arXiv:2304.01353v1 [math.HO] 8 Sep 2022

正弦与余弦的欧拉级数：非标准分析的一种诠释

Piotr Błaszczyk 和 Anna Petiurenko

摘要 在《无穷分析引论》第八章中，欧拉推导出正弦、余弦的级数，以及公式 $e^{iv} = \cos v + i \sin v$。他的论证使用了无穷小量和无穷大数，并涉及一些奇怪的等式。我们在超实数域中诠释这些看似矛盾的对象。我们表明，任何非阿基米德域都能为这种诠释提供框架。然而，欧拉的证明背后有一个隐含引理，需要借助非标准分析的特定技巧。分析《微分学原理》第三章后可见，欧拉诉诸了包含无穷小量的有序域规则，并在推导 sinv、cos v 和 e^v 的级数时采用了同一套规则。

1 引言

在《无穷分析引论》第七章（§§114–125）中，欧拉引入了著名常数 e，并推导出 e^z 的一个级数。我们来关注他所采用的方法，尤其是他在论证中提到的无穷小量和无穷大数。

第七章的第一段写道：

Piotr Błaszczyk 克拉科夫教育大学，ul. Podchor.a˙zych 2，30-084 克拉科夫，波兰 电子邮件：\protect\unhbox\voidb@x\hbox{piotr.blaszczyk@up.krakow.pl} Anna Petiurenko 克拉科夫教育大学，ul. Podchor.a˙zych 2，30-084 克拉科夫，波兰 电子邮件：anna.petiurenko@up.krakow.pl

由于 $a^0 = 1$，当 a 的指数增大时，只要 a 大于 1，幂本身也会增大。因此，如果指数是正的无穷小，那么幂也会比 1 大一个无穷小量。设 ω 是一个无穷小量，或一个小到虽不等于零但仍满足 $a^\omega = 1 + \psi$ 的分数，其中 ψ 也是一个无穷小量。根据前一章的论述，我们知道，除非 ψ 是无穷小量，否则 ω 也不会是无穷小量。因此，$\psi = \omega$，或 $\psi > \omega$，或 $\psi < \omega$。究竟哪一种成立，取决于 a 的值，而目前尚不确定，所以设 $\psi = k\omega$。于是我们有 $a^\omega = 1 + k\omega$；以 a 为底取对数，得到 $\omega = \log(1 + k\omega)$。（Euler 1988, 92）

本节提到的无穷小量与标准量一样，参与数学运算。它们遵循三分律：$\psi = \omega$、$\psi > \omega$或 $\psi < \omega$。它们也可以作为指数或对数等运算中的项。

让我们进一步展开讨论。

由于 $a^\omega = 1 + k\omega$，我们有 $a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j$，无论为 j 赋予何值。由此可得

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{1}{j}k\omega + \frac{j(j-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \&c.$$

现在，如果令 $j = z\bar{\omega}$，其中 z 表示任意有限数，由于 ω是无穷小量，因此 j 是无穷大量。于是我们有 $\omega = zj$，其中 $\bar{\omega}$ 表示为分母为无限数的分数，因此 ω 是无穷小量，正如应有的那样。当我们将 zj 代入ω 时

$$a^z = (1 + \tfrac{kz}{j})^j = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(j-1)}{1\cdot 2j}k^2z^2 + \frac{1(j-1)(j-2)}{1\cdot 2j\cdot 3j}k^3z^3 + \\ + \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}k^4z^4 + \&c.$$

只要以无穷大数代替 j，这个方程就成立；但正如我们刚刚看到的，此时 k 是取决于 a 的有限数。（欧拉 1988，93）。[1]

除无穷小量和无限数之外，上述部分还介绍了有限数。它还给出了一些关系：当 z 为有限数且 ω为无穷小量时，乘积$z\omega$是无穷大量；或者，当 j 为无限数时，zj 是无穷小量。此外，它还考察了含有无穷多项的和。还要注意，欧拉处理涉及无穷小量和无限数的分数时，仿佛它们是通常的分数：$\frac{1}{\omega} = zj$，当$j = z\omega$时。在接下来的部分中，欧拉令 $z = 1$。因此，无限数的倒数是无穷小量，而无穷小量的倒数是无限数。

在第116节中，我们发现了一些涉及无限数的、略显奇特的算术项。

[1] 在 Blanton 的译本（欧拉 1988）中，原文中的符号 &c. 被译成了三个点 . . .。下文第4.3节将对此作评论。

由于 j 是无穷大的，$j-1\,j=1$；我们代入 j 的数越大，分数的值就越接近 1。因此，如果 j 是一个大于任何可指定数的数，那么$j-1\,j$就等于 1。基于同样的理由，$j-2\,j=1$、$j-3\,j=1$，依此类推。由此可得$j-2\,j=\frac{1}{2}$、$j-3\,j=\frac{1}{3}$、$j-4\,j=\frac{1}{4}$，依此类推。（欧拉 1988，第93–94页）

在这一段中，无限数（即大于任何可指定数的数）满足一个令人费解的相等关系$j-1\,j=1$。此外，一方面$j-1\,j$ 等于 1；另一方面，$j_1-1\,j_1$ 比$j_2-1\,j_2$，（给定 $j_1>j_2$）更接近 1。显然，这里的等号并不表示严格相等。由于 $\frac{1}{j}$ 是无穷小量，$j-1\,j$ 或 $1-\frac{1}{j}$ 是无限接近 1，而非等于 1。

将 $\frac{1}{k}$ 代入$j-k\,kj$ 以替换级数中的 a^z，欧拉得到

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\&c.$$

假设 $z=1$，他得到一个关于 a 的级数，

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot2}+\frac{k^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{k^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\&c.$$

取 $k=1$，他可以如下定义自然常数 e

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\&c.\text{ in infinitum.}$$

再次推演这一论证，这次用自然常数 e 代替 a，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned}e^{\omega}&=1+\omega,\\ e^{j\omega}&=(1+\omega)^j,\\ e^z&=(1+\tfrac{z}{j})^j,\quad\text{where }\ j=\frac{z}{\omega}.\end{aligned}\tag{1}$$

最后，假设$\left(j\,m\right)^{\frac{1}{j^m}}=\frac{1}{m!}$，由 (1) 可得 e^z 的级数如下

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot2}+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\&c.\text{ in infinitum.}$$

欧拉在推导 e^z 的级数展开时，穿插了一些数值例子来说明其中的若干项，例如这个例子。当 $=10$ 且 $k\omega = \frac{1}{1000000}$ 时，欧拉根据对数表推得 ω 的值如下

$$\log\left(1+\frac{1}{1000000}\right) = \log\frac{1000001}{1000000} = 0.00000043429 = \omega.$$

因此，$k = 2.30258$。

这些计算旨在说明 k 取决于 a。我们假设在这种情况下，ω是“一个非常小的分数”，而不是无穷小量。

欧拉还估算了自然常数 e，即它等于

$$2.71828182845904523536028, \text{ or } 2.718281828459\&c.$$

在第 VII 节和第 VIII 节中，有限数是通常以十进制形式表示的普通数。然而，无穷小量与无限数的乘积，例如 jω，也表示有限数。由于欧拉没有举例说明无穷小量和无穷大量，它们似乎构成了一种用于证明有关有限数的某些结果的技巧。事实上，隐含的步骤如下：给定一个有限数 z，取任意一个无限数 j——更准确地说，是一个非标准整数 j——那么 z 和 j 确定一个无穷小量，$\omega = \omega(z, j) = z\,j$，于是公式 (1) 得出。尽管 e^z 的级数由无穷多项组成，为了估算 e^z，欧拉只考虑其中有限多项，而不考察其余各项。

在第八章中，欧拉运用相同的方法，从以下公式出发，推导正弦与余弦级数

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i}.$$

他通过复数回顾了当时的三角学，从而得出了这些结果。在该章末尾，他将这些结果与公式（1）结合起来。再次强调，对无穷小、无限数以及相等的特定理解，为他的论证作出了实质性贡献。第138节写道：

设 z 为一个无穷小弧，设 n 为一个无穷大数 j，使得 jz 具有有限值 v。现在我们有 nz = v，且 z = v j，因此 sinz = v j，而 cosz = 1。经过这些代换

$$\cos v = \frac{\left(1+\frac{iv}{j}\right)^j + \left(1-\frac{iv}{j}\right)^j}{2}, \quad \text{and} \quad \sin v = \frac{\left(1+\frac{iv}{j}\right)^j - \left(1-\frac{iv}{j}\right)^j}{2i}.$$

在前一章中，我们看到 $(1+z/j)^j = e^z$，其中 e 是自然对数的底数。当令 z = iv，随后令 z = –iv 时，我们得到

$$\cos v = \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}, \quad \text{and} \quad \sin v = \frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}.$$

由这些等式，我们可以理解复指数函数如何用实正弦与余弦表示，因为 $e^{iv} = \cos v + i\sin v$，且 $e^{-iv} = \cos v - i\sin v$。（欧拉 1988，111–112）

总而言之，欧拉的数学工具箱包括：(1) 无穷小量的乘法逆是无穷大量，(2) 无穷大量的乘法逆是无穷小量，(3) 对于有限数 v 和无限数 j，存在一个无穷小量 ω，使得 jω = v，(4) 无限数 j、m 满足相等关系 $j-m\,mj = \frac{1}{m}$，且 $\binom{j}{m}\frac{1}{j^m} = \frac{1}{m!}$，(5) 二项式定理适用于无限数 j，即 $(1+x)^j = 1 + \binom{j}{1}x + \binom{j}{2}x^2 + \ldots$。《无穷小分析导论》第八章引入了另一项假设，即对于无穷小量 z，sin z = z 且 cos z = 1；无穷多个无穷小量之和是无穷小量。

本文在非标准分析的框架内阐释这些假设，并重点讨论欧拉在《无穷分析引论》第八章中提出的正弦与余弦级数展开。18世纪中叶，自然常数 e 和 e^z 的级数还是全新的课题。正弦与余弦级数使我们得以介绍欧拉针对这一古老数学问题提出的新颖方法。因此，第二节简要介绍托勒密和牛顿处理正弦的方法。第三节回顾欧拉三角学的基础。第四节详细分析欧拉如何将正弦与余弦展开为级数，以及这些级数的类型。第五节介绍非标准分析的基本概念，并阐释上述假设（1）至（6）。论点（7）需要更为高阶的非标准分析技术，本文不予讨论。第六节通过分析《微分学原理》第三章，为我们的阐释提供依据。

2 先驱者

正弦这一数学概念历经时代变迁。在本节中，我们重点关注两项重要成果：托勒密弦表和牛顿正弦级数。

2.1 托勒密

托勒密将正弦视为圆的一条弦，并结合其所对的弧及相应的圆心角来考察；见图1中的弦 AB、弧 AB 和角 AOB。在《天文学大成》中，他依据以下公式计算弧和弦：

$$\text{弧} : 360 :: \text{弦} : 120。$$

当一段弧占圆（分为 360 份）的这样一部分时，弦就占直径（分为 120 份）的这样一部分。托勒密将圆分为 720 份，即每份 $1/2°$，并成功地确定了从 $1/2°$ 到 $180°$的每段弧所对应的弦。在此过程中，他结合了欧几里得的相似图形理论和巴比伦算术。[2]

欧几里得比例理论是相似图形的基础，它预先假定比例涉及同类的量。因此，在希腊数学中，诸如弧 : 弦这样的比值并不是合法的对象。牛顿和欧拉运用了新颖的技巧，使他们能够将弧与线段联系起来。比例理论发生了深刻变化，为他们的正弦级数铺平了道路。用现代术语来说，这意味着有序域中的运算取代了古代的比值变换技巧。[3]

2.2 牛顿

《用方程分析无穷多项》是另一篇论著，牛顿在其中展示了他的无穷级数技巧。我们

[2] 参见：（托勒密 1984年），第一卷，
第 10–11 节。[3] 参见下文第 6.1 节。

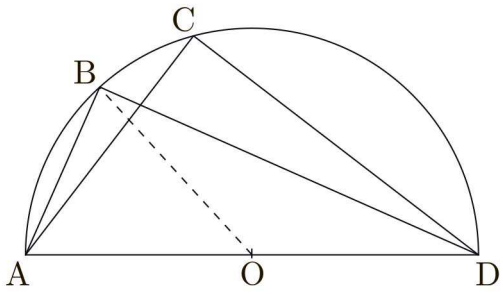

图1 托勒密，《天文学大成》，第51页（添加了中心O和虚线）。

回顾关于正弦及其弧的结果。[4] 在图2中，线段 T B 是半圆 ADLE 的切线，AD 是角 ACD 的正弦。牛顿试图用 AB 求出弧 AD，其中 AB =x。为此，他引入“无限小矩形”BGHK，并设 AC = 1/2。点 H 同时位于 T D 上、是三角形 HDG 的一个顶点，并且位于半圆上。按照笛卡尔的方法，[5] 牛顿发现 BD 等于 $\sqrt{x - x^2}$。根据三角形 △T DB、△HDG 和 △CDB 的相似关系，他推导出比例

$$BK : HD :: BT : DT,\ \ BT : DT :: BD : DC,$$

并得到 BK : HD :: $\sqrt{x - x^2}$: 1/2。比值 HD : KB 表示“弧 AD 的矩”与“底边 AB 的矩”之比。再一次，由于笛卡尔的方法，[6] 比例 HD : BK :: DC : BD 转化为接下来的相等式

$$\frac{HD}{BK} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

根据二项式定理，牛顿将*HDBK* 展开为级~~数，~~

$$\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{1/2} + \frac{3}{16}x^{3/2} + \frac{5}{32}x^{5/2} + \frac{63}{512}x^{9/2}, \&c.$$

[4] 参见（Newton 1745年），第336–338页；（Guicciardini 2009年），第III章。[5] 关于笛卡尔如何解读勾股定理，参见（Błaszczyk、Mrówka、Petiurenko 2020，第6–7节）。[6] 参见（Błaszczyk 2022）。

通过逐项积分，他得出“弧长为”

$$x^{1/2}(1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5,\&c.).$$

接着，牛顿继续说道：“同理，假设 CB 为 x，半径 CA 为 1，你将得到弧 LD 为”

$$x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\&c. \tag{2}$$

也就是说，已知 BC ＝正弦∠DCL ＝x，CA ＝1，弧 DL 等于级数 (2)。用现代术语来说

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\ldots.$$

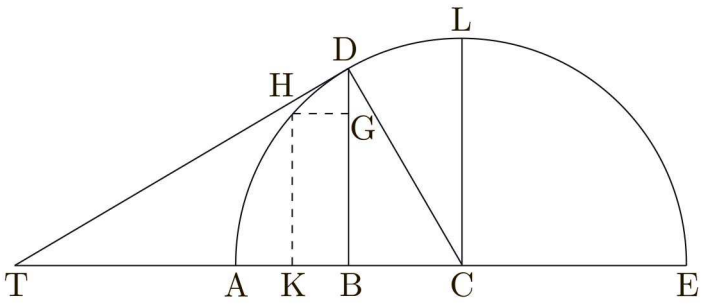

图 2 牛顿，《方程分析》，第 336 页。

在下一节中，牛顿试图用弧来表示正弦。图 3 中，线段 AB 是角 α AD 的正弦。已知αD ＝z，AB ＝x，Aα＝1，根据 (2)，可得相等关系

$$z = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7,\&c.$$

牛顿通过巧妙的求反级数方法，确定了 z 与 x 之间的关系，如下所示

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7, \&c.$$

用现代术语来说，这就是正弦级数，即

$$AB = sinz = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \ldots.$$

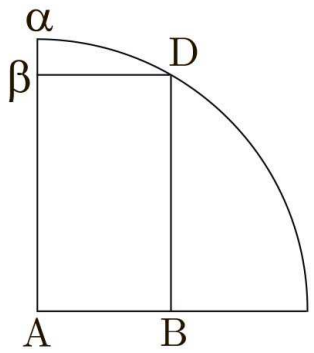

图3 牛顿，《方程分析》，第338页。

2.3 托勒密–牛顿–欧拉

牛顿对正弦的分析涉及圆的切线。因此，他考察相应角（比如托勒密角）的一半的正弦。正如我们将看到的，欧拉以现代读者视为寻常的方式，将牛顿的正弦和单位圆上的切线联系起来。与此同时，切线也有了新的含义：根据定义，它是一个比值 $\sin_z\cos_z$。

由于牛顿和欧拉都采用无穷小量，他们的方法通常被认为是现代微积分的直观版本。牛顿的无穷小量依赖直觉，而欧拉则对这些看似奇特的对象作了定义。在《欧拉 1748年》中第八章，他运用无穷小量推导正弦和余弦级数。在接下来的章节中，我们将展示如何在微积分的一个分支中解释欧拉的证明，

该分支不采用极限的概念，而是运用无穷小量，也就是非标准分析。[7]

3 奠定基础：三角学

欧拉的《无穷分析引论》（欧拉，1748年）被视为现代三角学的开端。以下是其第八章（§§126–142）的基本假设：

> 我们令圆的半径（或全正弦）等于 1，那么显然，圆的圆周长无法精确地表示为有理数。这个圆的半圆周长的近似值为
>
> 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46+。
>
> 为简洁起见，我们将用符号 π 表示这个数。因此我们说，单位圆的半圆周长为 π，或者说，180 度所对应的弧长为 π。（Euler 1988，101）

全正弦一词指的是圆的直径。欧拉的论述在许多方面都颇具新意。首先，单位圆建立了一种新的标准。

> 我们始终假设圆的半径为 1，并令 z 为该圆的一段弧。我们尤其关注这段弧 z 的正弦和余弦。今后，我们用 sinz 表示弧 z 的正弦。同样，弧 z 的余弦记作 cos z。由于 π 是 180°的一段弧，$\sin 0\pi = 0$和 $\cos 0\pi = 1$。此外，$\sin \pi/2 = 1$、$\cos \pi/2 = 0$、$\sin \pi = 0$、$\cos \pi = -1$、$\sin 3\pi/2 = -1$、$\cos 3\pi/2 = 0$、$\sin 2\pi = 0$和 $\cos 2\pi = 1$。每个正弦和余弦都介于 +1 和 -1 之间。此外，我们有 $\cos z = \sin(\pi/2 - z)$，$\sin z = \cos(\pi/2 - z)$。我们还有 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$。除了这些记号，我们还说明，tanz 表示弧 z 的正切，cot z 表示弧 z 的余切。我们约定 $\tan z = \sin z \cos z$，$\cot z = \cos z \sin z = {}^1\tan z$；这些关系都为三角学所熟知。（欧拉 1988，102）

在后续章节中，欧拉考察了正弦和余弦的和差公式、半角公式等标准恒等式。在图4中，我们用正弦、余弦和正切表示他所构想的单位圆模型。尽管《欧拉1748年》一文中既没有这样的图示，欧拉也没有定义正弦和余弦，但这个模型隐含在他的论述之中。请注意，在图4中，正弦与正切平行。因此，在图2中，它应是一条平行于TD，或垂直于DC、经过A且等于DC的线段。

[7] 关于无极限概念的微积分这一思想，参见（Błaszczyk, Major 2014）。

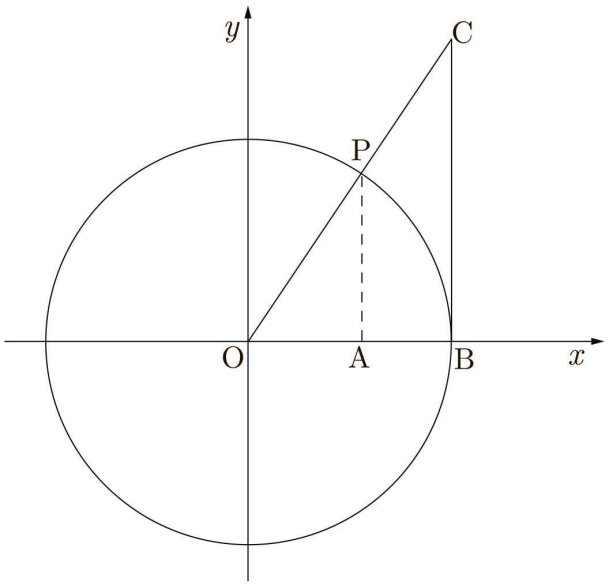

图4 单位圆

在第133节中，欧拉又引入了另一种开创性技巧。从三角学形式的勾股定理出发，

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{3}$$

他在复数域中将其因式分解，并得到以下相等关系

$$(\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = 1. \tag{4}$$

这个看似简单的运动旨在说明在三角学研究中诉诸复数的合理性。欧拉对此评论道："尽管这些因子是复数，但它们在组合与相乘弧时仍然十分有用。"[8]

通过这一技巧，他推导出如今以棣莫弗命名的公式。通过比较以三角形式给出的复数乘积的实部和虚部，他证明了

$$(\cos x \pm i\sin x)(\cos y \pm i\sin y) = \cos(x+y) \pm i\sin(x+y),$$

[8] 欧拉（1748年）使用$\sqrt{-1}$，而非现代的符号 i。

and

$$(\cos x \pm i\sin x)(\cos y \pm i\sin y)(\cos z \pm i\sin z) = \cos(x+y+z) \pm i\sin(x+y+z).$$

基于这些理由，他得出一般性结论

$$(\cos z \pm i\sin z)^n = (\cos nz \pm i\sin nz). \tag{5}$$

三角学史专家 Glen Van Brummelen 对第八章的导论部分作了如下评论：“随着采用单位圆，正弦和余弦首次被视为线段的比值，而非其长度。事实上，在下一段的末尾，正切 z 和余切 z 被直接引入为 $\sin_z\cos_z$和 $\cos_z\sin_z$”（Van Brummelen 2021, 166）。

事实上，对托勒密和牛顿而言，正弦是一个特定的线段。欧拉明确表明，他的正弦和余弦可以取负值。因此，它们应被视为单位圆上一个点的坐标，而非线段的比值。在其他场合，欧拉将比值与数等同起来，因此，在他的三角学语境中，“比值”一词的实际含义是商。

此外，范·布鲁梅伦补充道：“欧拉在这篇文本中根本没有定义正弦和余弦；基本概念仍然是几何概念。”无论是否有意，这种缺少定义的情况使欧拉能够运用多种技巧，例如欧几里得几何、以笛卡尔坐标进行的分析以及复数。按照线段对 sinz 和 cos z 的解释，相等式 (3) 表示勾股定理，其中图 4 中的数 1 代表线段 OP。复数在 (4) 中也可以作几何解释。此时，在图 4 中，数 1 代表线段 OB。尽管将公式 (3) 变换为 (4) 的过程是正确的，但在此过程中，其几何内涵发生了变化。欧拉的三角学正是利用了这类含混之处。

4 关键的一步

欧拉通过第 133–134 节的几行文字，以一种看似不言自明的方式将正弦和余弦展开为级数。为了展示他的论证，我们分别写出 (5) 的加号形式和减号形式

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz,\ (\cos z - i\sin z)^n = \cos nz - i\sin nz. \tag{6}$$

他明确考虑了由 (6) 推导出的公式，即[9]

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n}{2}, \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2i}. \end{aligned} \tag{7}$$

接着他写道：“展开这些二项式，我们得到以下级数”：[10]

$$\begin{aligned} \cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \binom{n}{4}\cos^{n-4} z\sin^4 z - \\ - \binom{n}{6}\cos^{n-6} z\sin^6 z + \&c. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\sin nz = \binom{n}{1}\cos^{n-1} z\sin z - \binom{n}{3}\cos^{n-3} z\sin^3 z + \binom{n}{5}\cos^{n-5} z\sin^5 z - \&c. \tag{9}$$

第134节开篇的一段文字，为我们从非标准分析的角度解读提供了依据。

> 设弧 z 为无穷小，则 sin z = z，且 cos z = 1。若 n 是无穷大数，使得 nz 为有限数，比如 nz = v，那么，由于 sinz = z = $\frac{v}{n}$，我们有
>
> $$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \&c,$$
>
> $$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \&c.$$

[9] 布兰顿的译文（欧拉 1988）中有一处笔误：sinnz 的公式漏掉了分母中的 i。10 1）欧拉以明确的分数形式引入二项式 $\binom{n}{k}$。我们采用现代记法，以得到更紧凑的公式。2）欧拉原文以 &c. 结束级数，而布兰顿的译文（欧拉 1988）则用了三个点 ...，即实分析中标记无穷级数的符号。正如我们将在下文第4.3节看到的，欧拉的无穷级数确实有最后一项。

由此可知，若 v 是给定的弧，便可借助这些级数求得正弦和余弦。（欧拉 1988, 107）

在级数 (8)、(9) 中，欧拉将每一项 $\binom{n}{k}\cos^{n-k}z\sin^k z$ 替换为 $\frac{v^k}{k!}$，其中 $\cos z = 1$，且 $\sin z = v n$。在此过程中，他假设以下等式成立

$$\binom{n}{k}\cos^{n-k}z\sin^k z = \binom{n}{k}1\frac{v^k}{n^k} = \frac{v^k}{k!}. \tag{10}$$

在接下来的几节中，我们将详细讨论这一证明。

4.1 从有限到无穷大量

公式 (8) 和 (9) 由 (6) 和 (7) 根据二项式定理得出。因此，首先假设 n 是一个有限数。在第 134 节中，欧拉明确考虑了 n 为无穷大。在非标准分析中，无论 n 是有限数还是无限数，公式 (8) 和 (9) 都成立；具体而言，对于有限和无限的 n、k，项 $\binom{n}{k}$ 都有意义。更准确地说，有限情形成立时，无限情形也成立。二项式定理同样适用：无论 n 是有限还是无限，都可以将它应用于项 $(\cos z \pm i \sin z)^n$。

在公式（8）和（9）中允许 n 为无穷大时，我们需要解释由无穷多个项组成的和。在此之前，我们需要先讨论无穷小量。

4.2 无穷大量与无穷小数

在《欧拉 1748年》中，欧拉明确提到了无穷小量。在其他场合，例如《Euler 1755》中，他称它们为零。随后，他介绍了两种比较它们的方法：算术比较和几何比较。前者指差值，并可解释为一种无限接近关系；后者指商。非标准分析对这种无限接近关系给出了显而易见的解释，即 $x \approx y$，表示 $x - y$ 是无穷小量。因此，假设 x、y 是

无穷小量，差值 $x - y$ 仍是无穷小量。然而，商 $x\,y$ 可以是无穷小量、有限量或无穷大量。

事实上，在（Euler 1755）中，无穷小量的倒数证明是一个无限数，反之亦然。欧拉还指出，对于每个无穷小量，都存在一个无穷大数，使得它们的乘积是有限的。他还明确声称，存在一些无穷小量和无穷大数，它们的乘积是无穷大的。欧拉在（Euler 1755）中详细讨论了我们已经在（Euler 1748）第七章中发现的这些假设。

因此，我们将上文第134节开头的这段话——“设弧 z 为无穷小量，则 $\sin z = z$ 且 $\cos z = 1$。若 n 是一个无穷大数，使得 nz 是一个有限数，设 $nz = v$”——解释如下：

$$z \approx 0 \Rightarrow \sin z \approx z,\ \cos z \approx 1,$$

对于一个无穷小量 z，存在一个无限数 N，使得 Nz 是有限的。

4.3 无穷级数与超有限和

Blanton 的译本（Euler 1988）没有沿用（Euler 1748）中的原词“&c.”，而是用三个点号表示无穷和，例如：

$$\cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \binom{n}{6}\cos^{n-6} z \sin^6 z + \ldots.$$

这表明了实分析的解释：级数的极限。然而，欧拉的无穷和也允许另一种解读：这些级数包含最后一项。为进一步阐述，我们参阅《Euler 1755》第107节。下文将全文引述 Blanton 对该节的译文。

> 由此可见，若有人说，当这个级数继续到无穷大量时，也就是说，
>
> $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^\infty,$$
>
> 并且其和为 $1/(1-x)$，那么他的误差将是 $x^{\infty+1}/(1-x)$；如果 $x > 1$，那么误差确实是无穷大量。然而，与此同时，这一论证也说明了为什么级数 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$，延伸至无穷远时，其真实和为 $1/(1-x)$，前提是 x 是一个小于 1 的分数。在这种情况下，误差 $x^{\infty+1}$ 是无穷小，因此等于

零，所以可以放心地忽略。因此，若令 $\mathrm{x}=\frac{1}{2}$，那么实际上

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

同样，其他以小于 1 的分数 x 为项的级数，也会像我们所指出的那样有一个真正的和。（Euler 2000年，60）

不采用省略号的形式，

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \quad \text{and} \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots,$$

（Euler 1755，§ 107）以如下形式表示无穷和

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\&c. \quad \text{and} \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\&c.$$

因此，符号

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\&c.$$

表示

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{\infty},$$

而不是

$$1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

在非标准分析中，含有最后一项的无穷和是合法对象，代表所谓的超有限和。给定 N 是无限数，且 $|\mathrm{a}|<1$，下列等式

$$1+a^1+a^2+a^3+\ldots+a^N=\frac{1-a^{N+1}}{1-a},$$

在非标准框架内很容易证明。此外，$1-a^{N+1}$ 无限接近于 $1-a$，

$$\frac{1-a^{N+1}}{1-a}\approx\frac{1}{1-a}.$$

事实上，$1-a1-^{N+1}a$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 之差的绝对值等于 $|a1-^{N+1}a|$。由于 $|a|<1$，数 $|a|^{N+1}$ 是无穷小量。因此，乘积 $|a1-^{N+1}a$ 也是无穷小量。[11]

欧拉的原始公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\&c.=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

在非标准分析中有一种显而易见的解释，即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^N}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{N+1}}{1-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

按照超有限和解释，我们对欧拉文本唯一的干预涉及无穷符号：我们不使用 ∞ 或 $\infty+1$，而是采用具体的无限数（非标准自然数），例如 N 或 N $+1$.[12]

4.4 扩展三角函数

非标准分析使我们能够研究诸如 $\sin^*x$、$\cos^*x$ 这样的三角函数，它们扩展了实数上的 sinx 和 cos x。此外，这些
*这些函数遵循与其对应的实数函数 sinx 和 cos x 完全相同的恒等式。因此，在我们的解释中，公式（7）具有以下形式：

$$\cos^* nz=\frac{(\cos^* z+i\sin^* z)^n+(\cos^* z-i\sin^* z)^n}{2},$$

$$\sin^* nz=\frac{(\cos^* z+i\sin^* z)^n-(\cos^* z-i\sin^* z)^n}{2i},$$

无论 n 是有限数还是无限数。

欧拉正弦和余弦的函数解释容易被指责为存在时代错置。然而，sinx 的 *扩展

[11] 参见下文的规则（19）。[12] 在最新的研究中（Ferrero 2022），Ferrero 采用以省略号结尾的级数，而不是原来的 &c.，并且完全没有考虑对欧拉无穷级数的另一种解释。

以及 cos x 的扩展不受 x 的取值范围影响，也不在乎它们是函数还是其他对象。只要给定 sin x 和 cos x，就能得到 sin* x 和 cos*x。

下文中，我们省略 * 上标。

4.5 修订后的证明

本节总结我们在第 4.1 至 4.4 节中概述的解释。设 z 为无穷小量，即 z ≈0。那么 sin z ≈z，cos z ≈1。设 N 为一个无限数，使得 Nz 为有限数，并令 Nz =v。首先，公式（8）、（9）可写成超有限和的形式，[13]

$$\cos Nz = \cos^N z - \binom{N}{2}\cos^{N-2} z\sin^2 z + \binom{N}{4}\cos^{N-4} z\sin^4 z - \ldots + \sin^N z. \quad (11)$$

$$\sin Nz = \binom{N}{1}\cos^{N-1} z\sin z - \binom{N}{3}\cos^{n-3} z\sin^3 z + \ldots + \sin^N z. \quad (12)$$

那么，对于（10），我们得到

$$\binom{N}{k}\cos^{N-k} z\sin^k z \approx \frac{v^k}{k!}. \quad (13)$$

无论 N 和 k 是有限数还是无限数，公式（13）都成立。
由（11）、（12）和（13），可得关系式（14）和（15），

$$\cos v \approx 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots + \frac{v^N}{N!}, \quad (14)$$

$$\sin v \approx v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots + \frac{v^N}{N!}. \quad (15)$$

为得到这些结果，在 (11)、(12) 中，我们用 $v^k k!$ 替换 $\binom{N}{k}$cos^{N-k}z sin^{k}z。然而，这些替换涉及无穷多项。显然无法保证

[13] 我们不讨论 N 是偶数还是奇数，因为这些情况不会影响整体情况。

$$\cos^N z - \binom{N}{2}\cos^{N-2} z\sin^2 z + \binom{N}{4}\cos^{N-4} z\sin^4 z - \ldots + \sin^N z$$

无限接近

$$1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots + \frac{v^N}{N!},$$

尽管对于每个 k，无论是有限还是无穷大量，都得到

$$\binom{N}{k}\cos^{N-k} z\sin^k z \approx \frac{v^k}{k!}.$$

事实上，无穷大量与无穷小数的乘积可以是无穷大量、有限数或无穷小量。MacKinzie 和 Tuckey（MacKinzie、Tuckey，2001年）证明，在这种情况下，公式（11）、（12）中的超有限和分别无限接近于公式（14）、（15）中的超有限和。他们的证明需要运用复杂的技巧。在本研究中，我们将此视为已知。

在第 4.1–4.4 节中，我们反复强调，我们相信欧拉在第八章中使用的概念，例如无穷小量或无限数，可以在非标准分析中得到严格定义。在下一节中，我们将用现代术语说明如何定义无穷小量、无限数、「无限接近」这一关系、超有限和、二项式系数 $\binom{N}{k}$（其中 N 为无限数，k 为有限数）、$\sin^* x$ 和 $\cos^* x$。任何非阿基米德域都可以为其中大多数定义提供框架。在第 6 节中，通过分析（Euler 1755），我们将说明欧拉明确推导出非阿基米德域的一些规则，尽管他并未采用有序域这一概念。[14] 因此，尽管非标准分析以实数理论为前提，我们并不需要提及实数。不过，有一个例外。前面提到的 MacKenzie 和 Tuckey 的引理运用了非标准分析的特定技巧。仅就这一点而言，我们的分析可能被视为时代错置。

[14] 需要说明的是，只有希尔伯特（1899年）和（希尔伯特，1900年）引入了有序域的概念。

5 非标准分析

在接下来的非标准分析简要介绍中，我们将聚焦于解读（欧拉1748年）第八章所必需的概念。[15]

5.1 有序域理论基础

交换域（$\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1$）与全序 $<$结合，当域运算与该序相容时，就构成一个有序域，即

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z, \;\; x < y, 0 < z \Rightarrow xz < yz.$$

有理数域是最小的有序域，这意味着每个有序域都包含分数 $\frac{m}{n}$，其中 $m, n \in \mathbb{N}$。

在每个有序域中，都可以定义绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0, \\ -x, & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

以及 $\mathbb{F}$ 的以下子集：

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{x : (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n)\}, \\ \mathbb{A} &= \{x : (\exists n \in \mathbb{N})(\tfrac{1}{n} < |x| < n)\}, \\ \Psi &= \{x : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| > n)\}, \\ \Omega &= \{x : (\forall n \in \mathbb{N})(|x| < \tfrac{1}{n})\}. \end{aligned}$$

我们分别将这些集合中的元素称为有限、可指定、无穷大和无穷小（无穷小量）数。无穷小量和无限数也可以通过可指定数来定义，

$$\Omega = \{x : (\forall a \in \mathbb{A})(|x| < |a|)\}, \tag{16}$$

$$\Psi = \{x : (\forall a \in \mathbb{A})(|x| > |a|)\}. \tag{17}$$

[15] 参见（Błaszczyk、Major 2014）、（Błaszczyk 2016）、（Błaszczyk 2021）。关于超有限和的一节参照（Goldblatt 1998年，第III章）。

以下是这些类型元素之间的一些显而易见的关系，我们将其称为 ΩΨ规则，

$$(\forall x, y \in \Omega)(x+y \in \Omega, xy \in \Omega), \tag{18}$$
$$(\forall x \in \Omega)(\forall y \in \mathbb{A})(xy \in \Omega), \tag{19}$$
$$(\forall x)(x \in \mathbb{A} \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{A}), \tag{20}$$
$$(\forall x \neq 0)(x \in \Omega \Leftrightarrow x^{-1} \in \Psi), \tag{21}$$
$$(\forall x \in \Psi)(\forall y \in \mathbb{A})(\exists z \in \Omega)(xz = y). \tag{22}$$

对于集合 Ω，定义如下等价关系：

$$x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \Omega, \quad \text{for } x, y \in \mathbb{F}.$$

当关系 x ≈y 成立时，我们称 x 无限接近 y。

我们将在下文第 6 节说明，在（Euler 1755）中，欧拉明确讨论了与 ΩΨ规则等价的规则。

5.2 阿基米德公理

下面我们介绍阿基米德公理的几种等价形式。

(A1) (∀x、y ∈ 𝔽)(∃n ∈ ℕ)(0 < x < y ⇒ nx > y),
(A2) (∀x ∈ 𝔽)(∃n ∈ ℕ)(n > x)，(A3) Ω = {0}。

A1 和 A2 是数学和历史语境中广为人知的两个版本。鉴于欧拉的发展，我们更倾向于采用 A3 版本。它表明，在一个非阿基米德域中，无穷小量的集合至少包含一个非零元素，例如 ε。那么，$\frac{\varepsilon}{n}$以及 nε也都是无穷小量。此外，根据 ΩΨ规则，这些元素的倒数，即 $\frac{n}{\varepsilon}$、$\frac{1}{n\varepsilon}$，都是无穷大数。

下文中，令 Ω_0 表示非零无穷小量，即

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \{0\}.$$

5.3 实数

实数域是一个有序域，其中 $(\mathbb{F}, <)$ 的每个戴德金分割 (L,U) 都满足以下条件，这一条件称为完备性公理，简称 CA,

$$(\exists x \in \mathbb{F})(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y \leq x \leq z).$$

上述定义应用了这样一个定理：任意两个满足 CA 的有序域都是同构的。从这个意义上说，实数域是唯一的完备有序域。此外，任何阿基米德域都同构于实数的一个子域。因此，实数的任何域扩张都是非阿基米德的，并且包含无穷小和无限数。

5.4 超实数

我们将超实数集合定义为全体实数序列的集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 关于定义在指标集合 $\mathbb{N}$ 上的特定关系所得到的商集。为此，我们需要 $\mathbb{N}$ 上超滤子的概念。

集合族 $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ 是 $\mathbb{N}$ 上的超滤子，当且仅当：(1) $\emptyset \notin \mathscr{U}$；(2) 如果 A、B $\in \mathscr{U}$，则 A $\cap$ B $\in \mathscr{U}$；(3) 如果 A $\in \mathscr{U}$ 且 A $\subset$ B，则 B $\in \mathscr{U}$；(4) 对每个 A $\subset \mathbb{N}$，A 或其补集 $\mathbb{N} \setminus$ A 属于 $\mathscr{U}$。

具有有限补集的集合族满足超滤子定义中列出的条件 (1)– (3)。根据佐恩引理，这个集合族可以扩充为一个超滤子。令 $\mathscr{U}$ 表示$\mathbb{N}$ 上的一个固定超滤子，其中包含每个具有有限补集的子集。

由于 $\mathbb{N}$ 以及形如 $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$ 的集合，简言之 $\{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都符合“具有有限补集”这一条件，因此它们都属于超滤子 $\mathscr{U}$，

$$\mathbb{N} \in \mathscr{U}, \quad \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} \in \mathscr{U}, \quad \text{for every } k.$$

这些集合足以用于检验有关无穷小量和无限数的例子，下面将介绍这些例子。

在集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中，我们定义如下等价关系

$$(r_n) \equiv (s_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ r_n = s_n\} \in \mathscr{U}.$$

令 $\mathbb{R}^*$ 表示约化乘积 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$。

显然，超实数的相等定义为

$$[(r_n)] = [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ r_n = s_n\} \in \mathscr{U}.$$

由于 $\mathscr{U}$ 是超滤子，我们还得到以下条件

$$[(r_n)] \neq [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ r_n \neq s_n\} \in \mathscr{U}.$$

它用于确定超实数的乘法逆元，即

$$[(r_n)]^{-1} = [(r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_3^{-1}, ...)].$$

为了说明其运作方式，一个不等式

$$[(0,0,0,...)] \neq [(r_1, r_2, r_3, ...)]$$

可转化为条件 $\{\mathrm{n} \in \mathbb{N}: \mathrm{r}_n \neq 0\} \in \mathscr{U}$，而不是 $\{\mathrm{n} \in \mathbb{N} : \mathrm{r}_n \neq 0\} = \mathbb{N}$。

逐点定义新的和与乘积，即

$$[(r_n)] + [(s_n)] = [(r_n + s_n)], \quad [(r_n)] \cdot [(s_n)] = [(r_n \cdot s_n)].$$

在 $\mathbb{R}^*$ 上定义全序如下

$$[(r_n)] < [(s_n)] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathscr{U}.$$[16]

标准实数 $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$ 由等价类 [(r, r, r ...)]表示。下文中，我们将用字母 r 表示超实数 [(r, r, r ...)]。

经过简单验证，我们发现 $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, 0, 1, <)$ 是一个有序域。

我们还引入非标准自然数集 $\mathbb{N}^*$，即

$$\mathbb{N}^* = \{[(n_j)] \in \mathbb{R}^* : (n_j) \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}.$$

[16] 在这些定义中，我们采用一种标准约定：对 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^*$ 上的关系与运算使用相同的符号。

5.5 无穷小量、无限数、有限数

超实数域是非阿基米德的，从某种意义上说，它使我们能够触及无穷小量与无限数。为说明超实数扩展了实数域，我们只需要一个非零无穷小量。超实数$\varepsilon = [(1, 12 , \underline{1}3_{\underline{}}, ...)]$是正数，且小于每一个正实数，即

$$[(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...)] < [(r, r, r, ...)], \text{ for every } r \in \mathbb{R}_+.$$

要证明这一点，取$r > 0$。在实分析中，$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.[17] 这意味着存在一个指标 k，使得对所有$n > k$，都有$1/n < r$。用超滤子的元素表示，$\{n \in \mathbb{N} : n > k\} \in \mathscr{U}$，或者

$$\{n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n} < r\} \in \mathscr{U}.$$

由于 $\mathbb{R}^*$ 中全序的定义，这意味着

$$[(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...)] < [(r, r, r, ...)].$$

因此$\varepsilon \in \Omega$。超实数

$$\varepsilon^2 = [(1, \tfrac{1}{2^2}, \tfrac{1}{3^2}, ...)]$$

是另一个无穷小量。一般而言，如果(r_n)是一个零序列，那么$[(r_n)]$是无穷小量。

由于 $\varepsilon \in \Omega$，因此 $\varepsilon^{-1} = [(1,2,3, ...)]$是一个无穷大数。事实上，$N = [(1, 2, 3, ..)]$是无限数的一个例子。其他无限数有

$$N + 1 = [(2, 3, 4, ...)], \; N^2 = [(1, 4, 9, ...)], \; N! = [(1!, 2!, 3!, ..)].$$

5.6 二项式系数

下面给出无限数 N、k 和 N、k 的二项式系数$\binom{N}{k}$的定义。先考虑$N = [(n_1, n_2, n3, ...)]$为无穷大量而 k 为有限数的情形。我们定义

[17] 事实上，这又是阿基米德公理的一种形式。

$$\binom{N}{k} = \left[\left(\binom{n_1}{k}, \binom{n_2}{k}, \binom{n_3}{k}, \ldots\right)\right].$$

当 K $= [(k_1, k_2, k3, \ldots)]$ 为无限数时，我们定义

$$\binom{N}{K} = \left[\left(\binom{n_1}{k_1}, \binom{n_2}{k_2}, \binom{n_3}{k_3}, \ldots\right)\right].$$

这些新的二项式系数满足标准恒等式，例如$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$。

对于无穷大量 N 以及有限或无穷大量 k，欧拉论证中隐含的假设可写成如下形式

$$\frac{N-k}{kN} \approx \frac{1}{k}, \qquad \binom{N}{k}\frac{1}{N^k} \approx \frac{1}{k!}.$$

5.7 *映射

设 f 为一个实数映射，即 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$。用 f^* 表示映射 $f^*: \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$，其定义为

$$f^*([(r_n)]) = [(f(r_1), f(r_2), \ldots)].$$

若 $r \in \mathbb{R}$，则 $f^*(r) = [(f(r), f(r) \ldots)]$。由于我们将实数 r 与超实数 $[(r, r \ldots)]$，等同，因此有 $f^*([(r, r \ldots)]) = f(r)$。

根据此定义，

$$\sin^*[(r_n)] = [(\sin r_1, \sin r_2, \ldots)], \quad \cos^*[(r_n)] = [(\cos r_1, \cos r_2, \ldots)].$$

由于对每个 n，恒等式 $\sin^2 r_n + \cos^2 r_n = 1$ 都成立，因此我们有

$$(\sin^* x)^2 + (\cos^* x)^2 = 1.$$

同样，每个三角恒等式都可以转化为涉及映射 $\sin^*$ 和 $\cos^*$ 的恒等式。

上述定义也适用于指数映射 a^x。因此，当 $a \in \mathbb{R}_+$ 时，

$$a^{[(r_n)]} = [(a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots)].$$

当 $a = [(a_1, a2, ...)]$ 是超实数时，

$$a^{[(r_n)]} = [(a_1{}^{r_1}, a_2{}^{r_2}, ...)].$$

那么，对于 a、b、x、$y \in \mathbb{R}^*_+$，我们有 $(ab)^x = a^x b^x$、$a^x a^y = a^{x+y}$，等等。

让我们回到欧拉的假设 $\sin z \approx z$，其中 z 是无穷小量。显然，$|\sin^* z| \leq 1$，即 $\sin^* z$ 是可指定数或无穷小量。为了导出矛盾，假设对于某个无穷小量 z，$\sin^* z$ 是一个可指定数。由于实正弦函数将线段 $[0, \frac{\pi}{2}]$满射到实数线段 $[0, 1]$, ，$\sin^*$ 也同样是一个满射。因此，对于某个可指定数 x，有相等关系 $\sin^* z = \sin^* x$。在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，实正弦函数是一一对应的，因而 $\sin^*$ 在超实数区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上也是一一对应的。因此，$z = x$，即一个无穷小量等于一个可指定数。这是不可能的。

另一种得出该结果的方法，是援引实数映射正弦的连续性。它在点 0 处的连续性可转化为条件：当 $z \approx 0$ 时，$\sin z \approx 0$。一般而言，要对 f^* 作出某些断言，就必须对实数映射 f 作出某些假设。然而，欧拉并未定义正弦。因此，我们陷入困境，只能推测 $\sin z \approx z$ 是基于什么依据。

假设当 $z \approx 0$ 时，$\cos^* z \approx 1$，这可由正弦* 和余弦*的勾股恒等式，以及刚刚讨论的结果 $\sin^* z \approx 0$ 得出。

5.8 超有限和

令 $N = [(n_1, n_2, n3, ...)]$ 为一个无限数，$N \in \mathbb{N}^*$，令 a 为一个实数。我们设

$$\sum_{j=0}^{N} a^j = \left[\left(\sum_{i=0}^{n_1} a^i, \sum_{i=0}^{n_2} a^i, \sum_{i=0}^{n_3} a^i, ...\right)\right].$$

Thus

$$1 + a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^N$$

是超实数的另一种符号

$$\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n_1} a^i, \sum_{i=0}^{n_2} a^i, \sum_{i=0}^{n_3} a^i, \ldots\Big)\Big].$$

由于对于每个有限的 n，相等关系都成立

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

我们很容易得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} a^j &= \Big[\Big(\frac{1-a^{n_1+1}}{1-a}, \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a}, \frac{1-a^{n_3+1}}{1-a}, \ldots\Big)\Big] \\ &= \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.\end{aligned}$$

当 a 是超实时，通过令 $a = [(a_1, a_2, a3, \ldots)]$，

$$\sum_{j=0}^{N} a^j = \Big[\Big(\sum_{i=0}^{n_1} a_1^i, \sum_{i=0}^{n_2} a_2^i, \sum_{i=0}^{n_3} a_3^i, \ldots\Big)\Big],$$

我们得到相同的结果，即

$$\sum_{j=0}^{N} a^j = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}.$$

6《微分学原理》中的无穷小与无限数

《微分学原理》（Euler 1755）第三章（§§74–111）开篇讨论了一些哲学问题，例如物质由不可分或可无限分割的部分组成，或者人们假定的物质终极组成部分是否具有延展性。欧拉认为这些争论无法得出定论，于是转而谈论数学，并说道：

> 即使有人否认这个世界上确实存在无限数，数学推测中仍会出现一些问题，除非承认无限数，否则便无法回答。（欧拉，2000年，第50页）

6.1 三类量。无限数

在第82节中，欧拉给出了无限数的定义：

> [.....] 这种量大到超过任何有限量，因此必定是无穷大量。我们用符号 ∞ 表示这类量，意指大于任何有限量或可赋值数的量。（Euler 2000，50）

用符号表示，给定 $\mathbb{A}$ 表示可赋值数：

$$N \text{ is infinite number} \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{A})(N > a). \tag{23}$$

在所讨论的章节中，quantitas（量）一词反复出现，指无限数、可赋值数和无穷小量。Quantitas 是希腊语术语 μέγεθος （量）的拉丁语译词。在欧几里得《几何原本》中，这个通称涵盖线段、三角形、凸多边形、圆、角、圆弧和立体。同类的量（线段为一类，三角形为另一类，等等）按大小进行比较。传递性和三歧律构成了“大于”关系的数学含义。希腊人还考虑量的加法与减法（从较大量中减去较小量）。量的加法结构和序结构使欧几里得得以引入比例理论。《几何原本》第五卷系统地阐述了这一理论。

这是古希腊人在比较量时采用的基本方法。阿基米德公理是该理论的重要组成部分，并极大地限制了量的概念。笛卡尔（Descartes 1637）在线段上引入了一种新运算：乘积。他以一种方式运用这项运算，使得由此得到的算术满足有序域规则。在处理公式时，他用商的相等代替比例：他不再使用线段的比例，例如 a : b :: c : d，而是写作 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$。[18] 因此，阿基米德公理不再那么重要，并且长期以来未再受到讨论。后来，只有（Stolz 1885）重新将它引入现代数学，并在基础研究中重新确立了它的作用。

正如我们已经看到的，欧拉按照有序域规则处理公式。上述沿革为他将商称为“几何比”（见下一

[18] 参见（Błaszczyk, Petiurenko 2019）、（Błaszczyk 2022）。

节）提供了依据。他甚至使用符号 a: b；在17世纪和18世纪，这个符号用于表示量之间的比例，尽管他将这些对象视为实际的分数 $\frac{a}{b}$。

“阿基米德公理”这一术语从未出现在欧拉的著作中。然而，由于他明确否定了公理 A3，他隐含采用的有序域是非阿基米德的。

6.2 无穷小量

第 83 节给出了无穷小数的定义：

> 此外，还有一种定义将无穷小量描述为小于任何可指定量的量。如果一个量小到小于任何可指定量，那么它不可能不等于 0；因为除非它等于 0，否则就可以指定一个与它相等的量，这与我们的假设相矛盾。对于任何询问数学中的无穷小量是什么的人，我们可以回答：它确实等于 0。（欧拉，2000 年，第 51 页）

用符号表示

$$\varepsilon \text{ is infinitesimal} \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{A})(0 < |\varepsilon| < |a|). \tag{24}$$

显然，上述形式化并不符合欧拉所说的“不能不是 0”。然而，他对相等的概念含义模糊：在某些语境中，它指通常意义上的相等，也就是严格相等；在另一些语境中，它还表示无限接近。后一个术语源自非标准分析。我们将在后续各节对此加以论证。

6.3 比较零的两种方式

欧拉明确指出，在无穷分析中，零的另一个名称是无穷小。

> 如果我们接受无穷分析中的记号，那么 dx 表示无穷小量，因此 $\mathrm{dx} = 0$ 和 $\mathrm{adx} = 0$ 都是如此，其中 a 是任意有限量。尽管如此，几何比 adx : dx 是有限的，即 a : 1。因此，当我们考察它们的比值时，这两个都等于 0 的无穷小量 dx 和 adx 不能混为一谈。（欧拉，2000年，第 51–52 页）

如果我们将公式 $\mathrm{dx} = 0$ 解释为 $\mathrm{dx} \approx 0$，欧拉比较零的两种方式便有了显而易见的含义。无穷小量——

无穷小量，例如 ε、δ，可以通过 $\varepsilon - \delta$ 或 $\frac{\varepsilon}{\delta}$ 来比较大小。第一项始终是无穷小量，而第二项则可以是无穷小量、有限量或无穷大量。下面这段文字阐明了他的观点：

> [1] 尽管两个零彼此相等，因此它们之间没有差异，但既然我们有两种比较它们的方式，即算术比较或几何比较，我们还是来考察待比较各量的商，以看出其中的差异。[2] 任意两个零之间的算术比都是相等的。几何比则并非如此。[3] 从这个几何比例 $2 : 1 = 0 : 0$ 中，我们很容易看出这一点：其中第四项等于 0，第三项也如此。根据比例的性质，既然第一项是第二项的两倍，第三项就必然是第四项的两倍。（欧拉 2000年，第 51 页；方括号中的数字为后加。）

进一步说明。第 1 点："零的相等"指的是无限接近关系，$\varepsilon \approx \delta$。第 2 点："算术比"指的是 $\varepsilon - \delta$。第 3 点："几何比"指的是商 $\frac{\varepsilon}{\delta}$。在欧拉的公式 $2 : 1 = 0 : 0$ 中用 ε 代替 0，我们得到 $2 : 1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon}$。

在希腊数学中，像 a : b 这样的比值只有放在比例中才有意义，例如 a : b :: c: d。欧拉和牛顿一样，将数定义为比值。因此，像 adx : dx 这样的项就是数。"几何比"这一说法指的是欧几里得关于量的比例。然而，从实际运算来看，欧拉依据有序域规则处理数，而不是依据欧几里得《第五卷》的命题。

6.4 无穷小量的算术

> 由于无穷小实际上等于无，有限量显然不会因加上或减去一个无穷小量而增大或减小。设 a 为有限量，dx 为无穷小。那么 a + dx 和 a − dx，或者更一般地，a ± ndx，都等于 a。[...]另一方面，几何比显然是相等量之间的比，因为 $a \pm ndx a = 1$。（欧拉 2000年，52）

设 a 是一个有限数，欧拉的论断显然可转化为

$$a \pm ndx \approx a, \quad \frac{a \pm ndx}{a} \approx 1.$$

关于无穷小量的乘积，欧拉写道

> 由于无穷小量 dx 实际上等于 0，因此它的平方 dx^2, 立方 dx^3, 以及任何其他 dx^n（其中 n 是正指数）都等于 0，所以与有限量相比会消失。然而，即使无穷小量 dx^2 与 dx 相比也会消失。$dx \pm dx^2$ 与 dx 的比值是相等的，无论比较是

算术的还是几何的。算术比较毫无疑问；在几何比较中，$\mathrm{dx} \pm \mathrm{dx}^2 : \mathrm{dx} = \mathrm{dx} \pm \mathrm{dx}^2\,\mathrm{dx} = 1 \pm \mathrm{dx} = 1$。（欧拉 2000年，52）

在我们的诠释中

$$dx^n \approx dx, \quad \frac{dx + dx^n}{dx} \approx 1.$$

欧拉也考虑了形式为 $\sqrt{\mathrm{dx}}$ 的无穷小量，并声称 $\sqrt{\mathrm{dx}} = \mathrm{dx}$。在我们的诠释中，这意味着 $\sqrt{\mathrm{dx}} \approx \mathrm{dx}$。

6.5 无穷小与无限数

[1] 需要指出的是，分数 $1/\mathrm{z}$ 会随着分母 z 变小而增大。 [2] 因此，如果 z 变成小于任何可指定量的量，也就是说，变成无穷小量，那么分数 $1/\mathrm{z}$ 的值就必然大于任何可指定量，因而是无限的。因此，如果用无穷小量或 0 去除 1 或任何其他有限量，所得的商将是无穷大量，也就是无穷量。由于符号 ∞ 表示无穷大量，我们有等式 $\frac{a}{dx} = \infty$。 [3] 将 $\frac{a}{\infty} = \mathrm{dx} = 0$ 倒过来时，这一点也显而易见。（欧拉，2000年，第53页；方括号中的数字为后加）

这段话的第一句解释了目前显而易见的有序域规则，即：

$$0 < z < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{z}.$$

第二句为我们的 (21) ΩΨ规则提供了依据，

$$z \in \Omega_0 \Rightarrow \frac{1}{z} \in \Psi.$$

第三句推导出了逆命题，

$$N \in \Psi,\ a \in \mathbb{A} \Rightarrow \frac{a}{N} \in \Omega_0.$$

接着，欧拉解释了为什么存在无穷多个无限数：

由于 a/dx 是一个无穷量 A，因此很显然，量 A/dx 将是一个比量 A 大无穷多的量。从比例 $\mathrm{a}/\mathrm{dx} : \mathrm{A}/\mathrm{dx} = \mathrm{a} : \mathrm{A}$ 可以看出这一点，也就是说，这是一个有限数与一个无穷大的数之比。无穷量之间存在这类关系，因此有些量可以比其他量大无穷多。所以，

> a/dx^2 是一个比 a/dx 大无穷多的量；如果令 $a/dx = A$，那么 $a/dx^2 = A/dx$。同理，a/dx^3 是一个比 a/dx^2, 大无穷多的无穷量，因此也比 a/dx 大无穷多。因此，无穷有无穷多个等级，每一级都比前一级大无穷多。如果数 m 只比 n 大一点点，那么 a/dx^m 就是一个比无穷量 a/dx^n大无穷多的无穷量。（欧拉 2000年，第55页）

在我们的解释中，$1/\varepsilon$ 和 $1/\varepsilon^2$ 都属于 Ψ，给定 $\varepsilon \in \Omega_0$。然而，若以“几何比”来比较它们，也就是 $\frac{1/\varepsilon^2}{1/\varepsilon}$，我们会发现第二个大于第一个。

6.6 可赋值数与 ΩΨ积

在非标准分析中，有限数包括可赋值数，$\mathbb{A} \subset \mathbb{L}$。欧拉不认为无穷小量是有限的。因此，在我们的解释中，他的可赋值数构成集合 $\mathbb{L} \setminus \Omega$。事实上，1、2以及其他整数都是可赋值数的例子。由于 $+\varepsilon \approx a$，标准数1和 $1+\varepsilon$ 都是可赋值数。

> 既然我们已经了解到无穷大量有不同的等级，很快就会看到，无穷大量与无穷小量的乘积不仅可以产生有限量（正如我们已经看到的），也可以是无穷大量或无穷小量。（欧拉 2000年，第55–56页）

在接下来的例子中，我们将用非标准的记法来呈现这一点。给定一个 $\in \mathbb{A}, \varepsilon \in \Omega$，于是 a/ε 和 a/ε^2 都是无穷大量。然后

$$\frac{a}{\varepsilon}\varepsilon \in \mathbb{A}, \quad \frac{a}{\varepsilon}\varepsilon^2 \in \Omega, \quad \frac{a}{\varepsilon^2}\varepsilon \in \Psi.$$

本章其余部分讨论无穷和。其中，欧拉引入了诸如 $1+x+x^2+\ldots+x^\infty$ 这样的对象，我们之前通过超有限和研究过它们。

7 总结

欧拉确定 sinv 的方法，对于 $v = mn\frac{\pi}{2}$ 包括先将该级数的前几项相加

$$v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \ldots,$$

并考虑 π的数值近似。为了推导出该级数，他取一个无限数 j 和一个无穷小量 ω，使得 v = jω。通过变换恒等式

$$\sin j\omega = \frac{(\cos\omega + i\sin\omega)^j + (\cos\omega - i\sin\omega)^j}{2i}$$

根据二项式定理，并将 sin ω 替换为 ω，将 cos ω 替换为 1，以及将 $\binom{j}{k}\frac{1}{j^k}$ 替换为 $\frac{1}{k!}$，他得到了如今众所周知的正弦级数。欧拉用同样的方法推导出余弦级数。

我们证明了，欧拉论证的大部分内容在任意非阿基米德域中都成立。通过分析他的《微分学原理》，我们证明他明确考察了此类域的运算规则。最后，我们介绍了超实数，它们使得欧拉证明中的所有假设都能得到论证。

致谢 我们感谢一位匿名审稿人提出的富有见地的建议。

第一作者获得波兰国家科学中心项目资助，项目编号为 2018/31/B/HS1/03896，项目名称为“无限与无穷小”。

第二作者获得波兰国家科学中心项目资助，项目编号为 2018/31/B/HS1/03896，项目名称为“无限与无穷小”。

参考文献

Błaszczyk P (2022) 笛卡尔对希腊比例概念的转变。 [载于：] B. Sriraman（编）《数学实践史与哲学手册》。施普林格，柏林。Błaszczyk P (2021) 伽利略悖论与数多度。《科学中的哲学问题》（Zagadnienia Filozoficzne w Nauce）70：73–107。Błaszczyk P (2016) 代数基本定理的纯代数证明。《克拉科夫教育大学年刊·数学教学研究》VIII：6–22。Błaszczyk P, Major J (2014) 无极限概念的微积分。《克拉科夫教育大学年刊·数学教学研究》VI：19–40。Błaszczyk P, Mrówka K, Petiurenko A (2020)，解读《几何原本》第二卷。《克拉科夫教育大学年刊·数学教学研究》XII：39–88。Błaszczyk P, Petiurenko A (2019) 重新审视欧几里得的比例理论。《克拉科夫教育大学年刊·数学教学研究》XI：37-62 Descartes R (1637)《几何学》。Jan Maire，莱顿。Euler L (1748)《无穷分析引论》。Marcum-Michaelem Bousquet，洛桑。Euler L (1755)《微分学原理》。帝国科学院，圣彼得堡。

Euler L (1988)《无穷分析导论》。J. Blanton 译。施普林格，纽约。Euler L (2000)《微分学基础》。J. Blanton 译。施普林格，纽约。Ferraro G (2021) 欧拉数学实践中的证明、任意例证与归纳概括。 [载于：] B. Sriraman（编）《数学实践史与哲学手册》。施普林格，柏林。Goldblatt R (1998)《超实数讲义》。施普林格，纽约。Guicciardini N (2009)《艾萨克·牛顿论数学确定性与方法》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥。Hilbert D (1899)《几何学基础》。为哥廷根高斯—韦伯纪念碑揭幕而作的纪念文集。莱比锡。Hilbert D. (1900)《论数的概念》。《德国数学家联合会年报》8：180–184。McKinzie M, Tuckey C (2001) 高等三角学、超实数与欧拉的无穷分析。《数学杂志》74 (5)：339–368。Newton I (1745)《曲线求积与无穷多项方程分析两论释义》。John Stewart 译。James Bettenham，伦敦。Ptolemy (1984)《天文学大成》。G. J. Toomer 翻译并注释。Duckworth，伦敦。Stolz O (1885)《普通算术讲义》。Teubner，莱比锡。Van Brummelen G (2021)《三角形学说：现代三角学史》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿。