$ 由 (23) 给出，并且在 [15] 中我们看到，对于满足 $|D| \ll 1$ 的散射体

$$u^\infty(\hat{x},\hat{y}) \approx k^2(n-1)\int_D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega\cdot(\hat{x}-\hat{y})}\,\mathrm{d}\omega + \eta\int_{\partial D} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega\cdot(\hat{x}-\hat{y})}\,\mathrm{d}s(\omega).$$

请注意，在我们的示例中，我们利用了 n 和 η 均为常数这一事实。这对应于导电边界散射问题中远场模式的 Born近似版本。这意味着可以使用 MATLAB 中的 32 点高斯求积法计算远场模式。这里，我们假设散射体 D 的边界由下式给出

$$\partial D = r(\theta)\,(\cos(\theta),\sin(\theta)) \qquad \text{for} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

在我们的示例中， 2π 周期径向函数 $r(\theta)$由下式给出

$$r(\theta) = 0.5\big(1 - 0.3\sin(4\theta)\big)$$

对于一个星形散射体。请注意，这是一个非凸散射体（见图1），我们将看到，即使存在含噪数据，正则化分解法也能提供准确的重建。

为了离散化该问题，我们将在单位圆上 64 个等间距点处通过数值积分计算 $u^\infty(\hat{x}_i,\ \hat{y}_j)$，这些点由下式给出

$$\hat{x}_i = \hat{y}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i) \quad \text{with} \quad \theta_i = 2\pi(i-1)/64.$$

这得到如下离散化的远场算子

$$\mathbf{F} = [u^\infty(\hat{x}_i, \hat{y}_j)]_{i,j=1}^{64}$$

将用于恢复散射体。因此，与 [24] 中一样，定理 4.2 的离散化版本所对应的成像泛函为绘制成像泛函

$$W(z) = \left[\sum_{j=1}^{64} \frac{\phi^2(\sigma_j;\alpha)}{\sigma_j}\big|(\mathbf{u}_j, \boldsymbol{\ell}_z)\big|^2\right]^{-1} \qquad \text{with} \qquad \boldsymbol{\ell}_z = [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{x}_i\cdot z}]_{i=1}^{64}. \tag{27}$$

这里 σ_j 是奇异值，$\mathbf{u}^j$ 是.....的左奇异向量

$$\mathbf{F}_\sharp = \big|\Re(\mathbf{F})\big| + \big|\Im(\mathbf{F})\big|$$

滤波函数 $\phi(t;\alpha)$ 由式 (12) 或 (19) 给出。请注意，自伴矩阵的绝对值由其特征值分解给出。

例1： 在图1所示的首次重建中，我们假设离散化的远场算子所对应的数据未添加噪声。然后，我们可以使用式（12）中给出的 Landweber 滤波函数及参数 $\alpha = 10^{-5}$和 $\beta = 1/(2\|\mathbf{F}_\sharp\|_2^2)$，绘制成像泛函 $W(z)$。由此可见，采用和不采用正则化都能很好地重建散射体。

现在，我们希望说明，当数据中添加了噪声时，重建散射体就需要正则化。为此，我们需要定义添加了随机噪声的离散化远场算子，如下所示：

$$\mathbf{F}^\delta = [u^\infty(\hat{x}_i, \hat{y}_j)\,(1 + \delta E_{i,j})]_{i,j=1}^{64}$$

其中随机复值矩阵 $\mathbf{E}$ 满足 $\|\mathbf{E}\|_2 = 1$。同样，远场模式$u^\infty(\hat{x}_i,\hat{y}_j)$也通过与图1相同的数值积分计算。这里，实部和

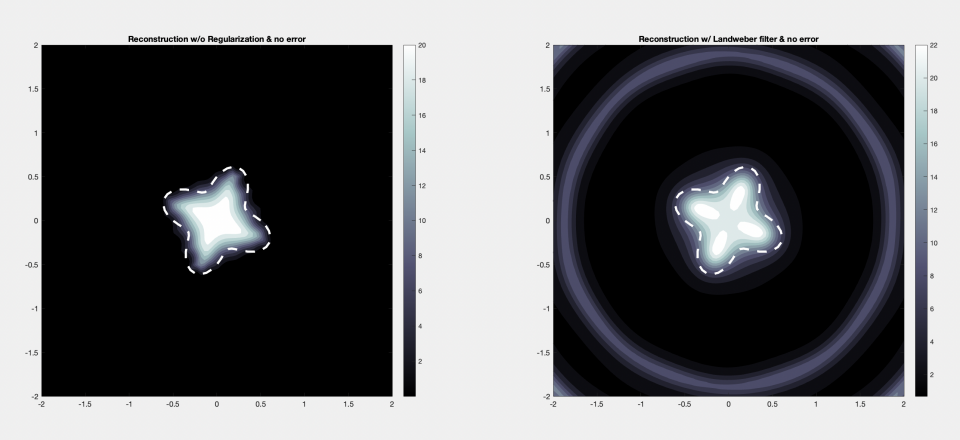


图1：未向远场数据添加误差时，采用正则化和未采用正则化的散射体重建结果。此处使用式（12）给出的 Landweber 滤波器。左：未采用正则化的重建结果；右：采用正则化的重建结果。

矩阵 $\mathbf{E}$ 的虚部在 ± 1 之间随机分布，然后进行归一化。在这种情况下，我们令

$$\mathbf{F}_\sharp^\delta = \left|\Re(\mathbf{F}^\delta)\right| + \left|\Im(\mathbf{F}^\delta)\right|$$

在式（27）中，我们使用与算子 $\mathbf{F}_\sharp^\delta$ 相对应的奇异值和向量。在以下示例中，我们将看到，添加到远场数据中的噪声如何影响采用正则化和未采用正则化的重建结果。

示例 2： 在图2所示的重建结果中，我们展示了向数据添加误差的情况。与前一个示例一样，我们使用 Landweber 滤波函数作为正则化方案，并再次令 $\beta = 1/(2\|\mathbf{F}_\sharp\|_2^2)$。我们可以看到，数据中添加的噪声会破坏未采用正则化的重建结果。这里，我们令噪声水平为 $\delta = 0.05$，并像前一种情况一样，临时取 $\alpha = 10^{-5}$。

例 3： 在图 3 所示的重建结果中，我们展示了采用式 (12) 中给出的 Tiknohov 滤波器进行的重建。同样，我们希望说明正则化能够稳定重建。为此，我们再次给出散射体 D 在正则化和未正则化情况下的数值重建。本例中，我们再次令给定的噪声水平为 $\delta = 0.05$，并取 $\alpha = 10^{-5}$ 作为临时值。

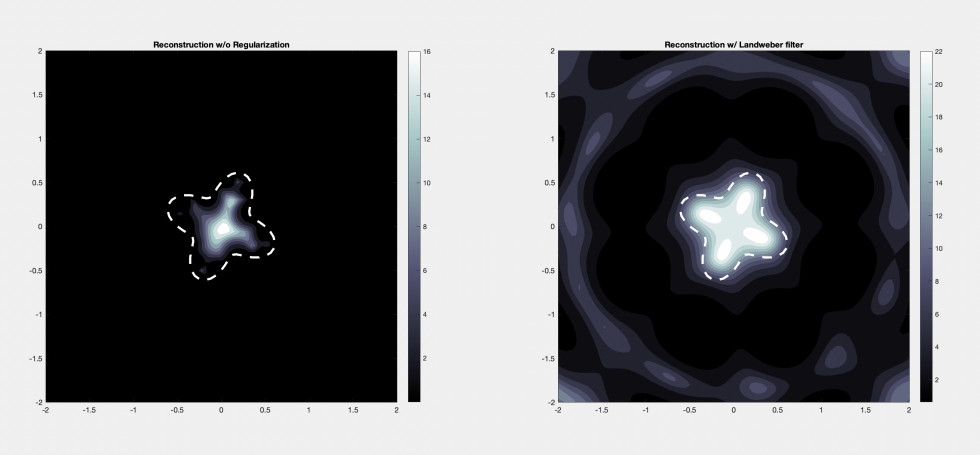


图 2：在远场数据中加入 5% 误差时，未进行正则化和进行正则化的散射体重建。这里使用式 (12) 给出的 Landweber 滤波器。左：未进行正则化的重建；右：进行正则化的重建。

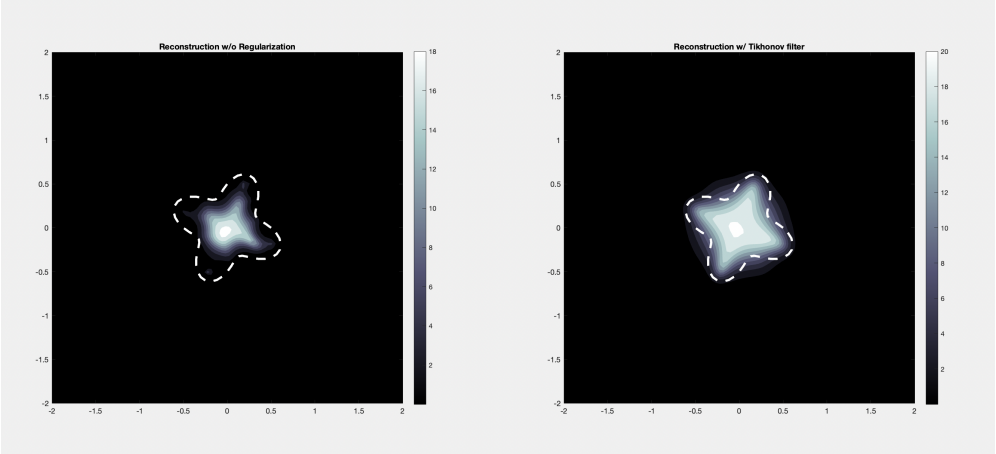


图 3：在远场数据中加入 5% 误差时，未进行正则化和进行正则化的散射体重建。这里使用式 (12) 给出的 Tiknohov 滤波器。左：未进行正则化的重建；右：进行正则化的重建。

例 4： 在图 4 所示的重建结果中，我们再次展示了正则化有助于提高含噪数据下的稳定性。本例中，我们使用与式 (19) 中给出的 GLSM 相关联的滤波函数。同样可以看出，正则化为含噪数据提供了必要的稳定性。这里取噪声水平 $\delta = 0.05$，正则化参数为 $\alpha = 10^{-5}$。

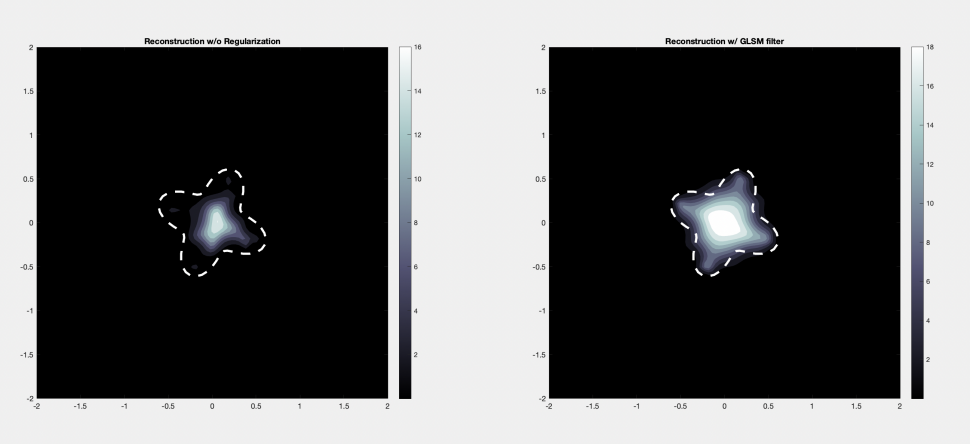


图 4：远场数据中加入 5% 误差时，采用和不采用正则化对散射体进行重建。此处使用式 (19) 中给出的 GLSM 滤波器。左：未采用正则化的重建；右：采用正则化的重建。

现在，我们希望通过解析方法确定正则化参数 $\alpha = \alpha(\delta)$，其思路受定理 3.1 证明的启发。为此，我们注意到，对于不等式 (17) 中的 $\alpha(\delta)$，我们需要

$$C_{\alpha(\delta)}^2 \sqrt[4]{\delta} \longrightarrow 0^+ \quad \text{and} \quad \alpha(\delta) \longrightarrow 0^+ \quad \text{as} \quad \delta \longrightarrow 0^+.$$

这里，C_α 取决于所使用的正则化滤波函数。因此，为了确定合适的 $\alpha(\delta)$，我们将针对某个 $p > 0$求解 $C_{\alpha(\delta)}^2 \sqrt[4]{\delta} = \delta^p$。由此得到正则化参数

$$\alpha_{\mathrm{Tik}}(\delta) = \frac{1}{4}\delta^{\left(\frac{1}{4}-p\right)}, \quad \alpha_{\mathrm{Land}}(\delta) = \frac{1}{2\|\mathbf{F}_\sharp^\delta\|_2^2}\delta^{\left(\frac{1}{4}-p\right)} \quad \text{and} \quad \alpha_{\mathrm{GLSM}}(\delta) = \delta^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-p\right)} \tag{28}$$

分别对应于 Tikhonov 正则化、Landweber 迭代和 GLSM。请注意，对于 Landweber 迭代，我们采用了与前面示例相同的 $\beta = 1/(2\|\mathbf{F}_\sharp^\delta\|_2^2)$。由于我们要求 $\alpha(\delta) \longrightarrow 0^+$ 为 $\delta \longrightarrow 0^+$，这意味着 $p \in (0, 1/4)$。此外，我们将 $m = \lceil 1/\alpha_{\mathrm{Land}}(\delta) \rceil$ 作为 Landweber 迭代中的参数。

例 5： 在图 5 所示的重建结果中，我们测试由 (28) 给出的正则化参数 $\alpha(\delta)$。我们展示散射体的数值重建，其中对每个滤波函数均取 $p = 1/8$。由此得到

$$\alpha_{\mathrm{Tik}}(\delta) = \frac{1}{4}\delta^{1/8}, \quad \alpha_{\mathrm{Land}}(\delta) = \frac{1}{2\|\mathbf{F}_\sharp^\delta\|^2}\delta^{1/8} \quad \text{and} \quad \alpha_{\mathrm{GLSM}}(\delta) = \delta^{1/16}$$

作为给定的正则化参数。这里我们设定给定的噪声水平为 $\delta = 0.01$，并展示各正则化滤波器及其对应正则化参数得到的重建结果。对于图 5，我们计算正则化参数

$$\alpha_{\mathrm{Tik}}(0.01) = 0.1406, \quad \alpha_{\mathrm{Land}}(0.01) = 3.0784 \times 10^{-8} \quad \text{and} \quad \alpha_{\mathrm{GLSM}}(0.01) = 0.7499$$

用于重建。

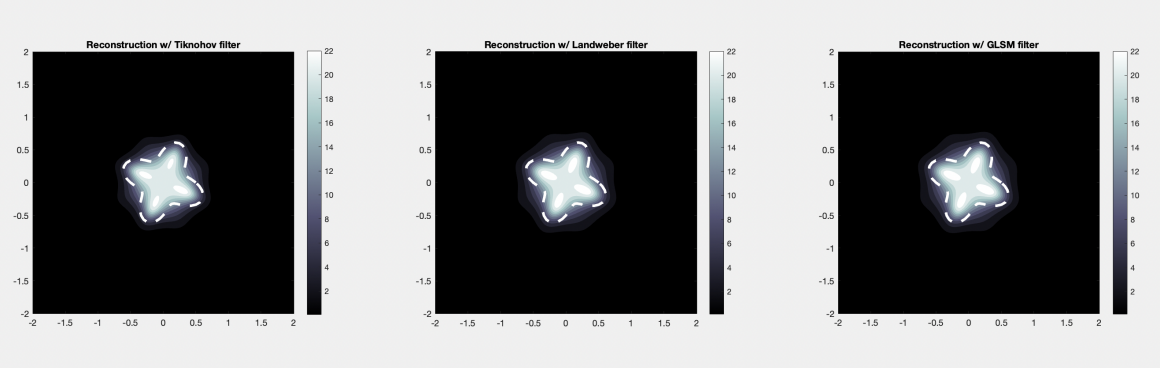


图 5：通过式 (12) 和 (19) 中给出的 Tiknohov、Landweber 和 GLSM 滤波器进行重建。此处，正则化参数 $\alpha(\delta)$ 由式 (28) 针对 $p = 1/8$ 给出。

6 结论

总之，我们对含噪数据下的正则化分解法进行了理论和数值研究。本文证明，所讨论的正则化策略具有良好的抗噪稳定性，而且实现起来计算简单。事实上，要实现该方法，只需对数据算子进行奇异值分解，即可获得稳定的重建结果。我们还给出了一种确定合适正则化参数的解析方法。作为应用，我们将正则化分解法用于一个逆散射问题，根据远场数据重建散射体。正如 [22, 24] 中所知，该方法还可应用于其他成像方式，例如电成像和漫射光学断层成像。

致谢： I. Harris 的研究部分由 NSF DMS Grant 2107891 资助。

参考文献

[1] T. Arens，线性采样法为何有效，《Inverse Problems》 **20** 163–173（2004 ）.

[2] T. Arens 和 A. Lechleiter，与线性采样法相关的形状重建指示函数，*SIAM*《成像科学杂志》，**8(1)** 513–535（2015）。[3] L. Audibert，广义线性采样法和因子分解法仅取决于边界上对比度的符号，*Inverse Problems* & 成像**11(6)**1107–1119（2017）。[4] L. Audibert、L. Chesnel、H. Haddar 和 K. Napal，利用声波成像裂纹网络的定性指示函数，*SIAM*《科学计算杂志》，**43(2)** B271–B297（2021）。[5] L. Audibert 和 H. Haddar，线性采样法的广义表述：根据远场测量值对目标体进行精确刻画，*InverseProblems* **30** 035011（2014）。[6] S. Axler，《正确的线性代数》Springer 2015[7] O. Bondarenko、I. Harris 和 A. Kleefeld，具有导电边界的非均匀介质中的内部透射特征值问题，《应用分析》，**96(1)**，（2017），2–22。[8] O. Bondarenko 和 X. Liu，具有导电边界条件的障碍物逆散射因子分解法，*Inverse Problems*，**29** （2013），095021。[9] L. Borcea 和 S. Meng，波导中的因子分解法与偏移成像，*Inverse Problems*，**35**，（2019），124006。[10] H. Brezis，《泛函分析、*Sobolev*空间与偏微分方程》。Springer 2011。[11] M. Brühl、M. Hanke 和 M. Pidcock，利用静电测量进行裂纹检测。*ESAIM*《数学建模与数值分析》，**35**，595–605。[12] F. Cakoni、D. Colton 和 H. Haddar，《逆散射理论与透射特征值》，CBMS丛书，SIAM出版物88，（2016）。[13] F. Cakoni、S. Meng 和 H. Haddar，非均匀介质中空腔的因子分解法，*Inverse Problems*，**30**，（2014）045008。[14] F. Cakoni、H. Haddar 和 A. Lechleiter，时域远场逆散射问题的因子分解法，*SIAM*《数学分析杂志》，**51(2)** 854–872（2019）。[15] R. Ceja Ayala 和 I. Harris，利用远场数据重建具有导电边界的小型及扩展散射体。预印本（2023）arXiv:2301.10027

[16] M. Chamaillard、N. Chaulet 和 H. Haddar，《一般边界条件下因子分解法的分析》，《逆问题与病态问题杂志》，22(5)，643–670（2014）。[17] D. Colton 和 H. Haddar，《互易间隙泛函在逆散射理论中的应用》。《Inverse Problems》，21（2005）。[18] D. Colton 和 A. Kirsch，《一种求解共振区域内逆散射问题的简便方法》，《Inverse Problems》12，383–393（1996）。[19] D. Colton 和 R. Kress，《逆声学与电磁散射理论》，Springer，纽约，第三版，2013年。[20] L. Evans，《偏微分方程》，2^{nd} 版，美国数学学会，2010年。[21] B. Gebauer，《实椭圆问题的因子分解法》，《Z. Anal. Anwend.》，25，81–102（2006年）。[22] G. Granados 和 I. Harris，《采用 Robin 传输条件的电阻抗层析成像中小型区域与扩展区域的重建》。《Inverse Problems》，38（2022年），105009。[23] R. Griesmaier 和 H.-G. Raumer，《实验气动声学中随机源识别的因子分解法与 Capon 方法》。《Inverse Problems》，38（2022年），115004。[24] I. Harris，《应用于漫射光学层析成像的因子分解法正则化》。《Inverse Problems》，37（2021年），125010。[25] I. Harris，《因子分解法的正则化及其在逆散射中的应用》。已被美国数学学会《当代数学》接受，arXiv:2202.13411。[26] I. Harris 和 A. Kleefeld，《导电边界条件下透射特征值的分析与计算》，《应用分析》，101(6)（2022年），1880–1895。[27] I. Harris 和 S. Rome，《小型各向同性散射体与扩展各向异性散射体的近场成像》，《应用分析》，96(10)（2017年），1713–1736。[28] T. Kato，《线性算子的扰动理论》，2^{nd} 版，Springer，1995年。[29] A. Kirsch，《利用远场算子的谱数据刻画散射障碍物的形状》，《Inverse Problems》，14，1489–512（1998年）。[30] A. Kirsch，《一类逆椭圆问题的因子分解法》，《数学通讯》，278(3)（2005年），258–277。

[31] A. Kirsch, 《反问题数学理论导论》， 2^{nd}版，Springer，2011年。[32] A. Kirsch 和 N. Grinberg, 《反问题的因子分解法》，牛津大学出版社，牛津，2008年。[33] R. Kress, 《线性积分方程》，Springer，纽约，第三版，2014年。[34] E. Kreyszig, 《泛函分析导论及其应用》，Wiley经典丛书，1989年。[35] T. Lähivaara、P. Monk 和 V. Selgas, 《利用电磁波确定多重散射体形状的时域线性采样法》，《应用数学计算方法》**22(4)**（2022年），889–913。[36] A. Lechleiter, 《因子分解法的一种正则化技术》，《*Inverse Problems*》，**22** 1605（2006年）。[37] A. Lechleiter、N. Hyvönen 和 H. Hakula, 《因子分解法在阻抗层析成像完全电极模型中的应用》，《*SIAM*应用数学杂志》，**68**（2008年），1097–1121。[38] M. Liu 和 J. Yang, 《外部斯托克斯反问题的采样法》，《*SIAM*应用数学杂志》，**68**（2008年），1097–1121。[39] G. Nakamura 和 H. Wang, 《含夹杂物的热方程线性采样法》，*Inverse Problems*，**29**（2013年），104015。[40] D.-L. Nguyen, 《TM偏振电磁波下各向异性衍射光栅的形状识别》，《应用分析》，**93** 1458–1476（2014年）。[41] F. Pourahmadian、B. Guzina 和 H. Haddar, 《异质裂缝弹性波探测的广义线性采样法》，*Inverse Problems*，**33**（2017年），055007。