arXiv:2304.01337v1 [math.AG] 3 Apr 2023

群作用的几何表示

AVRAHAM AIZENBUD 和 Uri Bader

Abstract. 我们研究从零维概形到代数簇的等变态射，并证明在适当假设下，所有此类态射都可经由一个典范态射分解。我们将上述内容与遍历作用的代数表示联系起来。

1. Introduction

固定一个域 k 和一个 k-代数群 G。本文中，簇指有限型、几何约化且分离的 k-概形（不一定不可约）。我们考虑由 G 的 k-态射作用赋予结构的簇范畴 $\mathcal{C}$，以及它们的 G-等变 k-态射。设 X_0 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且它是 G-传递的，并考虑 k-有理函数代数 $K = k(X_0)$，$G(k)$ 在其上通过 k-自同构作用。我们可以问：给定 k-代数 K 及其 G-作用，如何重构 X_0,？注意到概形 k 的自然态射 $\phi : \mathrm{Spec}(K) \to X_0$ 是 G-等变的，我们提出如下答案。

命题 A. 假设 G 在 G 中扎里斯基稠密。那么，将 X 映射到 G-等变的k-概形态射 $\mathrm{Spec}(K) \to X$ 的集合的函子F_K：$\mathcal{C} \to$ 集合由 X_0 表示，且 ϕ 对应于恒等态射 $X_0 \to X_0$。

自然地，我们可以将讨论范围扩展如下。固定一个群 Γ 和一个群同态 $\Gamma \to G$。设给定一个 k-概形 Y（不一定是有限型的），其带有 Γ 通过 k-自同构给出的作用，并考虑函子 $F_{\mathbf{Y}}$：$\mathcal{C} \to$ 集合；它将 X 映射到 $Y \to X$ 的 Γ-等变 k-概形态射集合。如果此函子可表，我们就称 Y 在 $\mathcal{C}$ 中可表。若 $Y = \mathrm{Spec}(L)$，其中某个 k-代数L 带有 Γ的作用，则记 F_L 为 $F_{\mathbf{Y}}$，并称当 Y 可表时，L在 $\mathcal{C}$ 中可表。由此引出以下一般问题。

问题 B。在 $\mathcal{C}$ 中寻找关于概形和代数的可表示性的自然判据，其中 Γ 作用于其上。

日期：2023年4月5日。2020 年数学主题分类。14L30，22D40。关键词。群作用、冯·诺依曼正则环、零维概形、几何化、遍历作用的代数表示。1

我们将在命题 A 的证明过程中看到，代数$K = k(\mathbf{X}_0)$ 中所考虑的代数A 是零维且几何约化的。其他重要的零维几何约化代数的例子包括定义在可测空间上的 k值可测函数代数，其中 k 是一个局部域。这类可测函数代数的可表示性问题与遍历作用的代数表示研究密切相关，该研究见于遍历作用的代数表示，参见 [BF20]和 [BF22]。事实上，这项研究是我们最初考虑问题 B的动机。本文的主要结果是以下定理；在零维性和几何约化假设下，它彻底解决了这个问题。这里，我们用 $\mathcal{O}(\mathbf{Y})$ 表示 k上的全局正则函数所成的代数$\mathbf{Y}$ ，并用 L^Γ 表示 Γ-不变量在 L中的子代数。

定理 C. 假设 Y 是一个零维且几何约化的k-概形，并带有一个 Γ的作用。则以下条件等价。

- Y 在 $\mathcal{C}$中是可表的。
- $\mathcal{O}$(Y) 在 $\mathcal{C}$中是可表的。
- $\mathcal{O}(\mathrm{Y})^\Gamma$ 在 k上是有限的。
- $\mathcal{O}(\mathrm{Y})^\Gamma$ 是 k的有限个有限可分域扩张的有限和。

此外，若 $\mathcal{O}$(Y) 可由 Spec($\mathcal{O}$(Y)) $\to$ X 表示，则 Y 由与典范映射的复合表示为 Y $\to$ Spec($\mathcal{O}$(Y)) $\to$ X。

特别地，对于零维且几何约化的 k 代数L， L 在 $\mathcal{C}$ 中可表，当且仅当 L^Γ 在 k 上有限，当且仅当 L^Γ 是 k的有限个有限可分域扩张的直和。

在§2 中，我们将介绍关于零维环和代数的一些预备知识。本文的一个基本概念是概形的几何化 ，我们将在 §3中引入并讨论这一概念，并在 §4中将其推广到等变情形。定理 C 和命题 A的证明将在 §5中给出。最后，在 §6 中，我们将把上述内容与遍历作用的代数表示联系起来，这些表示在 [BF20] 和 [BF22]中进行了讨论。

1.1. 致谢。A.A. 获得了 ISF 资助（项目编号 249/17）和 Minerva 基金会资助的部分支持。U.B 获得了 ISF Moked 资助（项目编号 2919/19）的部分支持。

2. Zero dimensionality

本文中，尤其是本节中，所有环都是交换含幺环。

2.1. 零维环。 以下两个引理取自 [BR06], ，是我们分析零维代数的基础。为方便起见，我们附上简短的证明。

引理 2.1. 设 L 为一个环。给定 $x \in L$，至多存在一个幂等元 $e \in L$ ，使得 ex 是 eL 中的单位元，且 $(1-e)x$ 在 L中是幂零的。

给定 $x \in L$，满足上述性质的幂等元 e 称为 x的支撑幂等元。

证明。若 e 和 e' 都是 x 的支撑幂等元，则存在$y \in L$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $e = exy$ 且 $(1-e')x^n = 0$。由此可得

$$e = e^n = (exy)^n = e'(exy)^n + (1-e')(exy)^n = e'(exy)^n = e'e,$$

因此 $e = e'e$。对称地，我们得到 $e' = ee'$，因此 $e = e'$。 □

若 $x \in L$ 有支撑幂等元，我们将其记为 e_x。

引理 2.2. 环 L 是零维的，当且仅当每个 $x \in L$ 都有支撑幂等元。

证明。假设 L 具有这样的性质：每个元素都有支撑幂等元。注意到这一性质在 L的商环中仍成立，因此要证明 L 是零维的，只需假设 L 是整环并证明它是域。在整环中，唯一的幂等元是 0 和 1。若 $e_x = 0$，则 x 是幂零元，因此 $x = 0$；若 $e_x = 1$，则 x 是可逆的。因此，L 确实是一个域。

现在假设 L 是零维的，并固定 $x \in L$。那么存在$y \in L$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x^{n+1}y = x^n$。事实上，否则 0 不属于乘法集合

$$S = \{(1-xy)x^n \mid y \in L,\ n \in \mathbb{N}\}$$

其中包含 x，因此我们可以找到一个与 S不相交的素理想 $\mathfrak{p} \lhd L$；由零维性可知它是极大的。又由于 $x \notin \mathfrak{p}$，取 $y = x^{-1} \bmod \mathfrak{p}$便得到矛盾。注意，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $x^{n+k}y^k = x^n$，因此特别地，$x^{2n}y^n = x^n$。我们令 $e = x^n y^n$，并注意到 e 是幂等元，因为

$$e^2 = x^{2n}y^{2n} = (x^{2n}y^n)y^n = x^n y^n = e$$

并且 e是 x的支撑幂等元，因为

$$exy = (xy)^n xy = (x^{n+1}y)y^n = x^n y^n = (xy)^n = e$$

and

$$((1-e)x)^n = (1-e)x^n = (1-x^n y^n)x^n = x^n - x^{2n}y^n = x^n - x^n = 0.$$

□

引理 2.3. 如果 L 是一个零维环，且 Γ 是一个通过自同构作用于 L上的群，那么不变 L^Γ 构成的环是零维的。

证明。 这由引理 2.2推出，因为对每个 Γ-不变元，其支撑幂等元显然也是 Γ-不变的。 □

注意，代数中的幂等元集合构成一个格，其中 $e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2$ 和 $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_2 - e_1 e_2$。

引理 2.4. 在约化零维环中，每个有限生成理想都由单个幂等元生成。

证明. 由 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的理想由 $e_{x_1} \vee \cdots \vee e_{x_n}$ 生成。 □

注意，约化零维环也称为冯·诺依曼正则环。下文我们主要关注域上的几何约化零维代数。

2.2. 零维代数。现在固定一个域 k。我们注意到，零维性在基变换下并不保持。

例 2.5。 $k(x)$ 代数 $k(x) \otimes_k k(y)$ 不是零维的。事实上，将其与它在 $k(x, y)$ 中的像等同后，我们看到它是一个整环，但 $x + y$ 不可逆。

然而，零维性在有限基变换下保持。

引理 2.6。若 L 是零维 k-代数，且 $k < k'$ 是有限域扩张，则 $L' = k' \otimes_k L$ 也是零维 k- 代数。

证明。固定一个素理想 $p' \lhd L'$，并设法证明 L'/p' 是一个域。记 $p = p' \cap L$，并注意到 L/p 是一个域，而 $k' \otimes_k L/p$ 是 L/p 上的有限维向量空间。因此，其商环 L'/p' 也是 L/p 上的有限维向量空间。由于 L'/p' 是一个整环，我们得出它确实是一个域。□

引理 2.7. 几何约化的零维 k代数 L 当且仅当它是 k 上的有限可分域扩张的有限直和时，才是有限的。

证明. “若”方向显然。对于“唯有”方向，注意到如果 L 是 k 上的，则它只有有限多个幂等元，因此不妨假设它只有一个幂等元；此时它是一个域，并且根据 L 几何约化这一假设，该域必为 k 上的可分扩张。□

3. 几何化

我们固定一个域 k，并考虑 k-概形及其态射所成的范畴。 k-概形，即 k上的概形，将用黑体字母表示。根据定义，它们都配有一个到 Spec(k)的概形态射，我们在记号中省略该态射。通常，讨论 k-态射时，我们也会省略对 k 的提及。同样，除非另有说明，所有代数、向量空间等及其态射，都默认是在 k上的。本节中，我们固定一个概形 Y（不一定是有限型），并考虑从 Y 到各种代数簇的态射。为明确起见，我们采用以下约定。

定义 3.1. 簇是指有限型（不一定不可约）的几何约化分离k-概形。

若态射 $\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ 满足 X 是一个簇，则称其为 Y 的几何化。从 $\phi_1 : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}_1$ 到 $\phi_2 : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}_2$ 的 Y 的几何化之间的态射，是满足 $\phi_2 = \theta \circ \phi_1$ 的态射 $\theta : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$。因此，Y 的几何化范畴是相应余切片[4]

范畴（又称下方范畴），其中余域均为簇。Y 的几何化范畴$\mathbf{Y}$ 有一个终对象，即平凡几何化$\mathbf{Y}$ $\to \mathrm{Spec}(k)$。根据[Sta18引理 035Z]，，我们注意到簇的积仍是簇，并观察到$\mathbf{Y}$ 的几何化范畴有积； $\phi_1 : \mathbf{Y}$ $\to \mathbf{X}_1$ 与 $\phi_2 : \mathbf{Y}$ $\to \mathbf{X}_2$ 的积为 $\phi_1 \times \phi_2 : \mathbf{Y}$ $\to \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$。

现在我们考虑 Y 的支配几何化所构成的满子范畴，即支配态射 Y $\to$X，其中 X 是一个簇。

命题 3.2. 若 Y 是几何约化概形，则 Y 的支配几何化范畴到 Y 的所有几何化范畴的包含函子有一个右伴随函子 D。

证明. 给定一个几何化 ϕ : Y $\to$ X，我们令 X′ 为 ϕ 的概形论像，即使 ϕ 能够分解通过的最小闭子概形，参见 [Sta18, Definition 01R7]，；并令 D(ϕ) : Y $\to$ X′ 为相应的态射。由于 Y 是约化的， D(ϕ) 是支配的，而 X′ 根据 [Sta18, Lemma 056B] 是约化的。由 [Sta18, Lemma 01R6]，的证明可知，X′ 的局部环到 Y 的局部环的态射是单射。利用 [引理 035W] 和 [Sta18, Lemma 030T]，，可得 X′ 实际上是几何约化的。 D 的函子性以及它是包含函子的右伴随这一事实显而易见。□

推论 3.3. 若 Y 是几何约化概形，则 Y 的支配几何化范畴存在积，由 $\phi_1 \times_D \phi_2 :=$ $D(\phi_1 \times \phi_2)$ 给出。

注 3.4. 给定一个范畴，满子范畴包含的右伴随函子称为压缩。若存在压缩，且给定的（环境）范畴有积，那么容易验证，推论 *3.3*中的公式定义了子范畴中的积。

命题 3.5. 设 Y 是零维概形，且 ϕ : Y $\to$ X 是一个几何化。那么对每个可构造子簇 Z $\subset$ X， ϕ^{-1}(Z) 在 Y 中是开闭的，对应于 Y 中的一个幂等元 $e_{\mathbf{Z}} \in \mathcal{O}$。

证明。由于开闭性是局部条件，我们不妨设 Y 是仿射的，对应于一个约化零维代数 L。由于 X 中原像为开闭集的子集构成一个布尔代数，我们不妨设 Z 是闭子簇。注意到包含态射 Z $\subseteq$X 是一个有限表示的闭浸入（见[Sta18，定义 01TP]）。我们作基变换 Y $\times_{\mathbf{X}}$ Z $\to$ Y，并注意到根据[Sta18，引理 01QR 和引理 01TS]，它是一个有限表示的闭浸入。由 [Sta18，引理 01TV] ，我们得出与 Y$\times_{\mathbf{X}}$Z 相关联的 L中的理想是有限生成的。由引理 2.4，证毕。□

注 3.6. 若 Y $=$谱(L)，则我们得出，对于每个可构造子簇 Z $\subseteq$ X， ϕ^{-1}(Z) 都是幂等元 $e_{\mathbf{Z}} \in L$的零点集。对应 Z $\mapsto e_{\mathbf{Z}}$ 可以看作 X 上的投影值测度。

命题 3.7. 若 Y 是零维概形，则 $\mathcal{O}$(Y) 是一个零维代数。

证明。 对于 $f \in \mathcal{O}(\mathbf{Y})$，我们考虑相应的几何化 $\mathbf{Y} \to \mathbb{A}^1$、可构造的（开）子簇 $\mathbf{Z} = \mathbb{A}^1 - \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ 以及相应的幂等元 $e_{\mathbf{Z}} \in \mathcal{O}(\mathbf{Y})$。由于 f 在闭开子集 $f^{-1}(\mathbf{Z}) \subseteq \mathbf{Y}$上可逆，根据引理 2.1，结论得证。□

命题 3.8. 如果 Y 是零维概形，那么 Y 的每个几何化都唯一地经由典范映射 Y →Spec($\mathcal{O}$(Y)) 分解。

证明。如果 X 是仿射的，则该陈述显然成立。设 U_i 是 X 的有限开仿射覆盖，定义 $Z_i = U_i - \cup_{j<i} U_j$，并令 $Y_i = \phi^{-1}(Z_i)$。对于每个 i，$Z_i \subseteq X$ 是一个仿射子簇，因此 $\phi : Y_i \to Z_i$ 唯一地经由典范映射 $Y_i \to$ Spec($\mathcal{O}(Y_i)$) 分解。由于 Z_i 构成 X 的一个可构造分划，Y_i 构成 Y 的一个闭开分划，因此 $\mathcal{O}(Y) = \oplus_i \mathcal{O}(Y_i)$，且 Spec($\mathcal{O}$(Y) 是其闭开子集 Spec($\mathcal{O}(Y_i)$) 的不交并。结论得证。□

4. Equivariant geometrizations

在本节中，我们固定一个域 k 以及一个 k-代数群 G，即一个作为 k-簇的群概形（见定义 3.1）。我们考虑范畴 $\mathcal{C}$： 带有 G 的 k-态射作用的 k-簇，以及它们的 G-等变 k-态射。我们固定一个群 Γ 和一个群同态$\Gamma \to G(k)$。我们还固定一个带有 Γ 通过 k-自同构作用的 k-概形 Y（不一定是有限型的）。此外，我们始终固定一个¯代数闭域扩张 $k < k$，并假设它足够大
¯ ¯，使得 Y 具有一个几何 k-点，即 Spec(k) →Y。

我们将 Geom(Y) 记为 Y 的等变几何化范畴，即 Γ-等变的 k-概形态射 $\phi : Y \to X$，其中 X 是 $\mathcal{C}$中的对象。若相应的几何化 $\phi' : G \times Y \to X$ 由复合映射给出，则等变几何化 ϕ 称为本质的

$$\mathbf{G} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X},$$

其中，映射 G ×X → X 是作用映射，且为支配映射。本质几何化构成的满子范畴记为 Geom^E(Y)。

命题 4.1. 若 Y 是几何约化概形，则范畴嵌入 Geom^E(Y) ⊆ Geom(Y) 存在一个右伴随函子 E。

证明. 给定 Geom(Y) 中的 ϕ : Y → X，我们考虑上文介绍的 ϕ' : G × Y → X 所对应的几何化，以及命题 3.2 中给出的几何化$D(\phi')$: G ×Y → X′。考虑显然的态射 i : Y → $\{e\} \times$ Y ⊆ G × Y，我们令 $E(\phi) = D(\phi') \circ i$。根据这一构造，容易验证证明的细节。□

与引言中一样，我们考虑函子 $F_{\mathbf{Y}}$: $\mathcal{C}$ → 集合，它将 X 映射到等变几何化 Y → X 的集合。若此函子可表，我们就称 Y 在 $\mathcal{C}$ 中可表。若 Y =Spec(L),

对于某个带有 Γ 作用的 k-代数 L，我们将写作 F_L for $F_{\mathbf{Y}}$，并称若 Y 可表，则 L 在 $\mathcal{C}$ 中可表。

我们注意到，如果 Y 由簇 X 表示为 $\mathcal{C}$，那么 X 的恒等映射对应于一个几何化 Y $\to$X，它是 Geom(Y) 中的始对象；反过来，如果几何化 Y $\to$ X 是 Geom(Y) 中的始对象，那么 Y 就由簇 X 表示为 $\mathcal{C}$。

引理 4.2. 假设 Y 是几何约化的。如果 Y 是 Γ-不变开闭子概形 $\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$ 的不交并，那么 Y 在 $\mathcal{C}$ 中可表，当且仅当 Y_1 和 Y_2 在 $\mathcal{C}$ 中都可表。在这种情况下，Y 由不交并 $\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2$ 表示，其中对于 $i = 1$，2，X_i 表示 Y_i。

证明. 显然，若对于 $i = 1$，2，Y_i 由 X_i 表示，那么 Y 就由 $\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2$ 表示。假设 Y 由 X 表示，因此 Geom(Y) 有一个始对象 $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$。令 $\phi_i = \phi|_{\mathbf{Y}_i}$，并将其视为 Y_i 的几何化；我们断言，$E(\phi_i)$ 是 Geom(Y_i) 中的始对象，其中 E 是命题 4.1 中定义的函子。事实上，不失一般性地假设 $i = 1$。对于每个几何化 $\phi'_1 : \mathrm{Y}_1 \to \mathrm{X}'_1$，我们考虑相应的几何化 $\phi' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'_1 \cup$谱($k$)，它由 $\phi'|_{\mathbf{Y}_1} = \phi'_1$ 给出，而 $\phi'|_{\mathbf{Y}_2}$ 是平凡几何化。将函子 E 应用于由 X $\to$ $\mathrm{X}'_1 \cup$谱(k) 给出的 Y_1 的几何化之间的态射，可得一个几何化态射，从而实现 $E(\phi_1)$ 为始对象。□

当基域 k 变化时，我们采用记号 Geom_k(Y)，表示在 $\mathcal{C}_k$ 中由 k-代数簇对 Γ k-概形 Y 进行等变 k-几何化所构成的范畴，以强调其对基域的依赖。对于域扩张 $k < k'$ 和等变 k-几何化 $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$，标量扩张 $\phi_{k'} : \mathrm{Y}_{k'} \to \mathrm{X}_{k'}$ 是 $\mathrm{Y}_{k'}$ 的等变 k'-几何化。因此，我们得到一个从 Geom_k(Y) 到 $\mathrm{Geom}_{k'}(\mathrm{Y}_{k'})$ 的忠实函子。

命题 4.3。设 Y 是一个 k-概形，且 $k < k'$ 是有限伽罗瓦域扩张。若 $\mathrm{Y}_{k'}$ 是 k'-可表的，则 Y 是 k-可表的。

证明。假设 $\mathrm{Y}_{k'}$ 在 $\mathcal{C}_{k'}$ 中由 X 表示。对于任意 $\alpha \in \mathrm{Gal}(k'/k)$，令 $\mathrm{Y}^{\alpha}_{k'}$ 为带有经 α 扭曲的 k'-结构的概形 $\mathrm{Y}_{k'}$，并注意到 $\mathrm{Y}^{\alpha}_{k'}$ 在 $\mathcal{C}_{k'}$ 中由 X^{α} 表示，后者是 X 的相应扭曲。自然同构 $\mathrm{Y}_{k'} \to \mathrm{Y}^{\alpha}_{k'}$ 给出函子同构 $F_{\mathbf{Y}} \to F_{\mathbf{Y}_{k'}}$。由米田引理，我们得到同构 X $\to \mathrm{X}^{\alpha}$。由伽罗瓦下降，这给出一个 k-簇 X，其带有一个 k'-同构 $\mathrm{X}_{k'} \cong$X，并且显然 X 在 $\mathcal{C}_k$ 中表示 Y。□

我们称 $\mathcal{C}$ 中的簇 X 是传递的，如果 $\mathrm{G}_{\bar{k}}$ 对 $\mathrm{X}_{\bar{k}}$的作用是传递的。我们称 Geom(Y) 中的几何化 Y $\to$ X 是传递的，如果 X 是传递的。我们将 Geom(Y) 中传递几何化所构成的子范畴记为 Geom^T(Y)，并注意到 Geom^T(Y) 是 Geom^E(Y) 的满子范畴。

回忆一下，如果任意两个对象之间的同态集至多包含一个元素，则该范畴是偏序的；而偏序范畴满足下降链

条件，当且仅当每个反向态射序列最终都由同构组成。

命题 4.4。$\mathrm{Geom}^T(\mathbf{Y})$ 是一个满足下降链条件的偏序范畴。

证明。考虑将 $\mathbf{G}$ 从 k 扩张至 k所得的标量扩张 $\mathbf{G}_{\bar{k}}$，并令$\mathrm{Sub}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$为 $\mathbf{G}_{\bar{k}}$ 的约化 k-代数子群的集合。相对于包含关系，这是一个偏序集，并且由诺特性可知它满足下降链条件。将其视为偏序范畴，$\mathrm{Sub}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$ 等价于范畴 $\mathrm{Tran}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$；该范畴由定义在 k上的、带基点的传递 $\mathbf{G}_{\bar{k}}$-代数簇组成。因此，$\mathrm{Tran}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$ 是一个满足下降链条件的偏序范畴。我们将通过构造一个从 $\mathrm{Geom}^T(\mathbf{Y})$ 到 $\mathrm{Tran}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$ 的忠实函子来证明该命题。

我们给出一个从范畴 $\mathrm{Geom}^T_k(\mathbf{Y})$ 到范畴 $\mathrm{Geom}^T_{\bar{k}}(\mathbf{Y}_{\bar{k}})$ 的忠实函子，其中对象为 $\mathbf{Y}_{\bar{k}}$ 的传递等变 k-几何化。我们还回顾一下，k 的选取使得 $\mathbf{Y}$ 有一个 k-点，并固定这样一个点 $\mathrm{Spec}(k) \to \mathbf{Y}$。给定$\phi : \mathbf{Y}_{\bar{k}} \to \mathbf{X}$ 属于 $\mathrm{Geom}^T_{\bar{k}}(\mathbf{Y}_{\bar{k}})$，通过用映射 ψ （由以下复合给出）预合成 ϕ，我们便得到 $\mathbf{X}$ 中的一个 $\bar{k}$-点:

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes_k \bar{k}) \to \mathbf{Y}_{\bar{k}},$$

其中，第一个映射是 k 乘法映射的对偶，第二个映射是将我们固定的 k-点作标量扩张所得。保留几何点 $\phi \circ \psi$，但遗忘 ϕ，得到一个从 $\mathrm{Geom}^T_{\bar{k}}(\mathbf{Y}_{\bar{k}})$ 到 $\mathrm{Tran}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$ 的遗忘函子，很容易看出它是全忠实的。因此，函子的复合

$$\mathrm{Geom}^T(\mathbf{Y}) \to \mathrm{Geom}^T_{\bar{k}}(\mathbf{Y}_{\bar{k}}) \to \mathrm{Tran}(\mathbf{G}_{\bar{k}})$$

给出了所需的忠实函子。 □

定理 4.5. 若 $\mathbf{Y}$ 是零维且几何约化的，并且我们有$\mathcal{O}(\mathbf{Y})^\Gamma = k$，那么 $F_{\mathbf{Y}}$ 可由 $\mathcal{C}$ 中的一个传递簇表示。

在定理 4.5 的证明中，我们将使用以下结果。

定理 4.6 (Rosenlicht, [Ros56, 定理 2])。取一个簇 $\mathbf{X}$ 属于 $\mathcal{C}$。则存在一个开稠密的 $\mathbf{G}$-不变子集 $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$、一个代数簇 $\mathbf{X}'$以及一个支配的 $\mathbf{G}$-等变映射 $\phi : \mathbf{U} \to \mathbf{X}'$ (均定义在 k上)，使得其纤维的约化是传递的。

命题 4.7. 若 $\mathbf{Y}$ 是零维且几何约化的，并且我们有 $\mathcal{O}(\mathbf{Y})^\Gamma = k$，那么范畴 $\mathrm{Geom}^T(\mathbf{Y}) \subseteq \mathrm{Geom}(\mathbf{Y})$ 的包含有一个右伴随函子。

证明。 根据命题4.1，只需证明范畴嵌入 $\mathrm{Geom}^T(\mathbf{Y}) \subseteq \mathrm{Geom}^E(\mathbf{Y})$ 存在右伴随函子。为此，只需证明，对于每个属于 $\mathrm{Geom}^E(\mathbf{Y})$ 的 $\mathbf{X}$，存在唯一的开$\mathbf{G}$-不变稠密子集 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$，使得$\mathbf{U}_{\bar{k}}$ 是传递的，并且映射 $\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ 可经由包含 $\mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{X}$分解。唯一性显然

由传递性可知，两个开稠密子集必定有非空交集。我们将证明其存在性。

由罗森利希特定理 4.6，给定 U $\subseteq$ X 和 ϕ : U $\to$ X′ 。令$e_{\mathbf{U}}$ 为与 U 对应的幂等元，它由命题 3.5 给出。由于它是 Γ-不变的，且 $\mathcal{O}$(Y)$^{\Gamma} = k$, 因此我们得到 $e_{\mathbf{U}}$ 等于 0 或 1；又由于该几何化是本质的，我们得出 $e_{\mathbf{U}} = 1$。因此，几何化 Y $\to$ X 确实经由包含 U $\hookrightarrow$ X 因子分解。特别地，我们得到一个映射 Y $\to$X′。根据命题 3.8，该映射经由仿射概形 Spec($\mathcal{O}$(Y)) 因子分解。由于 G 在 X′ 上的作用是平凡的，映射 Spec($\mathcal{O}$(Y)) $\to$ X′ 经由映射 Spec k = Spec($\mathcal{O}$(Y)$^{\Gamma}$) $\to$ X′因子分解。该映射的支配性意味着 Spec$k \cong$ X′。我们得出 U 是一个传递簇。证明至此完成。□

定理 *4.5* 的证明。 我们需要证明，范畴 Geom(**Y**) 有一个传递的始对象。根据命题 4.7，只需证明范畴 Geom^{T}(**Y**) 有一个始对象。注意，根据注记 3.4，该范畴存在积；根据命题 4.4，它是满足下降链条件的偏序范畴。由下降链条件可知，它有一个极小对象，也就是说，每个指向它的态射都是同构；又因为该范畴存在积，这样的极小对象必定是始对象。□

5. Proof of the main results

5.1. 定理 C 的证明。令 $L = \mathcal{O}$(Y)。我们注意到 L 是几何约化的。事实上，它是局部代数 $\prod_{y\in \mathrm{Y}} L_y$ 的积的一个子代数；根据 [Sta18, 引理 035W]，这些局部代数各自都是几何约化的。根据命题 3.8， L 是一个零维代数，并且 Y 的每个几何化都唯一地经由典范映射 Y $\to$ Spec(L) 分解。由此可得定理 C 中前两条要点的等价性，以及“此外”部分。最后两条要点的等价性由引理 2.7 得出。因此，我们只需证明： L 在 $\mathcal{C}$ 中可表，当且仅当 L^{Γ} 是 k的有限个有限可分域扩张之有限直和。

“仅当”部分的证明。假设 L 是一个几何约化的零维代数，且在 $\mathcal{C}$ 中可表，并证明 L^{Γ} 是 k 的有限域扩张的有限和。令 Spec(L) $\to$ X 为 Spec(L) 的几何化范畴中的 $^{-}$始对象。令 $k < k$ 为一个代数闭域扩张。令 n 为 X 的绝对连通分支数，也就是 $\mathbf{X}_{\bar{k}}$ 的连通分支数。

我们断言 L^{Γ} 只有有限多个幂等元。反设 L^{Γ} 有无限多个幂等元。那么我们可以找到非平凡的两两正交幂等元 $e_0, \ldots, e_n \in L^{\Gamma}$，因此由引理 4.2， $X = \mathbf{X}_0 \cup \cdots \cup \mathbf{X}_n$是开闭子簇的直并。这与假设矛盾，因此，$L$ 确实只有有限多个幂等元。

再次应用引理 4.2 后，我们只需考虑 L^Γ 只有一个幂等元的情形，现假设这一点。由引理 2.3， L^Γ 是一个几何约化的零维 k-代数，因此 L^Γ 是 k的可分域扩张。

我们断言， L^Γ 是 k的代数扩张。假设并非如此，固定一个不在 k 上代数的 $t \in L^\Gamma$ ，并考虑$A = k[t] < k(t) < L^\Gamma$。根据 X 的定义，几何化 Spec($L$) $\to$Spec(A) 可经由映射 X $\to$Spec(A) 分解。令 z 为后一映射像中的一个 k-点。令 $p \in k[x]$ 为 z 的最小多项式，并记$B = A[p^{-1}] < L$。相应的几何化 Spec(L) $\to$ Spec(B) 可经由映射 X $\to$ Spec(B) 分解，由此得出映射 X $\to$ Spec(A) 可经由 Spec(B) $\to$Spec(A) 分解。由于 z 不在后一映射的像中，故得到矛盾。由此我们得出，确实， L^Γ 是 k的代数扩张。

为完成证明，我们需要证明 L^Γ 是 k的有限扩张。事实上，我们将证明 $[L^\Gamma : k] \leq n$。否则，我们可以找到一个有限扩张$k' < L^\Gamma$ ，满足 $[k' : k] = m > n$ ，并考虑支配几何化 Spec(L) $\to$Spec(k')，它可经由一个支配映射 X $\to$Spec(k') 分解；但是，Spec(k') 由 m k-点组成，因为$k \otimes_k k' \cong \oplus_{i=1}^m k$。这一矛盾完成了证明。□

“若”部分的证明。我们知道， L^Γ 是由 k的有限可分域扩张组成的有限和，并带有相应的幂等元 e_i。我们需要证明 L 在 $\mathcal{C}$中是可表的。我们将考虑以下情形分类。

情形 1： $L^\Gamma = k$。
此情形由定理 4.5得出。

情形 2：对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$， $k_i \cong k$。
注意， e_i 是 L 中的幂等元，且 $1 = \sum e_i$。记 $L_i = e_i L$，我们得到一个 Γ-不变分解 $L = \bigoplus L_i$。利用引理4.2 ，问题可归结为前一种情形。

情形 3： $n = 1$，也就是说 L^Γ 是一个域。
设 k' 是 k 的一个有限伽罗瓦扩张，且包含 L^Γ ，并令 $L' = k' \otimes_k L$。由命题 4.3 只需证明 L' 是 k'-可表的。显然， L' 是一个几何约化的 k'-代数，并且由引理 2.6可知它是零维的。由 k'-代数同构 $(L')^\Gamma \cong k' \otimes_k L^\Gamma \cong \oplus_{i=1}^{\dim_k L^\Gamma} k'$，可将问题归约到前一种情形。

情形4：一般情形。
这可由前一种情形推出，方式与情形 2 由情形 1 推出相同。□

5.2. 命题**A**的证明。 首先注意到 K 是零维且几何约化的。事实上，它是 k 上不可约分支的有理函数域的直和，而其中每一个都是零 $\mathbf{X}_0$,

维的，因为它是一个域；并且根据 [Sta18，引理 035W]，可知它在泛点处几何约化。

接下来，我们断言 $K^G = k$。我们选取一个代数闭域扩张 $k < k$，考察标量扩张 $(\mathbf{X}_0)_{\bar{k}}$ 以及相应的有理函数代数 $K_1 = k((\mathbf{X}_0)_{\bar{k}})$。将 $k \otimes_k K$ 视为 K_1的子代数后，我们得到包含序列

$$\bar{k} \subseteq \bar{k} \otimes_k K^G \subseteq (\bar{k} \otimes_k K)^G \subseteq K_1^G.$$

K_1^G 中每个函数的定义域都是 $\mathbf{X}_0$，的一个开 G-不变子集，因此，由于 G 在 G 中稠密且具有传递性，该定义域就是整个空间。我们得出

$$K_1^G = \mathcal{O}_{\bar{k}}(\mathbf{X}_0)^G = \mathcal{O}_{\bar{k}}(\mathbf{X}_0)^{\mathbf{G}(\bar{k})} = \bar{k},$$

其中，最后两个等式再次由 G 在 G 中的稠密性和传递性推出。因此，$\bar{k} = \bar{k} \otimes_k K^G$，我们便得出确实有$K^G = k$。

由定理 C 函子 F_K 可由一个 G-簇$\mathbf{X_1}$，表示，因此我们有函子同构

$$\psi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_1, \cdot) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(K), \cdot).$$

记 $\phi := \psi(\mathrm{Idx_1})$，可知 ψ 由与 ϕ预复合给出。因此存在一个 G-等变映射 $\nu : \mathbf{X_1} \to \mathbf{X_0}$，使得映射 $\mathrm{Spec}(K) \to \mathbf{X_0}$ 经由 $\mathbf{X_1}$分解。因此存在开集 $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X_1}$，使得

- ϕ 给出了 $k(U)$ 与 K之间的一个同构。
- $\nu|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \nu(\mathbf{U})$ 是一个同构。

由于 $\mathbf{X_0}$ 是 G-传递的，我们不妨设 $\nu(\mathbf{U}) = \mathbf{X_1}$。因此 ν 存在一个截面 s。

我们有 $s \circ \nu \circ \phi = \phi$。因此，由于 ψ 是一个双射，可得$s \circ \nu = \mathrm{Idx_1}$。这意味着 ν是一个同构，证毕。

6. Algebraic representations of ergodic actions

本节将定理 4.5 与 [BF20]和 [BF22]中探讨的一些结果联系起来。我们首先回顾测度论中的一些基本概念。

(1) Borel 空间是指一个集合，并为其幂集选定一个子-σ-代数；其元素称为 Borel 子集或可测子集。(2) Borel 空间之间的态射，或称 Borel 映射，是指一种映射，使得 Borel 集的原像仍是 Borel 集。(3) 由此，Borel 空间的全体构成一个范畴。我们将此范畴记作 $\mathcal{B}$。(4) Borel 嵌入是指一种 Borel 映射，其像是 Borel 子集，且该映射到其像上是一个同构。(5) 范畴 $\mathcal{B}$ 具有有限积，其由集合论积上的积 σ-代数给出；它还具有纤维积，且纤维积可 Borel 嵌入相应的积中。

(6) 给拓扑空间赋予由其开集族生成的 σ-代数，便得到一个函子 Top $\to \mathcal{B}$。对于第二可数拓扑空间，该函子保有限积和有限纤维积。(7) Borel 空间上的测度是定义在其 Borel 子集 σ-代数上的、取值于 $[0,\infty$的 σ-可加函数。测度的核是一个 σ-理想。若两个 Borel 空间上的测度具有相同的核，则称它们等价。(8) 测度空间是指一个 Borel 空间，并为其选定一个由 Borel 子集构成的 σ-理想；其元素称为零集。零集的补集称为余零集。选取 Borel 空间上一个测度等价类，即可得到一个测度空间。(9) 给定测度空间 Ω 和 Borel 空间 U，从 Ω 到 U 的测量函数是指选取一个余零子集 $\Omega_0 \subseteq\Omega$，以及一个 Borel 映射 $\Omega_0 \to U$。若两个测量函数在其定义域的余零子集上相等，则称它们等价。(10) 测量函数的等价类称为测量映射。从测度空间 Ω 到 Borel 空间 U 的所有测量映射组成的集合记作 Maps(Ω U)。(11) 给定两个测度空间 Ω 和 Ω′，若从 Ω 到 Ω′ 的测量函数的任一代表元，对 Ω′ 中每个零集的原像都是 Ω 中的零集，则称该测量函数为测量态射。所有此类测量态射组成的集合记作 Mor(Ω, Ω′)。(12) 由此，测度空间的全体构成一个范畴。我们将此范畴记作 $\mathcal{M}$。(13) 尽管每个测度空间都有底层的 Borel 空间结构，但忘掉其零集的 σ-理想，并不能得到从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{M}$的函子，因为这不会保态射。不过，Maps(·, ·) 给出了从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{M}$的一个对应，或称预函子。

所谓博雷尔环，是指 Borel 空间范畴中的一个环对象，也就是一个赋予了两个 Borel 映射的 Borel 空间 k $k \times k \to k$，它们满足加法和乘法的通常公理。根据上文第（6）项，考虑具有第二可数性的拓扑环，就能得到博雷尔环的例子。

其底层环为域的博雷尔环 k，若第一坐标投影

$$\{(x,y) \in k^2 \mid xy = 1\} \to k, \quad (x,y) \mapsto x$$

是一个 Borel 嵌入，即到 $k^\times$上的同构。等价地，这意味着逆映射在 $k^\times$上是 Borel 的。

例 6.1. 给定一个域 k，以及 k 上一个能导出完备可分度量的绝对值，其对应的 k 上的博雷尔结构使其成为博雷尔域。

命题 6.2. 给定一个博雷尔域 k，存在一个从 k-代数簇到 Borel 空间的唯一函子，$B: \mathcal{V} \to \mathcal{B}$，使得

- B 保持积和纤维积。
- B 将开浸入映射为 Borel 嵌入。
- B 下 $\mathbb{A}^1$ 的像是作为 k基础的 Borel 空间。
- 与遗忘函子 $\mathcal{B} \to$ Sets 的复合是点函子。

证明。 证明相当标准（只要明确表述即可）。具体而言，可以参照 [Con12、命题 2.1 和 3 的证明。1]这些证明讨论的是拓扑环，只需进行显然的调整即可。 □

鉴于上面的最后一条，对于一个 k-簇 X， B(X) 是赋予了某种博雷尔结构的集合 X(k)。因此，当上下文清楚表明我们将其视为 Borel 空间时，我们将简单地使用术语 X(k)，而不使用 B(X)。

命题 6.3. 给定一个博雷尔域 k 和一个有限域扩张 $k < k'$，可以在 k' 上赋予一种博雷尔结构，使其成为博雷尔域，并使 $k \hookrightarrow k'$ 成为博雷尔嵌入。

提及的 k' 上的博雷尔结构，无非是将其识别为 k-向量空间 $k' \cong k^n$ 后所对应的乘积博雷尔结构。不过，为了避免作出选择，我们在下面的证明中以一种更抽象的方式来介绍这一点。

证明。 令 **X** 为 $\mathbb{A}^1$ 从 k' 到 k的魏尔标量限制，因此$\mathbf{X}(k) \cong k'$。利用命题6.2，我们在 k' 上得到一种博雷尔结构，使得加法映射与乘法映射都是博雷尔映射。这使得 k'成为一个博雷尔环。由于 $\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1$ 是开浸入，而开浸入在标量限制下保持不变（见 [BLR90，命题 7.6/2]），且B 将开浸入映为博雷尔嵌入，因此我们得到 k' 是一个博雷尔域。 □

给定一个博雷尔域 k，我们得到一个从测度空间到 k-代数的函子，Ω $\mapsto$ Maps(Ω k)。我们将此函子记为 L，即令 L(Ω) =Maps(Ω k)。与谱函子复合后，我们得到一个从测度空间到概形的函子，Ω $\mapsto$ Spec(L(Ω))。事实上，此函子取值于几何约化零维概形。

引理 6.4. 对于每个 $\mathcal{M}$ 中的 Ω， L(Ω) 都是一个几何约化零维代数，而 Spec(L(Ω)) 是一个几何约化零维概形。

证明。 事实是 L (Ω) 是零维代数，这可直接由引理 2.2 得出。事实上，对于 L(Ω) 中的一个映射，其支集的示性函数（在零测集意义下定义良好）是一个支撑幂等元。它是约化的这一事实显而易见。根据 [Sta18，引理 030V]，要证明它是几何约化的，只需证明对每个有限纯不可分扩张 $k < k'$， $k' \otimes_k L$ 都是约化的。但有限扩张 k' 是一个

根据命题 6.3，它是博雷尔域，并且很容易看出 $k' \otimes_k \mathrm{Maps}(\Omega\ k) \cong \mathrm{Maps}(\Omega\ k')$，这确实是约化的。□

本节的主要结果如下。

定理 6.5. 设 k 是一个博雷尔域。上文所考虑的函子 $\mathrm{Spec} \circ L:\ \mathcal{M} \to \mathrm{Schemes}$ 和 $B:\ \mathcal{V} \to \mathcal{B}$ 在以下意义下互为伴随。对于每个 $\mathbf{X} \in\ \mathcal{V}$ 和 $\Omega \in\ \mathcal{M}$，存在一个双射

$$\mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}(k)) \cong \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(L(\Omega)), \mathbf{X})$$

并且该双射对 X 和 Ω 都具有函子性。

证明. 我们将构造一个映射 ϕ : Maps(Ω, X(k)) → Mor(Spec(L(Ω)), X)，并证明它具有所需的性质。我们将分几个步骤来完成。

我们先考虑 X 是仿射概形的情形。在这种情况下，我们将 Mor($\mathcal{O}$(X) L(Ω)) ≅Mor(Spec(L(Ω)), X) 视为相同，并将 ϕ : Maps(Ω, X(k)) →Mor($\mathcal{O}$(X) L(Ω)) 定义为显然的拉回。函子 ϕ 的函子性显然，接下来只需构造一个逆映射。我们选取一个闭嵌入 $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{A}^n$。每个坐标映射 $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ 都给出一个映射

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{O}(\mathbf{X}), L(\Omega)) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^1), L(\Omega)) \cong L(\Omega) = \mathrm{Maps}(\Omega, k).$$

结合这些坐标映射，我们得到

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{O}(\mathbf{X}), L(\Omega)) \to \mathrm{Maps}(\Omega, k)^n \cong \mathrm{Maps}(\Omega, k^n),$$

其像属于 Mor(Ω, X(k)) ⊆Mor(Ω k^n)。由此得到一个映射

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{O}(\mathbf{X}), L(\Omega)) \to \mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}(k))$$

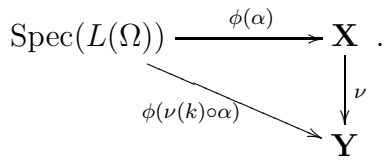
容易看出，该映射是 ϕ 的逆映射。至此，X 为仿射时的定理证明完毕。

现在我们转而在一般情形下构造 ϕ 。固定 α ∈Maps(Ω, X(k)) 以及一个博雷尔代表 $\alpha_0 : \Omega_0 \to \mathbf{X}(k)$。选取 $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{X}_i$ 的一个仿射分层，并令 $\Omega_i = \alpha_0^{-1}(\mathbf{X}_i(k))$，且 $\alpha_i = \alpha_0|_{\Omega_i} : \Omega_i \to \mathbf{X}_i(k)$。根据已经证明的仿射情形，我们得到相应的态射 $\beta_i = \phi(\alpha_i)$: Spec(L(Ω$_i$)) → X$_i$。注意，Spec(L(Ω$_i$)) 自然地可识别为 Spec(L(Ω)) 的一个闭开子集；此外，Spec(L(Ω$_i$)) 构成 Spec(L(Ω)) 的一个不连通覆盖。因此，$\{\beta_i\}$ 这一族给出一个映射 β : Spec(L(Ω)) →X。

我们希望定义 $\phi(\alpha) = \beta$. 。为此，我们需要证明 β 不依赖于 α_0 以及分层 $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{X}_i$的选择。显然，它不依赖于 α_0 的选择。给定上述两个分层，由于它们有一个共同细化，我们可以假设其中一个细化了另一个。因此，我们可以将问题归结为 X 为仿射的情形，且其中一个分层是平凡的。这确实可由仿射情形下 ϕ 的函子性推出，至此我们便完成了 ϕ的构造。

关于 Ω 的函子性 ϕ 显而易见。现在我们来证明它关于 X 的函子性。固定 $\alpha \in$ Maps(Ω,X(k))，并且

$\nu : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，我们需要证明下图交换：

(1)


取一个仿射分层 $\mathbf{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i$ 并且，对于每个 i，取一个仿射分层 $\nu^{-1}(\mathbf{Y}_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i} \mathbf{X}_{ij}$。我们得到一个仿射分层 $\mathbf{X} = \bigcup_{i,\,j} \mathbf{X}_{ij}$。在上述构造 $\phi(\nu(k) \circ \alpha)$ 和相应的 $\phi(\alpha)$ 中使用这些分层，图 (1) 的交换性便由仿射情形下的函子性得到。

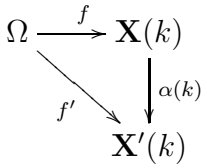
剩下需要证明 ϕ 是双射。我们将选取一个仿射分层 $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$，并构造一个映射 $\psi : \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(L(\Omega)), \mathbf{X}) \to \mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}(k))$。这个构造先验地依赖于所选的分层；不过，我们将证明它是 ϕ的逆映射，因此事后看来，它并不依赖于该分层。固定 $\beta \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(L(\Omega)), \mathbf{X})$，我们将构造 $\psi(\beta)$。令 $\mathbf{Z_i} = \beta^{-1}(\mathbf{X_i})$。由命题 3.5，$\mathbf{Z_i}$ 是 $\mathrm{Spec}(L(\Omega))$ 中的开闭集，因此 $\mathrm{Spec}(L(\Omega)) = \bigcup \mathbf{Z_i}$ 构成一个开闭不交覆盖。这给出了一个直和分解 $L(\Omega) = \bigoplus \mathcal{O}(\mathbf{Z}_i)$，以及 $L(\Omega)$ 中单位元的相应分解，即一组幂等元之和 $1 = \sum e_i$，见注 3.6。每个 e_i 都是某个集合 $\Omega_i \subseteq \Omega$ 的示性函数（该集合仅在相差一个零测集的意义下定义），并且 $\mathrm{Spec}(L(\Omega_i)) = \mathbf{Z}_i$。令 $\beta_i := \beta|_{\mathbf{Z}_i}$，并将其视为从 $\mathrm{Spec}(L(\Omega_i))$ 到 $\mathbf{X}_i$ 的态射。利用已在仿射情形下证明的 ϕ 的双射性，令 $\alpha_i = \phi^{-1}(\beta_i)$，并定义 $\alpha : \Omega \to \mathbf{X}(k)$ 为满足 $\alpha|_{\Omega_i} = \alpha_i$ 的唯一映射（在等价关系意义下唯一）。最后，令$\psi(\beta) = \alpha$。在构造 $\phi(\alpha)$ 时使用相同的分层 $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$，容易看出 $\phi(\alpha) = \beta$。这样我们就构造出了一个映射 ψ，它是 ϕ 的逆映射。因此可得 ϕ 确实是双射。证明完毕。□

现在固定一个群 Γ、一个测度空间 Ω 和一个群同态$\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}(\Omega)$。我们还固定一个 Borel 域 k、一个 k-代数群 $\mathbf{G}$以及一个群同态 $\rho : \Gamma \to \mathbf{G}(k)$。我们考虑范畴 $\mathcal{C}$ 中的 k- 簇（见定义 3.1），其中 $\mathbf{G}$ 以 k-态射方式作用，以及它们的$\mathbf{G}$-等变 k-态射。

定义 6.6（参见 [BF20，定义 4.1]）。Ω 的代数表示是一个二元组 $(\mathbf{X}, f)$，其中 $\mathbf{X}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个簇，且 f是一个取值于 $\mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}(k))$ 的可测映射，并且是 Γ 等变的；也就是说，对每个 $\gamma \in \Gamma$，$f \circ \theta(\gamma) = \rho(\gamma) \circ f$ 都属于 $\mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}(k))$。

代数表示 $(\mathbf{X}, f)$ 和 $(\mathbf{X}', f')$ 之间的态射是 $\mathcal{C}, \alpha$ 中的一个态射：$\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$，满足 $f' = \alpha(k) \circ f$ in $\mathrm{Maps}(\Omega, \mathbf{X}'(k))$，即

该图为



是交换的。

我们注意到，Ω 的表示所构成的集合形成一个范畴。定理 6.5给出如下结论。

推论 6.7. Ω 的代数表示范畴等价于 Spec(L(Ω)) 的等变几何化范畴。

我们称 Ω 是 Γ-遍历的，若 $L(\Omega)^\Gamma$ 仅由常值映射 $\Omega \to k$组成，也就是说 $L(\Omega)^\Gamma \cong k$。由引理 6.4和定理 4.5 可得如下结论。

推论 6.8 (参见 [BF20，定理4.3])。 若 Ω 是 Γ-遍历的，则 Ω 的代数表示范畴有一个传递的始对象。Ω 有一个传递的始对象。

References

[BF20] Uri Bader 和 Alex Furman。乘积中格的超刚性与非线性。《组合数学》，156(1):158–178，2020。[BF22] Uri Bader 和 Alex Furman。《马古利斯超刚性定理》的推广。载于《动力学、几何与数论——马古利斯对现代数学的影响》，第 47–65 页。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州， [2022] ©2022。[BLR90] Siegfried Bosch、Werner L¨utkebohmert 和 Michel Raynaud。《N´eron 模型》，《数学及其边界领域成果》（3）第 21 卷 [《数学及相关领域成果》（3）]。施普林格出版社，柏林，1990。[BR06] Jim Brewer 和 Fred Richman。零维环的子环。载于《交换代数中的乘法理想理论》，第 73–88 页。施普林格出版社，纽约，2006。[Con12]Brian Conrad。阿代尔点的 Weil 与 Grothendieck 方法。《数学教学》（第二辑），58(1-2):61–97，2012。[Ros56] Maxwell Rosenlicht。代数群的一些基本定理。《美国数学杂志》，78:401–443，1956。[Sta18]Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu，2018。

Avraham Aizenbud, Faculty of Mathematical Sciences, Weizmann Insti-tute of Science, 76100 Rehovot, Israel电子邮箱: aizenr@gmail.com网址: https://www.wisdom.weizmann.ac.il/~aizenr/

Uri Bader, Faculty of Mathematics and Computer Science, WeizmannInstitute of Science, Israel.电子邮箱: uri.bader@gmail.com网址: https://www.weizmann.ac.il/math/uribader/home