arXiv:2304.01332v2 [math.OA] 8 Oct 2024

# 核性与 CPC*-系统

KRISTIN COURTNEY 与 WILHELM WINTER

Abstract. 我们将任意可分核 C*-代数写成由有限维 C*-代数组成的归纳系统的极限，其连接映射为完全正映射。这类 CPC*-系统的显著特征是，映射越来越保持正交性。这一条件使得我们能够为极限（先验上只是一个算子空间）赋予乘法，从而使其成为 C*-代数。我们的概念将 Blackadar 和 Kirchberg 的 NF 系统推广到了拟对角情形之外。

## Introduction

核 C*-代数是指恒等映射可以通过有限维 C*-代数上的完全正压缩映射，在逐点范数拓扑中加以逼近的代数。更正式地说，C*-代数 $A$具有完全正逼近性质，是指存在一个由有限维 C*-代数组成的网 $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，以及完全正压缩映射（c.p.c.）

$$A \xrightarrow{\psi_\lambda} F_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} A$$

使得 $\varphi_\lambda \circ \psi_\lambda$ 按范数逐点收敛到恒等映射 $\mathrm{id}_A$。对于可分 C* 代数（这是本文主要关注的情形），总可以将逼近系统限制为具有可数指标集的系统。将这类逼近复合后，可以得到如下形式的系统

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & & A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A & & \cdots \\ & & & {\scriptstyle\psi_{n-1}}\searrow\ \nearrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}} & & {\scriptstyle\psi_n}\searrow\ \nearrow{\scriptstyle\varphi_n} & & {\scriptstyle\psi_{n+1}}\searrow\ \nearrow{\scriptstyle\varphi_{n+1}} & & & \\ \cdots & & & F_{n-1} & \xrightarrow{\rho_{n,n-1}} & F_n & \xrightarrow{\rho_{n+1,n}} & F_{n+1} & & & \cdots \end{array}$$

下三角交换，$\rho_{n,n-1} := \psi_n \circ \varphi_{n-1}$，而上三角近似交换，即在点范数拓扑下 $\varphi_n \circ \psi_n \longrightarrow \mathrm{id}_A$。上三角序列 $(A, \varphi_n \circ \psi_n)_n$ 可视为算子空间范畴中的一个归纳系统，其中

日期：2024年10月10日。2020年数学主题分类。46L05。关键词与短语：完全正逼近、核性、归纳极限、零阶映射、完全正映射、NF 系统、NF 代数。本研究得到德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过德国卓越战略——EXC 2044 – 390685587，Mathematics M¨unster – Dynamics – Geometry – Structure、德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）项目编号 427320536——SFB 1442，以及欧洲研究委员会高级资助 834267——AMAREC 的资助。

以完全正收缩映射作为态射，且其归纳极限仍是一个算子空间，更准确地说，是序列代数$A_\infty = \prod_n A/\bigoplus_n A$的一个自伴子空间；该序列代数是有界序列模零序列所得的商 $A$。至少在转到某个子系统之后（使得逼近误差在越来越大的子集中可求和），这个归纳极限将与 $A$ 嵌入 $A_\infty$（作为常值序列）的结果一致，因此它确实是一个 C*-代数。在这种情况下，我们可以合理地预期下方一行

$$\cdots \qquad F_{n-1} \xrightarrow{\rho_{n,n-1}} F_n \xrightarrow{\rho_{n+1,n}} F_{n+1} \qquad \cdots$$

也编码了有关 $A$的所有相关信息。这是一个颇具吸引力的观点，因为这样一来，任何可分核 C*代数都可以在某个适当范畴中写成有限维代数的归纳极限：这样的极限，记作 $X$，将包含在序列代数 $F_\infty = \prod_n F_n/\bigoplus_n F_n$中。它可以描述为并集$\bigcup_n \rho_n(F_n)$的（范数闭包），其中 $\rho_n\colon\ F_n \longrightarrow F_\infty$ 表示每个$n$对应的极限映射，并且会诱导出一个完全正收缩等距映射 $\Psi\colon\ A \longrightarrow X$。空间 $X$ 必然会反映 $A$ 的线性结构以及序结构（即使经过矩阵放大后也是如此），因为其中涉及的映射都是完全正的。不过，一般而言，它不会是 $F_\infty$的子 C*代数，而且映射 $\Psi$ 也不会是乘法的。

将算子代数研究为归纳极限有着悠久的历史：在冯·诺伊曼代数方面，从 Murray 和 von Neumann 对[18]超有限性的研究，到半离散性以及 Connes 对单射 $\mathrm{II}_1$ 因子的著名分类（[7]）；在 C*-代数方面，则包括对 UHF、AF、AT 和 AH代数的分类（参见[8, 9, 10]）。归纳极限曾被用于构造具有指定结构、K 理论和迹数据的基本 C*-代数，例如江–苏代数 $\mathcal{Z}$ [13, 21] 和 Razak–Jacelon 代数$\mathcal{W}$ [12]。近年来，[2] 中所述的 Cartan对归纳极限被用于 [17]，以证明所有可分类的稳定有限 C*-代数都具有群胚模型。这些结果中出现的归纳系统，其连接映射均为 *-同态。因此，至少在 C*-代数方面，为了涵盖足够广泛的实例，就必须接受比有限维代数更复杂的构件代数。（通常，人们使用由局部紧空间上的有限维 C*-代数构成的丛所构造的代数，但这会限制能否存在足够多的连接映射。）

本文探讨如何在保持基本构件为有限维、因而尽可能简单的同时，放宽对连接映射的条件。我们的设想是，将任意可分的 nuclear C*-代数写成有限维 C*-代数的归纳极限

，其中取极限的范畴是算子空间范畴。为了在概念上令人满意并能用于实际应用，这种方法必须满足一些最低要求：必须能够以实际可行的方式从算子系统 $X$ （或者从归纳系统本身）恢复 C*-代数结构，并且必须能够简洁地描述由此产生的极限算子空间。然而，要克服两个障碍。

首先，连接映射 $\rho_{n,\ n-1}$ 通常无法安排为乘法的，甚至无法近似地做到这一点：若要求乘法性，我们所能涉及的就只有 AF代数——它们是核 C*-代数中一个虽小却颇有研究价值的子类。在 [4], Blackadar 和 Kirchberg 提出了 NF 系统这一概念，它纳入了某种类型的渐近乘法性，并涵盖范围大得多的 NF 代数类。尽管这一类远比 AF代数广泛，但仍远不足以涵盖所有核 C*-代数。因此，我们需要一种有限维 C*-代数归纳系统的概念，它既足够灵活，能够将每个可分核 C*-代数表示为此类系统的归纳极限；又足够严谨，能够编码给定 C*-代数的线性与矩阵序结构，以及其乘法结构。重要的是，系统不仅要编码代数结构，还必须能够以有意义且足够具体的方式访问并提取该结构。

其次，假设我们已经有了上述归纳系统的概念，就需要将它们与算子空间范畴中任意由有限维 C*-代数组成的归纳系统区分开来。理想情况下，我们希望得出对相应极限的内在刻画。（理论上，可以将该极限与每个 C*-代数进行比较，并检查是否存在某种适当意义下的同构；但这种外在刻画在概念上和实践中都难以令人满意，因为它会在很大程度上掩盖与有限维逼近有关的信息。）

Blackadar 和 Kirchberg 引入的 NF 代数概念解决了第一个障碍，并揭示了第二个障碍的一个微妙方面。

定义（[4]）。由有限维 C*-代数组成的序列（$F_n$），连同完全正压缩连接映射$\rho_{n+1,n}$: $F_n \longrightarrow F_{n+1}$，构成的系统（$F_n$,$\rho_{n+1,n}$）$_n$，若其满足渐近乘法性（即对于任意 $\varepsilon > 0$, $k \geq 0$ 和 $x, y \in F_k$，存在一个 $M > k$，使得对于所有 $m > n > M$，都有），则称为 NF 系统。

(a) $\quad \|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big) - \rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\big)\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(y)\big)\| < \varepsilon.$

这种系统的极限确实是 $F_\infty$ 的一个子 C*-代数，其乘积定义为

$$\rho_k(x)\rho_k(y) = \lim_n \rho_n\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big) \tag{b}$$

对于任意的 $k \geq 0$ 和 $x, y \in F_k$。因此，相关连接映射的渐近乘法性确实编码了极限的乘法结构，从而解决了上述第一个障碍。

随后，Blackadar 和 Kirchberg 将 NF 系统的极限（即所谓的 NF 代数）刻画为核且拟对角的 C*-代数。尽管这是一大类非常重要的 C*-代数，但它对取商或扩张并不封闭，这大大限制了 NF 系统的应用范围。这与拟对角性是一种外部逼近性质这一事实有微妙关联：拟对角性是从外部刻画的，是通过映入其他 C*-代数的比较映射来定义的。

我们在此提出 NF 系统的一种推广，它能够通过有限维逼近对象之间的连接映射来编码极限的乘法结构，同时又涵盖所有可分核 C*-代数，因此可以给出一种内在刻画。我们主要定义的关键特征是，要求连接映射逐渐成为零阶映射，以此取代 NF 系统的渐近乘法性。我们回顾[24]中的内容：对于完全正收缩映射，“零阶”仅表示“保持正交”，而零阶完全正收缩映射能够通过如下形式的公式记住大量乘法结构：$\theta(x)\theta(yz) = \theta(xy)\theta(z)$。当定义域含幺时，可以通过以下方式刻画零阶映射

$$\theta(1)\theta(yz) = \theta(y)\theta(z). \tag{c}$$

定义 A（定义 2.2）。由有限维 C*-代数序列 $(F_n)_n$ 以及完全正压缩连接映射 $\rho_{n+1,n}\colon F_n \longrightarrow F_{n+1}$ 组成的系统 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$，若其渐近具有零阶性质，即对于任意 $\varepsilon > 0$, $k \geq 0$ 和 $x, y \in F_k$，存在一个 $M > k$，使得对所有 $m > n, l > M$，我们有

$$\|\rho_{m,l}(1_{F_l})\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big) - \rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\big)\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(y)\big)\| < \varepsilon. \tag{d}$$

注意到，鉴于（c），近似单位（d）确实可以视为（a）的零阶版本。对于这类系统的归纳极限，仍可如（b）那样描述乘积。

命题 B（命题 2.6）。设 $X \subset F_\infty$ 是 CPC*-系统 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 的极限。则存在一个结合双线性映射 $\bullet\colon X \times X \longrightarrow X$，满足

$$\rho_k(x) \bullet \rho_k(y) = \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))$$

对所有 $k \geq 0$ 和 $x, y \in F_k$，使得 $(X, \bullet)$ 是一个 C*-代数，其对合和范数继承自 $F_\infty$，并将其视为一个子空间。

我们将上述 C*-代数记为 $\mathrm{C}^*_\bullet(X)$，并称其为系统 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 的 CPC*-极限。

建立 C*-代数结构后，下一个问题是：极限何时是核的？得益于 Ozawa 和 Sato 在[22, 定理 5.1] 中的“单向 CPAP”（一种只涉及向上映射 $\varphi_n$的逼近性质），答案是“总是如此”。值得注意的是，尽管 CPC*-极限很容易满足单向 CPAP，但要证明核性，[22, 定理 5.1] 首先确认 $\mathrm{C}^*_\bullet(X)^{**}$ 是内射的，而根据 Connes 定理，这意味着 $\mathrm{C}^*_\bullet(X)$ 是核的。因此，这一结果是非构造性的，也就是说，人们并未直接从系统 $(F_n,\rho_{n+1,\ n})_n$构造出完全正逼近。这与 Blackadar 和 Kirchberg 对 NF 代数的刻画相一致：NF 代数是核且拟对角的 C*-代数。该刻画涉及核性可传递到商这一事实，因此同样依赖于 Connes 定理，并以类似方式具有非构造性。

作为逆向结论，我们证明，任意一个可分核 C*-代数 $A$ 的完全正收缩逼近系统，若其向下映射近似为零阶，就包含一个子系统，该子系统产生一个 CPC*-系统，其 CPC*-极限同构于 $A$。这一结论隐含地来自 [4, 24] ，并由[5] 明确得出：每个核 C*-代数都确实存在这样的逼近系统。

结合这些结果，我们现在可以将所有可分核 C*-代数描述为有限维 C*-代数的归纳极限：

定理 C. 对于可分 C*-代数 $A$ ，以下条件等价：

(i) $A$是核的。(ii) $A$ 与某个 CPC*-极限 *-同构。

命题 B 说明了如何从 CPC*-极限中提取乘法结构，从而回应了上文提出的两个问题之一。至于第二个问题，我们对 CPC*-系统及其极限的刻画确实是内在的，无须与外部的 C*-代数进行任何比较。在后续工作中，我们将探讨如何实际应用这一概念，尤其是如何描述核性的保持性质，以及如何用 CPC*-系统来研究 K-理论。

本文安排如下。 第 1 节 确立了全文将用到的关于 c.p.c. 和零阶映射的结果。本节的一些结果众所周知，另一些则是新的。在 第 2 节我们定义 CPC*-系统，并证明 (ii)$\Longrightarrow$定理 C 的 (i)。 第 3 节专门用于证明反向蕴含，而 第 4 节 则将 CPC*-系统与 NF 系统联系起来。

致谢：我们感谢 Jamie Gabe 对本文初稿提出的有益意见，也感谢审稿人认真审阅并提出有帮助的意见。

## 1. Order zero maps and order embeddings

本节将着重介绍完全正映射的一些性质，特别关注零阶映射和完全序嵌入。

我们用 $A_+$ 表示 C*-代数 $A$中正元构成的锥，$A^1$ 和 $A_+^1$ 分别表示相应的闭单位球，$X' \cap A \subset M$ 表示集合 $X$ 在 $A$中的相对交换子（其中 $A$和 $X$ 都包含于一个更大的 C*-代数 $M$中），$CA = C_0((0,1], A)$ 表示锥，$\mathrm{M}_r(A)$ 表示 $A$上的 $r \times r$矩阵，而 $\mathcal{M}(A)$ 表示 $A$ 的乘子代数（视为双对偶 $A^{**}$的子代数）。

定义 1.1。设 $A$ 和 $B$ 是具有自伴子空间 $X \subset A$、$Y \subset B$的 C*-代数，且 $\theta\colon X \longrightarrow Y$为线性映射。若对于所有 $x \in X \cap A_+$，都有 $\theta(x) \in Y \cap B_+$，则称 $\theta$ 为正的。若对所有矩阵放大 $\theta^{(r)}\colon \mathrm{M}_r(X) \longrightarrow \mathrm{M}_r(Y)$，上述条件均成立，则称其为完全正的（c.p.）。若 $\sup_{r\geq 1} \|\theta^{(r)}\| \leq 1$，则称 $\theta$ 为完全压缩映射。完全正且完全压缩的映射称为完全正压缩映射（c.p.c.）。

注 1.2. 当 $1_A \in X$ 是一个含幺自伴子空间，且它是含幺 C*-代数 $A$ （通常称为算子（子）系统）时，对于任意完全正映射 $\theta\colon X \longrightarrow Y$，我们有

$$\|\theta\| \leq \sup_{r\geq 1} \|\theta^{(r)}\| \leq \|\theta(1_A)\|.$$

由此可知，从 C*-代数的含幺自伴子空间出发的任意完全正且收缩的映射，都会自动成为完全压缩映射。当 $A$ 是一个（不一定含幺的）C*-代数时，相应的结论同样成立。

完全正映射中有一类特别重要的映射，即保持正交性的映射或零阶映射。在本节末尾，我们将强调零阶映射所具有的若干性质，而这些性质对于一般的完全正收缩映射可能并不成立。

*-同态所具有的这些性质，对于一般的完全正收缩映射可能并不成立。

定义 1.3. 若 C*-代数之间的完全正映射 $\theta\colon A \longrightarrow B$ 将正交元素映射为正交元素，则称其为零阶映射；等价地，对于任意 $a$、$b \in A_+$，

$$ab = 0 \implies \theta(a)\theta(b) = 0.$$

完全正零阶映射的例子包括 *-同态，但也存在非乘法的完全正零阶映射，例如将 C*-代数典范嵌入其锥中的 $\iota\colon A \longrightarrow CA$ 。尽管如此，零阶映射与 *-同态非常接近，这一点从完全正零阶映射的结构定理[24, 定理 3.3]中可清楚看出。以下表述结合了 [24,定理 3.3]和[24, 命题 3.2]的内容。

定理 1.4（零阶映射结构定理 [24]）。设 $A$ 和$B$ 为 C*-代数， $\theta$: $A \longrightarrow B$ 为完全正零阶映射， $C = \mathrm{C}^*(\theta(A))$，$\{u_\lambda\}_\lambda$ 为 $A$的递增近似单位，且 $h = \text{s.o.-}\lim_\lambda \theta(u_\lambda) \in C^{**}$。那么 $0 \leq h \in \mathcal{M}(C) \cap C' \subset C^{**}$ 且 $\|h\| = \|\theta\|$，并且存在一个 *-同态 $\pi_\theta$: $A \longrightarrow \mathcal{M}(C)$，使得对所有 $a \in A$,

$$\theta(a) = h\pi_\theta(a) = h^{1/2}\pi_\theta(a)h^{1/2}.$$

注释 1.5. (i) ([24, 命题 3.2]) 当 $A$ 含幺时，我们有$h = \theta(1_A)$；一般而言，由$\theta^\sim(a + \lambda 1_{A^\sim}) = \theta(a) + \lambda h$ 给出的映射 $\theta^\sim$: $A^\sim \longrightarrow \mathcal{M}(C)$ 是$\theta$的唯一完全正零阶延拓。（我们用 $A^\sim$ 表示 $A$的最小单位化，因此当 $A$含幺时有 $A^\sim = A$。）无论如何，对于所有 $a \in A^1_+$，都有 $h \geq \theta(a)$。注意，要使 $\theta^\sim$ 成为零阶映射，只有当 $\theta$ 实际上是乘法的时，才能用 $1_{\mathcal{M}(C)}$ 替换 $h$ ，因为幺正完全正零阶映射自动是 *-同态。

(ii) 零阶映射结构定理给出了一个有用的刻画，用于判定定义域含幺的完全正映射何时为零阶映射：设$A$ 和 $B$ 是 C*-代数，且 $A$ 含幺。那么，完全正映射 $\theta$: $A \longrightarrow B$是零阶映射，当且仅当对于所有 $a$、$b \in A$，有 $\theta(a)\theta(b) = \theta(1_A)\theta(ab)$。

定义 1.6. 设 $A$和 $B$ 是 C*-代数， $X \subset A$和 $Y \subset B$是两个自伴子空间。若线性映射 $\theta$: $X \longrightarrow Y$ 是完全序嵌入，即 $\theta$ 是完全正且完全等距的，并且其逆映射 $\theta^{-1}$: $\theta(X) \longrightarrow A$完全正，也就是说，对所有 $r \geq 1$、$\theta^{(r)}$ : $\mathrm{M}_r(X) \longrightarrow \mathrm{M}_r(Y)$ 是等距的，且 $x \in \mathrm{M}_r(X) \cap \mathrm{M}_r(A)_+ \Longleftrightarrow \theta^{(r)}(x) \in \mathrm{M}_r(Y) \cap \mathrm{M}_r(B)_+$ 对所有 $x \in \mathrm{M}_r(X)$ 均成立。满射的完全序嵌入称为完全序同构。

注 1.7. (i) C*-代数之间的完全序同构自动是一个 *-同构（参见[3, 定理 II.6.9.17]）。

(ii) 若 $X = A$ 和 $\theta$: $A \longrightarrow Y \subset B$ 是完全正且完全等距的，则它自动是完全序嵌入：若对于某个 $0 \neq a \in A^1$有 $\theta(a) \geq 0$ ，则 $a = a^*$ ，因为 $\theta$ 是内射且 *- 线性的。若 $a_- \neq 0$，则对于 $b := \frac{\|a\|}{\|a_-\|}a_- + a_+$ ，我们有

$$\begin{aligned}
\|a\| + \|a_-\| &= \|b - a\| \\
&= \|\theta(b) - \theta(a)\| \\
&\leq \|\|\theta(b)\|1_{B^\sim} - \theta(a)\| \\
&= \|\|\theta(a)\|1_{B^\sim} - \theta(a)\| \\
&\leq \|\theta(a)\| \\
&= \|a\|,
\end{aligned}$$

这会导致矛盾，因此 $a$ 是正的。当 $a$ 属于 $A$上的某个矩阵代数时，相应的论证同样适用，由此可知， $\theta$ 的逆映射确实是完全正的。

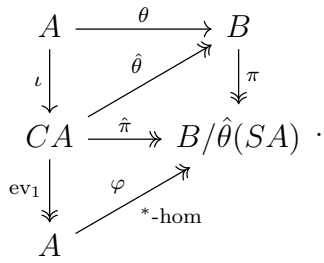
(iii) 一个等距的完全正映射 $\theta\colon A \longrightarrow B$，其定义在 C*-代数之间，且不是满射，也不是含幺映射，可能不是完全序嵌入——即使它存在一个完全正的逆映射 $\theta^{-1}\colon \theta(A) \longrightarrow A$。我们将在后续工作中构造这样一个例子。下面的命题表明，对于所有零阶映射，都不会出现这一问题。我们将在命题 2.7中用到这一点。

命题 1.8. 设 $\theta\colon A \longrightarrow B$ 是从 C*-代数 $A$ 到 $B$ 的完全正零阶映射。那么，当且仅当 $\theta$ 是完全序嵌入时，它才是等距的。

证明. 根据定义，完全序嵌入是等距的，因此我们只需证明等距的完全正零阶映射 $\theta\colon A \to B$ 是完全序嵌入；根据注记 1.7(ii)，这归结为证明 $\theta$ 是完全等距的。不失一般性，设 $B = \mathrm{C}^*(\theta(A))$。令 $\iota\colon A \longrightarrow CA$ 表示将 $A$ 嵌入其锥中的典范嵌入$a \mapsto \mathrm{id}_{(0,1])} \otimes a$。于是由 [24, 推论 4.1]，$\theta$ˆˆ 诱导出一个满射 $^*$-同态 $\theta\colon CA \longrightarrow B$，使得 $\theta \circ \iota = \theta$。

集合 $\pi$ $B$ 其中 $\hat{\theta}(SA)$ 和 $\hat{\pi}$ $\hat{\theta}(SA) = C_0((0,1]) \otimes A \cong C_0((0,1)) \otimes A$ 表示 $A$ 的悬挂。然后，ˆ 存在一个满射的 $^*$-同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B/\theta(SA)$，使得 ˆ $\pi = \varphi \circ \mathrm{ev}_1$。综上，我们得到交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\iota"'] & B \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
CA \arrow[ur, two heads, "\hat{\theta}"] \arrow[r, two heads, "\hat{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{ev}_1"'] & B/\hat{\theta}(SA) \\
A \arrow[ur, two heads, "\varphi", "{}^*\text{-hom}"'] &
\end{tikzcd}.$$



我们断言 $\varphi$ 是内射的。若如此，则有 $\varphi^{-1} \circ \pi \circ \theta = \mathrm{id}_A$，因此对每个 $r \geq 1$，都有 $(\varphi^{-1})^{(r)} \circ \pi^{(r)} \circ \theta^{(r)} = \mathrm{id}_A^{(r)}$。由于在这种情况下 $\varphi^{-1}$ 和 $\pi$ 完全压缩，因此可得 $\theta$ 必定是完全等距的。

只需在 $A_+$ 上检验内射性，因此我们固定满足$\|a\| = 1$的 $a \in A_+$。设 $\rho \in S(B)$ 是 $B$ 上的一个纯态，且 $\|\theta(a)\| = \rho(\theta(a))$。ˆ那么 $\rho \circ \theta$ 是 $CA$ 上的纯态，因此其在代数张量积 $C_0((0,1]) \odot A$ 上的限制具有 $\mathrm{ev}_t \otimes \rho$ 的形式，其中 $t \in (0,1]$，且 $\rho_A$ 是 $A$ 上的一个（纯）态。由于

$$1 = \|a\| = \|\theta(a)\| = \rho \circ \hat{\theta}(\mathrm{id}_{(0,1]} \otimes a) = t\rho_A(a) \leq \rho_A(a) \leq \|a\|,$$

ˆˆ 我们必有 $t = 1$。特别地，$SA \subset \ker(\rho \circ \theta)$，因此 $\theta(SA) \subset$ˆ $\ker(\rho)$。由于 $\rho(\theta(a)) = 1$，我们得出 $\theta(a) \notin \theta(SA)$，所以$\varphi(a) \neq 0$。
□

## 2. CPC*-systems and their limits

回顾备注 1.5(ii) 中的结论：对于 C*-代数 $A$ 和 $B$，若 $A$ 是一个幺正的完全正收缩映射 $\theta\colon A \longrightarrow B$ 当且仅当 $\theta(a)\theta(b) = \theta(1_A)\theta(ab)$ 对所有 $a, b \in A$ 都成立时，它是零阶映射。以下定义给出了这一刻画的渐近版本。

定义 2.1. 给定一个 C*-代数序列 $(F_n)_n$，记

$$F_\infty := \prod F_n / \bigoplus F_n$$

为范数有界序列模去零序列所得的商 C*-代数，并将商中的元素表示为 $[(x_n)_n]$。

此外，若有完全正压缩连接映射 $\rho_{n+1,\,n}\colon F_n \longrightarrow F_{n+1}$对所有 $n \geq 0$，令 $\rho_{m,\,n} := \rho_{m,\,m-1} \circ \cdots \circ \rho_{n+1,\,n}$，并令 $\rho_{n,\,n} = \mathrm{id}_{F_n}$对所有$m > n \geq 0$，定义诱导映射 $\rho_n\colon F_n \longrightarrow F_\infty$，其定义为

$$\rho_n(x) = [(\rho_{m,n}(x))_{m>n}]$$

对所有 $x \in F_n$，并将系统 $(F_n,\ \rho_{n+1,\,n})_n$的归纳极限定义为闭自伴子空间

$$\overbrace{(F_n, \rho_n)}^{\searrow}_n := \overline{\bigcup_n \rho_n(F_n)} \subset F_\infty.$$

一般而言，这样的归纳极限存在于算子空间范畴中；若要赋予它 C*-代数结构，还需要额外的假设。

定义 2.2. 设 $(F_n)_n$ 是一列有限维 C*-代数，并配有完全正收缩映射 $\rho_{n+1,\,n}\colon F_n \longrightarrow F_{n+1}$，对所有 $n \geq 0$ 均成立。若对于任意 $k \geq 0$、$x$、$y \in F_k$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > k$，使得对所有 $m > n$、$l > M$，我们称 $(F_n,\rho_{n+1,\,n})_n$ 为 CPC*-系统，

$$\|\rho_{m,l}(1_{F_l})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

在这种情况下，我们称极限 $\overbrace{(F_n, \rho_n)_n}^{\searrow}$ 为 CPC*-极限。

本节旨在证明，CPC*-极限可以以非常稳健的方式转化为 C*-代数（命题 2.6），记作 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\ \rho_n)_n\big)$，且该代数是核的（定理 2.13），并且映射$\Theta := \mathrm{id}_{(F_n,\rho_n)_n : \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\ \rho_n)_n\big)} \longrightarrow F_\infty$ 是一个零阶完全序嵌入（命题 2.7）。我们先整理一些工具和观察结果。

如定义 2.1 中的系统涉及完全正收缩映射，因此显然与矩阵放大相容。提升归纳极限中的单个元素这一过程是否也与该系统相容，则稍微不那么显而易见，具体如下所述。

引理 2.3. 设 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 是定义 2.1 中的一个系统。对于任意 $r \geq 1$ 和 $\bar{x} \in \mathrm{M}_r\big((F_n, \rho_n)_n\big)$，若 $\overbrace{(x_n)_n}^{\searrow} \in \prod \mathrm{M}_r(F_n)$ 是$\bar{x}$的某个提升，则 $\lim_n \|\bar{x} - \rho_n^{(r)}(x_n)\| = 0$。

证明。 考虑 $r = 1$ 并固定 $\bar{x} \in (F_n, \rho_n)_n$， 一个提升 $(x_n)_n \in \prod F_n$ of $\bar{x}$，以及 $\varepsilon > 0$。令 $y_{k_j} \in F_{k_j}$ 使得 $\bar{x} = \lim_j \rho_{k_j}(y_{k_j})$。由于这些映射是相容的，为简单起见，可设 $k_j$ 递增，并令 $y_n := \rho_{n,\,k_j}(y_{k_j})$，其中 $k_j < n < k_{j+1}$。于是有 $\lim_n \rho_n(y_n) = \bar{x}$。现在固定 $k > 0$ 使得 $\|\rho_k(y_k) - \bar{x}\| < \varepsilon/4$。接着可选取 $M > k$ 使得 $\|\rho_{n,k}(y_k) - x_n\| < \varepsilon/2$ 对所有 $n > M$ 均成立。于是对所有 $m > n > M$，

$$\begin{aligned}\|\rho_{m,n}(x_n) - x_m\| &\leq \|\rho_{m,n}(x_n - \rho_{n,k}(y_k))\| + \|\rho_{m,k}(y_k) - x_m\| \\ &\leq \|x_n - \rho_{n,k}(y_k)\| + \|\rho_{m,k}(y_k) - x_m\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

由此可得 $\lim_n \rho_n(x_n) = [(x_n)_n] = \bar{x}$。

注意， $r = 1$ 的论证只用到映射 $\rho_{m,\,n}$ 是相容且为完全正收缩的；其矩阵放大也满足这一点，因此完全相同的证明同样适用于 $r \geq 1$。□

我们将要用到的一个关键工具，是极限的一个特定矩阵序单位[1]，它对应于一个 CPC*-系统 $(F_n, \rho_{n+1,\,n})_n$，定义如下：

$$e := [(\rho_{n+1,n}(1_{F_n}))_n] \in F_\infty. \tag{2.2}$$

注意，我们通常不假设 $e$ 是 $(F_n, \rho_n)_n$ 的元素。后一种情况对应于 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 为含幺（且 $e =$ 极限$_n\, \rho_n(1_{F_n})$），此时可以通过消去变量 $l$，稍微简化（2.1）。

我们还设

$$e^{(r)} := [(\rho^{(r)}_{n+1,n}(1_{\mathrm{M}_r(F_n)})_n] \in \mathrm{M}_r(F_\infty), \quad \text{for} \quad r \geq 1.$$

注 2.4. 注意，式（2.1）表明，对于任意 $k \geq 0$ 和 $x$， $y \in F_k$，都有

$$\rho_k(x)\rho_k(y) = \lim_n e\rho_n\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big).$$

下面的引理将使我们能够将 $e$ 解释为 $(F_n, \rho_n)_n$ 的交换的非退化序单位。

引理 2.5. 设 $(F_n, \rho_{n+1,\,n})_n$ 是一个 CPC*-系统，并设 $e$ 如式 (2.2) 中所定义。

(i) 对于每个 $k \geq 0$、 $x \in F_k$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > k$，使得对于所有 $m > n > M$，

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,k}(x) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,n}(1_{F_n})\| < \varepsilon.$$

特别地，$e \in \big((F_n, \rho_n)_n\big)'$。

(ii) 对任意 $r \geq 1$ 以及任意自伴 $\bar{x} \in \mathrm{M}_r((F_n, \rho_n)_n)$，有 $\|\bar{x}\| e^{(r)} \geq \bar{x}$ 属于 $\mathrm{M}_r(F_\infty)$。

[1]采用这一术语是有依据的，见引理 2.5(ii)。

(iii) 对任意 $\bar{x} \in (F_n, \overrightarrow{\rho_n)_n}$ 以及任意 $j \geq 1$，有 $\|e^j\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$。特别地，对任意 $\bar{x}$，$\bar{y} \in (F_n, \rho_n)_n$ 以及 $\overrightarrow{j \geq 1}$，若 $e^j\bar{x} = e^j\bar{y}$，则 $\bar{x} = \bar{y}$。

证明。对于 (i)，我们固定 $k \geq 0$，$x \in F_k$，以及 $\varepsilon > 0$；不失一般性，只需假设 $x \in (F_k)^1_+$。由一个标准的函数演算论证可知，利用 $t \mapsto t^{1/2}$ 在 $[0,1]$ 上的多项式逼近，只要对任意 $\eta > 0$ 找到一个 $M > k$，使得对所有 $m > n > M$，

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,k}(x)^2\rho_{m,n}(1_{F_n})\| < \eta. \tag{2.3}$$

为此，我们利用 2.1）来选取 $M > k$，使得对所有 $m > n > M$

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,k}(x)^2\| < \eta/6. \tag{2.4}$$

那么我们有

$$\begin{aligned}
&\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,k}(x)^2\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\leq \|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,n}(1_{F_n})^2\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}(1_{F_n})^2\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n}) - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})^2\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})^2 - \rho_{m,k}(x)^2\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\leq \|\rho_{m,n}(1_{F_n})\|\|\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}(1_{F_n})\|\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\|\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\quad + \|\big(\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n}) - \rho_{m,k}(x)^2\big)^*\|\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\leq 2\|\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\| \\
&\quad + 2\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&\overset{(2.4)}{<} \eta/3 + 2\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,k}(x)^2\| \\
&\quad + 2\|\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\| \\
&= \eta/3 + 2\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,k}(x)^2\| \\
&\quad + 2\|\big(\rho_{m,k}(x)^2 - \rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2)\rho_{m,n}(1_{F_n})\big)^*\| \\
&= \eta/3 + 4\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)^2) - \rho_{m,k}(x)^2\| \\
&\overset{(2.4)}{<} \eta,
\end{aligned}$$

它确立了（2.3），因此（i）。

对于序单位条件 (ii)，我们首先考虑 $r = 1$。对于任意自伴 $\bar{x} \in (F_n, \rho_n)_n$ 以及任意自伴 $x_n$ 的提升 $\in \prod F_n$，引理 2.3 告诉我们 $\bar{x} = \lim_n \rho_n(x_n)$。因此，只需证明对于任意固定的 $k \geq 0$ 和任意自伴 $x \in F_k$，断言对 $\rho_k(x)$ 成立。对于每个 $n > k$，我们有 $\|\rho_{n,k}(x)\|1_{F_n} \geq \rho_{n,k}(x)$，因此 $\|\rho_{n,k}(x)\|\rho_n(1_{F_n}) \geq \rho_n(\rho_{n,k}(x)) = \rho_k(x)$。由于所有映射都是 c.p.c.，可知对于所有 $n \geq 0$，$e \geq \rho_n(1_{F_n})$，从而对于所有 $n > k$，$\|\rho_{n,k}(x)\|e \geq \rho_k(x)$。此外，$(\|\rho_{n,k}(x)\|)_{n>k}$ 有界且单调不增，这意味着 $\|\rho_k(x)\| = \limsup_n \|\rho_{n,k}(x)\| = \lim_n \|\rho_{n,k}(x)\|$，因此

$$\|\rho_k(x)\|e = \lim_n \|\rho_{n,k}(x)\|e \geq \rho_k(x).$$

由于对 $r = 1$ 的论证仅使用了引理 2.3 以及映射是 c.p.c. 这一事实，我们可以对 $r \geq 1$重复同样的论证。

对于非退化条件 (iii)，我们假设 $(F_n, \rho_n)_n \neq \{0\}$（否则断言显然成立）。我们先考虑 $\bar{x} \in (F_n, \rho_n)_n$ 是自伴的情形，并进一步假设 $\|\bar{x}\| = 1$。通过将 $\bar{x}$ 替换为 $-\bar{x}$，我们可以假设 $1 \in \sigma(\bar{x})$ 是 $\bar{x}$ 的谱。由 (i) 可知，$e$ 与 $\bar{x}$ 可交换，因此我们可以将 $C^*(e, \bar{x}) \subset F_\infty$ 识别为某个局部紧豪斯多夫空间 $\Omega \subset \sigma(e) \times \sigma(\bar{x}) \subset [0,1] \times [-1,1]$ 上的 $C_0(\Omega)$。于是 (ii) 蕴含对所有 $(s,t) \in \Omega$，$s \geq t$。由于我们假设 $1 \in \sigma(\bar{x})$，可知 $(1,1) \in \Omega$，因此对于任意 $m \geq 1$，

$$1 = \|\bar{x}\| \geq \|e^m \bar{x}\| = \sup_{(s,t)\in\Omega} |s^m t| \geq 1.$$

现在，我们处理任意 $\bar{x} \in (F_n, \rho_n)_n$ 的一般情形。由于 $\bigcup_n \rho_n(F_n)$ 在 $(F_n, \rho_n)_n$ 中稠密，只需验证对于任意固定的 (iii)，若 $\bar{x} = \rho_k(x)$ 满足 $k \geq 0$ 且 $x \in F_k$，则其成立。由注 2.4 可知

$$\rho_k(x)^*\rho_k(x) = \lim_n e\rho_n\big(\rho_{n,k}(x)^*\rho_{n,k}(x)\big). \tag{2.5}$$

由于 $\rho_m\big(\rho_{m,\ k}(x)^*\rho_{m,\ k}(x)\big) - \rho_n\big(\rho_{n,\ k}(x)^*\rho_{n,\ k}(x)\big) \in (F_n, \rho_n)_n$ 对所有 $m > n > k$ 都是自伴的，我们已经知道

$$\begin{aligned}&\|e\rho_m\big(\rho_{m,k}(x)^*\rho_{m,k}(x)\big) - e\rho_n\big(\rho_{n,k}(x)^*\rho_{n,k}(x)\big)\| \\ &= \|\rho_m\big(\rho_{m,k}(x)^*\rho_{m,k}(x)\big) - \rho_n\big(\rho_{n,k}(x)^*\rho_{n,k}(x)\big)\|,\end{aligned}$$

结合2.5可得 $\big(\rho_n\big(\rho_{n,\ k}(x)^*\rho_{n,\ k}(x)\big)\big)_n$ 是柯西列，因此收敛到某个自伴 $\bar{z} \in (F_n, \rho_n)_n$，满足 $e\bar{z} = \rho_k(x)^*\rho_k(x$。由此以及自伴情形可得

$$\|\rho_k(x)\|^2 = \|\rho_k(x)^*\rho_k(x)\| = \|e\bar{z}\| = \|\bar{z}\|.$$

由于 $\bar{z}$ 是自伴的，(ii)告诉我们 $\|\rho_k(x)\|^2 e = \|\bar{z}\| e \geq \bar{z}$。根据 (i)， $e$ 与 $\bar{z}$ 对易，而且也与 $|\rho_k(x)|$对易。因此

$$\|\rho_k(x)\|^2 e^2 \geq e\bar{z} = \rho_k(x)^* \rho_k(x),$$

这意味着

$$\|\rho_k(x)\| e \geq |\rho_k(x)|.$$

由此，自伴情形的证明还表明，对于任意 $m \geq 1$， $\|e^m|\rho_k(x)|\| = \||\rho_k(x)|\|$ ，因此对任意 $m \geq 1$ ，我们有

$$\begin{aligned}
\|e^m \rho_k(x)\|^2 &= \|e^{2m}|\rho_k(x)|^2\| \\
&= \|(e^m|\rho_k(x)|)^2\| \\
&= \|e^m|\rho_k(x)|\|^2 \\
&= \||\rho_k(x)|\|^2 \\
&= \|\rho_k(x)\|^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

完成这些初步观察后，我们现在可以证明关于 CPC*-极限的第一个结构性结果。

命题 2.6. 设 $(F_n, \rho_n)_n$ 是一个 CPC*-系统的极限 $(F_n, \rho_{n+1,n})_n$。那么存在一个结合双线性映射 $\bullet : (F_n, \rho_n)_n \times (F_n, \rho_n)_n \longrightarrow (F_n, \rho_n)_n$ *satisfying*

$$\rho_k(x) \bullet \rho_k(y) = \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)) \tag{2.6}$$

对于所有 $k \geq 0$ 和 $x$、 $y \in F_k$ 以及

$$e(\bar{x} \bullet \bar{y}) = \bar{x}\bar{y} \tag{2.7}$$

对于所有 $\bar{x}$， $\bar{y} \in (F_n, \rho_n)_n$，使得关于乘法 $\bullet$，$(F_n, \rho_n)_n$ 是一个范数为 $\|\cdot\|_{F_\infty}$ 的 C*-代数，记作 $\mathsf{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$。[2]

证明。我们首先定义 $\bullet : \bigcup_n \rho_n(F_n) \times \bigcup_n \rho_n(F_n) \longrightarrow (F_n, \rho_n)_n$。对于嵌套并集 $\bigcup_n \rho_n(F_n)$ 中的元素 $\bar{x}$、 $\bar{y}$，我们可以选取 $k \geq 0$ 和 $x$、 $y \in F_k$，使得 $\bar{x} = \rho_k(x)$ 和 $\bar{y} = \rho_k(y)$，并通过下式定义 $\bar{x} \bullet \bar{y}$：

$$\bar{x} \bullet \bar{y} := \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)). \tag{2.8}$$

所给极限的存在性可由 注 2.4 和引理 2.5(iii)立即得出。此外，这一定义与 $k$和 $x, y \in F_k$的具体选取无关。事实上，对于任意满足 $[(x_n)_n] = \rho_k(x) = \bar{x}$ 和 $[(y_n)_n] = \rho_k(y) = \bar{y}$ 的 $(x_n)_n, (y_n)_n \in \prod F_n$ ，我们有$[(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))_n] = [(x_n y_n)_n]$。于是对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $M > k$

[2]我们同时将 $(F_n, \rho_n)_n$ 视为 $F_\infty$ 的子空间以及 $\mathsf{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 空间。为清晰起见， $F_\infty$ 中的乘法始终用通常的连接表示法表示（例如 $\bar{x}\bar{y}$），而 $\mathsf{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 中的乘法始终用 $\bullet$ 表示（例如 $\bar{x} \bullet \bar{y}$）。因此，对于 $e(\bar{x} \bullet \bar{y})$，我们取 $e$ 和 $\bar{x} \bullet \bar{y}$ 的 $F_\infty$-乘积。

满足 $\sup_{n>M}\|\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)-x_ny_n\|<\varepsilon$的情况，我们有 $\|\rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))-\rho_n(x_ny_n)\|<\varepsilon$ 对所有 $n>M$均成立，因此序列 $\rho_n(x_ny_n)\in(F_n,\rho_n)_n$也收敛于 $\lim_n\rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))$。

此映射的双线性由$F_n$中的通常乘法的双线性可知。对于每个 $k\geq 0$ 和 $x$, $y\in F_k$ 根据注 2.4 有

$$\rho_k(x)\rho_k(y)=e(\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)), \tag{2.9}$$

由引理 2.5(iii)中的非退化条件可知

$$\|\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)\|=\|e(\rho_k(x)\bullet\rho_k(y))\|=\|\rho_k(x)\rho_k(y)\|. \tag{2.10}$$

对于 $\bar{x}$, $\bar{y}\in\overline{(F_n,\ \rho_n)_n}$和 $(x_n)_n$, $(y_n)_n\in\prod F_n$ 满足 $\bar{x}=[(x_n)_n]$ 且 $\bar{y}=[(y_n)_n]$, 由 (2.9) 和引理 2.3 可得

$$\lim_n e\big(\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)\big)=\lim_n\rho_n(x_n)\rho_n(y_n)=xy.$$

此外，由引理 2.5(iii) 可知，对所有 $m>n\geq 0$

$$\begin{aligned}&\|e\big(\rho_m(x_m)\bullet\rho_m(y_m)-\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)\big)\|\\&=\|\rho_m(x_m)\bullet\rho_m(y_m)-\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)\|.\end{aligned}$$

因此 $\lim_n\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)$存在，因此我们可以将映射扩展为 $\bullet:\overline{(F_n,\ \rho_n)_n}\times\overline{(F_n,\ \rho_n)_n}\longrightarrow\overline{(F_n,\ \rho_n)_n}$ 定义如下

$$\bar{x}\bullet\bar{y}:=\lim_n\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)$$

对每个 $(\bar{x},\bar{y})\in\overline{(F_n,\rho_n)_n}\times\overline{(F_n,\rho_n)_n}$，其中 $(x_n)_n$、$(y_n)_n\in\prod F_n$是 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$的任意提升元。注意，我们仍然有

$$e(\bar{x}\bullet\bar{y})=e\big(\lim_n\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)\big)=\lim_n\rho_n(x_n)\rho_n(y_n)=\bar{x}\bar{y},$$

因此再次由非退化性（引理 2.5(iii)）可知， $\bar{x}\bullet\bar{y}$是满足 $e\bar{z}=\bar{x}\bar{y}$的唯一元素 $\bar{z}\in\overline{(F_n,\rho_n)_n}$。总之，我们的映射 $\bullet:\overline{(F_n,\rho_n)_n}\times\overline{(F_n,\rho_n)_n}\longrightarrow\overline{(F_n,\rho_n)_n}$是良定义的、双线性的，并满足 (2.7) 和 (2.6)。为证明它具有结合性，固定 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\overline{(F_n,\rho_n)_n}$。于是我们有

$$\begin{aligned}e^2((\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z})&=e((\bar{x}\bullet\bar{y})\bar{z})\\&=((\bar{x}\bar{y})\bar{z})\\&=(\bar{x}(\bar{y}\bar{z}))\\&=\bar{x}e(\bar{y}\bullet\bar{z})\\&=e(\bar{x}(\bar{y}\bullet\bar{z}))\\&=e^2(\bar{x}\bullet(\bar{y}\bullet\bar{z})).\end{aligned}$$

由非退化性可知

$$(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}=\bar{x}\bullet(\bar{y}\bullet\bar{z}).$$

因此，$\overrightarrow{((F_n,\ \rho_n)_n,\ \bullet)}$ 是一个代数。为证明它相对于从 $F_\infty$ 继承的对合构成一个 $^*$-代数，我们令 $\bar{x},\ \bar{y}\in(F_n,\ \rho_n)_n$，并注意到

$$e(\bar{x}\bullet\bar{y})^*=(\bar{x}\bullet\bar{y})^*e=(e(\bar{x}\bullet\bar{y}))^*=(\bar{x}\bar{y})^*=\bar{y}^*\bar{x}^*=e(\bar{y}^*\bullet\bar{x}^*).$$

再次由非退化性可知 $(\bar{x}\bullet\bar{y})^*=\bar{x}\bullet\bar{y}$，因此 $((F_n,\rho_n)_n,\bullet)$ 确实是一个 $^*$-代数。

由于 $(\overrightarrow{(F_n,\rho_n)_n},\bullet)$ 关于 $F_\infty$ 上给定的范数已经是一个 Banach空间，因此还需确认它实际上是一个 Banach $^*$-代数，并且该范数仍满足 C*-恒等式。这两点都可直接由以下事实得出：

$$\|\bar{x}\bullet\bar{y}\|=\|e(\bar{x}\bullet\bar{y})\|=\|\bar{x}\bar{y}\| \tag{2.11}$$

对于任意 $\bar{x},\bar{y}\in\overrightarrow{(F_n,\rho_n)_n}$。 □

命题 2.7。设 $(F_n,\rho_{n+1,\ n})_n$ 是一个 CPC*-系统。则

$$\Theta:=\mathrm{id}_{\overrightarrow{(F_n,\rho_n)_n}}:\mathrm{C}^*_\bullet\big(\overrightarrow{(F_n,\rho_n)_n}\big)\longrightarrow F_\infty$$

是一个零阶完全序嵌入。

证明。显然，由于给定的 $^*$-线性结构以及 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big)$ 和 $(F_n,\rho_n)_n\subset F_\infty$ 上的范数相同，该映射是等距的、保持 $^*$，且是线性的。此外，由 (2.11) 可得，$\Theta$ 是零阶的。根据命题 1.8，只需证明它是完全正的；也就是说，对于任意 $r\geq 1$ 和 $\bar{x}\in\mathrm{M}_r(\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big))$，元素 $\bar{x}^*\bullet\bar{x}\in\mathrm{M}_r((F_n,\rho_n)_n)$ 属于 $\mathrm{M}_r(F_\infty)_+$。（我们仍用 $\bullet$ 表示 $\mathrm{M}_r(\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big))$ 中的乘法。）

固定 $r\geq 1$，注意到逐坐标应用（2.7）可得，对于任意 $\bar{x}\in\mathrm{M}_r(\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big))$，有

$$e^{(r)}(\bar{x}^*\bullet\bar{x})=\bar{x}^*\bar{x}\geq 0.$$

因此，只需证明对于任意 $\bar{y}\in\mathrm{M}_r((F_n,\rho_n)_n)\subset\mathrm{M}_r(F_\infty)$，$e^{(r)}\bar{y}\geq 0$ 蕴含 $\bar{y}\geq 0$。

为此，固定 $\bar{y}\in\mathrm{M}_r(\overrightarrow{(F_n,\rho_n)_n})\subset\mathrm{M}_r(F_\infty)$，并假设 $e^{(r)}\bar{y}\geq 0$。若 $y=0$，则无需证明，因此我们假设 $\|\bar{y}\|=1$。利用引理 2.5(iii)，我们还可得到关于 $e^{(r)}$ 的非退化条件，即对于任意 $\bar{z}\in\mathrm{M}_r((F_n,\rho_n)_n)\subset\mathrm{M}_r(F_\infty)$，$e^{(r)}\bar{z}=0$ 蕴含 $\bar{z}=0$。于是

$$e^{(r)}\bar{y}=(e^{(r)}\bar{y})^*=e^{(r)}\bar{y}^*,$$

我们得出结论：$\bar{y}=\bar{y}^*$。

由引理 2.5(ii)，我们知道 $e^{(r)}-\bar{y}$ 且 $e^{(r)}+\bar{y}\in\mathrm{M}_r(F_\infty)_+$。由于 $e^{(r)}$ 与 $\bar{y}$ 可交换（根据引理 2.5(i)），这意味着 $e^{(r)}\geq|\bar{y}|$，并且我们可以将 $\mathrm{C}^*(e^{(r)},\ \bar{y})\subset\mathrm{M}_r(F_\infty)$ 识别为 $C_0(\Omega)$ 的某个局部紧

紧致 $\Omega \subset \sigma(e^{(r)}) \times \sigma(\bar{y})$，其中 $e^{(r)}$ 对应于映射 $(s,t) \mapsto s$，而 $\bar{y}$ 对应于映射 $(s,t) \mapsto t$。由于 $e^{(r)} \geq |\bar{y}|$，对于所有 $(s,t) \in \Omega$，我们有 $s \geq |t|$。现在，假设存在 $t_0 \in \sigma(\bar{y}) \cap (-\infty, 0)$，并令 $s_0 \in \sigma(e^{(r)})$，使得 $(s_0, t_0) \in \Omega$。于是 $s_0 \geq |t_0| > 0$ 推出 $s_0 > 0$，从而 $s_0 t_0 < 0$，这与 $e^{(r)}\bar{y} \geq 0$ 矛盾。因此 $\bar{y} \geq 0$，证明完毕。□

推论 2.8. 设 $(F_n, \rho_{n+1,n})_n$ 是一个 CPC*-系统，并令 $\Theta$ 如命题 2.7 中所述。那么对于任意 C*-代数 $A$ 以及完全序嵌入 $\psi\colon A \longrightarrow F_\infty$，满足 $\psi(A) = (F_n, \rho_n)_n$，映射 $\Theta^{-1} \circ \psi\colon A \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 是一个 *-同构。

证明。由命题 2.7 可知 $\Theta^{-1} \circ \psi\colon A \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 是一个满射完全序同构。因此，根据备注 1.7(i)，断言得证。□

备注 2.9. 根据定义，$(F_n, \rho_n)_n$ 与 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 作为带对合的巴拿赫空间是相同的。基于前述结果，我们可以用两种不同方式描述 C*-代数结构：令 $C$ 表示由 $(F_n, \rho_n)_n$ 在 $F_\infty$ 中生成的 C*-代数，并令 $\pi_\Theta\colon \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big) \longrightarrow \mathcal{M}(C)$ 为定理 1.4 保证存在的 *-同态。由定理 1.4 可知，$\ker(\pi_\Theta) = \ker(\Theta) = \{0\}$，这意味着 $\pi_\Theta$ 是内射的，并且 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big) \cong \pi_\Theta\big(\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)\big)$，因此我们可以将 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 视为 $C$ 的乘子 C*-代数。此外，若 $e \in \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$，则对于所有 $x \in \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$，都有 $\Theta(x) = x = e\pi_\Theta(x)$。

另一方面，如果 $e \in (F_n, \rho_n)_n$，那么也可以证明 $((F_n, \rho_n)_n, \{\mathrm{M}_r((F_n, \rho_n)_n) \cap \mathrm{M}_r(F_\infty)_+\}_r, e)$ 构成一个抽象算子系统（参见 [6] 或 [20, 第 13] 章）。作为一个算子系统，它等于算子系统 $(\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big), \{\mathrm{M}_r\big(\mathrm{C}^*_\bullet((F_n, \rho_n)_n)\big)\}_r, e)$，而后者恰好也是一个 C*-代数。因此，对每个 $r \geq 1$，$\mathrm{M}_r\big(\mathrm{C}^*_\bullet((F_n, \rho_n)_n)\big)$ 上的范数都与 $\mathrm{M}_r\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 上由矩阵序诱导的矩阵范数一致。因此，根据 [11, 推论 4.2]，我们可以将 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 认作该算子系统的包络 C*-代数。

注 2.10. 尽管子空间 $(F_n, \rho_n)_n \subset F_\infty$ 通常未必是子 C*-代数，但 $(F_n, \rho_n)_n$ 与 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 之间的对应关系十分稳固，因此我们不妨将 $(F_n, \rho_n)_n$ 和 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 都称为 CPC*-系统的极限，并将 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 称为 CPC*-极限。

如前所述，$e$ 不必属于 $(F_n, \rho_n)_n$。尽管如此，序列 $(\rho_n(1_{F_n}))_n$ 仍将为该系统的极限提供一个近似单位。

推论 2.11。 设 $(F_n,\ \rho_{n+1,\ n})_n$ 是一个 CPC*-系统。那么 $(\rho_n(1_{F_n}))_n$构成 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\ \rho_n)_n\big)$的递增近似单位。

证明。序列 $(\rho_n(1_{F_n}))_n$ 在 $F_\infty$ 中递增，$\rho_{m,\ n}$ 都是 c.p.c. 映射，因此根据命题 2.7，它在 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\ \rho_n)_n\big)$中也递增。

要证明这构成一个近似单位，只需考虑形如 $\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)$ 的元素，其中 $k\geq 0$ 和 $x,y\in F_k$。事实上，由于 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big)$ 是一个 C*-代数，因此对于任意$\bar{z}\in(F_n,\rho_n)_n$，存在 $\bar{x},\bar{y}\in(F_n,\rho_n)_n$，使得 $\bar{z}=\bar{x}\bullet\bar{y}$。于是，对于 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，分别取其提升 $(x_n)_n$ 和 $(y_n)_n$，引理 2.3 告诉我们$\rho_n(x_n)\longrightarrow\bar{x}$ 和 $\rho_n(y_n)\longrightarrow\bar{y}$，从而 $\rho_n(x_n)\bullet\rho_n(y_n)\longrightarrow\bar{x}\bullet\bar{y}=\bar{z}$。

现在固定 $k\geq 0$、$x$、$y\in F_k$ 和 $\varepsilon>0$，并选择 $M>k$ 使得

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))-\rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\|<\varepsilon/2\ \text{ and}$$
$$\|\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)-\rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))\|<\varepsilon/2$$

对所有 $m>n>M$。然后利用 引理 2.5(iii) 和 (2.7)，对所有 $n>M$，

$$\begin{aligned}
&\|\rho_n(1_{F_n})\bullet(\rho_k(x)\bullet\rho_k(y))-\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)\|\\
&=\|e\ \big(\rho_n(1_{F_n})\bullet(\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)))-\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)\big)\|\\
&=\|\rho_n(1_{F_n})\big(\rho_k(x)\bullet\rho_k(y)\big)-\rho_k(x)\rho_k(y)\|\\
&<\varepsilon/2+\|\rho_n(1_{F_n})\rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))-\rho_k(x)\rho_k(y)\|\\
&\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

剩下要证明的是，所有 CPC*-极限都是核的。为此，我们将使用 Ozawa 和 Sato 的单向 CPAP；这一方法隐含地出现在 [19]（通过 [16]）中；明确的陈述及其证明见 [22, 定理 5.1]。

定理 2.12（[22, 19]）。C*-代数 $A$ 是核的，当且仅当存在一个网 $\{\varphi_\lambda\colon F_\lambda\longrightarrow A\}_{\lambda\in\Lambda}$，由从有限维 C*-代数 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 出发的完全正收缩映射构成，使得所诱导的完全正收缩映射

$$\Phi=(\varphi_\lambda)_\lambda\colon\prod F_\lambda/\bigoplus F_\lambda\longrightarrow\ell^\infty(\Lambda,A)/c_0(\Lambda,A),$$

由 $\Phi([(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}])=[(\varphi_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}]$ 给出，满足

$$\iota(A^1)\subset\Phi\big((\prod F_\lambda/\bigoplus F_\lambda)^1\big),$$

其中 $\iota\colon A\longrightarrow\ell^\infty(\Lambda,A)/c_0(\Lambda,A)$ 表示将 $A$ 识别为 $\ell^\infty(\Lambda,A)/c_0(\Lambda,A)$ 的子 C*-代数，该代数由常值网的等价类组成。

定理 2.13。CPC*-极限是核的。

证明。令 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 为一个 CPC*-系统，其具有完备序嵌入 $\Theta:=\mathrm{id}_{(F_n,\rho_n)_n}\colon\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\rho_n)_n\big)\longrightarrow\varinjlim(F_n,\rho_n)$，由 命题 2.7 得到。

对每个 $m \geq 0$，定义 $\varphi_m := \Theta^{-1} \circ \rho_m \colon F_m \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$。由命题 2.7 可知，每个 $\varphi_m$ 都是一个完全正收缩映射。我们将序列代数 $\prod_m \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big) / \bigoplus_m \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 记为 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)_\infty$，并将 $\iota \colon \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big) \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)_\infty$ 记为由常值序列的等价类构成的嵌入。令 $\Phi \colon F_\infty \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)_\infty$ 为由 $\varphi_m$ 诱导的完全正收缩映射，如定理 2.12 中所述，其中 $\Phi([(x_m)_m]) = [(\varphi_m(x_m))_m]$。注意，对 $k \geq 0$ 和 $x \in F_k$，有

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho_k(x)) &= \Phi([(\rho_{m,k}(x))_{m>k}]) \\
&= [(\varphi_m(\rho_{m,k}(x)))_{m>k}] \\
&= [((\Theta^{-1} \circ \rho_m)(\rho_{m,k}(x))_{m>k}] \\
&= [(\Theta^{-1} \circ \rho_k(x))_{m>k}] \\
&= \iota \circ \Theta^{-1} \circ \rho_k(x) \\
&= \iota \circ \varphi_k(x).
\end{aligned}$$

由于这些元素在 $(F_n, \rho_n)_n$ 中稠密，因此可得 $\Phi(\bar{x}) = \iota \circ \Theta^{-1}(\bar{x})$，对每个 $\bar{x} \in (F_n, \rho_n)_n \subset F_\infty$。由于 $\Theta^{-1}$ 是等距的，因此得到

$$\iota\big(\mathrm{C}^*_\bullet\big((\overline{F_n, \rho_n})_n\big)^1\big) = \iota \circ \Theta^{-1}\big((\overline{F_n, \rho_n})_n^1\big) = \Phi\big((\overline{F_n, \rho_n})_n^1\big) \subset \Phi(F_\infty^1).$$

现在结合 [22, 定理 5.1] (如上文所述的 定理 2.12)，我们得出 $\mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n, \rho_n)_n\big)$ 是核的。□

## 3. CPC*-systems from systems of c.p.c. approximations

本节的目标是证明 定理 2.12 的逆命题：任意可分核 C*-代数都 *-同构于一个 CPC*-极限。此外，CPC*-系统将由完全正压缩逼近系统导出。我们首先回顾关于可分核 C*-代数的若干事实。

定义 3.1. 设 $A$是一个可分核 C* 代数。

(i) $A$ 的完全正收缩逼近系统是一个序列 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$，其中 $F_n$ 是有限维 C* 代数，且 $A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A$ 是完全正收缩映射，使得对所有 $a \in A$

$$\lim_n \|\varphi_n \circ \psi_n(a) - a\| = 0.$$

(ii) 如果存在一个递减序列 $(\varepsilon_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})^1_+$，使得对于所有 $n > k \geq 0$，则称上述完全正收缩逼近系统是可求和的。

$$\|\varphi_k - \varphi_n \circ \psi_n \circ \varphi_k\| < \varepsilon_n.$$

(iii) 对于任意 $a, b \in A$，若有 $\lim_n \|\psi_n(ab) - \psi_n(a)\psi_n(b)\| = 0$，则称 (i) 中的完全正收缩逼近系统具有近似乘法的向下映射。

(iv) 我们称 (i) 中的完全正收缩逼近系统具有近似零阶向下映射，如果对于任意 $a$、$b \in A_+$ 满足 $ab = 0$，都有 $\lim_n \|\psi_n(a)\psi_n(b)\| = 0$。

(v) 给定如 (i) 中的完全正收缩逼近系统，我们对所有 $m > n \geq 0$ 定义

$$\begin{aligned}\rho_{m,n} &\coloneqq \psi_m \circ \varphi_{m-1} \circ \ldots \circ \varphi_n \colon F_n \longrightarrow F_m \quad \text{and}\\ \rho_{n,n} &\coloneqq \mathrm{id}_{F_n}.\end{aligned}$$

从而得到一个相关系统 $(F_n, \rho_{n+1,n})_n$。

注释 3.2。(i) 我们通常考虑可求和的完全正收缩逼近系统，在这种情况下，当 $m > n$ 足够大时，$\rho_{m,n}$ 和 $\psi_m \circ \varphi_n$ 可以任意接近。此外，对于任意 $k \geq 0$ 和 $x \in F_k$，序列 $(\varphi_n(\rho_{n,k}(x)))_n$ 在 $A$ 中收敛。

(ii) 要求可求和性不会造成任何一般性损失，因为经过取子系统，对于任意选择的 $(\varepsilon_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})^1_+$，我们总能令其满足这一条件。事实上，给定一个核 C*-代数 $A$ 的完全正收缩逼近系统 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$ 以及一个递减序列 $(\varepsilon_j) \in \ell^1(\mathbb{N})^1_+$，我们可以利用 $F_n$ 的单位球的紧致性，找到一个递增序列 $(n_j)_j \subset \mathbb{N}$，使得对于所有 $n_k \geq 0$ 和 $j > k$，

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_j} \circ \psi_{n_j} \circ \varphi_{n_k}\| < \varepsilon_{n_j}.$$

(iii) 对于一个 C*-代数 $A$ 如3.1 中所述的完全正收缩逼近系统，以及任意 $a \in A$，我们有

$$\lim_n \|a - a\varphi_n(1_{F_n})\| = 0.$$

要证明这一点，只需考虑 $a \in A^1_+$。令 $\varepsilon > 0$，并选取 $\eta > 0$使得 $2\eta + \sqrt{3\eta} < \varepsilon$，再选取 $N > 0$ 使得 $\|a - \varphi_n(\psi_n(a))\| < \eta$ 且 $\|a^2 - \varphi_n(\psi_n(a^2))\| < \eta$ 对所有 $n > N$均成立。于是，由 Stinespring 定理（[15, 引理 3.5]）可知，$\|\varphi_n(\psi_n(a)b) - \varphi_n(\psi_n(a))\varphi_n(b)\| < \sqrt{3\eta}$ 对任意 $b \in (F_n)^1$均成立。将此应用于 $b = 1_{F_n}$可得

$$\begin{aligned}\|a - a\varphi_n(1_{F_n})\| &\leq 2\eta + \|\varphi_n(\psi_n(a)) - \varphi_n(\psi_n(a))\varphi_n(1_{F_n})\|\\ &= 2\eta + \|\varphi_n(\psi_n(a)1_{F_n}) - \varphi_n(\psi_n(a))\varphi_n(1_{F_n})\|\\ &< 2\eta + \sqrt{3\eta}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

根据 [4]，结合 [23, 定理 5])，总可以要求近似零阶向下映射；明确表述见 [5, 定理 3.1]:

定理 3.3. 对于可分 C*-代数 $A$，以下条件等价。

(i) $A$是核的。(ii) $A$ 具有一个由近似零阶向下映射构成的完全正收缩映射逼近系统。

引理 3.4. 设 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$ 是一个可分核 C*-代数 $A$的完全正收缩映射逼近系统。那么，对所有 $a \in A$，由下式给出的诱导映射$\Psi$: $A \longrightarrow F_\infty$

$$\Psi(a) \coloneqq [(\psi_n(a))_n],$$

是一个完全序嵌入。

若逼近系统可求和，则有 $\Psi(A) = (F_n, \rho_n)_n$，即，$\Psi$ 的像在以下意义下与相关系统的极限一致：定义3.1(v) 和2.1。

证明。由于每个 $\psi_n$ 都是完全正收缩映射，因此 $\Psi$ 是一个完全正收缩映射。此外，由于映射 $\psi_n$、$\varphi_n$ 都是完全正收缩映射，因此

$$\liminf_n \|\psi_n^{(r)}(a)\| \geq \|a\|$$

对所有 $r \geq 1$ 和 $a \in \mathrm{M}_r(A)$均成立。因此，对所有 $r \geq 0$ 和$a \in \mathrm{M}_r(A)$，$\|\Psi^{(r)}(a)\| \geq \|a\|$ 均成立，因此 $\Psi$ 是完全等距的，因而是完全序嵌入。

现在我们进一步假设，该系统关于某个递减序列 $(\varepsilon_n)_{n} \in \ell^1(\mathbb{N})_+^1$是可求和的。设 $k \geq 0$ 和 $x \in F_k$，并令 $a := \lim_n \varphi_n(\rho_{n,k}(x))$。（回顾一下，根据注3.2（i），该极限存在。）于是我们有

$$\begin{aligned} \rho_k(x) &= [(\rho_{m,k}(x))_{m>k}] \\ &= [(\psi_m(\varphi_{m-1}(\rho_{m-1,k}(x))))_{m>k}] \\ &= [(\psi_m(a))_m] \\ &= \Psi(a), \end{aligned} \tag{3.1}$$

因此

$$\bigcup_n \rho_n(F_n) = \{\Psi\big(\lim_m \varphi_m \circ \rho_{m,n}(x)\big) \mid k \geq 0,\ x \in F_n\} \subset \Psi(A). \tag{3.2}$$

另一方面，由可求和性可知

$$\|\varphi_m \circ \rho_{m,n} \circ \psi_n - \varphi_n \circ \psi_n\| < \textstyle\sum_{j=n+1}^{m} \varepsilon_j.$$

对所有 $m > n \geq 0$均成立。因此，对于任意给定的 $a \in A$ 和 $\varepsilon > 0$，我们可以找到$M > 0$，使得对所有 $m > n > M$，

$$\begin{aligned} &\|\varphi_m \circ \rho_{m,n} \circ \psi_n(a) - a\| \\ &\leq \|\varphi_m \circ \rho_{m,n} \circ \psi_n(a) - \varphi_n \circ \psi_n(a)\| + \|\varphi_n \circ \psi_n(a) - a\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由此，我们得出结论：集合 $\{\lim_n \varphi_n \circ \rho_{n,k}(x) \mid k \geq 0,\ x \in F_k\}$在 $A$中稠密，因此根据 (3.2)，$\bigcup_n \rho_n(F_n)$ 在 $\Psi(A)$ 中稠密。由于 $\Psi$ 是等距的，这意味着 $\Psi(A) = \bigcup_n \rho_n(F_n) = (F_n, \rho_n)_{n\circ}$ □

在引理 3.4的情形下，若完全正压缩逼近系统具有近似零阶向下映射，则映射 $\Psi$ 显然是零阶的。在这种情况下，由于陪域是 $F_\infty$，我们可以对零阶映射结构定理（定理 1.4）中出现的正收缩元获得更精细的信息。

命题 3.5. 设 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$ 是一个从可分核 C*-代数 $A$ 出发、具有近似零阶向下映射的完全正压缩逼近系统，并设 $\Psi\colon A \longrightarrow F_\infty$ 是引理 3.4 中的零阶完全序嵌入。记 $C$ 为 $F_\infty$ 中由 C*-代数 $\Psi(A)$ 生成的代数，记 $J_C = \{b \in F_\infty \mid bC \cup Cb \subset C\}$ 为 $F_\infty$ 中 $C$ 的理想化子，并将零阶映射结构定理所给出的 $\mathcal{M}(C)$ 中的元素记为 $h$；参见定理 1.4。

于是存在 $\bar{h} \in (J_C)^1_+ \subset F_\infty$，使得 $\bar{h}c = hc$ 对所有 $c \in C$ 均成立。特别地，对所有 $a, b \in A$,

$$\bar{h}\Psi(a) = \Psi(a)\bar{h}, \tag{3.4}$$

$$\|\bar{h}\Psi(a)\| = \|\Psi(a)\| = \|a\|, \quad and \tag{3.5}$$

$$\bar{h}\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b). \tag{3.6}$$

此外，(3.4)、(3.5)和(3.6) 在将 $h$ 替换为任意$\bar{e} \in (F_\infty)^1_+$ 满足 $\bar{e}\Psi(a) = \bar{h}\Psi(a)$ 对所有 $a \in A$时，仍然成立。

证明。由于 $C$ 是 $J_C$中的理想，存在唯一的 *-同态$\theta\colon J_C \longrightarrow \mathcal{M}(C)$，它延拓典范嵌入 $C \longrightarrow \mathcal{M}(C)$，使得对所有 $b \in J_C$ 和 $c \in C$，均有 $\theta(b)c = bc$ 且 $c\theta(b) = cb$。我们断言 $\theta$是满射。事实上，令 $\pi\colon \prod F_n \longrightarrow F_\infty$表示商映射。由于 $C$ 可分，我们可以找到一个可分的 C*-代数 $D \subset \prod F_n$，使得 $\pi(D) = C$。尽管 $D$ 在 $\prod F_n$中可能是退化的（即其支撑投影不为 $1_{\prod F_n}$），但它在其超弱闭包 $\overline{D}^{\sigma\text{-wk}} \subset \prod F_n$ 中是非退化的（含义相同），因此 [1, 命题 2.4] 告诉我们，可以将 $\mathcal{M}(D)$与$\{b \in \overline{D}^{\sigma\text{-wk}} \mid bD \cup Db \subset D\} \subset \prod F_n$视为相同；在此识别下，我们有 $\pi(\mathcal{M}(D)) \subset J_C$。由于 $D$可分，且 $\pi|_D\colon D \longrightarrow C$是满射，[1, 定理 4.2]保证存在一个满射 *-同态 $\hat{}\pi\colon \mathcal{M}(D) \longrightarrow \mathcal{M}(C)$，使得对所有 $d \in D$ 和 $x \in \mathcal{M}(D)$，有 $\hat{}\pi(x)\pi(d) = \pi(xd)$，且 $\pi(d)\hat{}\pi(x) = \pi(dx)$。综上，我们得到如下图表，并断言该图表可交换。

$$\begin{array}{ccccc} D & \subseteq & \mathcal{M}(D) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi|_D} & & \downarrow{\scriptstyle \pi|_{\mathcal{M}(D)}} & \searrow^{\hat{\pi}} & \\ C & \subseteq & J_C & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{M}(C) \end{array}$$

为了证明 $\hat{}\pi = \theta\circ\pi|_{\mathcal{M}(D)}$，令 $x \in \mathcal{M}(D)$ 和 $c \in C$，并选取 $d \in D$使得 $\pi(d) = c$。于是

$$\theta(\pi(x))c = \pi(x)c = \pi(x)\pi(d) = \pi(xd) = \hat{\pi}(x)\pi(d) = \hat{\pi}(x)c,$$

同样地，$c\theta(\pi(c)) = c\hat{}\pi(x)$。因此 $\hat{}\pi = \theta\circ\pi|_{\mathcal{M}(D)}$，且 $\theta$ 是所需的满射。

现在令 $\bar{h} \in (J_C)^1_+$ 为 $h$的一个提升。于是，对每个 $c \in C$，我们有

$$\bar{h}c = \theta(\bar{h})c = hc \quad \text{and} \quad c\bar{h} = c\theta(\bar{h}) = ch.$$

由此可知，根据我们对 $h$ 的选择，对所有 $a$、$b \in A$,

$$\bar{h}\Psi(ab) = h\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b), \quad \text{and}$$
$$\bar{h}\Psi(a) = h\Psi(a) = \Psi(a)h = \Psi(a)\bar{h}.$$

由于 $\Psi$ 是等距的，$\|a\|^2 h = \|\Psi(aa^*)\|h \geq \Psi(aa^*)$ 对所有 $a \in A$ （见注 1.5 （i）），因此

$$\begin{aligned}\|a\|^4 &= \|\Psi(a)\|^4 \\ &= \|\Psi(a)^*\Psi(a)\Psi(a)^*\Psi(a)\| \\ &\leq \|\Psi(a)^*\Psi(aa^*)\Psi(a)\| \\ &\leq \|\Psi(a)^*\|a\|^2 h\Psi(a)\| \\ &\leq \|a\|^3\|h\Psi(a)\|.\end{aligned}$$

特别地，对所有 $a \in A$

$$\|\bar{h}\Psi(a)\| = \|h\Psi(a)\| = \|\Psi(a)\| = \|a\|.$$

最后，假设 $\bar{e} \in (F_\infty)^1_+$ 且 $\bar{e}\Psi(a) = \bar{h}\Psi(a) = h\Psi(a)$ 对所有$a \in A$均成立。那么对于每个 $a \in A$,

$$\|\bar{e}\Psi(a) - \Psi(a)\bar{e}\| = \|h\Psi(a) - \Psi(a)\bar{e}\| = \|h\Psi(a)^* - \bar{e}\Psi(a)^*\| = 0,$$

因此，对于所有 $a \in A$，同样有 $\Psi(a)\bar{e} = \Psi(a)h = \Psi(a)h$。由于这对所有 $c \in C$均成立，因此 $\bar{e} \in (J_C)^1_+$ 且 $\theta(\bar{e}) = h$。由于$\bar{e}$ 也是 $h$ 的一个提升，前述论证便对 $\bar{e}$ 证明了 (3.4) 、 (3.5) 和 (3.6)。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 3.6. 设 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$ 是一个可分核 C*-代数 $A$ 的 c.p.c. 近似序列，且其具有近似零阶向下映射。经过可能的近似序列子系统化之后，相关系统 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 是定义 2.2 意义下的 CPC*-系统，并且引理 3.4 中的映射 $\Psi\colon A \longrightarrow F_\infty$ 是一个零阶完全序嵌入，满足 $\Psi(A) = (F_n, \rho_n)_n$。

将 $\Psi$ 与 $\Theta$ 的逆映射（来自命题2.7）复合后，我们得到一个同构 $\Theta^{-1}\circ\Psi\colon A \longrightarrow \mathrm{C}^*_\bullet\big((F_n,\ \rho_n)_n\big)$。特别地，任意可分核 C*- 代数都与一个 *- 同构于 CPC*-极限。

证明。 正如我们在注 3.2(ii) 中所见，在必要时转至一个子系统后，可以假设该逼近系统（以及任何进一步的子系统）是可求和的。

令 $\Psi\colon A \longrightarrow F_\infty$ 为由引理 3.4 诱导的序结构零阶完全序嵌入，$h$ 为零阶映射结构定理（定理 1.4）中的 $\mathcal{M}(\mathrm{C}^*(\Psi(A)))$ 元素，而 $\bar{h} \in (F_\infty)_+^{1^-}$ 为命题 3.5 所保证的一个元素，使得对所有 $a \in A$，$h\Psi(a) = h\Psi(a)$。我们固定 $\bar{h}$ 的一个提升 $(h_n)_n \in (\prod F_n)_+^1$，并注意到，由于

$$\begin{aligned}\|\Psi(b)\Psi(a) - \bar{h}\Psi(a)\| &\overset{(3.6)}{=} \|\bar{h}\Psi(ba) - \bar{h}\Psi(a)\| \\ &= \|\bar{h}\Psi(ba - a)\| \\ &\overset{(3.5)}{=} \|ba - a\|\end{aligned}$$

对所有 $a$、$b \in A$，我们有：对于任意 $a$、$b \in A$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $M > 0$，使得对所有 $m \geq M$

$$\|\psi_m(b)\psi_m(a) - h_m\psi_m(a)\| < \|ba - a\| + \varepsilon. \tag{3.7}$$

现在我们可以确定一个合适的逼近子系统。固定一个可数稠密子集 $\{a_k\}_k \subset A^1$ 以及一个严格递减序列 $(\varepsilon_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})_+^1$。由注 3.2(iii)，我们可以选取$j_0 > 0$ 使得

$$\|\varphi_{j_0}(1_{F_{j_0}})a_0 - a_0\| < \varepsilon_0/2.$$

然后我们可以选择 $j_1 > j_0$，使得对于所有 $m \geq j_1$ 和 $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}\|\psi_m(\varphi_{j_0}(1_{F_{j_0}}))\psi_m(a_0) - h_m\psi_m(a_0)\| &\overset{(3.7)}{<} \|\varphi_{j_0}(1_{F_{j_0}})a_0 - a_0\| + \varepsilon_0/2 \\ &< \varepsilon_0,\end{aligned}$$

$$\max_{0\leq k\leq 1} \|\varphi_{j_1}(1_{F_{j_1}})a_k - a_k\| < \varepsilon_1/2, \text{ and}$$

$$\|\varphi_{j_1}(\psi_{j_1}(\varphi_{j_0}(1_{F_{j_0}})^i)) - \varphi_{j_0}(1_{F_{j_0}})^i\| < \varepsilon_1^2/3.$$

对于所有 $n > 0$，我们可以归纳地选择 $j_n > j_{n-1}$，使得对于所有 $m \geq j_n$ 和 $i \in \{1, 2\}$,

$$\max_{0\leq k<n} \|\psi_m(\varphi_{j_{n-1}}(1_{F_{j_{n-1}}}))\psi_m(a_k) - h_m\psi_m(a_k)\| < \varepsilon_{n-1}, \tag{3.8}$$

$$\max_{0\leq k\leq n} \|\varphi_{j_n}(1_{F_{j_n}})a_k - a_k\| < \varepsilon_n/2, \text{ and} \tag{3.9}$$

$$\|\varphi_{j_n}(\psi_{j_n}(\varphi_{j_{n-1}}(1_{F_{j_{n-1}}})^i)) - \varphi_{j_{n-1}}(1_{F_{j_{n-1}}})^i\| < \varepsilon_n^2/3. \tag{3.10}$$

ˆ令 $\Psi\colon A \longrightarrow \prod F_{j_n}/\bigoplus F_{j_n}$ 表示由子系统 $(A \xrightarrow{\psi_{j_n}} F_{j_n} \xrightarrow{\varphi_{j_n}} A)_n$ 诱导的映射。则 ˆΨ 仍然是一个零阶完备 ˆ-序嵌入，并且对于 $h = [(h_{j_n})_n] \in \prod F_{j_n}/\bigoplus F_{j_n}$，我们仍有 ˆ- ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ$h\Psi(a) = h\Psi(a)$ 对所有 $a \in A$ 均成立，其中 $h \in \mathcal{M}(\mathrm{C}^*(\Psi(A)))$ 是该元素

由定理 1.4保证。因此，我们可以转而考虑（可求和的）子系统（$A \xrightarrow{\psi_{j_n}} F_{j_n} \xrightarrow{\varphi_{j_n}} A$）$_n$，省略下标，并记 $\Psi$， $h$，$\bar{}$ $\hat{}\hat{}$ $\hat{}$和 $h$ 分别表示 $\Psi$， $h$和 $h_\circ$ 现在，(3.8)–(3.10)表明，对于任意$n > 0$，我们对 $m > n$ 和 $i \in \{1, 2\}$

$$\max_{0\le k\le n} \|\psi_m(\varphi_n(1_{F_n}))\psi_m(a_k) - h_m\psi_m(a_k)\| < \varepsilon_n, \tag{3.11}$$

$$\max_{0\le k\le n} \|\varphi_n(1_{F_n})a_k - a_k\| < \varepsilon_n/2, \text{ and} \tag{3.12}$$

$$\|\varphi_n(\psi_n(\varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}})^i)) - \varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}})^i\| < \varepsilon_n^2/3. \tag{3.13}$$

我们的目标是证明，如定义$F_n$，$\rho_{n+1,\ nn}$ 3.1（v）中所述的相关系统是 CPC$^*$。

$\bar{}$断言1：对于所有 $a \in A$，我们有 $[(\rho_{n+1,\ n}(1_{F_n}))_n]\Psi(a) = h\Psi(a)$，并且$\bar{}$(3.4)、(3.5) 和 (3.6) 也成立，其中以 $[(\rho_{n+1,\ n}(1_{F_n}))_n]$ 代替 $h_\circ$

我们在取自$A^1$的固定稠密子集的一个元素 $a_k$ 上验证该断言。由于

$$\begin{aligned} &\|\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k) - h_n\psi_n(a_k)\| \\ &\quad = \|\psi_n(\varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}}))\psi_n(a_k) - h_n\psi_n(a_k)\| \\ &\quad \overset{(3.11)}{<} \varepsilon_{n-1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$\bar{}$对于所有 $n > k$都成立，因此对于所有 $a \in A$， $[(\rho_{n+1,\ n}(1_{F_n}))_n]\Psi(a) = h\Psi(a)$ 均成立。由此，根据命题 3.5，取 $\bar{e} = [(\rho_{n+1,\ n}(1_{F_n}))_n]$，即可证明该断言。

断言2：对于任意 $a \in A$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个 $M > 0$，使得对于$m > n > M$

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(a) - \rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(a)\| < \varepsilon.$$

再次，我们在某个 $a_k$ 上验证该断言，该元素取自我们固定的 $A^1$的稠密子集。固定 $\varepsilon > 0_\circ$ 由可求和性可知（见注 3.2(i)），我们可以选取 $M > k$，使得 $\varepsilon_M < \varepsilon/3$ 从而$\|\rho_{m,\ n} - \psi_m \circ \varphi_n\| < \varepsilon/3$对所有 $m > n > M$ 均成立。于是由（3.11）和（3.14）可得，对所有$m > n > M$,

$$\begin{aligned} &\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(a_k) - \rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(a_k)\| \\ &< \|\psi_m(\varphi_n(1_{F_n}))\psi_m(a_k) - \rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(a_k)\| + \varepsilon/3 \\ &\le \|\psi_m(\varphi_n(1_{F_n}))\psi_m(a_k) - h_m\psi_m(a_k)\| \\ &\quad + \|h_m\psi_m(a_k) - \rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(a_k)\| + \varepsilon/3 \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon/3 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

断言3：对于任意的 $a$、$b \in A$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个 $M > 0$，使得$m > n > M$

$$\|\psi_m(a)\psi_m(b) - \rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(ab)\| < \varepsilon.$$

设 $a$、$b\in A^1$ 和 $\varepsilon>0$。断言1告诉我们，$[(\rho_{n+1,n}(1_{F_n}))_n]\Psi(ab)=\Psi(a)\Psi(b)$，因此存在一个 $M_0>0$，使得对于所有的 $m>M_0$

$$\|\psi_m(a)\psi_m(b)-\rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(ab)\|<\varepsilon/2.$$

然后，结合断言2（以 $ab$ 替代 $a\in A$，以 $\varepsilon/2$ 替代 $\varepsilon$），可知存在 $M>M_0$，使得对所有 $m>n>M$，

$$\begin{aligned}&\|\psi_m(a)\psi_m(b)-\rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(ab)\|\\&<\|\rho_{m,m-1}(1_{F_{m-1}})\psi_m(ab)-\rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(ab)\|+\varepsilon/2\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

断言4：对于任意 $a\in A$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $M>0$，使得对所有 $m>n>M$，

$$\|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a)\big)-\psi_m(a)\|<\varepsilon.$$

同样，我们在取自固定稠密子集的某个 $a_k$ 上验证该断言，该稠密子集属于 $A^1$。固定 $1>\varepsilon>0$。由（3.13）以及 [14, 引理7，11], 对于每个 $n>0$

$$\begin{aligned}&\|\varphi_n\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-\varphi_n(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}}))\ \varphi_n(\psi_n(a_k))\|\\&<\big(3\varepsilon_n^2/3\big)^{1/2}\\&=\varepsilon_n.\end{aligned}$$

现在我们可以选取 $M>k$，使得 $\varepsilon_M<\varepsilon/6$，从而对所有 $m>n>M$，

$$\begin{aligned}(3.15)\quad&\|\varphi_n\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-\varphi_n(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}}))\ \varphi_n(\psi_n(a_k))\|\\&<\varepsilon_n\\&<\varepsilon/6,\end{aligned}$$

$$(3.16)\qquad \|\varphi_n(\psi_n(a_k))-a_k\|<\varepsilon/6,$$

and

$$\begin{aligned}(3.17)\quad&\|\rho_{m,n}(\psi_n(a_k))-\psi_m(a_k)\|\le\|\varphi_{m-1}\circ\rho_{m-1,n}(\psi_n(a_k))-a_k\|\\&<\varepsilon/2.\end{aligned}$$

于是，对所有 $m>n>M$，

$$\begin{aligned}&\|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-\psi_m(a_k)\|\\&\le\ \|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-\rho_{m,n+1}(\psi_{n+1}(a_k))\|\\&\quad+\|\rho_{m,n+1}(\psi_{n+1}(a_k))-\psi_m(a_k)\|\\&\overset{(3.17)}{<}\ \varepsilon/2+\|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-\rho_{m,n+1}(\psi_{n+1}(a_k))\|\\&=\ \varepsilon/2+\|\rho_{m,n+1}\circ\psi_{n+1}\big(\varphi_n\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big)-a_k\big)\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon/2 + \|\varphi_n\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(a_k)\big) - a_k\| \\
&\overset{(3.15)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/6 + \|\varphi_n(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}}))\ \varphi_n(\psi_n(a_k)) - a_k\| \\
&\overset{(3.16)}{<} 2\varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \|\varphi_n(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}}))a_k - a_k\| \\
&\leq 5\varepsilon/6 + \|\varphi_n(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}}))a_k - \varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}})a_k\| \\
&\qquad + \|\varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}})a_k - a_k\| \\
&\overset{(3.13)}{<} 5\varepsilon/6 + \varepsilon_n^2/3 + \|\varphi_{n-1}(1_{F_{n-1}})a_k - a_k\| \\
&\overset{(3.12)}{<} 5\varepsilon/6 + \varepsilon_n^2/3 + \varepsilon_{n-1}/2 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就完成了该断言的证明。

现在我们可以验证 $(F_n,\rho_{n+1,n})_n$ 是一个 CPC*-系统。令$k \geq 0$, $x,y \in F_k^1$, 以及 $\varepsilon > 0$。定义 $a \coloneqq$ 极限$_n\, \varphi_n(\rho_{n,k}(x)) \in A$和$b \coloneqq$ 极限$_n\, \varphi_n(\rho_{n,k}(y)) \in A$。（回想一下，根据注 3.2(i)，这些极限存在。）于是，特别地，我们有

$$\lim_n \|\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y) - \psi_n(a)\psi_n(b)\| = 0.$$

结合断言 3 和 4，我们可以选择 $M > 0$，使得对所有 $m > n \geq M$,

$$
\begin{aligned}
\|\rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y) - \rho_{m,n}(1_{F_n})\psi_m(ab)\| < \varepsilon/4 \ \text{ and} \\
\|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(ab)\big) - \psi_m(ab)\| < \varepsilon/2.
\end{aligned}
$$

利用这两个近似，对于 $m > n, l > M$，我们计算得

$$
\begin{aligned}
&\|\rho_{m,l}(1_{F_l})\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| \\
&\leq \|\rho_{m,l}(1_{F_l})\ \rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y) - \rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(ab)\big)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,l}(1_{F_l})\ \rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(ab)\big) - \rho_{m,l}(1_{F_l})\ \psi_m(ab)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,l}(1_{F_l})\psi_m(ab) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| \\
&\leq \|\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y) - \rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(ab)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,n}\big(\rho_{n,n-1}(1_{F_{n-1}})\psi_n(ab)\big) - \psi_m(ab)\| \\
&\quad + \|\rho_{m,l}(1_{F_l})\psi_m(ab) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

最后，由于我们的子系统仍然是可求和的，$\Psi(A) = \overrightarrow{(F_n, \rho_n)_n}$根据引理 3.4，因此由推论 2。8 $A$与 *-同构于一个 CPC*-极限。□

注 3.7. 若 $A$ 是一个可分、含幺、核 C*-代数，且具有由近似零阶向下映射构成的完全正压缩逼近的可求和系统 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$，则 $(\varphi_n(1_{F_n}))_n$ 收敛到 $1_A$，因此 $\Psi(1_A) = \lim_n \rho_n(1_{F_n}) = e$。在这种情况下，相关系统 $(F_n, \rho_{n+1,n})_n$ 无需经过子系统处理，也会自动成为 CPC*-系统。

本节最后，我们将用相关联的 CPC*-系统来描述核 C*-代数的乘积，并沿用推论 2.8 的思路来诠释命题 2.6。

推论 3.8. 设 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$ 是可分核 C*-代数 $A$ 的完全正收缩逼近可求和系统，其向下映射近似为零阶，使得相关联的系统 $(F_n, \rho_{n+1,n})_n$ 是一个 CPC*-系统。设 $\Psi\colon A \longrightarrow F_\infty$ 为诱导的零阶完全序嵌入。那么对于任意 $k \geq 0, x, y \in F_k$，以及 $a = \lim_n \varphi_n(\rho_{n,k}(x))$、$b = \lim_n \varphi_n(\rho_{n,k}(y)) \in A$，我们有 $\Psi(ab) = \Psi(a) \bullet \Psi(b) = \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y))$。

证明。与（3.1）中一样，我们有 $\Psi(a) = \rho_k(x)$ 以及 $\Psi(b)$，因此根据命题 2.6和 2.7，

$$\begin{aligned}\Psi(ab) &= \Theta^{-1}(\Psi(ab)) \\ &= \big(\Theta^{-1} \circ \Psi(a)\big) \bullet \big(\Theta^{-1} \circ \Psi(b)\big) \\ &= \rho_k(x) \bullet \rho_k(y) \\ &= \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)).\end{aligned}$$

□

## 4. NF systems and 完全正收缩*-systems

最后，我们将我们的完全正收缩*-系统与 Blackadar 和 Kirchberg 的 NF 系统进行比较[4]，并证明后者确实可以视为前者的特例。

定义 4.1（[4, 定义 2.1.1 和 5.2.1]）。若系统 $(F_n, \rho_{n+1,\ n})_n$ 由有限维 C*-代数组成，且具有定义 2.1 中的完全正收缩映射，则称其为 NF 系统，若映射 $\rho_{m,\ n}$ 是渐近乘法性的，即对所有 $k \geq 0$、$x$、$y \in F_k$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $M > k$，使得对所有 $m > n > M$，

$$\|\rho_{m,n}(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| < \varepsilon.$$

该系统的极限（按照定义 2.1的意义）是一个 C*-代数，其乘法对所有 $k \geq 0$ 和 $x,\ y \in F_k$ 定义为

$$\rho_k(x)\rho_k(y) = \lim_n \rho_n(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)).$$

与某个 NF 系统的归纳极限 *-同构的 C*-代数称为 NF 代数。

注 4.2. 含幺 CPC*-系统是 NF 的；并且，如果 $(F_n,\rho_{n+1,\ n})_n$ 是一个 NF 系统，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > 0$，从而对于所有$m > n > M$，

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n}) - 1_{F_m}\| < \varepsilon,$$

那么它也是一个 CPC*-系统。根据定理 4.4，通过转到一个子系统，可以去掉这一条件。

以下摘自[4, 定理 5.2。2]从 NF 系统的角度刻画了核且拟对角的 C*-代数。与定理 3.6相比，这里要求近似乘法向下映射，而不仅仅是近似零阶映射；这相当于在核性假设上增加了拟对角性。

定理 4.3。对于可分 C*-代数 $A$，以下条件等价：

(i) $A$ 是 NF 代数。(ii) $A$ 是核且拟对角的。(iii) 存在一个由近似乘法向下映射构成的 c.p.c. 逼近系统 $(A \xrightarrow{\psi_n} F_n \xrightarrow{\varphi_n} A)_n$。

定理 4.4. 任意 NF 系统都包含一个 CPC*-子系统。

证明。设 $(F_n,\rho_{n+1,\ n})_n$ 是一个 NF 系统。由此我们按照 [4, 命题 5.1.3] 的方法，通过取 $B_n = \bigoplus_{j=0}^{n} F_j$ 和 $\varphi_{n+1,\ n} := \mathrm{id}_{B_n} \oplus \rho_{n+1,\ n}$，构造另一个 NF 系统 $(B_n,\varphi_{n+1,\ n})$（其极限不同）：

$$\begin{array}{ccccccc}
B_0 & \xrightarrow{\varphi_{1,0}} & B_1 & \xrightarrow{\varphi_{2,1}} & B_2 & & \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \\
F_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F_0 & & \cdots \\
 & \searrow^{\rho_{1,0}} & \oplus & & \oplus & & \\
 & & F_1 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F_1 & & \cdots \\
 & & & \searrow^{\rho_{2,1}} & \oplus & & \\
 & & & & F_2 & & \cdots
\end{array}$$

于是对每个 $k \geq 0$，$\hat{x} = (x_0, ..., x_k) \in B_k$，以及 $n > k$，都有

$$\varphi_{n,k}(\hat{x}) = \hat{x} \oplus \oplus_{j=k+1}^{n} \rho_{j,k}(x_k).$$

我们断言，可以找到一个子系统 $(B_{n_j}, \varphi_{n_j+1,n_j})_j$，它是 CPC*。令 $B := (B_n, \varphi_n)_n$。那么每个 $\varphi_{n+1,n}$ 都是完全序嵌入，因此诱导的完全正收缩映射 $\varphi_n\colon B_n \longrightarrow B \subset B_\infty$ 也如此。利用 Arveson 延拓定理（参见[4, 引理 5.1.2]），我们将每个完全正收缩 $\varphi_n^{-1}\colon \varphi_n(B_n) \longrightarrow B_n$ 延拓为完全正收缩映射 $\psi_n\colon B \longrightarrow B_n$，使得 $\psi_n \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{B_n}$。由于并集 $\bigcup_n \varphi_n(B_n)$ 是嵌套的，对于所有 $m > n \geq 0$，都有 $(\varphi_m \circ \psi_m)|_{\varphi_n(B_n)} = \mathrm{id}_{\varphi_n(B_n)}$，因此 $(B \xrightarrow{\psi_n} B_n \xrightarrow{\varphi_n} B)_n$

是 $B$ 的完全正收缩逼近系统。注意，相关系统 $(B_n, \psi_{n+1}\circ\varphi_n)_n$ 恰好是 $(B_n, \varphi_{n+1,\,n})_n$：事实上，对于任意 $n\geq 0$ 和 $x\in B_n$，对所有 $m>n$

$$\begin{aligned}(4.1)\qquad &(\psi_m\circ\varphi_{m-1}\circ\psi_{m-1}\circ\ldots\varphi_{n+1}\circ\psi_{n+1})(\varphi_n(x))\\ &=\psi_m(\varphi_n(x))\\ &=\psi_m(\varphi_m(\varphi_{m,n}(x)))\\ &=\varphi_{m,n}(x).\end{aligned}$$

此外，我们系统 $(B\xrightarrow{\psi_n}B_n\xrightarrow{\varphi_n}B)_n$ 中的完全正压缩逼近的向下映射是近似乘法的。为说明这一点，只需考虑 $\varphi_k(x)\ \varphi_k(y)$ 中的某个 $k\geq 0$ 和 $x、y\in B_k$。固定$\varepsilon>0$。由于$\bigcup_n\varphi_n(B_n)$ 在 $B$ 中稠密，我们可以选取 $N>k$ 和$z\in B_N$，使得 $\|\varphi_N(z)\ -\varphi_k(x)\ \varphi_k(y)\|<\varepsilon/3$。由于该系统是 NF，我们有

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y)=\lim_n\varphi_n\big(\varphi_{n,k}(x)\varphi_{n,k}(y)\big)\overset{(4.1)}{=}\lim_n\varphi_n\big(\psi_n(\varphi_k(x))\psi_n(\varphi_k(y))\big),$$

因此，我们可以选取 $M>N$，使得

$$\|\varphi_k(x)\varphi_k(y)-\varphi_m\big(\psi_m(\varphi_k(x))\psi_m(\varphi_k(y))\big)\|<\varepsilon/3$$

对所有 $m>M$ 都成立。由于每个 $\varphi_n$ 都是等距的，对所有 $m>M>N$ 都有

$$\begin{aligned}&\|\psi_m(\varphi_k(x)\varphi_k(y))-\psi_m(\varphi_k(x))\psi_m(\varphi_k(y))\|\\ &<\|\psi_m(\varphi_N(z))-\psi_m(\varphi_k(x))\psi_m(\varphi_k(y))\|+\varepsilon/3\\ &=\|\varphi_m\big(\psi_m(\varphi_N(z))\big)-\varphi_m\big(\psi_m(\varphi_k(x))\psi_m(\varphi_k(y))\big)\|+\varepsilon/3\\ &=\|\varphi_N(z)-\varphi_m\big(\psi_m(\varphi_k(x))\psi_m(\varphi_k(y))\big)\|+\varepsilon/3\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

由于向下映射是近似乘法的，它们也近似为零阶，因此定理 3.6 保证相关系统 $(B_n,\ \psi_{n+1}\circ\varphi_n)_n=(B_n,\ \varphi_{n+1,\,n})_n$具有一个 CPC*-子系统 $(B_{n_j},\ \varphi_{n_{j+1},\,n_j})_j$。

我们断言系统 $(F_{n_j}, \rho_{n_{j+1},\,n_j})_j$也是 CPC*。由于无需转到更大的子系统，这一结论也成立，因此此处为便于记号，可省略下标。固定 $k\geq 0$, $x,y\in F_k$和$\varepsilon>0$。令 $\hat{}x=(0,\ldots,0,x)$, $\hat{}y=(0,\ldots,0,y)\in B_k$, 并选择 $M>k$，使得对所有 $m>n, l>M$，我们都有

$$(4.2)\qquad \|\varphi_{m,l}(1_{B_l})\varphi_{m,n}\big(\varphi_{n,k}(\hat{x})\varphi_{n,k}(\hat{y})\big)-\varphi_{m,k}(\hat{x})\varphi_{m,k}(\hat{y})\|<\varepsilon.$$

展开这些项，可得

$$\begin{aligned}\varphi_{m,k}(\hat{x})\varphi_{m,k}(\hat{y})&=\big(\hat{x}\oplus\big(\oplus_{j=k+1}^m\rho_{j,k}(x)\big)\big)\big(\hat{y}\oplus\big(\oplus_{j=k+1}^m\rho_{j,k}(y)\big)\big)\\ &=\hat{x}\hat{y}\oplus\big(\oplus_{j=k+1}^m\rho_{j,k}(x)\rho_{j,k}(y)\big),\\ \varphi_{m,l}(1_{B_l})&=1_{B_l}\oplus\big(\oplus_{j=l+1}^m\rho_{j,l}(1_{F_l})\big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\varphi_{m,n}(\varphi_{n,k}(\hat{x})\varphi_{n,k}(\hat{y}))\\&= \varphi_{m,n}\big(\hat{x}\hat{y} \oplus \big( \oplus_{j=k+1}^{n} \rho_{j,k}(x)\rho_{j,k}(y)\big)\big)\\&= \hat{x}\hat{y} \oplus \big( \oplus_{j=k+1}^{n} \rho_{j,k}(x)\rho_{j,k}(y)\big) \oplus \big( \oplus_{j=n+1}^{m} \rho_{j,k}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big)\big).\end{aligned}$$

仅考虑这些对象的 $m^{\text{th}}$ 项，由（4.2）可得

$$\|\rho_{m,n}(1_{F_n})\rho_{m,n}\big(\rho_{n,k}(x)\rho_{n,k}(y)\big) - \rho_{m,k}(x)\rho_{m,k}(y)\| < \varepsilon,$$

这表明 $(F_n, \rho_{n+1,\ n})_n$ 是一个 CPC*-系统。 □

## References

[1] C. Akemann、G. Pedersen 和 J. Tomiyama。C* 代数的乘子。J. Funct. Anal., 13:277–301, 1973.[2] S. Barlak 和 X. Li。Cartan 子代数与 UCT 问题，II。Math. Ann., 378(1-2):255–287, 2020.[3] B. Blackadar。算子代数，数学科学百科全书第 122 卷。Springer-Verlag，柏林，2006。C* 代数与冯·诺伊曼代数理论，《算子代数与非交换几何》，III。[4]B. Blackadar 和 E. Kirchberg。有限维 C* 代数的广义归纳极限。Math. Ann., 307(3):343–380, 1997.[5] N. Brown、J. Carri´on 和 S. White。重新审视可分解逼近。载于《算子代数及其应用——2015 年 Abel 研讨会》，Abel 研讨会第 12 卷，第 45–65 页。Springer，2017。[6] M. Choi 和 E. Effros。内射性与算子空间。J. Functional Analysis, 24(2):156–209, 1977.[7] A. Connes。内射因子的分类。情形 $II_1$, $II_\infty$, $III_\lambda$, $\lambda \neq 1$。Ann. of Math. (2), 104(1):73–115, 1976.[8] G. Elliott。半单有限维代数序列归纳极限的分类。J. Algebra, 38(1):29–44, 1976.[9] G. Elliott。实秩零 C* 代数的分类。纯粹与应用数学杂志, 443:179–219, 1993.[10] J. Glimm。关于某一类算子代数。Trans. Amer. Math. Soc., 95:318–340, 1960.[11] M. Hamana。算子系统的内射包络。Publ. Res. Inst. Math. Sci., 15(3):773–785, 1979.[12] B. Jacelon。一个简单、唯一迹、稳定无投影的 C* 代数。J. Lond. Math. Soc. (2), 87(2):365–383, 2013.[13] X. Jiang 和 H. Su。关于一个简单的含幺无投影 C* 代数。Amer. J. Math., 121(2):359–413, 1999.[14] E. Kirchberg 和 M. Rørdam。无限非简单 C* 代数：吸收 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_\infty$。Adv. Math., 167(2):195–264, 2002.[15] E. Kirchberg 和 W. Winter。覆盖维数与拟对角性。Internat. J. Math., 15(1):63–85, 2004.[16] A. Kishimoto、N. Ozawa 和 S. Sakai。可分 C* 代数纯态空间的齐性。Canad. Math. Bull., 46(3):365–372, 2003.[17] X. Li。每个可分类的简单 C* 代数都有一个 Cartan 子代数。Invent. Math., 219(2):653–699, 2020.[18] F. Murray 和 J. von Neumann。算子环论。IV。Ann. of Math. (2), 44:716–808, 1943.

[19] N. Ozawa。核 C* 代数刻画综述。载于《C* 代数近况》（日文）（京都，2002），第 1291 号，第 45–54 页。2002。[20] V. Paulsen。完全有界映射与算子代数，剑桥高等数学研究丛书第 78 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[21] M. Rørdam 和 W. Winter。重访江–苏代数。纯粹与应用数学杂志, 642:129–155, 2010。[22] Y. Sato。2-正几乎零阶映射与分解秩。J. Operator Theory, 85(2):505–526, 2021。[23] D. Voiculescu。关于拟对角 C* 代数与同伦的一则注记。杜克数学杂志, 62(2):267–271, 1991。[24] W. Winter 和 J. Zacharias。零阶完全正映射。M ¨unster J. Math., 2:311–324, 2009。

Department of Mathematics and Computer Science, University ofSouthern Denmark, Campusvej 55, DK-5230 Odense M, Denmark电子邮箱：kcourtney@imada.sdu.dkMathematical Institute, University of Münster, Einsteinstr. 62,48149 Münster, Germany电子邮箱：wwinter@uni-muenster.de