arXiv:2304.01327v1 [math.CV] 3 Apr 2023

解析函数空间上的自同构与广义投影

RAHUL MAURYA、JAYDEB SARKAR 和 Aryaman Sensarma

Abstract. 我们完整地分类了开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上有界解析函数的两个闭子代数的自同构：一个是由在原点处取值为零的函数构成的子代数，另一个是由在原点处一阶导数为零的函数构成的子代数。后一个子代数称为尼尔代数。我们还刻画了 $H^p(\mathbb{D})$ 和 $H^p(\mathbb{D}^2)$ 上的广义三循环投影，$1 \leq p \leq \infty, p \neq 2$。

1. Introduction

令 $\mathbb{D}$ 表示复平面中的开单位圆盘。记 $H^\infty(\mathbb{D})$ 为由 $\mathbb{D}$ 上所有有界解析函数构成的交换巴拿赫代数，且

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(z)| : z \in \mathbb{D}\} \qquad (\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})).$$

这是最重要的非可分巴拿赫代数之一，在函数论、算子理论和算子代数中有着广泛的应用。圆盘代数 $A(\mathbb{D})$ 是经典可分巴拿赫代数中的另一个重要空间。回顾一下，

$$A(\mathbb{D}) = H^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{T}).$$

一般来说，给定 $\mathbb{C}$ 中的一个域 Ω，我们用 $A(\Omega)$ 表示可连续延拓到 Ω 边界上的解析函数空间。L. Bers 的一项经典结果 [4] 为我们的讨论奠定了基础：两个域 Ω_1 和 Ω_2 共形等价，当且仅当 $A(\Omega_1)$ 与 $A(\Omega_2)$ 之间存在一个自同构。回顾一下，两个域共形等价，是指它们之间存在一个保角的双射解析映射。这等价于说，这两个域双全纯等价。下文中，我们将自同构称为线性代数同构。

回到 $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{D}$ 这一特殊情形，同构 $T : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ 恰由下式给出（同样参见 Bers [4]）

$$Tf = f \circ \tau \qquad (f \in A(\mathbb{D})),$$

对于某个定义在 $\mathbb{D}$ 上的共形映射 τ（即 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$）。此外，对于 $H^\infty(\mathbb{D})$，我们也有相同的结论（这是 Rudin [22] 的一个特例）：$H^\infty(\mathbb{D})$ 之间的同构由上述共形映射诱导。正如 Bers 和 Rudin 所指出的，Chevalley 和 Kakutani 早期的工作也启发了这一进展。另见 [21, 23]，了解更经典的发展。

2020 年数学主题分类：46B20、30H05、46J15、47L20、46J10、46E15、47B38。关键词与短语：有界解析函数，H^p-空间，自同构，尼尔代数，广义三循环投影。

本文考察 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的两个重要子代数的自同构，即 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 和尼尔代数。首先，我们回顾

$$H_0^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}.$$

与 $H^\infty(\mathbb{D})$ 一样，上述空间对泛函分析至关重要。例如，参见 Lomonosov[18]，了解 Bishop-Phelps-Bollob´as 定理背景下的反例。接下来，我们回顾尼尔代数 $H_1^\infty(\mathbb{D})$（参见 [7]）：

$$H_1^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}) : f'(0) = 0\}.$$

该空间常用于检验经典理论，例如插值问题、冠定理、交换子提升定理和不变子空间理论等。以下总结了关于 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 和$H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构的主要结果（参见定理 2.3 和 3.1）。对于任意巴拿赫空间 X，定义在 X 上的有界线性算子所构成的巴拿赫代数记为 $\mathscr{B}(X)$。

定理 1.1。设 $X = H_0^\infty(\mathbb{D})$ 或 $H_1^\infty(\mathbb{D})$，并设 $T : X \to X$ 是一个映射。那么， T 是自同构，当且仅当存在 $\theta \in \mathbb{R}$ ，使得

$$(Tf)(z) = f(e^{i\theta}z),$$

对所有 $f \in X$ 和 $z \in \mathbb{D}$。

基本上，这表明 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 和 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构是简单的（或平凡的）。在此过程中，我们证明了（见定理 2.1）： $H^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构保持内函数。我们还证明了（见推论 3.2）：如果 T 是$H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的满射线性等距映射，那么存在 $\alpha \in \mathbb{T}$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ ，使得

$$Tf(z) = \alpha f(e^{i\theta}z),$$

对所有 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$。上述事实的证明思路很直接。归根结底，只需证明 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 可以表示为一致代数。

本文的第二个目标是描述 $H^p(\mathbb{D})$ 和 $H^p(\mathbb{D}^2)$ 上的广义三圆投影的结构，其中 $1 \leq p \leq \infty$。广义三圆投影的概念源于双循环投影的思想，而双循环投影也与巴拿赫空间上满射等距映射的结构有关。为了更加精确，我们首先回顾巴拿赫空间上投影的定义。给定一个巴拿赫空间 X （这里所有巴拿赫空间均为$\mathbb{C}$上的空间），在 X 上的有界线性算子 P 称为投影，如果

$$P^2 = P.$$

如果存在某个 $\lambda \in \mathbb{T}$，使得 $P + \lambda(I - P)$ 是满射线性等距映射，则称投影 $P \in \mathscr{B}(X)$ 为双圆投影；如果存在$\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ ，使得 $P + \lambda(I - P)$ 是满射线性等距映射 [9]，则称其为广义双圆投影。

投影是构建更复杂算子的基本组成部分，但其复杂程度会因巴拿赫空间而异。另一方面，满射线性等距映射通常有助于解释巴拿赫空间和希尔伯特空间上的算子 [8]。鉴于前述

及后续定义，我们注意到，尽管使用满射线性等距映射来构造特定投影有诸多好处（本文也将对此进行讨论），但这一机制本身的计算开销可能很大。

广义双圆投影已在一些经典巴拿赫空间中得到完整描述。例如，赋予各种 G不变范数的有限维巴拿赫空间 [9],算子极小理想 [5], JB^*三元组 [13], 某些 Hardy 空间 [16], L^p空间， $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ [17]，等等。

广义三循环投影是一种更精细的投影概念，早先在 [1]中引入。不过，这里给出的定义源自 [6, 定义 1.4]。

定义 1.2. 若巴拿赫空间 X 上的非零投影 P 满足以下条件，则称其为广义三循环投影：存在互不相同的标量 $\lambda, \mu \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ 和非零投影$Q, R \in \mathscr{B}(X)$，使得 $P \oplus Q \oplus R = I$ 且 $P + \lambda Q + \mu R$ 是一个满射线性等距映射。

广义三圆投影及相关主题近年来受到越来越多的关注。这也与巴拿赫空间上关于投影和等距映射的问题有关。对于一些已知空间，广义三圆投影已得到完全刻画： $C(X)$ [1], $\mathbb{C}^n$ 以及算子代数上的极小范数理想 $M_n(\mathbb{C})$ [2], $\mathcal{B}(H)$ [6],JB^*-三重 [14], 希尔伯特 $C_0(X)$-模 [15], ，以及有界变差函数和绝对连续函数构成的巴拿赫空间 [12]。

通常，通过求解一组与投影相关的方程来分类广义三圆投影。得益于 ˇCuka 和 Iliˇ sevi´c 的工作 [6] （另见引理 4.1），我们采用相同的方法。关于 $H^p(\mathbb{D})$ 上广义三圆投影的分类（见定理 4.3），似乎与此前在其他经典巴拿赫空间类别上得到的分类结果相似。然而，关于 $H^p(\mathbb{D}^2)$ 的结果（见定理 5.1）则有显著不同，这或许凸显了多复变数的复杂性。我们还指出，后一个结果是多复变数情形下广义三圆投影的首个实例。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构分类。我们还证明， $H^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构保持内函数。第 3 节研究尼尔代数 $H_1^\infty(\mathbb{D})$，并对 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构进行分类。我们还对 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的满射线性等距映射进行分类。第 4 节开启本文的后半部分。在这一节中，我们刻画$H^p(\mathbb{D})$、 $1 \leq p \leq \infty$、 $p \neq 2$ 上的广义三循环投影。最后一节，即第 5 节，对 $H^p(\mathbb{D}^2)$、 $1 \leq p \leq \infty$、 $p \neq 2$ 上的广义三循环投影进行分类。

2. Automorphisms of $H_0^\infty(\mathbb{D})$

本节旨在对 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构进行分类。我们首先探讨一个专家可能熟悉的自然问题，但未能在文献中找到相关论述。证明使用了一个二元函数论结果。

定理 2.1. $H^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构保持内函数。

证明. 设 T 是 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的一个自同构，且 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ 是一个内函数。反设 $T\varphi$ 不是内函数。则存在 $\epsilon > 0$ ，使得 $m(K) > 0$，其中

$$K = \{z \in \mathbb{T} : |T\varphi(z)| < 1 - \epsilon\}.$$

定义函数 $T\varphi \otimes 1 \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$ 如下：

$$(T\varphi \otimes 1)(z_1, z_2) := (T\varphi)(z_1),$$

对所有 $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$。令 $K_1 = K \times \mathbb{T}$。由于

$$|(T\varphi \otimes 1)(z_1, z_2)| < 1 - \epsilon,$$

对所有 $(z_1, z_2) \in K_1$，可知 $m(K_1) > 0$，因此 $T\varphi \otimes 1$ 不是内函数。现在，鉴于 K_1，存在 $\psi \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$ 使得（参见 [11, 定理 5.9，第 297] 页）

$$|\psi(z_1, z_2)| = \begin{cases} 1 & \text{if } (z_1, z_2) \in K_1 \\ 1 - \epsilon & \text{if } (z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 \setminus K_1. \end{cases}$$

Set

$$K_2 = \{z_1 \in \mathbb{T} : (z_1, z_2) \in K_1 \text{ for some } z_2 \in \mathbb{T}\},$$

并定义函数 $\psi_1 \in L^\infty(\mathbb{T})$ 如下：

$$\psi_1(z_1) = \psi(z_1, z_2) \qquad (z_1 \in \mathbb{T}).$$

显然， $|\psi_1(z_1)| = |\psi(z_1, z_2)| = 1$ 在 K_2 上，且 $|\psi_1(z_1)| = |\psi(z_1, z_2)| = 1 - \epsilon$ 在 $\mathbb{T} \setminus K_2$ 上。由于$\psi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$，我们有幂级数展开

$$\psi_1(z_1) = \psi(z_1, z_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m.$$

由于

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm} z_2^m|^2 \leq \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|^2 |z_2^m|^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|^2 < \infty,$$

我们得出 $\psi_1 \in H^2(\mathbb{T})$，因此 $\psi_1 \in H^\infty(\mathbb{T})$。现在存在 $g \in H^\infty(\mathbb{T})$，使得 $Tg = \psi_1$。于是 $\|M_\varphi g\| = \|\varphi g\|_\infty = 1$，但是

$$\|T(\varphi g)\|_\infty = \|T(\varphi) T(g)\|_\infty = \|(T\varphi)\psi_1\|_\infty \leq 1 - \epsilon,$$

这就产生了矛盾。因此， $T\varphi$ 是一个内函数。 □

接下来，我们的目标是证明 $H_0^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构保持内函数。下面这个简单而一般性的观察至关重要。鉴于对于所有 $f \in H^\infty(\mathbb{D})$， $f = f(0) + (f - f(0))$，我们将巴拿赫空间直和写为

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \dotplus H_0^\infty(\mathbb{D}). \tag{2.1}$$

固定 T 的一个自同构 $H_0^\infty(\mathbb{D})$，并定义 $X : H^\infty(\mathbb{D}) \to H^\infty(\mathbb{D})$ 如下：

$$X(\alpha + \beta f) = \alpha + \beta T^{-1} f, \tag{2.2}$$

对所有 α、$\beta \in \mathbb{C}$ 和 $f \in H_0^\infty(\mathbb{D})$，并断言 X 是一个自同构。显然，$X|_{H_0^\infty(\mathbb{D})} = T^{-1}$ 且 $X(1) = 1$。经过常规计算可知，X 是线性的且具有乘法性。举例来说，我们来验证 X的线性性：若 α_i、β_i、$\gamma \in \mathbb{C}$且 $f_i \in H_0^\infty(\mathbb{D})$，$i = 1, 2$，则

$$\begin{aligned} X((\alpha_1 + \beta_1 f_1) + \gamma(\alpha_2 + \beta_2 f_2)) &= X(\alpha_1 + \gamma\alpha_2 + \beta_1 f_1 + \gamma\beta_2 f_2) \\ &= \alpha_1 + \gamma\alpha_2 + T^{-1}(\beta_1 f_1 + \gamma\beta_2 f_2) \\ &= \alpha_1 + T^{-1}(\beta_1 f_1) + \gamma(\alpha_2 + T^{-1}(\beta_2 f_2)) \\ &= X(\alpha_1 + \beta_1 f_1) + \gamma X(\alpha_2 + \beta_2 f_2). \end{aligned}$$

现在我们证明 X 是单射：设 $\alpha + \beta T^{-1} f = 0$。若 $\beta = 0$，则 $\alpha = 0$。因此，假设 $\beta \neq 0$。这意味着对于每个 $z \in \mathbb{D}$，都有 $\alpha + \beta(T^{-1}f)(z) = 0$。由于 $T^{-1}f(0) = 0$，可知 $\alpha = 0$。于是 $T^{-1}f = 0$，从而 $f = 0$。为了证明 X 是满射，假设$g \in H^\infty(\mathbb{D})$。由于 T^{-1} 是满射且 $g - g(0) \in H_0^\infty(\mathbb{D})$，存在 $\tilde{g} \in H_0^\infty(\mathbb{D})$ 使得

$$T^{-1}(\tilde{g}) = g - g(0).$$

于是 $g = g(0) + T^{-1}(\tilde{g}) = X(g(0) + \tilde{g})$，至此便完成了该断言的证明

引理2.2。$H_0^\infty(\mathbb{D})$的自同构保持内函数。

证明。取 T 为 $H_0^\infty(\mathbb{D})$的一个自同构，并考虑由式（2.2）定义的 X 。取一个内函数 $\varphi \in H_0^\infty(\mathbb{D})$，并反设 $T\varphi \in H_0^\infty(\mathbb{D})$不是内函数。我们知道$X|_{H_0^\infty(\mathbb{D})} = T^{-1}$，因此由定理 2.1 可得 $X(T\varphi) = T^{-1}(T\varphi) = \varphi$是内函数，矛盾。□

现在我们可以刻画 $H_0^\infty(\mathbb{D})$的自同构了。我们的证明思路与deLeeuw、Rudin和 Wermer [10]类似。

定理2.3。设 T：$H_0^\infty(\mathbb{D}) \to H_0^\infty(\mathbb{D})$是一个映射。那么，$T$是一个自同构，当且仅当存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$(Tf)(z) = f(e^{i\theta}z) \qquad (f \in H_0^\infty(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}).$$

证明。充分性显然。对于必要性，考虑由 $\varphi(z) = z, z \in \mathbb{D}$ 定义的内函数$\varphi \in H_0^\infty(\mathbb{D})$。于是 $\tau := T\varphi$ 是一个内函数（见引理 2.2 ）。注意，$\tau(0) = 0$ 意味着 τ 是非常数，进而在 $\mathbb{D}$ 上得到 $|\tau| < 1$ （参见定理2.2.10]）。接下来，固定 $f \in H_0^\infty(\mathbb{D})$ 和 $z_0 \in \mathbb{D}$。由于 $(f^2 - f(\tau(z_0))f)(\tau(z_0)) = 0$ 且 $f(0) = 0$，存在 $g, \tilde{g} \in H^\infty(\mathbb{D})$ 使得

$$f^2 - f(\tau(z_0))f = (\varphi - \tau(z_0))g,$$

and

$$f = \varphi\tilde{g}.$$

综上，以上提到的等式意味着

$$f^3 - f(\tau(z_0))f^2 = (\varphi - \tau(z_0))\varphi g\tilde{g}.$$

同样，鉴于 $f = \varphi\tilde{g}$，这进一步导出

$$f^4 - f(\tau(z_0))f^3 = (\varphi^2 - \tau(z_0)\varphi)\varphi g\tilde{g}^2.$$

对上述等式两边应用算子 T，可得

$$Tf^4 - f(\tau(z_0))Tf^3 = T(\varphi^2 - \tau(z_0)\varphi)T(\varphi g\tilde{g}^2).$$

由于 $T(\varphi) = \tau$, $T(\varphi^2) = \tau^2$（回忆一下， T是乘法的），且 $(\tau^2 - \tau(z_0)\tau)(z_0) = 0$，在 $z = z_0$ 处取值后，上述恒等式得到 $(Tf^4)(z_0) = f(\tau(z_0))(Tf^3)(z_0)$。由于 $z_0 \in \mathbb{D}$ 是任意的，我们得出

$$(Tf^4)(z) = f(\tau(z))(Tf^3)(z) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

令 $T^{-1}\varphi = \psi$，类似的计算可得以下恒等式:

$$(T^{-1}f^4)(z) = f(\psi(z))(T^{-1}f^3)(z) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

写出 $\varphi^4 = T(T^{-1}(\varphi^4))$，然后将上述恒等式应用于 $f = T^{-1}\varphi$，可得

$$\begin{aligned}\varphi^4 &= T((T^{-1}\varphi)^4)\\ &= (T^{-1}\varphi \circ \tau)T(T^{-1}\varphi)^3\\ &= (\psi \circ \tau)T(T^{-1}\varphi^3)\\ &= (\psi \circ \tau)\varphi^3.\end{aligned}$$

根据 φ的定义，可知 $\psi \circ \tau(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$。类似地，利用 $T^{-1}(T\varphi)^4 = (T\varphi \circ \psi)T^{-1}(T\varphi)^3$,，可得 $\tau \circ \psi(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$，这证明了 τ是从 $\mathbb{D}$到某空间的共形映射，因此存在实数 θ 使得

$$\tau(z) = e^{i\theta}z \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

对于固定的 $z_0 \in \mathbb{D}$，我们再次观察到

$$f\varphi - f(\tau(z_0))\varphi = (\varphi - \tau(z_0))h,$$

对于某个 $h \in H^\infty(\mathbb{D})$。将两边乘以 φ^2，可得

$$f\varphi^3 - f(\tau(z_0))\varphi^3 = (\varphi^2 - \tau(z_0)\varphi)h\varphi.$$

于是 $T((\varphi^2 - \tau(z_0)\varphi))(z_0) = 0$，这意味着

$$(Tf)(z)\tau^3(z) = f(\tau(z))\tau^3(z),$$

对于所有 $f \in H_0^\infty(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$。利用等式 $\tau(z) = e^{i\theta}z$，我们得出

$$Tf(z)e^{3i\theta}z = f(e^{i\theta}z)e^{3i\theta}z,$$

对于所有 $z \in \mathbb{D}$，因此 $Tf = f \circ \tau$。定理证毕。 □

3. Automorphisms of Neil Algebra

本节我们刻画尼尔代数 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的自同构。我们还对 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的满射线性等距映射进行分类。回顾

$$H_1^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}) : f'(0) = 0\},$$

是 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的闭巴拿赫子代数。

定理 3.1. 设 $T: H_1^\infty(\mathbb{D}) \to H_1^\infty(\mathbb{D})$ 是一个映射。那么 T 是自同构，当且仅当存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$(Tf)(z) = f(e^{i\theta}z) \qquad (f \in H_1^\infty(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}).$$

证明。充分条件显然成立，因此只需证明必要条件。令 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$。显然，当且仅当 $f - \lambda$ 在 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 中不可逆时，$\lambda \in \overline{Ran(f)}$ 成立。由于 T 是一个自同构，我们得到 $f - \lambda$ 可逆当且仅当 $Tf - \lambda$ 可逆。因此

$$\overline{Ran(f)} = \overline{Ran(Tf)}.$$

考虑恒等函数 $id(z) = z$，对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。于是 $id^2(z) = z^2$ 且 $id^3(z) = z^3$。令 $f_2 := T(id^2)$，且 $f_3 := T(id^3)$。由于 T 是一个自同构，$f_2, f_3 \neq 0$。注意到

$$T(id^6) = T(id^2)^3 = f_2^3 = T(id^3)^2 = f_3^2.$$

设 z_0 是 f_2 的一个重数为 n 的零点。由于 $f_2^3 = f_3^2$，可知对于某个 $n \geq 1$，z_0 是 f_3^2 的一个重数为 $3n$ 的零点。换言之，z_0 是 f_3 的一个重数为 $3n/2 \in \mathbb{N}$ 的零点，因此 n 是偶数。因此

$$\tau := \frac{f_3}{f_2} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

于是，$f_3^2 = \tau^2 f_2^2 = f_2^3$，因此在 f_2 的孤立零点之外，$f_2 = \tau^2$。根据恒等定理，$f_2 = \tau^2$，所以 $f_3 = \tau^3$ 在 $\mathbb{D}$ 上成立。由于 $\tau^2 = f_2$ 有界，我们得出 $\tau \in H^\infty(\mathbb{D})$。此外，我们有 $T(id^2) = \tau^2$，以及 $T(id^3) = \tau^3$。现在

$$\overline{Ran(\tau^2)} = \overline{Ran(\tau^3)} = \overline{id^2} = \overline{id^3} = \overline{\mathbb{D}}.$$

根据开映射定理，τ^2 和 τ^3 都是开映射。因此，$\tau^2(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，且 $\tau^3(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，这意味着 $\tau(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$。接下来，我们声称 τ 属于 $Aut(\mathbb{D})$。为此，设 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$，并设 $z_0 \in \mathbb{D}$。由于 $f - f(\tau(z_0))$ 在 $\tau(z_0)$ 处取值为零，我们有

$$f - f(\tau(z_0)) = (id - \tau(z_0))g,$$

对于某个 $g \in H^\infty(\mathbb{D})$。将等式两边乘以 id^4，然后应用 T，得到

$$T(f\, id^4) - f(\tau(z_0))T(id^4) = (T(id^3) - T(\tau(z_0)id^2))T(g\, id^2).$$

特别地，若 $z = z_0$ 是任意的，则

$$Tf(z_0)\tau^4(z_0) - f(\tau(z_0))\tau^4(z_0) = (\tau^3(z_0) - \tau(z_0)\tau^2(z_0))T(g\, id^2)(z_0),$$

化简后得到 $Tf(z_0)\tau^4(z_0) - f(\tau(z_0))\tau^4(z_0) = 0$，因此

$$(Tf - f \circ \tau)\tau^4 = 0.$$

选取 $0 \in \mathbb{D}$ 的一个邻域 $N(0, \delta)$，使得

$$\overline{N(0, \delta)} \subset \mathbb{D}.$$

由于 $\tau^4 \not\equiv 0$（注意，T是代数自同构），τ^4 在 $N(0, \delta)$ 中只有有限个零点。因此，$Tf - f \circ \tau$ 在 $N(0, \delta) \subset \mathbb{D}$ 中有无穷多个零点。根据恒等定理，我们得出

$$Tf = f \circ \tau \qquad (f \in H_1^\infty(\mathbb{D})).$$

由于 T^{-1} 也是代数自同构，根据前面的论证，存在 $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ 使得

$$T^{-1}g = g \circ \psi \qquad (g \in H_1^\infty(\mathbb{D})),$$

因此，对于每个 $g \in H_1^\infty(\mathbb{D})$，我们有

$$g = T^{-1}(Tg) = T^{-1}(g \circ \tau) = g \circ (\tau \circ \psi) \qquad (g \in H_1^\infty(\mathbb{D})).$$

特别地，如果 $g(z) = z^2$，那么 $z^2 = (\tau(\psi(z)))^2,$，也就是说

$$(z - \tau(\psi(z)))(z + \tau(\psi(z))) = 0.$$

我们断言，对于 $\mathbb{D}$ 中的每个 $z \neq 0$， $\tau(\psi(z)) = z$。为证明这一点，首先，按照上述等式的证明，我们注意到 $g(z) = z^3$ 蕴含

$$(z - \tau(\psi(z))(z^2 + (\tau(\psi(z))^2 + z\tau(\psi(z))) = 0.$$

如果对某个非零 $z_0 \in \mathbb{D}$ 有 $\tau(\psi(z_0)) = -z_0$，那么我们得到 $2z_0^3 = 0$，这就产生了矛盾。这证明了我们的断言：对于 $\mathbb{D}$ 中的每个 $z \neq 0$， $\tau(\psi(z)) = z$。应用恒等定理，我们最终得出 $\tau \circ \psi = id$。用类似的论证可得 $\psi \circ \tau = id$。因此，我们得出 τ 是一个共形映射。由于 $f \circ \tau \in H_1^\infty(\mathbb{D})$，我们有

$$f'(\tau(0))\tau'(0) = 0.$$

由于 $\tau'(0) \neq 0$，我们得到对于每个 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$， $f'(\tau(0)) = 0$。例如，取 $f(z) = \frac{z^2}{2}$，于是可得 $\tau(0) = 0$。证明至此完成。□

现在我们转而讨论 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 上满射线性等距映射的刻画。这个结果很大程度上源于这样一个事实： $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 是一致代数。记 $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 为 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的极大理想空间。显然， $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 是一个复对象，而 $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 的结构将是许多关于巴拿赫代数$H_1^\infty(\mathbb{D})$的问题中的关键因素。我们运用 $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 的基本结构来证明 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 是一致代数（正如在 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的情形中一样）。

推论 3.2. 设 T 是 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 的满射线性等距映射。则存在 $\alpha \in \mathbb{T}$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$，使得

$$Tf(z) = \alpha f(e^{i\theta}\tau(z)) \qquad (f \in H_1^\infty(\mathbb{D}),\, z \in \mathbb{D}).$$

证明。考虑格尔范德变换

$$\Gamma : H_1^\infty(\mathbb{D}) \longrightarrow C(\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))),$$

定义如下

$$\Gamma f = \hat{f},$$

ˆ对于所有 $\varphi \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 和 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$， $f(\varphi) = \varphi(f)$。对于每个 $f \in H_1^\infty(\mathbb{D})$，我们计算（正如在 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的情形中一样）

$$\|\hat{f}\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))} |\hat{f}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))} |\varphi(f)| \leq \|f\|.$$

另一方面，对于每个 $\varphi \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$，我们有

$$\|\hat{f}\| \geq \sup_{\varphi_\lambda \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))} |\hat{f}(\varphi_\lambda)| = \sup_{\varphi_\lambda \in \mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))} |\varphi_\lambda(f)| = \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |f(\lambda)| = \|f\|,$$

$\hat{\ }\widehat{\ }$，因此 $\|f\| = \|f\|$，也就是说， Γ 是等距映射。我们将 $H_1^\infty(\mathbb{D})$ 与 $H_1^\infty(\mathbb{D})$: $=\Gamma(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 等同。设 $\varphi_1 \neq \varphi_2$ 属于 $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$。那么存在 $f_0 \in H_1^\infty(\mathbb{D})$，使得$\varphi_1(f_0) \neq \varphi_2(f_0)$，也就是说

$$\hat{f}_0(\varphi_1) \neq \hat{f}_0(\varphi_2).$$

$\widehat{\ }$因此， $H_1^\infty(\mathbb{D})$能分离 $\mathcal{M}(H_1^\infty(\mathbb{D}))$ 中的点。由此我们得出结论： $H_1^\infty(\mathbb{D})$是一致代数。证明的其余部分现可由 [10, 定理 3]和定理 3.1 得出。□

对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义代数 $H_{0,1,2,\ldots n}^\infty(\mathbb{D})$ 如下

$$H_{0,1,2,\ldots,n}^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}) : f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, \ldots, n\}.$$

设 T 是 $H_{0,1,2,\ldots n}^\infty(\mathbb{D})$ 到其自身的一个自同构。用于证明前一定理的类似论证表明

$$Tf(z) = f(e^{i\theta}z) \qquad (f \in H_{0,1,2,\ldots,n}^\infty(\mathbb{D})),$$

对某个 $\theta \in \mathbb{R}$ 成立。推论 3.2 中的类似结论对于$H_{1,2,\ldots\ldots n}^\infty(\mathbb{D})$ 上的满射线性等距映射也成立。

4. Generalized projections on $H^p(\mathbb{D})$

本节中，我们刻画 $H^p(\mathbb{D})$、 $1 \leq p \leq \infty$、$p \neq 2$ 上的广义三循环投影。作为必要的背景知识，我们需要引用文献中的两个结果。第一个结果涉及广义三圆投影的表示，见引理 1.5]:

引理 4.1. 设 X 是巴拿赫空间， P、 Q、 R、 $T \in \mathscr{B}(X)$，且 λ、 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ 是不同的标量。以下条件等价:

(1) $T = P + \lambda Q + \mu R$ 和 P、 Q、 R 是满足 $P \oplus Q \oplus R = I$ 的投影。

(2) 以下等式成立：$(T - I)(T - \lambda I)(T - \mu I) = 0$，并且

$$P = \frac{(T - \lambda I)(T - \mu I)}{(\lambda - 1)(\mu - 1)}, Q = \frac{(T - I)(T - \mu I)}{(\lambda - 1)(\lambda - \mu)}, R = \frac{(T - I)(T - \lambda I)}{(\mu - 1)(\mu - \lambda)}.$$

第二种工具是对 Hardy 空间上满射等距映射的分类 [19, 命题2]:

命题 4.2. 设 $1 \leq p < \infty$、 $p \neq 2$，且 $T \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{D}))$。当且仅当存在 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$ 和模为 1 的常数 α，使得 T 是线性满射等距映射

$$Tf = \alpha(\tau')^{\frac{1}{p}} f \circ \tau \qquad (f \in H^p(\mathbb{D})).$$

下文中，对于任意 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$，记

$$\tau_0 = (\tau')^{\frac{1}{p}},\ \tau_1 = (\tau' \circ \tau)^{\frac{1}{p}},\ \text{and}\ \tau_2 = (\tau' \circ \tau^2)^{\frac{1}{p}}.$$

此外，按如下方式定义 $id \in Aut(\mathbb{D})$

$$id(z) = z \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

现在我们可以对广义三循环投影进行分类。下文证明中，拉格朗日多项式是不可或缺的一部分；在其他可比巴拿赫空间中的结果证明里，这种做法也很典型。

定理 4.3。设 $1 \leq p \leq \infty, p \neq 2$。 $P \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{D}))$ 是广义三圆投影，当且仅当存在一个满射线性等距映射 $T \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{D}))$，使得

(1) $T^3 = I$，且 (2) 对某个非平凡投影 $Q, R \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{D}))$ 以及某个单位根的立方根 λ，

此外，$P = \frac{1}{3}(I + T + T^2)$ $Q = \frac{1}{3}(I + \lambda^2 T + \lambda T^2)$，且 $R = \frac{1}{3}(I + \lambda T + \lambda^2 T^2)$。

证明。首先，我们假设 $1 \leq p < \infty$。设 $P \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{D}))$ 是一个广义三圆投影。根据定义，存在互不相同的标量 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$，以及 $H^p(\mathbb{D})$ 上的非零投影 Q 和 R，使得 $P \oplus Q \oplus R = I$ 且 $T := P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R$ 是一个满射线性等距映射。由引理 4.1，可写为

$$P = \frac{(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}, Q = \frac{(T - I)(T - \lambda_2 I)}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)}, R = \frac{(T - I)(T - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{4.1}$$

and

$$T^3 - (1 + a)T^2 + (a + b)T - bI = 0, \tag{4.2}$$

其中

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ and } b = \lambda_1 \lambda_2.$$

由命题 4.2，存在 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$ 和一个模为 1 的常数 α，使得

$$Tf = \alpha \tau_0 f \circ \tau,$$

对于所有 $f \in H^p(\mathbb{D})$。于是，对每个 $f \in H^p(\mathbb{D})$，有

$$T^2 f = \alpha^2 \tau_0 \tau_1 f \circ \tau^2 \text{ and } T^3 f = \alpha^3 \tau_0 \tau_1 \tau_2 f \circ \tau^3, \tag{4.3}$$

因此，由 (4.2) 得

$$\alpha^3 \tau_0 \tau_1 \tau_2 f \circ \tau^3 - (1 + a)\alpha^2 \tau_0 \tau_1 f \circ \tau^2 + (a + b)\alpha \tau_0 f \circ \tau - bf = 0. \tag{4.4}$$

我们断言，只有以下三种可能：

(1) $\tau = id$；(2) $\tau \neq id$ 和 $\tau^2 = id$；(3) τ、$\tau^2 \neq id$ 和 $\tau^3 = id$。

不妨反设。设 $id \neq \tau$、 τ^2、 τ^3。由于 τ、 τ^2和 τ^3是解析函数，存在 $z_0 \in \mathbb{D}$，使得 $\{z_0, \tau(z_0)$ $\tau^2(z_0)$ $\tau^3(z_0)\}$是一组互不相同的标量。考虑一个拉格朗日多项式 L ，使得

$$L(\tau(z_0)) = L(\tau^2(z_0)) = L(\tau^3(z_0)) = 0 \text{ and } L(z_0) = 1.$$

将 (4.4) 应用于 $f = L$ ，并在 $z = z_0$ 处取值，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_0(z_0)\{\alpha^3\tau_1(z_0)\tau_2(z_0)L(\tau(z_0)^3) - (1+a)\tau_1(z_0)L(\tau(z_0)^2) + (a+b)\alpha L(\tau(z_0)) \\ &\quad + (a+b)\alpha L(\tau(z_0))\} - bL(z_0) \\ &= -b, \end{aligned}$$

因此 $\lambda_1\lambda_2 = 0$，这与 λ_1 和 λ_2 均非零这一事实矛盾，从而证明了该断言。

现在我们将分别考察这三种情形。首先，考虑非平凡情形（因为另外两种情形可以证明是多余的）：
情形 I: τ、 $\tau^2 \neq id$ 和 $\tau^3 = id$。特别地，对于 $\tau^3 = id$，由 (4.4) 得

$$\alpha^3\tau_0\tau_1\tau_2 f \circ id - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 f \circ \tau^2 + (a+b)\alpha\tau_0 f \circ \tau - bf = 0. \tag{4.5}$$

将此应用于 $f = 1$，得到

$$\alpha^3\tau_0\tau_1\tau_2 = (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 - (a+b)\alpha\tau_0 + b, \tag{4.6}$$

将其应用于 (4.5)，进一步得到

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(f \circ id - f \circ \tau^2) - (a+b)\alpha\tau_0(f \circ id - f \circ \tau) + b(f \circ id - f) =$$

特别地，若 $f = id$，则上述恒等式推出

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(id - \tau^2) = (a+b)\alpha\tau_0(id - \tau), \tag{4.7}$$

而对于 $f = id^2$，可得

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(id^2 - (\tau^2)^2) - (a+b)\alpha\tau_0(id^2 - \tau^2) = 0. \tag{4.8}$$

将第一个恒等式应用于后一个恒等式，得到

$$(a+b)\alpha\tau_0(id - \tau)(id + \tau^2) - (a+b)\alpha\tau_0(id^2 - \tau^2) = 0.$$

由于 $\alpha\tau_0 \neq 0$，因此

$$(a+b)(id - \tau)(\tau^2 - \tau) = 0.$$

由于我们知道 $id \neq \tau$和 $\tau^2 \neq \tau$，最终得到 $a + b = 0$，即

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

最后，将 (4.7) 的右侧代入 (4.8)，并注意到 $\alpha\tau_0\tau_1 \neq 0$，可得

$$(1+a)(id - \tau^2)(\tau^2 - \tau) = 0,$$

因此 $1+a=0$。由此可得，$1+\lambda_1+\lambda_2=0$。结合 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2=0$，可推出 $\lambda_1=\lambda$ 和 $\lambda_2=\lambda^2$，其中 λ 是单位根的立方根。因此，根据 (4.1) 和 (4.2)，可得 $T^3=I$，并且

$$P=\frac{I+T+T^2}{3}, Q=\frac{I+\lambda^2T+\lambda T^2}{3}, \text{ and } R=\frac{I+\lambda T+\lambda^2T^2}{3}.$$

情形 II：设 $\tau\neq id$和 $\tau^2=id$。特别注意，$\tau_2=\tau_0$（回想一下，$\tau_2=(\tau'\circ\tau^2)^{\frac{1}{p}}$）。由 (4.4)，我们有

$$\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)f\circ\tau-(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1f\circ id+(a+b)\alpha\tau_0f\circ\tau-bf=0,$$

对所有 $f\in H^p(\mathbb{D})$ 均成立。特别地，若 $f=1$，则有

$$\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)=(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1-(a+b)\alpha\tau_0+b, \tag{4.9}$$

并且，对于 $f=id$，我们得到

$$\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)\tau-(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1id+(a+b)\alpha\tau_0\tau-bid=0. \tag{4.10}$$

鉴于 (4.9)，后一个恒等式推出

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(\tau-id)+b(\tau-id)=0.$$

由于 $\tau\neq id$ 是解析的，我们有

$$b=-(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1. \tag{4.11}$$

再次，由 (4.9) 可得 $(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1=\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)+(a+b)\alpha\tau_0-b$。将其应用于 (4.10)，得到

$$\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)\tau-(\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)+(a+b)\alpha\tau_0-b)id+(a+b)\alpha\tau_0\tau-bid=0,$$

也就是说

$$\alpha^3(\tau_0^2\tau_1)(\tau-id)+(a+b)\alpha\tau_0(\tau-id)=0.$$

再次，由 $\tau\neq id$ 的解析性可得

$$\alpha^2\tau_0\tau_1=-(a+b). \tag{4.12}$$

结合这一点与 $b=-(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1$，可得

$$(1+a)(a+b)-b=0.$$

根据 $a=\lambda_1+\lambda_2$ 和 $b=\lambda_1\lambda_2$ 对此进行化简，得到

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)=0.$$

令 $\lambda_1=-1$：则

$$\alpha^2\tau_0\tau_1=-(a+b)=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)=1,$$

因此，根据 (4.3)，我们得出结论：对每个 $f\in H^p(\mathbb{D})$，都有 $T^2f=\alpha^2\tau_0\tau_1f\circ\tau^2=f$，即 $T^2=I$。于是 (4.1) 表明 $R=0$。类似的计算得到：$\lambda_2=-1$ 推出$Q=0$，而 $\lambda_1=-\lambda_2$ 给出 $P=0$。因此，这种情形是多余的。

情况 III：$\tau=id$。由此可得 $\tau_0=\tau_1=\tau_2\equiv1$。(4.4) 中的恒等式给出

$$\alpha^3f-(1+a)\alpha^2f+(a+b)\alpha f-bf=0,$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{D})$ 均成立。特别地，对于 $f = 1$，有 $\alpha^3 - (1+a)\alpha^2 + (a+b)\alpha - b = 0$，这意味着 $\alpha = 1, \lambda_1, \lambda_2$ (回想一下， $a = \lambda_1 + \lambda_2$ 和 $b = \lambda_1\lambda_2$)。
如果 $\alpha = 1$，那么 (4.3) 表明 $T = I$，因此 $Q = R = 0$。类似地，如果 $\alpha = \lambda_1$，那么 $Tf = \lambda_1 f$。因此，我们有 $P = 0$。最后，假设 $\alpha = \lambda_2$。那么对于每个 $f \in H^p$（$\mathbb{D}$），都有 $Tf = \alpha f = \lambda_2 f$。因此， $T = \lambda_2 I$，进而 $P = 0$。所以，这种情况也不可行。这就完成了定理在 $1 \le p < \infty$、 $p \neq 2$ 情形下的证明。
现在我们转向 $p = \infty$。在这种情况下，证明与前一种情况完全相同，但必须使用 H^∞（$\mathbb{D}$）的满射线性等距映射的结构。换言之，我们需要使用命题 4.2 的有界解析函数版本，该版本见于 [10,定理 1]: 算子 $X \in \mathscr{B}$（H^∞（$\mathbb{D}$））是满射线性等距映射，当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{T}$ 和 $\tau \in Aut$（$\mathbb{T}$），使得

$$Xf = \alpha(f \circ \tau) \qquad (f \in H^\infty(\mathbb{D})).$$

鉴于上述表示， $p = \infty$ 情形的证明与前一情形的证明完全相同，因此省略细节。至此，定理得证。□

前一定理中得到的某些恒等式将为下一节的进一步计算奠定基础。

5. Generalized projections on $H^p(\mathbb{D}^2)$

定理 4.3 中给出的 $H^p(\mathbb{D})$ 上广义三循环投影的表示形式，在已知的作用于巴拿赫空间上的广义三循环投影中较为常见。然而，本节将看到， $H^p(\mathbb{D}^2)$ 上广义三循环投影的结构更加丰富。

下文中，我们始终假设 $1 \le p \le \infty, p \neq 2$。首先，回顾 $H^p(\mathbb{D}^2)$ 上满射线性等距映射的一个分类结果，见定理 1 和 3]: $T \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{T}^2))$ 是等距映射，当且仅当存在 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$、模为 1 的函数 $\sigma \in L^\infty(\mathbb{T})$ 以及 $\alpha \in \mathbb{T}$，使得

$$(Tf)(z,w) = \alpha(\tau'(z))^{\frac{1}{p}} f(\tau(z), w\sigma(z)), \tag{5.1}$$

每当 $1 \le p < \infty$，并且如果 $p = \infty$，则

$$(Tf)(z,w) = \alpha f(\tau(z), w\sigma(z)), \tag{5.2}$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$，以及 $z, w \in \mathbb{T}$。
为简化记号，与第 4 节一样，对于 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$ 和 $\sigma \in L^\infty(\mathbb{T})$，定义 e

$$\tau_0(z) = (\tau'(z))^{\frac{1}{p}},\ \tau_1(z) = (\tau' \circ \tau(z))^{\frac{1}{p}},\ \text{and}\ \tau_2(z) = (\tau' \circ \tau^2(z))^{\frac{1}{p}},$$

并且

$$\sigma_1(z) = \sigma \circ \tau(z)\ \text{and}\ \sigma_2(z) = \sigma \circ \tau^2(z),$$

对所有 $z \in \mathbb{T}$ 都成立。然而，在下文中，我们将上述所有函数（包括 τ 和 σ）都视为二元函数，但仅把它们看作关于 z 的函数。为简化记号，我们常将函数 f^2 的复合记作 $f \circ f$（只要这样做有意义）。现在，我们准备给出 $H^p(\mathbb{T}^2)$ 上广义三圆投影的刻画。

定理 5.1. 设 $P \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{T}^2))$。那么， P 是广义三圆投影，当且仅当存在非平凡投影 Q、$R \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{T}^2))$ 以及满射线性等距映射$T \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{T}^2))$，使得下列断言之一成立：

$$\textit{(1) } T = P+\lambda Q+\lambda^2 R,\ T^3 = I,\ \lambda \textit{ is a cube root of unity, and } \begin{cases} P = \frac{1}{3}(I + T + T^2) \\ Q = \frac{1}{3}(I + \lambda^2 T + \lambda T^2) \\ R = \frac{1}{3}(I + \lambda T + \lambda^2 T^2). \end{cases}$$

$$\textit{(2) } T = P - Q \pm iR,\ T^4 = I,\ \textit{and } \begin{cases} P = \frac{1}{4}((1 \pm i)T^2 + 2T + (1 \mp i)I) \\ Q = \frac{1}{4}((1 \mp i)T^2 - 2T + (1 \pm i)I) \\ R = \frac{1}{2}(I - T^2). \end{cases}$$

$$\textit{(3) } T = P \pm iQ - R,\ T^4 = I,\ \textit{and } \begin{cases} P = \frac{1}{4}((1 \pm i)T^2 + 2T + (1 \mp i)I) \\ Q = \frac{1}{2}(I - T^2) \\ R = \frac{1}{4}((1 \mp i)T^2 - 2T + (1 \pm i)I). \end{cases}$$

$$\textit{(4) } T = P \pm iQ \mp iR,\ T^4 = I,\ \textit{and } \begin{cases} P = \frac{1}{2}(I + T^2) \\ Q = \frac{1}{4}((-1 \pm i)T^2 \mp 2iT + (1 \pm i)I) \\ R = \frac{1}{4}((-1 \mp i)T^2 \pm 2iT + (1 \mp i)I). \end{cases}$$

证明。设 $1 \leq p < \infty$。如定理 4.3 的证明所示，存在互不相同的标量λ_1、 $\lambda_2 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ 以及非零投影 Q、 $R \in \mathscr{B}(H^p(\mathbb{T}^2))$，使得 $P \oplus Q \oplus R = I$ 且$T := P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R$ 是一个满射线性等距映射。此外

$$P = \frac{(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}, Q = \frac{(T - I)(T - \lambda_2 I)}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)}, R = \frac{(T - I)(T - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \tag{5.3}$$

and

$$T^3 - (1 + a)T^2 + (a + b)T - bI = 0, \tag{5.4}$$

其中

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ and } b = \lambda_1 \lambda_2.$$

由 (5.1)，存在 $\tau \in Aut(\mathbb{D})$、模为 1 的函数 $\sigma \in L^\infty(\mathbb{T})$以及 $\alpha \in \mathbb{T}$ ，使得

$$Tf(z, w) = \alpha(\tau'(z))^{\frac{1}{p}} f(\tau(z), w\sigma(z)),$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$ 和 z、 $w \in \mathbb{T}$。采用本定理陈述之前引入的记号，我们有

$$Tf = \alpha \tau_0 f(\tau, w\sigma) \qquad (f \in H^p(\mathbb{T}^2)), \tag{5.5}$$

并且，由此可得

$$T^2 f = \alpha^2 \tau_0 \tau_1 f(\tau^2, w\sigma\sigma_1) \tag{5.6}$$

and

$$T^3 f = \alpha^3 \tau_0 \tau_1 \tau_2 f(\tau^3, w\sigma\sigma_1\sigma_2),$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$ 均成立。于是，由 (5.4) 中的恒等式可得

$$\alpha^3\tau_0\tau_1\tau_2 f(\tau^3, w\sigma\sigma_1\sigma_2) - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 f(\tau^2, w\sigma\sigma_1) + (a+b)\alpha\tau_0 f(\tau, w\sigma) - bf = 0, \tag{5.7}$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$。与定理 4.3 的证明一样，我们再次得出以下三种可能情况:

(1) $\tau = id$。(2) $\tau \neq id$ 和 $\tau^2 = id$。(3) τ、$\tau^2 \neq id$和 $\tau^3 = id$。

情况 1：假设 τ、$\tau^2 \neq id$和 $\tau^3 = id$。通过使用与定理 4.3 中情况 1 的证明类似的计算，我们发现 $T^3 = I$ 和

$$P = \frac{1}{3}(I + T + T^2), Q = \frac{1}{3}(I + \lambda^2 T + \lambda T^2), R = \frac{1}{3}(I + \lambda T + \lambda^2 T^2).$$

情况 2：假设 $\tau \neq id$和 $\tau^2 = id$。由于 $\tau^2 = id$，可得 $\tau_2 = \tau_0$和 $\sigma_2 = \sigma$。因此，(5.7) 得出

$$\alpha^3\tau_0^2\tau_1 f(\tau, w\sigma^2\sigma_1) - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 f(id, w\sigma\sigma_1) + (a+b)\alpha\tau_0 f(\tau, w\sigma) - bf = 0, \tag{5.8}$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$。特别地，若 $f = z^m$, $m \geq 0$，则

$$\alpha^3\tau_0^2\tau_1\tau^m - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 z^m + (a+b)\alpha\tau_0\tau^m - bz^m = 0, \tag{5.9}$$

因此，对于 $f = 1$，我们得到

$$\alpha^3\tau_0^2\tau_1 = (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 - (a+b)\alpha\tau_0 + b. \tag{5.10}$$

这就是证明定理 4.3 时在情况 2 中得到的恒等式 (4.9)。在定理 4.3 的证明中对情况 2 进行相同的计算，可得

$$\lambda_1 = -1, \text{ or } \lambda_2 = -1, \text{ or } \lambda_1 = -\lambda_2. \tag{5.11}$$

类似地，若 $f = w^m$, $m \geq 0$，则 (5.8) 蕴含

$$\alpha^3\tau_0^2\tau_1(\sigma^2\sigma_1)^m - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(\sigma\sigma_1)^m + (a+b)\alpha\tau_0\sigma^m - b = 0. \tag{5.12}$$

若 $m = 1$，则 $\alpha^3\tau_0^2\tau_1(\sigma^2\sigma_1) - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(\sigma\sigma_1) + (a+b)\alpha\tau_0\sigma - b = 0$，因此利用 (5.10) 可得

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(\sigma^2\sigma_1 - \sigma\sigma_1) - (a+b)\alpha\tau_0(\sigma^2\sigma_1 - \sigma) + b(\sigma^2\sigma_1 - 1) = 0.$$

由 (4.11) 可知，$b = -(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1$。由于我们处于与定理 4.3 证明中情况 2 相同的情形，因此有

$$-b(\sigma^2\sigma_1 - \sigma\sigma_1) - (a+b)\alpha\tau_0(\sigma^2\sigma_1 - \sigma) + b(\sigma^2\sigma_1 - 1) = 0.$$

消去同类项后，我们最终得到恒等式

$$b(\sigma\sigma_1 - 1) = (a+b)\alpha\tau_0(\sigma^2\sigma_1 - \sigma). \tag{5.13}$$

再次考虑恒等式 (5.12)，这次取 $m = 2$:

$$\alpha^3\tau_0^2\tau_1(\sigma^2\sigma_1)^2 - (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1(\sigma\sigma_1)^2 + (a+b)\alpha\tau_0\sigma^2 - b = 0.$$

鉴于 (5.10)，我们知道 $\alpha^3\tau_0^2\tau_1 = (1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1 - (a+b)\alpha\tau_0 + b$，因此，上述等式得出

$$(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1((\sigma^2\sigma_1)^2 - (\sigma\sigma_1)^2) - (a+b)\alpha\tau_0((\sigma^2\sigma_1)^2 - \sigma^2) + b((\sigma^2\sigma_1)^2 - 1) = 0.$$

将 $b = -(1+a)\alpha^2\tau_0\tau_1$ （见（4.11））代入上式，我们得到

$$b((\sigma^2\sigma_1)^2 - (\sigma\sigma_1)^2) + (a+b)\alpha\tau_0((\sigma^2\sigma_1)^2 - \sigma^2) - b((\sigma^2\sigma_1)^2 - 1) = 0.$$

重新排列并约去公因项后，得到

$$b((\sigma\sigma_1)^2 - 1) = (a+b)\alpha\tau_0((\sigma^2\sigma_1)^2 - \sigma^2).$$

将（5.13）应用于此，我们得到

$$b((\sigma\sigma_1)^2 - 1) = b(\sigma\sigma_1 - 1)(\sigma^2\sigma_1 + \sigma).$$

该等式进一步化简，最终可写成以下形式：

$$(\sigma\sigma_1 - 1)(\sigma\sigma_1 + 1)(\sigma - 1) = 0.$$

因此，我们得出

$$\sigma\sigma_1 = -1, \text{ or } \sigma\sigma_1 = 1, \text{ or } \sigma = 1. \tag{5.14}$$

结合 (5.11) 可得到九个子情形。我们将其概括为三个子情形。我们按以下方式进行。首先，我们回顾（见 (4.12)）

$$\alpha^2\tau_0\tau_1 = -(a+b). \tag{5.15}$$

子情形 (i)。 $\sigma\sigma_1 = -1$：令 $\lambda_1 = -1$。则 $a+b = -1$，因此 (5.15) 蕴含 $\alpha^2\tau_0\tau_1 = 1$。由 (5.6) 可知

$$(T^2 f)(z,w) = f(z,-w) \qquad (z,w \in \mathbb{T}),$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$。由于 $\lambda_1 = -1$，由 (5.3) 可得 $R = \frac{1}{\lambda_2^2-1}(T^2 - I)$。于是

$$Rf(z,w) = \frac{1}{\lambda_2^2 - 1}(f(z,-w) - f(z,w)),$$

由此，我们进一步得出

$$R^2 f(z,w) = \frac{2}{(\lambda_2^2-1)^2}(f(z,w) - f(z,-w)),$$

对所有 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$ 以及 $z,w \in \mathbb{T}$。由于 $R^2 = R$，我们有

$$0 = \big(\frac{2}{\lambda_2^2 - 1} + 1\big)(f(z,w) - f(z,-w)) = \frac{\lambda_2^2+1}{\lambda_2^2-1}(f(z,w) - f(z,-w)),$$

也就是说，对所有 f，$-(\lambda_2^2+1)(Rf)(z,w) = 0$。等价地，$\lambda_2 = \pm i$。若 $\lambda_2 = i$，则 $T = P - Q + iR$，因而 $T^2 = P + Q - R$。由这两个方程可得 $P = \frac{1}{2}(T^2 + T + (1-i)R) = \frac{1}{4}((1+i)T^2 + 2T + (1-i)I)$。对于 $\lambda_2 = -i$，也有类似结论。利用 (5.3)，我们注意到 $Q = \frac{1}{4}((1\mp i)T^2 - 2T + (1\pm i)I)$ $R = \frac{1}{2}(I - T^2)$。

接下来，假设 $\lambda_2=-1$。这里同样有 $\alpha^2\tau_0\tau_1=1$，并且类似于上面的计算可得

$$Qf(z,w)=\frac{1}{\lambda_1^2-1}\big(f(z,-w)-f(z,w)\big)$$

and

$$Q^2f(z,w)=\frac{2}{(\lambda_1^2-1)^2}\big(f(z,w)-f(z,-w)\big),$$

对所有 $f\in H^p(\mathbb{T}^2)$ 和 $z,w\in\mathbb{T}$，最后还有 $(\lambda_1^2+1)Q=0$。等价地， $\lambda_1=\pm i$。若 $\lambda_1=i$，则 $T=P+iQ-R$，从而 $T^2=P-Q+R$。我们得到 $P=\frac{1}{2}(T^2+T+(1-i)Q)=\frac{1}{4}((1+i)T^2+2T+(1-i)I)$。对 $\lambda_1=-i$ 也有类似结论。应用 (5.3)，得到$Q=\frac{1}{2}(I-T^2)$ $R=\frac{1}{4}((1\mp i)T^2-2T+(1\pm i)I)$。

最后，假设 $\lambda_1=-\lambda_2$。那么 $a+b=-\lambda_1^2$，因此 $\alpha^2\tau_0\tau_1=\lambda_1^2$。于是 $T^2f(z,w)=\lambda_1^2f(z,-w)$。由 (5.3)，我们有 $P=\frac{1}{1-\lambda_1^2}(T^2-\lambda_1^2I)$，这意味着

$$Pf(z,w)=\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}\big(f(z,-w)-f(z,w)\big),$$

and

$$P^2f(z,w)=2\bigg(\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}\bigg)^2\big(f(z,w)-f(z,-w)\big),$$

对所有 $f\in H^p(\mathbb{T}^2)$ 和 $z,w\in\mathbb{T}$。由于 $P^2=P$，可得

$$2\bigg(\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}\bigg)^2\big(f(z,w)-f(z,-w)\big)=\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}\big(f(z,-w)-f(z,w)\big),$$

对所有 $f\in H^p(\mathbb{T}^2)$ 和 $z,w\in\mathbb{T}$。因此我们推得 $(\lambda_1^2+1)P=0$，从而得到 $\lambda_1=\pm i$。设 $\lambda_1=i$。那么 $\lambda_2=-i$，从而 $T=P+iQ-iR$ 和 $T^2=P-Q-R$。此外，$P=\frac{1}{2}(I+T^2)$。类似地，若 $\lambda_1=-i$，则 $T=P-iQ+iR$ 和 $T^2=P-Q-R$，同样有 $P=\frac{1}{2}(I+T^2)$。应用 (5.3)，得到 $Q=\frac{1}{4}((-1\pm i)T^2\mp 2iT+(1\pm i)I)$ $R=\frac{1}{4}((-1\mp i)T^2\pm 2iT+(1\mp i)I)$。

子情形 (ii). $\sigma\sigma_1=1$: 回顾 (5.15)，有 $\alpha^2\tau_0\tau_1=-(a+b)$。若 $\lambda_1=-1$ 或 $\lambda_2=-1$，则 $(a+b)=-1$，因此 $\alpha^2\tau_0\tau_1=1$。接着由 (5.6) 得 $T^2=I$，进而由 (5.3) 得 $R=0$ （若 $\lambda_1=-1$）或 $Q=0$ （若 $\lambda_2=-1$）。类似地，若 $\lambda_1=-\lambda_2$，则 $\alpha^2\tau_0\tau_1=\lambda_1^2$。这意味着 $T^2=\lambda_1^2I$，进而由 (5.3) 得 $P=0$。

子情形 (iii). $\sigma=1$: 与前一子情形一样， $\lambda_1=-1$ 或 $\lambda_2=-1$ 分别推出 $R=0$ 或 $Q=0$。若 $\lambda_1=-\lambda_2$，则再次有 $\alpha^2\tau_0\tau_1=\lambda_1^2$，这意味着 $T^2=\lambda_1^2I$，从而得到 $P=0$。

情形 3：设 $\tau=id$。则 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 和 $\tau_1=\tau_2=\tau_0$，因此由 (5.7) 得

$$\alpha^3\tau_0^3f(\tau,w\sigma^3)-(1+a)\alpha^2\tau_0^2f(\tau,w\sigma^2)+(a+b)\alpha\tau_0f(\tau,w\sigma)-bf(\tau,w)=0, \tag{5.16}$$

对所有 $f\in H^p(\mathbb{T}^2)$ 均成立。特别地，若 $f=1$，则

$$\alpha^3\tau_0^3-(1+a)(\alpha\tau_0)^2+(a+b)(\alpha\tau_0)-b=0,$$

因此 $\alpha=\tau_0^{-1}$、 $\lambda_1\tau_0^{-1}$、 $\lambda_2\tau_0^{-1}$。此外，我们还有三种可能：

(1) $\sigma=1$。 （2）

$\sigma\neq 1$ 和$\sigma^2=1$。

(3) $\sigma \neq 1$、 $\sigma^2 \neq 1$和 $\sigma^3 = 1$。

事实上，若 $\sigma(z_0)$ $\sigma(z_0)^2, \sigma(z_0)^3 \neq 1$ 对某个 $z_0 \in \mathbb{T}$ 成立，则存在一个拉格朗日多项式L，使得 $L(w_0\sigma(z_0)) = L(w_0\sigma(z_0)^2) = L(w_0\sigma(z_0)^3) = 0$ 且 $L(w_0) = 1$。若在 (5.16) 中令 $f(z, w) = L(w)$, $z, w \in \mathbb{T}$, 则

$$\alpha^3\tau_0^3 L(w_0\sigma(z_0)^3) - (1+a)\alpha^2\tau_0^2 L(w_0\sigma(z_0)^2) + (a+b)\alpha\tau_0 L(w_0\sigma(z_0)) - bL(w_0) = 0$$

这意味着 $b = \lambda_1\lambda_2 = 0$: 矛盾。现在我们继续讨论以下三个子情形。子情形 (i)。 $\sigma = 1$: 若 $\alpha = \tau_0^{-1}$或 $\alpha = \lambda_1\tau_0^{-1}$, 则分别有 $T = I$ 或 $T = \lambda_1 I$。因此, $R = 0 = Q$ 或 $P = 0 = R$。类似地, 若 $\alpha = \lambda_2\tau_0^{-1}$, 则 $T = \lambda_2 I$, 这意味着 $P = 0 = Q$。

子情形 (ii)。 $\sigma \neq 1, \sigma^2 = 1$: 由 (5.16), 我们得到

$$\alpha^3\tau_0^3 f(\tau, w\sigma) - (1+a)\alpha^2\tau_0^2 f(\tau, w) + (a+b)\alpha\tau_0 f(\tau, w\sigma) - bf(\tau, w) = 0.$$

也就是说

$$(\alpha^3\tau_0^3 + (a+b)\alpha\tau_0) f(\tau, w\sigma) - ((1+a)\alpha^2\tau_0^2 + b) f(\tau, w) = 0.$$

由于 $\sigma \neq 1$, 存在 z_0 使得 $\sigma(z_0) \neq 1$。我们选取拉格朗日多项式, $f(z, w) = L_i(w) \in H^p(\mathbb{T}^2)$ $i = 1, 2$, 使得 $f(z_0, w_0\sigma(z_0)) = L_1(w_0\sigma(z_0)) = 1, f(z_0, w_0) = L_1(w_0) = 0$, 且 $f(z_0, w_0\sigma(z_0))$ $= L_2(w_0\sigma(z_0)) = 0, f(z_0, w_0) = L_2(w_0) = 1$。于是我们有

$$\alpha^3\tau_0(z_0)^3 + (a+b)\alpha\tau_0(z_0) = 0,$$

and

$$(1+a)\alpha^2\tau_0(z_0)^2 + b = 0.$$

由这两个等式可得

$$(1+a)(a+b) - b = (1+\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

我们得到, $\lambda_1 = -1$ 或 $\lambda_2 = -1$ 或 $\lambda_1 = -\lambda_2$。我们将其与另外三种可能性 $\alpha = \tau_0^{-1}$, $\lambda_1\tau_0^{-1}, \lambda_2\tau_0^{-1}$ 一并考虑如下:

(1) $\alpha = \tau_0^{-1}$: 如果 $\lambda_1 = -1$ 或 $\lambda_2 = -1$, 那么 $R = 0$ 或 $Q = 0$。如果 $\lambda_1 = -\lambda_2$, 那么 $P = I$。(2) $\alpha = \lambda_1\tau_0^{-1}$: 假设 $\lambda_1 = -1$ 或 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 蕴含 $R = 0$ 或 $P = 0$。如果 $\lambda_2 = -1$, 那么 $Q = I$。(3) $\alpha = \lambda_2\tau_0^{-1}$: 令 $\lambda_1 = -1$, 则 $R = I$。如果 $\lambda_2 = -1$ 或 $\lambda_1 = -\lambda_2$, 那么分别有 $Q = 0$ 或 $P = 0$。

因此这些子情形不可能成立。

子情形 (iii)。 $\sigma \neq 1, \sigma^2 \neq 1, \sigma^3 = 1$: 由 (5.16), 我们得到

$$\alpha^3\tau_0^3 f(\tau, w) - (1+a)\alpha^2\tau_0^2 f(\tau, w\sigma^2) + (a+b)\alpha\tau_0 f(\tau, w\sigma) - bf(\tau, w) = 0.$$

由于 $\sigma \neq 1$、 $\sigma^2 \neq 1$, 因此存在 z_0 , 使得 $\sigma(z_0) \neq 1$ 且 $(\sigma(z_0))^2 \neq 1$。我们选择拉格朗日多项式 $f(z, w) = L_i(w) \in H^p(\mathbb{T}^2)$、 $i = 1$、2, 使得

$$f(z_0, w_0\sigma(z_0)^2) = L_1(w_0\sigma(z_0)^2) = 1, f(z_0, w_0) = L_1(w_0) = 0,$$

$$f(z_0, w_0\sigma(z_0)) = L_1(w_0\sigma(z_0)) = 0, \text{ and } f(z_0, w_0\sigma(z_0)) = L_2(w_0\sigma(z_0)) = 1,$$

$$f(z_0, w_0) = L_2(w_0) = 0, f(z_0, w_0\sigma(z_0)^2) = L_2(w_0\sigma(z_0)^2) = 0.$$

于是 $-(1+a)\alpha^2(\tau_0(z_0))^2 = 0$，且 $(a+b)\alpha(\tau_0(z_0)) = 0$。利用这两个方程，我们有：$1+a=0$ 以及 $a+b=0$。我们注意到 $\lambda_1 = \lambda$ 且 $\lambda_2 = \lambda^2$。因此，由（4.1）和（4.2）可得，$T^3 = I$ 以及

$$P = \frac{I+T+T^2}{3}, Q = \frac{I+\lambda^2 T+\lambda T^2}{3}, \text{ and } R = \frac{I+\lambda T+\lambda^2 T^2}{3},$$

这就完成了关于 $1 \le p < \infty$的定理证明。 $p = \infty$ 情形的论证也类似。在这种情况下，需要使用 (5.2)。至此，定理得证。□

鉴于本文给出的结果，对于所有 $1 \le p \le \infty, p \ne 2$，刻画双圆盘上向量值 H^p-空间的满射线性等距映射是一个引人入胜的问题。不过，关于标量情形的答案，见 [3]。

致谢：第一位作者的研究得到印度印度统计研究所班加罗尔中心理论统计与数学部以及 SERB（印度）Gadadhar Mishra 教授的 J.C. Bose 奖学金资助。第二位作者的研究部分得到 TARE（TAR/2022/000063）、SERB、科学技术部（DST）和印度政府的资助。第三位作者的研究得到原子能部（DAE）印度政府 NBHM 博士后奖学金资助（档案编号：0204/3/2020/R&D - II/2445）。

References

1. A. B. Abubaker, S. Dutta, 《$C(\Omega)$ 上三个满射等距映射的凸包中的投影》。《数学分析及其应用杂志》379 (2011), 878–888. 2. A. B. Abubaker, S. Dutta, 《对称范数下广义三循环投影的结构》。《印度科学院院刊：数学科学》126 (2016), 241–252. 3. E. Berkson and H. Porta, 《n 维球与多圆盘上的 Hardy 空间的等距映射群》, 《格拉斯哥数学杂志》21 (1980) 199–204. 4. L. Bers, 《关于解析函数环》, 《美国数学会公报》54 (1948), 311–315. 5. F. Botelho, J. Jamison, 《算子极小理想上的广义双循环投影》。《美国数学会会刊》136 (2008), 1397–1402. 6. J. ˇCuka and D. Iliˇsevi´c, 《$B(H)$ 中极小范数理想上的广义三循环投影》。《数学分析及其应用杂志》434 (2016), 1813–1825. 7. K. R. Davidson, V. I. Paulsen, M. Raghupati, D. Singh, 《一个约束 Nevanlinna-Pick 插值问题》, 《印第安纳大学数学杂志》58 (2009), 709-732. 8. R. Fleming, J. Jamison, 《巴拿赫空间上的等距映射：函数空间》, Chapman and Hall/CRC, 《纯数学与应用数学专著与综述》第129卷。9. M. Foˇsner, D. Iliˇsevi´c, and C. K. Li, 《G-不变范数与双循环投影》。《线性代数及其应用》420 (2007), no. 2-3, 596–608. 10. K. deLeeuw, W. Rudin, and J. Wermer, 《某些函数空间的等距映射》, 《美国数学会会刊》11 (1960), 694-698. 11. K. Hoffman, 《解析函数与对数模 Banach 代数》, 《数学学报》108 (1962), 271-317. 12. M. Hosseini, 《关于有界变差函数空间上的广义三循环投影的注记》。《复分析与算子理论》16 (2022), no. 4, Paper No. 57, 7 pp. 13. D. Iliˇsevi´c, 《JB*-三元组上的广义双圆投影》。《线性代数及其应用》432 (2010), no. 5, 1267–1276.

14. D. Ili˘sevi´c, 《JB*-三元组上的广义 n-循环投影》。《算子理论中的问题与近期方法》，157–165, 《当代数学》687，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017. 15. D. Ili˘sevi´c, C. N. Liu, N. C. Wong, 《JB*-三元组与 Hilbert $C_0(\Omega)$-模上的广义 n-循环投影》。《具体算子》4 (2017), 109–120. 16. R. King, 《某些 Hardy 空间上的广义双循环投影》。（英文摘要）《数学分析及其应用杂志》408 (2013), 35–39. 17. P. K. Lin, 《广义双循环投影》，《数学分析及其应用杂志》340 (2008), 1–4. 18. V. Lomonosov, 《复空间中 Bishop-Phelps 定理的一个反例》，《以色列数学杂志》115 (2000), 25–28. 19. N. Lal, S. Merrill, 《环面上的 H^p 空间的等距映射》，《美国数学会会刊》，第31卷，第2期，（1972年2月），465 - 471. 20. R. A. Mart´ınez-Avenda˜no and P. Rosenthal, 《Hardy-Hilbert空间上的算子导论》，纽约施普林格出版社，（2007）。21. H. L. Royden, 《解析函数与亚纯函数环》。《美国数学会汇刊》83 (1956), 269–276. 22. W. Rudin, 《关于有界解析函数的一些定理》。《美国数学会汇刊》78 (1955), 333–342. 23. L. P. Su, 《复平面任意子集上的解析函数环》。《太平洋数学杂志》42 (1972), 535–538

Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, 560012, India电子邮箱: rahulmaurya7892@gmail.comIndian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560 059, India电子邮箱：jaydeb@gmail.com, jay@isibang.ac.inIndian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560 059, India电子邮箱：aryamansensarma@gmail.com