arXiv:2304.01338v1 [math.CA] 3 Apr 2023

实解析函数与单项式曲线

J´ANOS KOLL´AR

Abstract. 我们证明，一个函数在原点处实解析，当且仅当它是弧解析的、具有次解析图像，并且它在每条单项式曲线上的限制都是解析的。这补充了 Kucharz 和 Kurdyka 最近的研究结果。

Hartogs 的经典定理指出，定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的函数是复解析的，当且仅当它在每条平行于坐标轴的复直线上的限制都是复解析的[Har1906]。对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，情况要复杂得多。

可以通过二维平面来检验实解析性。也就是说，函数 $F(x_1,\dots,x_n)$ 是实解析的，当它在每个二维平面上的限制都是实解析的 [BS71, BS19]；另见[BKK20] 关于二维球面的类似结果。

然而，对直线的限制所包含的信息很少，简单例子 $xy/(x^2+y^2)$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上便说明了这一点。

按照 [Kur88],，若复合函数 $F\bigl(\phi_1(t)\dots,\phi_n(t)\bigr)$ 在 ϕ_i 为实解析函数时总是实解析的，则称函数 $F(x_1,\dots,x_n)$ 为弧解析函数。每个实解析函数都是弧解析函数，但也存在甚至不连续的弧解析函数；参见 [BMP91, Kur91, Kur94]。

如果对 F施加额外的限制，情况会有所改善。 [BM90] 证明，若 F 是弧解析函数且其图像是亚解析集，那么经过一系列适当的（局部实解析）爆破后， F 会变为实解析函数；陈述见定理 7，亚解析集的基础理论见 [BM88] 。然而，目前尚不清楚如何将这一结果转化为关于 $\mathbb{R}^n$ 本身实解析性的判据。

近期论文 [KK22] 提出了一种方法，更仔细地考察某些特殊曲线。其主要结果指出，若 $F(x_1,\dots,x_n)$ 是弧解析函数且其图像是亚解析集，那么 F 在原点处实解析，当且仅当

$$F\bigl(a_1t^p+b_1t^q,\dots,a_nt^p+b_nt^q\bigr)\in\mathbb{R}[[t^p,t^q]]\subset\mathbb{R}[[t]]$$

对每个 $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ 和 $0<p,q\in\mathbb{N}$。也就是说， $F\bigl(a_1t^p+b_1t^q,\dots,a_nt^p+b_nt^q\bigr)$ 有一个收敛的泰勒展开，其中只包含 t次幂 t^{rp+sq} ，其中 $r,s\in\mathbb{N}$。

本文旨在证明这一结果的以下变体。

定理 1. 设 $F(x_1,\dots,x_n)$ 是开子集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的弧解析函数，且其图像是次解析的。那么， F 在原点处解析，当且仅当它在每条单项式曲线上的限制都在原点处解析。也就是说，当且仅当

$$F\bigl(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\bigr)\in\mathbb{R}[[t^{m_1},\dots,t^{m_n}]]\subset\mathbb{R}[[t]] \tag{1.1}$$

对每个 $0<m_i\in\mathbb{N}$。

弧解析性意味着 $F\bigl(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\bigr)\in\mathbb{R}[[t]]$。我们总可以假设 $(m_1,\dots,m_n)=1$，于是对于某个 $r=r(m_1,\dots,m_n)$，有 $\mathbb{R}[[t^{m_1},\dots,t^{m_n}]]\supset t^r\mathbb{R}[[t]]$。（关于 $r(m_1,\dots,m_n)$ 的明确界，见定义 10。）因此，(1.1) 表示 $F\bigl(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\bigr)$ 的泰勒展开中有限项的消失，这些项仅取决于 $m_1,\dots,m_n$。

证明。如果 F 是解析的，那么在局部它可以写成关于 $x_1,\dots,x_n$ 的幂级数，因此 $F\bigl(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\bigr)$ 是关于 $t^{m_1},\dots,t^{m_n}$ 的幂级数，证毕。

反过来，假设 (1.1) 成立。我们在定义 2 中定义初等单项式坐标变换，并指出 (1.1) 在这些变换下保持不变。现在分为两个步骤。

(步骤 1.2) F 经过一系列初等单项式坐标变换后变为解析函数。这在第 8 段中证明，所用结果来自 [Hir64] 和 [BM90]关于奇点消解的研究。

请注意， [Hir64] 是通过等变主化定理 15 使用的，但仅用于单项式理想这一相对容易的特殊情形。不过，证明还用到了定理 7，而该定理又依赖于 Hironaka 关于亚解析集的统一化定理，以及他关于适当实解析映射的平坦化定理 [Hir73a, Hir73b]；这些结果要困难得多。

(步骤 1.3) 如果 F 满足 (1.1)，并且经过一次初等单项式坐标变换后变为解析函数，那么 F 就是解析函数。两个变量的情形见 [KK22], ，其直接推广将在第 3 段中讨论。

现在，根据初等单项式坐标变换的数量进行归纳，证明即告完成。□

定义 2（单项式坐标变换）。初等单项式坐标变换是指：置换坐标，选取 $1<r\leq n$，然后令 $\sigma\colon \mathbb{R}^n(\mathbf{x}')\to\mathbb{R}^n(\mathbf{x})$，定义为

$$\sigma:(x_1',\dots,x_n')\mapsto(x_1'x_r',\dots,x_{r-1}'x_r',x_r',\dots,x_n'). \tag{2.1}$$

其逆变换定义在 $(x_r\neq 0)$ 上：

$$x_1'=x_1/x_r,\dots,x_{r-1}'=x_{r-1}/x_r,x_r'=x_r,\dots,x_n'=x_n. \tag{2.2}$$

注。 x_i' 是爆破 $(x_1=\cdots=x_r=0)$ 后某个图表上的通常坐标。我们的思路受到爆破的启发，但如果读者愿意接受定理 5，则无需了解爆破。

因此 $F':=F\circ\sigma$ 是

$$F'(x_1',\dots,x_n'):=F(x_1'x_r',\dots,x_{r-1}'x_r',x_r',\dots,x_n').$$

若 $\rho'\colon t_i\mapsto(x_i':=t_i^{m_i})$ 是一条单项式曲线，则其像

$$\rho:t_i\mapsto\bigl(x_1=t^{m_1+m_r},\dots,x_{r-1}:=t^{m_{r-1}+m_r},x_r=t^{m_r},\dots,x_n=t^{m_n}\bigr)$$

是单项式曲线，且 $F'\circ\rho'=F\circ\rho$。因此，如果 (1.1) 对 $F\circ\rho$ 成立，那么对 $F'\circ\rho'$ 也成立（但反之不成立）。

因此，(1.1) 对所有单项式曲线成立这一性质，在初等单项式坐标变换下保持不变。

3（步骤 1.3 的证明）。假设存在一个如 (2.1) 所示的初等坐标变换，使得

$$F'(x_1',\dots,x_n'):=F(x_1'x_r',\dots,x_{r-1}'x_r',x_r',\dots,x_n')$$

是解析的。那么 F' 有一个包含单项式的幂级数展开

$$(x_1')^{a_1}\cdots(x_n')^{a_n}=x_1^{a_1}\cdots x_{r-1}^{a_{r-1}}x_r^{A_r}x_{r+1}^{a_{r+1}}\cdots x_n^{a_n},$$

其中 $A_r(a_1,\dots,a_r)=a_r-(a_1+\cdots+a_{r-1})$。如果对于 F' 中的每个单项式， $A_r(a_1,\dots,a_r)\geq 0$，那么 $F(x_1,\dots,x_n)$ 就是所需的解析函数。

否则， F' 中存在一个单项式 $M=(x_1')^{a_1}\cdots(x_n')^{a_n}$，使得 $A_r<0$。如注 4 所述，选择 $(m_1',\dots,m_n')$，使得 $\sum c_im_i'=\sum a_im_i'$ 在 $c_i\in\mathbb{N}^n$ 中没有非平凡解。令

$$m_1:=m_1'+m_r',\dots,m_{r-1}:=m_{r-1}'+m_r', m_r=m_r',\dots,m_n=m_n'.$$

我们声称，对于这个选择，(1.1) 不成立。事实上，在 $F\big(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\big)$ 中，我们得到一个次数为

$$\sum a_im_i'=-(a_1+\cdots+a_{r-1})m_r+\sum a_im_i.$$

任何其他单项式 $(x_1')^{c_1}\cdots(x_n')^{c_n}$ 的 t次数都不同，因此 $M\big(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\big)$不会被抵消。此外， $M\big(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\big)\in\mathbb{R}[[t^{m_1},\dots,t^{m_n}]]$ 当且仅当

$$\sum c_im_i=-(a_1+\cdots+a_{r-1})m_r+\sum a_im_i=\sum a_im_i'$$

在 $c_i\in\mathbb{N}$中有解。等价地，

$$(c_1+\cdots+c_{r-1})m_r'+\sum c_im_i'=\sum a_im_i'. \tag{3.1}$$

左边 m_r'的系数是 $c_1+\cdots+c_{r-1}+c_r$，它至少为$c_1+\cdots+c_{r-1}$。右边是 $a_r<a_1+\cdots+a_{r-1}$，因为我们假设 $A_r(a_1,\dots,a_r)=a_r-(a_1+\cdots+a_{r-1})<0$。因此，(3.1) 将是 $\sum c_i'm_i'=\sum a_im_i'$的一个非平凡解，这与我们对 $(m_1',\dots,m_n')$ 的选择矛盾。因此 $F\big(t^{m_1},\dots,t^{m_n}\big)\notin\mathbb{R}[[t^{m_1},\dots,t^{m_n}]]$。□

注 4. 固定在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关的 $a_i\in\mathbb{N}^{>0}$ 和 $0<s_i\in\mathbb{R}$ 。那么 $\sum c_is_i=\sum a_is_i$ 在 $c_i\in\mathbb{Q}$ 中没有非平凡解。此外，满足 $\left|\sum b_is_i-\sum a_is_i\right|<1$ 的 $(b_i)\in\mathbb{N}^n$ 只有有限多个。因此存在一个 $\epsilon>0$，使得若 $|s_i'-s_i|<\epsilon$，则 $\sum c_is_i'=\sum a_is_i'$ 在 $c_i\in\mathbb{N}$ 中没有非平凡解。选取s_i' 为有理数，并同乘公分母。我们得到 $m_i\in\mathbb{N}^{>0}$，使得 $\sum c_im_i=\sum a_im_i$ 在 $c_i\in\mathbb{N}$ 中没有非平凡解。

我们在选择 m_i 时有很大的自由度，例如可以让它们全都是素数。

证明中的技术步骤是 [Kol19]的以下特殊情形。我们在任意域 K 上陈述此结果，不过在当前应用中只需要 $K=\mathbb{R}$。（此外，在有限域上，我们应改用 $\mathbb{A}^n_K:=\operatorname{Spec}_K K[x_1,\dots,x_n]$，而不是$K^n$。）

定理 5（单项式主化）。设 K 是一个域， h_0、.....、 $h_r\in K[[x_1,\dots,x_n]]$ 是幂级数。那么存在一系列初等单项式坐标变换 σ_i： $K^n\to K^n$ ，其复合映射 $\bar\sigma$： $K^n(\mathbf{z})\to K^n(\mathbf{x})$ 由 $\bar\sigma^*x_i=m_i(\mathbf{z})$ 给出；并且存在一个单项式 $M(\mathbf{z})$，使得以下结论成立。

（5.1） $\tilde h_i(\mathbf{z}):=M(\mathbf{z})^{-1}h_i\big(m_1(\mathbf{z}).....,\ m_n(\mathbf{z})\big)$ 均为幂级数，且~（

5.2） $h_j(\mathbf{0},\ .....,\ \mathbf{0})\neq0$ 至少对某个 $0\le j\le r$ 成立。

虽然这是 [Kol19], 在 Paragraph13 中结果的一个特例，但我们给出的证明仅使用 Hironaka 的主化定理的陈述，而几乎不涉及其他代数几何术语或工具。

推论 6（单项式正则化）。设 h_i 是开集 $\mathbf{0}\in U(\mathbf{x})\subset\mathbb{R}^n(\mathbf{x})$ 上的实解析函数。那么存在一列初等单项式

坐标变换 $\bar\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s \colon \mathbb{R}^n(\mathbf{z}) \to \mathbb{R}^n(\mathbf{x})$ 以及一个开集 $\mathbf{0} \in U(\mathbf{z}) \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{z})$，使得

$$(h_0 \colon \cdots \colon h_r) \circ \bar\sigma : U(\mathbf{z}) \dashrightarrow \mathbb{P}^r$$

在原点处是实解析的。

请注意，这与 Hironaka 型消除不定式在两方面有所不同。一方面，它较为简单，因为我们只要求该复合映射在一个点处是实解析的，而非处处实解析。另一方面，我们只能使用初等单项式坐标变换，而通常的消解方法也会在连续的爆破之间以关键方式使用局部解析坐标变换。

证明。我们将定理 5 应用于 h_i 的幂级数展开，以得到 $\bar\sigma \colon \mathbb{R}^n(\mathbf{z}) \to \mathbb{R}^n(\mathbf{x})$ 和 $h_i := (h_i \circ \bar\sigma)/M$，如 (5.1) 所示。这些 h_i 在原点处解析，并且对于某个 j，h_j 在原点处非零。因此

$$(h_0 \colon \cdots \colon h_r) \circ \bar\sigma : U(\mathbf{z}) \dashrightarrow \mathbb{P}^r$$

与.....一致

$$\bigl(\tilde h_0 \colon \cdots \colon \tilde h_r\bigr) : U(\mathbf{z}) \dashrightarrow \mathbb{P}^r,$$

且后者在原点处有定义并且解析。 □

以下结论虽以不同形式表述，但已在 [BM90, 定理1.4] 中得到证明。

定理 7. 设 X 为一个实解析流形，且 $f \colon X \to \mathbb{R}$ 为一个图像是次解析集的弧解析函数。那么存在一列实解析态射

$$X_m \xrightarrow{\pi_m} \tilde X_{m-1} \xrightarrow{u_{m-1}} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} \tilde X_0 \xrightarrow{u_1} X_0 = X, \tag{7.1}$$

其中，对每个 i，

(7.2) $u_i \colon X_i \to X_i$ 是局部有限开覆盖，(7.3) $\pi_i \colon X_i \to X_{i-1}$ 是对某个光滑闭实解析子集的爆破，并且 (7.4) 复合映射 $F_m := F \circ u_1 \circ \pi_1 \circ \cdots \circ u_{m-1} \circ \pi_m \colon X_m \to \mathbb{R}$ 是实解析的。□

8（步骤 1.2 的证明）。设 $F \colon U_0 \to \mathbb{R}$ 如定理 1 中所述，并考虑态射序列 (7.1)。

我们证明存在一列初等单项式坐标变换$\sigma_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 以及一个开邻域 $0 \in U_m \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$\tau_0 := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{s(m)} : U_m \to \mathbb{R}^n =: X_0$$

提升到 $\tau_m : U_m \to X_m$，它在原点处是实解析的。若此条件成立，则 $F \circ \tau_0 = F_m \circ \tau_m$ 在原点处也是实解析的，正如所需。

我们沿着链 (7.1) 向上构造提升 τ_m。因此，假设我们已经有了 $\tau_i : U_i \to X_i$。由于 $u_i : X_i \to X_i$ 是局部有限的开覆盖，任意一个 $\tau_i : U_i \to X_i$ 都可提升为某个 $0 \in U_i \subset U_i$上的 $\tilde\tau_i : U_i \to X_i$。

剩下的工作是将每个 $\tilde\tau_i : U_i \to X_i$ 提升到 $\tau_{i+1} : U_{i+1} \to X_{i+1}$。

注意，在 $\tilde\tau_i(0)$ 的一个邻域内，爆破 π_{i+1} 是亚纯映射的闭图

$$\bigl(h_0^{(i)} \colon \cdots \colon h_{r_i}^{(i)}\bigr) : \tilde X_i \dashrightarrow \mathbb{P}^{r_i},$$

其中 $h_j^{(i)}$ 均为实解析函数。考虑复合映射

$$H^{(i)} := \bigl(h_0^{(i)} \circ \tilde\tau_i \colon \cdots \colon h_{r_i}^{(i)} \circ \tilde\tau_i\bigr) : \tilde U_i \dashrightarrow \mathbb{P}^{r_i}. \tag{8.1}$$

根据推论 6，存在一系列初等单项式坐标变换$\sigma^{(i)}$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $U_{i+1} \subset \mathbb{R}^n$，使得 $H^{(i)} \circ \sigma^{(i)}$： $U_{i+1} \to \mathbb{P}^{r_i}$ 在原点处实解析。于是

$$\tau_{i+1} := \left(\tilde{\tau}_i \circ \sigma^{(i)}, H^{(i)} \circ \sigma^{(i)}\right) : U_{i+1} \to X_{i+1} \subset \tilde{X}_i \times \mathbb{P}^{r_i}$$

在原点处是实解析的。 □

进一步的评论与例子。

注 9. 即使在 $\mathbb{C}$上，也无法仅通过有界次数曲线检验某点处的解析性。

为说明这一点，令 $h(x,y)$ 为任意次数为 n 的不可约多项式。令 $F = H(x,y)/h(x,y)$，其中 H 是任意满足 $\mathrm{mult}_{(0,0)} H > n(n-1)$ 的解析函数。如下文所述， F 在所有经过原点且次数为 $< n$ 的曲线上的限制在原点处都是解析的，但 F 通常并非如此。

为说明这一点，令 $C := (g = 0) \subset \mathbb{C}^2$ 为一条次数为 $d < n$ 的曲线。则 h 在 C 上不为零。令 $R := \mathbb{C}[x,y]/(g)$。乘以 h 可得一个同构

$$R[h^{-1}]/R \cong R/(h) \cong \mathbb{C}[x,y]/(g,h),$$

根据贝祖定理，后者的维数为 $\leq nd$ 。在支撑于原点的直和项上， x 和 y 都是幂零的，因此只要 $i + j > nd$， $x^i y^j/h$ 在原点处的 C 上就是正则的。

在定理 1 中，仅使用有界重数（但次数无界）的单项式曲线也不够。例如，令 $F_m = x^m y^m/(x^2 + y^2)$。根据定义 10，我们得到

$$F_m(t^{m_1}, t^{m_2}) \in \mathbb{C}[[t^{m_1}, t^{m_2}]] \quad \text{if} \quad \min\{m_1, m_2\} \leq m/2.$$

另一方面，从定理 1 的证明中，尤其是第 3–4 段，可以清楚地看出，许多单项式曲线的稀疏子集确实可行。例如，正如注 4 所指出的，只需在 m_i 全为素数时验证 (1.1)。

定义 10（弗罗贝尼乌斯数）。满足 t^m 不属于 $K[t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}]$ 的最大 m 称为 $\{m_1, \ldots, m_n\}$ 的弗罗贝尼乌斯数。

对于 $n = 2$，弗罗贝尼乌斯数为 $m_1 m_2 - m_1 - m_2$。对于 $n \geq 3$，即使是较好的估计也很难得到，但已知弗罗贝尼乌斯数至多为 $(2/n) m_1 m_n$（假设 $m_1 \leq \cdots \leq m_n$），见 [EG72]。

因此，如果 $F = g/h$ 对某个显式幂级数 g， h，那么条件 (1.1) 是算法可判定的。

定理 1 的纯代数版本如下。

定理 11。设 K 是任意域， f、 $g_i \in K[[x_1, \ldots, x_n]]$ 是幂级数。那么 $f \in (g_1, \ldots, g_r)$ 当且仅当

$$f(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}) \in \left(g_1(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}), \ldots, g_r(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n})\right) \tag{11.1}$$

在环 $K[[t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}]]$ 中，对每个 $0 < m_i \in \mathbb{N}$ 都成立。

注意，我们需要 (11.1) 在环 $K[[t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}]]$ 中成立，而不是在 $K[[t]]$ 中成立。这是一个颇为微妙的条件，因为 $K[[t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}]]$ 不是主理想整环。

在 $K[[t]]$ 中要求 (11.1) 会引出整依赖的概念，参见[Laz04、SH06、LJT08]。

这一方法适用于任意域，因为单项式理想的主化是一个组合问题，因此与特征无关，参见 [BM06]。不过，利用 Gr¨obner 基可以给出定理 11 的一个更简单、更直接的证明。

定理 5 的证明。

我们需要奇点消解的如下特例。我们将在最后讨论其证明。

定理 12（单项式理想的单项式主化）。设 K 是一个域，$J \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个单项式理想。那么存在一列初等单项式坐标变换 $\sigma_i\colon K^n \to K^n$，其复合映射 $\bar\sigma\colon K^n(\mathbf{z}) \to K^n(\mathbf{x})$ 由 $\bar\sigma^* x_i = m_i(\mathbf{z})$ 给出，使得 $\bar\sigma^* J \subset K[z_1, \dots, z_n]$ 是由一个单项式生成的主理想。

13（定理 5 的证明）。设 $E(h_0, \dots, h_r) \subset \mathbb{N}^n$ 是指数 $(a_1, \dots, a_n)$ 的集合，其中 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ 在某个 h_i 中以非零系数出现。

Kol19] 的观察是，我们应当考虑单项式理想

$$J = J(h_0, \dots, h_r) := \bigl(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} : (a_1, \dots, a_n) \in E(h_0, \dots, h_r)\bigr) \subset K[x_1, \dots, x_n].$$

接下来，我们应用定理 12，得到一系列初等单项式坐标变换的复合映射 $\bar\sigma\colon K^n \to K^n$，使得 $\bar\sigma^* J$ 是由以下元素生成的主理想

$$M(\mathbf{z}) = m_1^{a_1} \cdots m_n^{a_n} \quad \text{for some} \quad (a_1, \dots, a_n) \in E(h_0, \dots, h_r).$$

此外，如果 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$以非零系数出现在某个 h_j 中，那么 $M(\mathbf{z})$ 也会以非零系数出现在同一个 $\bar\sigma^* h_j$ 中。

由于 $M(\mathbf{z})$ 整除 $\bar\sigma^* h_i$中的每个单项式，因此

$$\tilde h_i(\mathbf{z}) := M(\mathbf{z})^{-1} h_i\bigl(m_1(\mathbf{z}), \dots, m_n(\mathbf{z})\bigr)$$

˜是幂级数，且 $h_j(0, \dots, 0) \neq 0$。 □

接下来，我们讨论如何从大量关于奇点消解的文献中得到定理 12。首先，我们概述 Hironaka 方法如何得出这一结果，不过这里我们需要“遵循证明过程”。然后，我们说明如何从等变主化定理的陈述推导出定理 12。

14（Hironaka 方法）。与 [Hir64], 一样，我们从一个理想 $J := (f_1, \dots, f_r) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 开始。我们的目标是构造一个光滑子簇 $Z \subset K^n$，通过对其进行爆破来“简化” J的奇点。这个过程相当复杂，需要经过一系列带有新生成元的新理想。不过，所有新生成元都是通过反复应用以下两个步骤构造出来的：

- 对一个生成元求偏导数，或者
- 将两个生成元相乘。

这两个步骤都会保留单项式，因此如果我们从单项式 f_i 开始，那么 Hironaka 过程中的所有理想都由单项式生成。

最后，我们得到一个理想 $J^* := (f_1^*, \dots, f_s^*) \subset K[x_1, \dots, x_n]$，使得 J^* 是光滑子簇 $Z \subset K^n$ 的理想。

任意单项式理想的零点集都是若干坐标超平面交集的并，而其中唯一光滑的情形就是坐标超平面的交集。因此，J^* 定义了一个坐标超平面的交集。相应的爆破恰好就是定义 2 中的初等单项式坐标变换。

事实证明，我们所处的情形比 Hironaka 考虑的情形简单得多；在他的情形中，要证明这一过程与生成元的选择无关是相当困难的。而在我们的情形中，生成元是自然的。

此外，正如 [BM06], 所示，Hironaka 的原始方法适用于任意特征下的单项式理想。关键变化在于，不再使用求导

$(cx^m)' = mcx^{m-1}$，而应使用算子 $cx^m \mapsto cx^{m-1}$。这样我们便得到一个同样适用于正特征的过程。□

单项式理想通常作为托里克几何的特殊情形来处理。对我们而言，最简单的明确参考似乎是下面的定理。

定理 15（等变主化）。设 K 为特征零的域。设 $G \curvearrowright X$ 为作用于一个 K-簇的群，且 $I \subset \mathcal{O}_X$ 为一个 G-不变理想层。则存在一个序列

$$(G \curvearrowright X_s) \xrightarrow{\pi_{s-1}} (G \curvearrowright X_{s-1}) \to \cdots \to (G \curvearrowright X_1) \xrightarrow{\pi_0} (G \curvearrowright X_0 = X)$$

由 G-不变光滑子簇构成的爆破，使得

$$I_s := (\pi_0 \circ \cdots \circ \pi_s)^* I \subset \mathcal{O}_{X_s}$$

是局部主理想。 □

参考文献。这是 [Kol07, 3.26] 的特殊情形。该表述中没有群作用，但 [Kol07, 3.26.2]指出，那里给出的主化“在光滑态射下具有函子性”。同构是光滑态射，因此 [Kol07, 3.26] 中的主化在所有同构下均不变。

该定理比 [Hir64, p.142] 稍具一般性；[BM97, EV98] 中的改进意味着一般情形成立。

我们旨在将定理 15 应用于 $X = \mathbb{A}^n_K$ 以及 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 由单项式生成的理想。我们可以选择群为 $(K^\times)^n$。

定义 16. K 上的一个标准托里克图是 $(T^n \curvearrowright K^n)$，其中我们将 K^n和 $T^n := (K^\times)^n$ 视为 K-簇，且作用定义为

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n).$$

我们允许置换 x_i，并将作用改为任意 $(m_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，以

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\textstyle\prod_j \lambda_j^{m_{1j}} x_1, \dots, \prod_j \lambda_j^{m_{nj}} x_n\right).$$

托里克 K-簇是 $(T^n \curvearrowright X)$，其中 X 是维数为 n 的光滑 K-簇，并由 T^n-不变的标准图覆盖。

术语说明。若 K 是代数闭域，这就是光滑托里克簇的通常概念。若 K 不是代数闭域，许多作者允许用它的某个其他 K-形式替换T^n。因此，在 $\mathbb{R}$上，可以改用 $(\mathbb{S}^1)^n$。对我们而言，采用 $T^n = (K^\times)^n$ 更为合适。

最典型的例子，也是我们唯一需要的例子，如下所示。

例 17. 设 $Z \subset K^n$ 是若干坐标超平面的交，例如 $(x_1 = \cdots = x_r = 0)$。爆破 $B_Z K^n$ 是环面的。它由 r 个标准环面图表覆盖，每个图表都是一种初等单项式坐标变换。

第 r个图表在定义 2 中给出。通过对 $1, \dots, r$进行置换，使 i位于最后一个位置，再使用 (2.1–2)，即可得到第 i个图表。

注意，在（$T^n \curvearrowright K^n$）上，唯一的 T^n-不变子簇是坐标超平面的交。因此，若（$T^n \curvearrowright X$）是一个环面 K-簇，且若$Z \subset X$是一个 T^n-不变子簇，则（$T^n \curvearrowright B_Z X$）也是一个环面 K-簇。反复应用这些结果，可得以下结论。

引理 18. 设

$$(T^n \curvearrowright X_s) \xrightarrow{\pi_{s-1}} (T^n \curvearrowright X_{s-1}) \to \cdots \to (T^n \curvearrowright X_1) \xrightarrow{\pi_0} (T^n \curvearrowright K^n)$$

是 T^n-不变子簇的一列爆破。于是， X_s 由标准环面图表 X_s^j 覆盖，使得每个 $K^n \cong X_s^j \to K^n$ 都是若干初等单项式坐标变换的复合映射。□

19（定理 12 的证明）。结合定理 15 和引理 18，可得一列初等单项式坐标变换 $\sigma_i\colon\ K^n \to K^n$，其复合映射 $\bar{\sigma}\colon\ K^n(\mathbf{z}) \to K^n(\mathbf{x})$ 由 $\bar{\sigma}^* x_i = m_i(\mathbf{z})$ 给出，使得 $\bar{\sigma}^* J \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ 是一个主理想。

单项式经过一列初等单项式坐标变换的拉回仍是单项式，因此 $\bar{\sigma}^* J \subset K[z_1, \ldots, z_n]$ 是单项式理想。由于单项式的每个因子仍是单项式，如果单项式理想 $\bar{\sigma}^* J = (M_1, \ldots, M_s)$ 是主理想，那么它由其中一个 M_i 生成。□

注释 20（其他主化方法）。单项式理想的主化是一个组合问题，可以通过许多不同的方式完成；参见[KKMSD73、AMRT75、Cox00、GPT02、Tev07]。

在我们的证明中，我们依赖步骤 1.3，因此需要一种仅使用初等爆破序列的过程。上述论文并非为此而设计。

然而，可以为任意单项式坐标变换建立一个版本的步骤 1.3。完成后，便可以使用任意环面主化方法来取代定理 15。

致谢。我感谢 W. Kucharz 和 K. Kurdyka 将我引入这一课题，并提出了许多有益的意见和修正。美国国家科学基金会通过编号为 DMS-1901855 的资助提供了部分经费支持。

References

[AMRT75] A. Ash、D. Mumford、M. Rapoport 和 Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties* 1975, ，《数学科学出版社》，马萨诸塞州布鲁克莱恩，《李群：历史、前沿与应用》，第 IV 卷。MR 0457437 (56 #15642)[BKK20] Jacek Bochnak、J´ozef Kollar 和 Wojciech Kucharz, *Checking real analyticity on surfaces* 9 **133** 2020 167 171 , 《纯粹与应用数学杂志》( ) ( ), –。MR 4044678 [88] BM Edward Bierstone 和 Pierre D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, 高等科学研究所数学出版物（ 1988 67, 5 42 972342 ），第 – 期。MR BM, , 《发明数学》( )，第 2 期，411–424，MR 1062969[BM97] [90] ———, *Arc-analytic functions* **101** 1990 2, 207 302 , 《发明数学》( )，第 – 期。MR 1440306 (98e:14010) [BM06] , *Desingularization of toric and binomial varieties*, 《代数几何杂志》15 (2006 3, 443 486 2219845)，第 – 期。MR BMP E. Bierstone、P. D. Milman 和 A. Parusi´nski, , *A function which is arc-analytic but not continuous* **113** 1991 2, 419 423 1072083 [91] 《美国数学会会刊》( )，第 – 期。MR (91m:32008)[BS71] Jacek Bochnak 和 J´ozef Siciak, *Analytic functions in topological vector spaces*, 油印预印本，IHES，1971 年。[BS19] , *A characterization of analytic functions of several real variables*, 《波兰数学年刊》 **123** 2019 1, 9 13 4025005 ( )，第 – 期。MR Cox David A. Cox, , *Toric varieties and toric resolutions* [00] 《奇点消解》（奥伯古格尔，1997），《数学进展》，第 181 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2000 年，第 259–284 页。MR 1748623

[EG72] P. Erd˝os 和 R. L. Graham, *On a linear diophantine problem of Frobenius*, 《算术学报》 **21** 1972 399 408 311565 ( ), –。MR EV S. Encinas 和 O. Villamayor, [98] *Good points and constructive resolution of singularities* **181** 1998 158 1654779 99 14020 , 《数学学报》( ), 第 1 期, 109–。MR MR (i:)[GPT02] Pedro Daniel Gonz´alez Perez 和 Bernard Teissier, *Embedded resolutions of non necessarily normal affine toric varieties* **334** 2002 , , 《巴黎科学院数学报告》( ), 第 5 期, 379–382。MR 1892938[Har1906] Fritz Hartogs, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten* **62** 1906 , , 《数学年刊》( ), 第 1 期, 1 88 1511365 , MR[Hir64] Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I II* 2 79 1964 109 203 2 **79** 1964 , 《数学年刊》( ) ( ), –; 同上, ( ) ( ), 205–326。MR 0199184 (33 #7333)[Hir73a] , *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, 比萨大学“L. Tonelli”数学研究所, 比萨, 1973 年, 《国家研究委员会数学研究组丛书》。MR MR0477121 (57 #16665)[Hir73b] , *Subanalytic sets*, 《数论、代数几何与交换代数: 献给 Yasuo Akizuki》, 纪伊国屋, 东京, 1973 年, 第 453–493 页。MR MR0377101 (51 #13275)[KK22] Wojciech Kucharz 和 Krzysztof Kurdyka, *Analytic functions and Nash functions aloing curves* 。[KKMSD73] G. Kempf、F. F. Knudsen、D. Mumford 和 B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, 《数学讲义》, 第 339 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1973 年。MR 0335518 (49 #299)[Kol07] J´anos Koll´ar, *Lectures on resolution of singularities*, 《数学年刊研究》第 166 卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2007 年。[Kol19] , *Partial resolution by toroidal blow-ups* **1** 2019 1, , 《突尼斯数学杂志》( ), 第 – 期。MR[Kur88] Krzysztof Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, 《数学年刊》282 (1988), 第 3 期, 445–462。MR 967023[Kur91] , *A counterexample to subanalyticity of an arc-analytic function*, 《第十届解析函数会议论文集》（什奇尔克, 1990）, 第 55 卷, 1991 年, 第 241–243 页。MR 1141439[Kur94] , *An arc-analytic function with nondiscrete singular set*, 《波兰数学年刊》 **59** 1994 3, 251 254 1282776 ( ), 第 – 期。MR Laz Robert Lazarsfeld, [04] *Positivity in algebraic geometry. I-II*, 《数学及其边界领域成果》。第 3 辑, 第 48–49 卷, 施普林格出版社, 柏林, 2004 年。MR 2095471 (2005k:14001a)[LJT08] Monique Lejeune-Jalabert 和 Bernard Teissier, *équisingularité* 6 **17** 2008 4, 781 859, , 《图卢兹数学科学学院年刊》( ) ( ), 第 – 期。附 Jean-Jacques Risler 的附录。MR 2499856[SH06] Irena Swanson 和 Craig Huneke, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, 伦敦数学学会讲义, 第 336 卷, 剑桥大学出版社, 2006 年。[Tev07] Jenia Tevelev, *Compactifications of subvarieties of tori*, 《美国数学杂志》129 (2007), 第 4 期, 1087–1104。MR 2343384

普林斯顿大学, 普林斯顿, 新泽西州
08544-1000, kollar@math.princeton.edu