arXiv:2304.01357v1 [math.HO] 9 Feb 2023

埃兰数学中的挖掘问题

Nasser Heydari*和 Kazuo Muroi†

2023年4月5日

摘要

本文研究《苏萨数学文献》第24号和第25号（SMT No. 24 和 SMT No. 25）中涉及的挖掘工程问题，例如运河和坑洞。我们还考察了某些埃兰建筑，例如服务于苏萨的运河系统，以及乔加赞比尔塔庙中的一座蓄水池；几何学很可能在这些建筑的建造中发挥了重要作用。

1 引言

SMT第24号 和 SMT No. 25 是法国考古学家于1933年在伊朗西南部苏萨发掘出的26块泥板上所刻文本中的两篇。所有苏萨数学文献（SMT）及其释读最早于1961年发表（见 [BR61]）。

SMT第24号 和 SMT No.25 刻写在一块单栏泥板上[1] 。我们遵循 Bruins 在 [BR61], 中的做法，将这两篇文本分别处理。

SMT第24号包含两个问题。第一个是一个挖掘问题，它导出一个复杂的二次方程，见于泥板正面。第二个问题涉及开挖一条运河，记载于反面。

SMT第25号也刻写在泥板反面，属于挖掘问题这一类别。本文只探讨一个问题，涉及开挖一条运河。

虽然由于泥板受损，完整的问题内容已无法得知，但仔细分析残存文本，仍可深入了解解答这些问题时所采用的数学计算。

*电子邮件：nasser.heydari@mun.ca

†电子邮件：edubakazuo@ac.auone-net.jp[1] 读者可以在卢浮宫藏品网站上查看这块泥板的新照片。正面和反面请参见 https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010186434。

2 苏美尔数学中的挖掘问题

在巴比伦数学中，有许多问题涉及为建筑物或墙挖掘孔、蓄水池、运河或地基。这类问题通常称为挖掘问题。在巴比伦数学文献中，有几篇讨论运河相关各种量的问题，尽管从数学角度看，这些问题相对简单。作为这类文献的例子，我们提到**YBC 4666**、**YBC 7164**、**YBC 9874**、**VAT 7528**和**BM 85196**（关于这类泥板文献的更多详情，另请参见[Mur92-4], ）。

在以下两部分中，我们将讨论 SMT No. 24 和 SMT No. 25，并分别对每篇文本进行数学诠释。

2.1 SMT第24号

转写

正面，第1—40行

(L1) [*pa*$_5$ *i-na g*]*iˇs-gi ˋu giˇs-tir ak-ş ́u-ru* [· · · · · ·]*(L2)* [· · · · · ·] 30 增加 宽度 下方 *ˇsˋa-lu-uˇs-ti* [· · · · · ·]*(L3)* [*ak-ş*] *́u-ru ˇsu-up-lu 24* 土 *ak-ş ́u-r*[*u* · · ·]*(L4)* [ˋ*u*] *ˇsu-up-lu* 什么 你 *1* 宽度 *ˇsˋa* 不 知道-*́u* · · ·]*(L5) 30* 你看 · · · [· · ·] 30 增加 放置 *1 a-r ́a* [· · · · · ·]*(L6) 30* 增加 *ˇsˋa-lu-uˇs-ti 30* 取 *́e 10* 你看 [· · · · · ·]*(L7) i-ˇs ́ı-ma 2* 你看 *2* 如同 *sag* 放置 *1* 宽度 *a*[*n-ta* · · ·]*(L8) 1,30* 你看 *1/2* 1,30 [*he-pe*] 45 *ta-mar* 45 [*uˇs* · · · · · ·]*(L9) tu-́ur-ma ˇsˋa-lu-*[*uˇs-ti 30* 增加 取 *́e 10* 你看 [· · · · · ·]*(L10) i-ˇs ́ı-ma 2* 你看 · · · [· · · · · ·]*(L11) 15* 你看 15 · · · [· · · · · · · · ·] *uˇs* 放置 · · · [· · ·] *(L12)* 你的头部 *li-ki-*[*il* · · · · · ·] · · · *igi-45 uˇs pu-ţ ́u-*[*́ur*]*(L13)* 对于 [· · · · · · · · ·] · · · *a-ˇsˋa i-ˇs ́ı-ma 9,22,*30 [· · ·] *i-ˇs ́ı (L14)* [· · · · · · · · · · · · · · 2]4*(?) ˋu 2 ma-na-at (L15)* [· · · · · · · · · · · · · · ·] *sag(?) 2 zi a-ˇsˋa (L16)* [· · · · · · · · · · · · *i-ˇs*] *́ı-ma uˇs 15 wa-ş ́ı-ib uˇs (L17)* [· · · · · · · · · · · · 3]0 [*a*]*-na 9,22,30 i-ˇs ́ı-ma (L18)* [4,41,15 你看]*r tu-́ur-ma 45 uˇs* 对于 *2 sag (L19)* [*i-ˇs ́ı-ma* 1,30] 对于 [9,2]2,30*i-ˇs ́ı-ma 14:3,45* 你看 *(L20)* [14*:3,45 a-ˇsˋa sˋa-a*] *r-ru* [14*:*]3,45 [*a-n*]*a* 4,[4]1,15 *a-ˇsˋa (L21)* [*i-ˇs ́ı-ma* 1,5,55],4,41,15你看 *re-*[*iˇs-k*]*a li-ki-il (L22)* [15 *wa-ş ́ı-ib uˇs* 对于 2] *sag i-ˇs ́ı-ma 30 t*[*a-mar 30 n*]*a-s ́ı-ih sag (L23)* [30 对于 *3 i-ˇs*]*́ı-ma* [1],30你看 [3]0 在 1,[30] *zi (L24) 1* 你看 *1 a-*[*na*] 9,22,30 *i-ˇs ́ı-ma* 9,2[2,30]你看 *(L25)* 因为 <1> 如同 *uˇs qa-bu-ku 1 a-r ́a* [对于 9],22,[30增加]*(L26) 1,9,22,30* 你看 *1/2* 1,[9,2]2,30 *he-pe 34,41,15* 你看

(L27) 34,41,15 乘以 20:3,[13,21,3]3,45得
3,13,21,33,[45] 1,5,55,4,41,15减去 20:3,13,21,33,[45] 1,5,55,4,41,15
(L28) 对 20:3,13,21,33,[45] 1,5,55,4,41,15 加上 (L29) 21:
9,8,26,15 [得] ，[乘以]得 ´； ´乘以 35,37,30 ´ (L30) 34,41,15 减去[
]，对 [加上 3]5,37,30 (L31) 1,10:18,45 得[] ，[乘以] 14得 3,45
(L32) 平方根是``，其倒数为`， [1,10:1]8,45 (L33) 5 乘 5 宽，除
以 1/2 [5，得 2,30；2,30 对] (L34) 30 超出，加上 3，得 3；3 为
下宽；12 的倒数乘以`，即上宽] (L35) 取其下宽，便得上；[´
] 10 得 [30 `，且 10 不取] (L36) 40 对 12 逐次取，得 8；上宽]
(L37) `和 3，下宽不取，得 8；8 除以 2，得] (L38) 得 4；4 对
8 逐次取，得[] (L39) 得 32；32 的倒数，反向´´，得] (L40)
1,52,30 对 24 沙土逐次取，得 45；45 长]

反面，第 1–24 行

(L1) 你*(?)* ··· [··· ··· ···]*(L2)* ´*u-*ˇ*s*`*a-p*´*ı-i*[*l*] *i(?)-*[*na(?) k*]*a-la-ak-*[*ki-im* ··· ···]*(L3)* 第*2*次 *ta-a*[*d*]*-di-in 2-tu* [··· ···]*(L4) a-*ˇ*s*`*a ka-la-ak-ki* 大 *ul-*[*gar* ··· ···]*(L5) a-na t*`*un* ˇ*s*`*a a-ta-ap pa-*[*n*]*a-n*[*im*] *da*[*h* ···]*(L6) a-na tur a*ˇ*s-*[*lu-u*]*t*ₓ *(?) ul-gar sahar* ··· [··· ··· 1,15]*(L7)* 你 *1,15 ul-gar a-na 13* ˇ*s*`*a-*[*la-*ˇ*s*´*e-ra-t*]*i i-*ˇ*s*´*ı-ma* 16,[15]*(L8) 10* ˇ*s*`*a ka-la-ak-ku ugu ka-la-a*[*k-ki i-t*]*e-ru nigin 1,40* 你看 *(L9) 1,40 i-na 16,15 zi* 16,[13,20] 你看 *igi-10 dirig pu-*ţ´*u-*´*ur (L10) 6* 你看 *igi-12* ˇ*su-up-li pu-*ţ´*u-* ´*ur 5* 你看 *5 a-na 6 i-*ˇ*s*´*ı (L11) 30* 你看 *30 ta-lu-ku 30 ta-lu-ka a-na 16,13,20 i-*ˇ*s*´*ı-ma (L12) 8,6,40* 你看 10 [*dir*]*ig nigin 1,40* 你看 *1,40 a-na 13* ˇ*s*`*a-la-*ˇ*s*´*e-r a-ti (L13) i-*ˇ*s*´*ı-ma* 21,[40 *ta-mar*] 21,40 *i-na 8,6,40 zi (L14) 7,45 t a-*[*mar re-i*ˇ*s-k*]*a li-ki-il* 3[0 *ta-lu-k*]*a (L15) a-na* 13 [ˇ*s*`*a-la-*ˇ*s*´*e-ra-ti*] *i-*ˇ*s*´*ı 6,30 t*[*a-mar 30 t*]*a-lu-ka (L16) a-na ka-aiia-ma-*[*ni*] 2 *tab-ba 1* 你看 *1 a-na 6,30 dah (L17)* [7],30你看 1[3 ˇ*s*`*a-l*]*a-a*ˇ*s-*ˇ*s*´*e-ra-ti a-na 3-*ˇ*su a-na ka-aiia-ma-ni (L18) a-li-ik-ma* 3[9]你看 *7,30 a-na 39 dah 46,30* 你看 *(L19) mi-na a-na 46,30 gar* ˇ*s*`*a 7,45* ˇ*s*`*a r*[*e-i*ˇ*s*]*-ka* ´*u-ki-il-lu (L20)* [*i-n*]*a-ad-di-na* [10] *gar re-i*ˇ*s-ka li-ki-il 1/2 10 dirig he-pe (L21)* [5 *ta*]*-mar* [5*(?) gar(?)*] 5 *nigin 25* 你看 *25 a-na 10 (L22)* [ˇ*s*`*a re-i*ˇ*s-ka* ´*u-ki-il-lu*] *dah 10,25* 你看 *mi-na* ´*ıb-si (L23)* [25 ´*ıb-si 25(?) gar(?)*] 5 *a-na 25 i*ˇ*s-te-en dah 30* 你看 *(L24)* [*i-na 25 2-kam zi 20 t*]*a-mar 30* 大 *20* 小

正面译文，第1—
40行

(L1) 我在芦苇荡和树林中修建的运河，⋯ ⋯。(L2)⋯ 0；超出量的 30，下宽。⋯ 的三分之一，(L3) 我修建的深度。我修建的体积为 24,0（体积萨尔）⋯。(L4) ⋯ 和深度是多少？你有 1 个不知道的宽度 ⋯，(L5) 你看到 0;30。写下超出量 0;30。1 个常数 ⋯，(L6) 超出量 0;30。取 0;30 的三分之一，(于是)你看到 0;10。 ⋯。(L7) 乘以（12），你看到 2。把 2 记作宽度。1，上宽 ⋯，(L8) 你看到 1,30。将 1,30 对半分，(于是)你看到 45。45 是长度。 ⋯。(L9) 返回。取超出量 0;30 的三分之一，(于是)你看到 0;10。 ⋯。(L10) 乘以（12），你看到 2。 ⋯，(L11) 你看到 15。15，⋯。写下长度。 ⋯。(L12) 让它记在心里。 ⋯。求长度 45 的倒数（即 0;1,20）。(L13) 将它乘以面积的 ⋯，你看到 9;22,30。乘以 ⋯。(L14)⋯ ⋯ 24, 0(?)，而 0;2 是（宽度与长度的）比值。(L15)⋯ ⋯ 宽度(?)，减去 0;2(?)，以及面积。(L16)⋯ ⋯，以及长度。15，即要加到长度上的数。(L17)⋯ ⋯。将 0;30 乘以 9;22,30，(L18-19)你看到 4;41,15。返回。将长度 45 乘以宽度与长度的比值 0;2，你看到 1;30。将它乘以 9;22,30，你看到 14;3,45。(L20-21)14;3,45 是假面积。将 14;3,45 乘以面积 4;41,15，你看到 1,5;55,4,41,15。让它记在心里。(L22)将要加到长度上的数 15 乘以宽度与长度的比值 0;2，你看到 0;30。(L23)将 0;30 乘以 3，你看到 1;30。从 1;30 中减去 0;30，(于是)(L24)你看到 1。将 1 乘以 9;22,30，你看到 9;22,30。(L25)既然 < 1，长度已告知你，就把因子 1,0 加到 9;22,30 上，(L26)你看到 1,9;22,30。将 1,9;22,30 对半分，(于是)你看到 34;41,15。(L27)将 34;41,15 平方，(于是)你看到 20,3;13,21,33,45。(L28)将 1,5;55,4,41,15 加到 20,3;13,21,33,45 上，(L29)你看到 21,9;8,26,15。平方根是多少？35;37,30 是平方根。(L30)将 35;37,30 加到 34;41,15（配方法中所用的数）上，(L31-32)你看到 1,10;18,45。要对假面积 14;3,45 乘以什么，才能得到 1,10;18,45？(L33)写下 5。5 是上宽。将 5 对半分，(于是)你看到 2;30。将 2;30 加到超出量 0;30 上，(于是)你看到 3。3 是下宽。

（L35）取上宽超过下宽的部分的 1/12，得到 0;10。将 0;30 和 0;10 相加，得（0;40）。（L36）将 0;40 乘以深度（常数）的 12，得到 8。（L37）将上宽的 5 倍与下宽的 3 倍相加，得到 8。将 8 折半，（L38）得到 4。将 4 乘以深度的 8 倍，（L39）得到 32。求 32 的倒数，得到 0;1,52,30。（L40）将 0;1,52,30 乘以体积的 24,0，得到 45。45 就是长度。

反面，第 1-24 行

(L1) 你？ ··· ··· ··· ···(L2)··· ···我挖了……坑里有 ··· ···。（L3）你给了第二个 ··· ···。又一次 ··· ···。（L4）我把 ··· ···和大坑的面积加在一起，得到 ··· ···。（L5）我把 ··· ···加到先前运河的深度上，得到 ··· ···。（L6）我为小的（坑）截去（？） ··· ···。体积与 ··· ···的总和是1;15。（L7）你，把总和的1;15乘以十三分之一的13，得到16;15。（L8）将大坑长度超出小坑长度的0;10平方，得到0;1,40。（L9）从16;15中减去0;1,40，得到16;13,20。求超出量的0;10的倒数，（L10）得到6。求深度的十二分之一的倒数，得到0;5。将0;5乘以6，（L11）得到0;30。0;30就是乘积。将乘积的0;30乘以16;13,20，（L12）得到8;6,40。将超出量的0;10平方，得到0:1,40。将0;1,40乘以十三分之一的13，（L13）得到0;21,40。从8;6,40中减去0;21,40，（L14）得到7;45。把它记在一旁。（L15）将乘积的0;30乘以十三分之一的13，得到6;30。（L16）将乘积的0;30乘以常数2，得到1。把1加到6;30上，（L17）得到7;30。将十三分之一的13乘以3，即常数3，（L18）得到39。把7;30加到39上，得到46;30。（L19）46;30加上什么，才能得到记在一旁的7;45？（L20）写下0;10。把它记在一旁。将超出量的0;10减半，（L21）得到0;5。写下0;5（？）。将0;5平方，得到0;0,25。（L22）把0;0,25加到记在一旁的0;10上，得到0;10,25。平方根是多少？（L23）0;25是平方根。写下0;25（？）。一方面，将0;5加到0;25上，得到0;30。（L24）另一方面，从0;25中减去（0;5），得到0;20。0;30是大坑的长度，0;20是小坑的长度。

数学计算

本文中的两个问题讨论了运河的开挖及其尺寸的计算。运河的总体形状是一个梯形底面的棱柱，如图1 所示，并标出了其中的蓄水。分别用 v、 u、 x 和 z表示运河的下宽（宽度）、上宽（宽度）、长度和深度（高度）。另用 z'表示蓄水的高度。

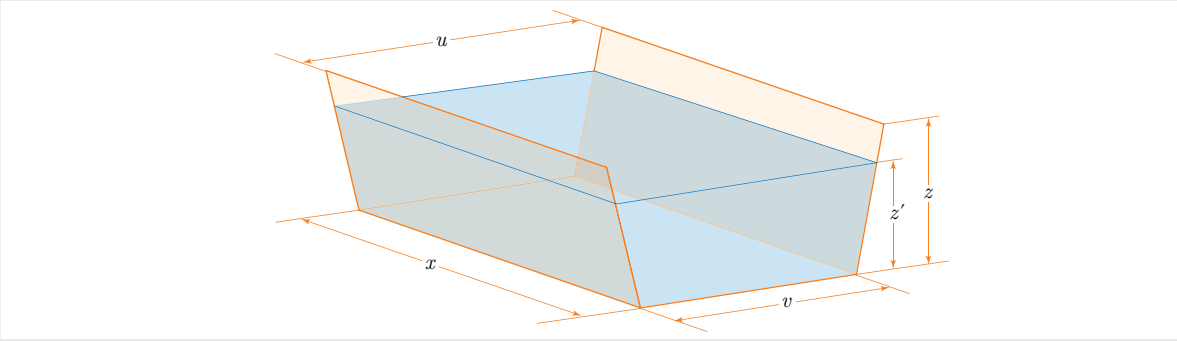

图1：运河的总体形状及其尺寸

梯形底面的面积 S 和梯形运河的体积 V 可通过以下方式求得

$$S = \frac{1}{2}z(u+v), \tag{1}$$

and

$$V = xS = \frac{1}{2}xz(u+v). \tag{2}$$

尽管公式 (2) 给出了运河的总容量，但也可以利用 V' SMT第3号第33行所给出的运河常数来计算其蓄水量。该行写道：

48 igi-gub ˇs ̀a pa_5-sig “0

;48 is th小运河的常数”

这表明，运河深度与其蓄水深度的比值为 0；$48 = \frac{4}{5}$。换言之，我们有

$$\frac{z'}{z} = \frac{4}{5}.$$

因此， $z' = \frac{4}{5}z$ 且蓄水的体积应为

$$V' = \frac{4}{5}V.$$

因此可由(2) 得出

$$V' = \frac{2}{5}xz(u+v). \tag{3}$$

第一题

由于泥板受损，我们无法确定第1至25行中出现的技术术语和计算的含义。下面列出其中一些存在歧义之处：

第18行："0;2 是比值 ..."
如果我们用 y 表示宽度，这可能意味着 $\frac{y}{x} = 0;2$。根据第22-23行，在这种情况下，y 的值通过以下方式求得

$$y = (0;2)x = (0;2) \times 45 = 1;30$$

假设 $x = 45$。但这只会让事情更加令人困惑，因为文中还出现了类似的术语（例如上宽和下宽）。
第22行："15，即要加到长度上的那个数"
如果我们假设 $x = 45$，这可能涉及计算

$$x + 15 = 45 + 15 = 1,0$$

其结果在第25行中提到："既然长度说是1,0"。
Lines 18-19:"$(0;30) \times (9;22,30) = 4;41,45$"
这种乘法的结果在第20至21行中称为"面积"。
Lines 20-21: "$(1;30) \times (9;22,30) = 14;3,45$"
这种乘法的结果在第20至2行中称为"假面积"。 1.
Lines 22-24: "$15 \times (0;2) \times 3 - 0;30 = (0;30) \times 3 - 0;30 = 1;30 - 0;30 = 1$"
数字0;30在第23行中称为"从宽度中减去的数"。
第24行："$1 \times$ (9; 22, 30) $= 9$; 22, 30"
我们尚未能对这一乘法得出结论 .
第25行："$1,0 + 9$; 22, $30 = 1$, 9; 22, 30"
此外，我们也无法就这项补充得出结论。

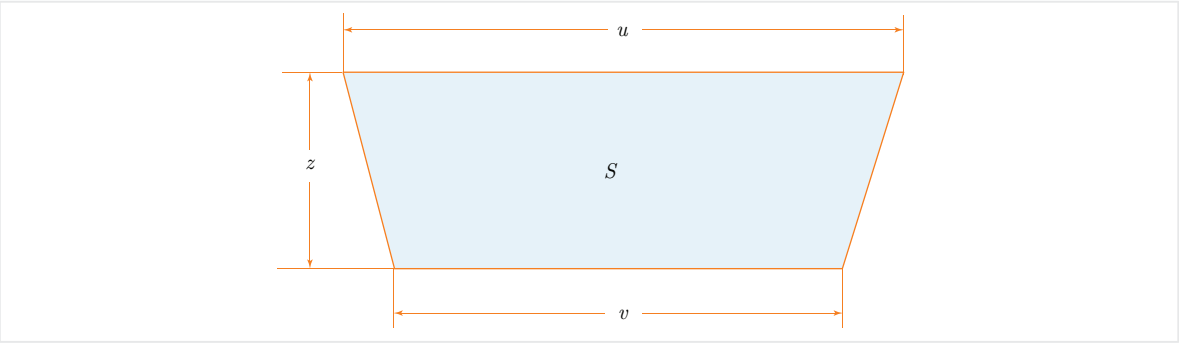

图2：梯形运河的横截面

尽管存在这些不确定性，本文的书吏仍能够计算一般情况下的运河尺寸，并通过求解二次方程求出运河上部的宽度。我们在图2中展示了一般梯形运河的梯形横截面。

请注意，第34—40行的计算表明，书吏假定运河各项尺寸之间存在以下关系：

$$\begin{cases} v = \dfrac{u}{2} + 0;30 \\ z = 12\left(0;30 + \dfrac{1}{12}(u - v)\right). \end{cases} \tag{4}$$

仔细查看书吏在第26—33行所做的计算，可以看出他解出了以下二次方程：

$$(14;3,45)u^2 - (1,9;22,30)u = 4;41,15. \tag{5}$$

方程(5) 采用通常的配方法求解——这是巴比伦和埃兰书吏用来求解二次方程的标准方法。这种方法在巴比伦文献中称为*Tak¯ıltum* （关于这一主题的讨论，参见[Mur03-1], ）。

N现在，让我们使用这种方法求解二次方程(5) 如下 :

$$\begin{aligned}
& (14;3,45)u^2 - (1,9;22,30)u = 4;41,15 \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45) \times (14;3,45)u^2 - (14;3,45) \times (1,9;22,30)u = (14;3,45) \times (4;41,15) \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)^2u^2 - (1,9;22,30) \times \Big((14;3,45)u\Big) = 1,5;55,4,41,15 \\
\Longrightarrow\quad & \Big((14;3,45)u\Big)^2 - 2 \times (34;41,15) \times \Big((14;3,45)u\Big) = 1,5;55,4,41,15 \\
\Longrightarrow\quad & \Big((14;3,45)u\Big)^2 - 2 \times (34;41,15) \times \Big((14;3,45)u\Big) + (34;41,15)^2 \\
& \qquad\qquad = 1,5;55,4,41,15 + (34;41,15)^2 \\
\Longrightarrow\quad & \Big((14;3,45)u - 34;41,15\Big)^2 = 1,5;55,4,41,15 + 20,3;13,21,33,45 \\
\Longrightarrow\quad & \Big((14;3,45)u - 34;41,15\Big)^2 = 21,9;8,26,15 \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)u - 34;41,15 = \sqrt{21,9;8,26,15} \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)u - 34;41,15 = \sqrt{(35;37,30)^2} \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)u - 34;41,15 = 35;37,30 \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)u = 35;37,30 + 34;41,15 \\
\Longrightarrow\quad & (14;3,45)u = 1,10;18,45 \\
\Longrightarrow\quad & u = \frac{1}{(14;3,45)} \times (1,10;18,45) \\
\Longrightarrow\quad & u = (0;4,16) \times (1,10;18,45) \\
\Longrightarrow\quad & u = 5.
\end{aligned}$$

So

$$u = 5. \tag{6}$$

现在，根据第 33-36 行，我们可以求出 v 和 z。一方面，根据(4)和(6)，我们有

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{2} + 0;30 \\ &= \frac{5}{2} + 0;30 \\ &= 2;30 + 0;30 \\ &= 3. \end{aligned}$$

因此，

$$v = 3. \tag{7}$$

另一方面，由(4) 和 (7) 可得

$$\begin{aligned} z &= 12\left(0;30 + \frac{1}{12}(u - v)\right) \\ &= 12\left(0;30 + \frac{1}{12}(5 - 3)\right) \\ &= 12\left(0;30 + \frac{2}{12}\right) \\ &= 12 \times (0;30 + 0;10) \\ &= 12 \times (0;40) \end{aligned}$$

这意味着

$$z = 8. \tag{8}$$

最后，验证过程似乎从第37行开始。首先，利用 S，根据 (1)、(6)、(7) 和 (8)，求出梯形横截面的面积如下：

$$S = \frac{z(u+v)}{2} = \frac{8(5+3)}{2} = 4 \times 8 = 32. \tag{9}$$

然后，长度 x 由已知的运河体积 $V = 24{,}0$（第 3 行中提及）求得。事实上，由 (2) 和 (9) 可知

$$\begin{aligned} x &= \frac{V}{S} \\ &= \frac{24,0}{32} \\ &= \frac{1}{32} \times (24,0) \\ &= (0;1,52,30) \times (24,0) \\ &= 45. \end{aligned}$$

第二题

关于第二个问题的行中，可以识别出挖掘问题中的几种典型表达如下：

(1) 反面，第2行：“我挖掘了”。(2) 反面，第4行：“大坑的面积”。(3) 反面，第5行：“先前的运河的深度”。(4) 反面，第6行：“我为小的截去 $\cdots$”。(5) 反面，第8行：“（大）坑的（长度）超过（小）坑的（长度）的量”。(6) 反面，第10行：“深度的12的倒数”。

虽然我们也无法复原这道题的题干，但看来一条运河被加深了，也就是说，运河底部被挖深了。设 x、 y和 z 分别表示横截面为矩形的运河的长度、宽度和深度（见 图3）。

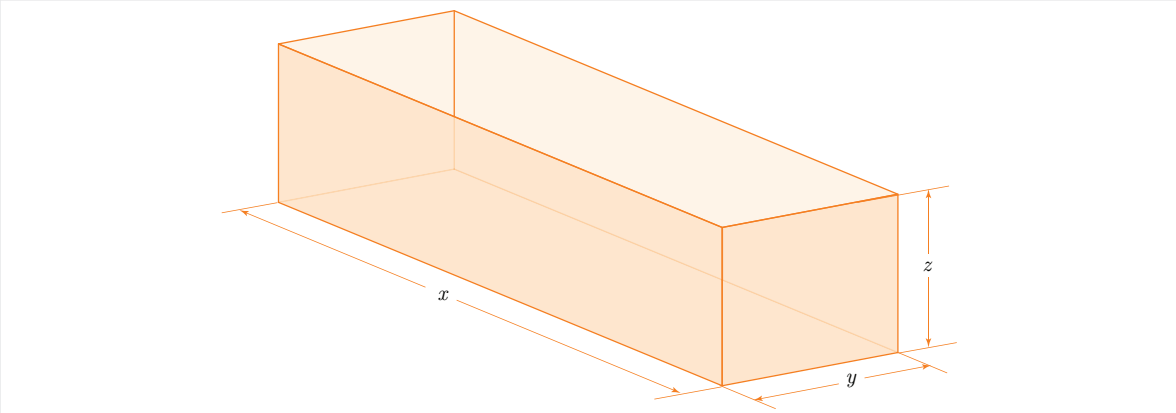

图3：横截面为矩形的运河

根据文中的计算，本文讨论的方程为：

$$\begin{cases} x - y = 0;10 \\ z = 12(x - y) \\ z(x^2 + y^2) + xy(z + 1) + \dfrac{1}{13}\left(x^2 + y^2\right) = 1;15. \end{cases} \tag{10}$$

在讨论这些方程的几何意义以及坑（*kalakkum*）的性质之前，我们先分析第 7 至 24 行给出的解。

根据第 7 行，我们可以将 (10) 中第三个方程的两边乘以 13。由于 $13 \times (1;15) = 16;15$，因此得到

$$13z(x^2 + y^2) + 13xy(z + 1) + x^2 + y^2 = 16;15. \tag{11}$$

此时，书吏似乎使用了代数恒等式

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy. \tag{12}$$

根据第 8–9 行，既然 $x - y = 0$；10，我们可以使用 (11) 和 (12) 来写出

$$\begin{aligned}
& 13z(x^2 + y^2) + 13xy(z + 1) + x^2 + y^2 = 16; 15 \\
\Longrightarrow\quad & 13z\Big((x - y)^2 + 2xy\Big) + 13xy(z + 1) + (x - y)^2 + 2xy = 16; 15 \\
\Longrightarrow\quad & 13z(x - y)^2 + 26xyz + 13xyz + 13xy + (x - y)^2 + 2xy = 16; 15 \\
\Longrightarrow\quad & 13z(x - y)^2 + (3 \times 13)xyz + (13 + 2)xy = 16; 15 - (x - y)^2 \\
\Longrightarrow\quad & 13z(x - y)^2 + (3 \times 13)xyz + (13 + 2)xy = 16; 15 - (0; 10)^2 \\
\Longrightarrow\quad & 13z(x - y)^2 + (3 \times 13)xyz + (13 + 2)xy = 16; 15 - 0; 1, 40
\end{aligned}$$

thus

$$13z(x - y)^2 + (3 \times 13)xyz + (13 + 2)xy = 16; 13, 20. \tag{13}$$

（按照书吏的计算，我们没有将 $x - y = 0$；10 代入项 $13z(x - y)^2$ 以进一步简化 (13)。）

在第 10–11 行，书吏计算了 z的倒数。由 (10)中的前两个方程可知

$$\begin{aligned}
& z = 12(x - y) \\
\Longrightarrow\quad & \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{x - y} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{1}{z} = (0; 5) \times \frac{1}{(0; 10)}
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{z} = 0; 30. \tag{14}$$

接下来，根据 根据第 11—20 行，我们将 (13) 的两边乘以 $1/z$，然后使用 (13)

如下求出 xy 的值:

$$
\begin{aligned}
& 13z(x-y)^2 + (3\times 13)xyz + (13+2)xy = 16;13,20 \\
\implies \quad & \frac{1}{z}\times\Big(13z(x-y)^2 + (3\times 13)xyz + (13+2)xy\Big) = \frac{1}{z}\times(16;13,20) \\
\implies \quad & 13(x-y)^2 + (3\times 13)xy + (13+2)\Big(\frac{1}{z}\times xy\Big) = \frac{1}{z}\times(16;13,20) \\
\implies \quad & 13(x-y)^2 + (3\times 13)xy + \Big((13+2)\times(0;30)\Big)xy = (0;30)\times(16;13,20) \\
\implies \quad & 13\times(0;10)^2 + \Big((3\times 13) + 13\times(0;30) + 2\times(0;30)\Big)xy = 8;6,40 \\
\implies \quad & 13\times(0;1,40) + (39+6;30+1)xy = 8;6,40 \\
\implies \quad & 0;21,40 + (46;30)xy = 8;6,40 \\
\implies \quad & (46;30)xy = 8;6,40 - 0;21,40 \\
\implies \quad & (46;30)xy = 7;45 \\
\implies \quad & xy = \frac{1}{(46;30)}\times(7;45) \\
\implies \quad & xy = \frac{1}{6\times(7;45)}\times(7;45)
\end{aligned}
$$

这意味着

$$xy = 0;10. \tag{15}$$

文本的最后部分采用常见的巴比伦方法（配方法）。根据第20–21行，通过 (10) 和 (15)，我们可以写出:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy} \\
&= \sqrt{\left(\frac{0;10}{2}\right)^2 + 0;10} \\
&= \sqrt{(0;5)^2 + 0;10} \\
&= \sqrt{0;0,25 + 0;10} \\
&= \sqrt{0;10,25} \\
&= \sqrt{(0;25)^2}
\end{aligned}
$$

So

$$\frac{x+y}{2} = 0;25. \tag{16}$$

现在，我们可以计算 x 和 y的值。根据第 23-24 行，

由此可得 (10) 和(16) 可知

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \\ &= 0;25 + 0;5 \\ &= 0;30 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \\ &= 0;25 - 0;5 \\ &= 0;20. \end{aligned}$$

因此，所求的长度和宽度为

$$x = 0;30 \quad \text{and} \quad y = 0;20.$$

虽然我们现在可以理解第二个问题的数学含义，但仍有一些难题尚待解决：

这个问题中的 x 和 y 究竟是什么？；以及
“运河” (*atappum*) 和“孔” (*kalakkum*)？
要回答这些问题，我们可能需要考虑这样一种假设情形：两条运河如图4所示相交。在这种情形下，一条深度为 z、宽度为 x 的旧运河，与一条深度为 z、宽度为 y 的新运河成直角相交。新旧运河交汇处是一个边长为 x 和 y 的矩形，并加深了1k`u˘s，可能是为了容纳淤泥沉积[2]。

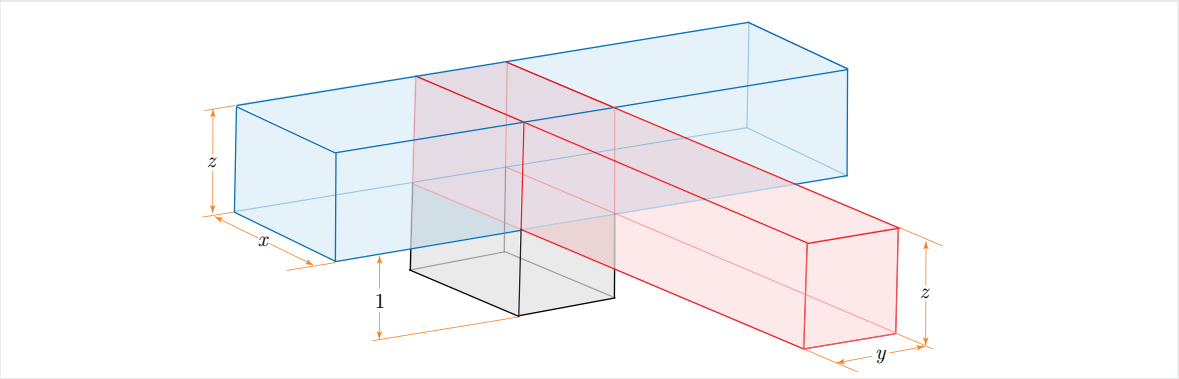

图4：两条运河的交汇处

图5中展示了该交汇处的俯视图及相关尺寸。东西方向的矩形是旧运河，南北方向的矩形是新运河。从图中可以清楚看出，两条运河的交汇处是一个长度为 x、宽度为 y、深度为 $1 + z$的立方体。根据文本，有两个

[2] 在现代日本，人们有时会看到用于灌溉渠的同一种装置。

与该交汇处相连的坑洞，我们称之为大坑和小坑。请注意，大坑（*kalakki*gal）的尺寸为 x、 x、 z，小坑（*kalakki*tur）的尺寸为 y、 y、 z。此题要求求出的未知量是大坑的长度 x 和小坑的长度 y。这里或许会以为， x 的称呼应为例如 uˇs*kalakki* gal，即“大坑的长度”，而不是*kalakki*gal，即“大坑（的长度）”。由于 x 原本是旧运河的宽度，苏萨的书吏可能省略了 uˇs（“长度”），以免造成混淆。事实上，文本中既没有出现 uˇs（“长度”），也没有出现 sag（“宽度”）。

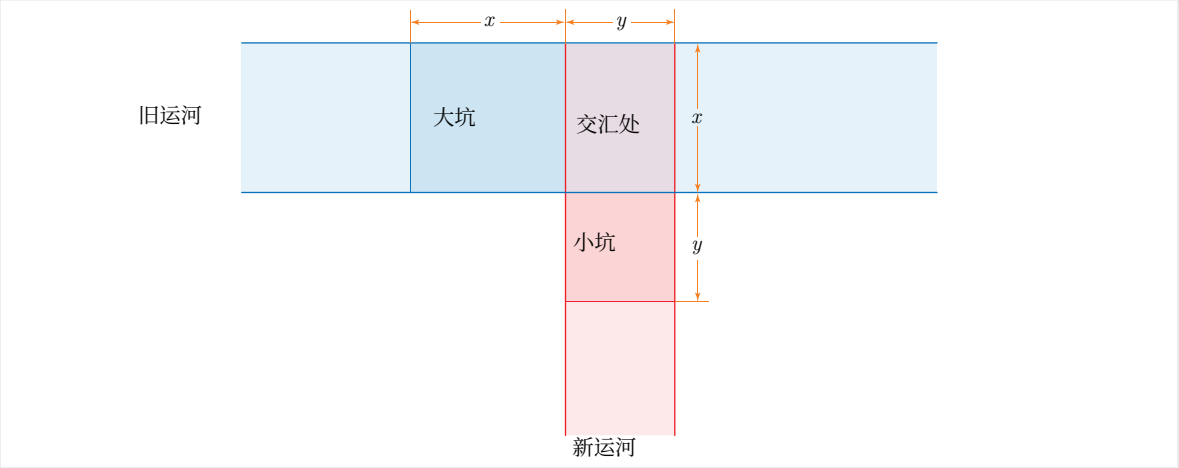

图5：两条相交运河及其交汇处的俯视图

现在，让我们回到(10)中的第三个方程。我们将左边的第一项和第二项，即 $z(x^2+y^2) = zx^2+zy^2$ 和 $xy(z+1)$，分别解释为大坑、小坑以及两条运河交汇处的体积总和。然而，至于第三项$1\,13(x^2+y^2)$，我们认为它没有任何几何意义，只是为了让方程更复杂而加到这些体积中的。所谓的系列文本中也有类似方程的例子，也就是说，这些是古代数学练习册。例如，**VAT 7537**[3]的文本中就给出了以下方程组：

$$\begin{cases} xy = 10,0 \\ x^2 + \dfrac{1}{11}\left(2\left(\dfrac{1}{7}\Big((2y+3(x-y)\Big)\right)^2 + x^2\right) = 16,40. \end{cases}$$

2.2 SMT第25号

如前所述，SMT No. 25 中的问题涉及运河尺寸。

[3]泥板**VAT 7537** 是柏林博物馆收藏的一篇巴比伦数学文献，最初由 Neugebauer 于 [Neu35]年发表。有关这块泥板及其文本的更多信息，请参见[Mur91-1]。

转写

反面，第25—34行

(L25) [··· ··· ···me]-e ˇs`a giˇs-g[i···] 2ˇsuˇsˇs¯ar ( ˇS ´ARxDI ˇS) ˇs`a pa_5 GIG(?) (L26) [··· ···] ··· [···] uˇs 5-ta-`am ˇs`a 6 ˇs[`a ˇs´ar] ···-ma (L27) i[gi-5] pu-ţ´u- ´ur 12 ta-mar 12 a-na 6 ˇs`a ˇs´ar i-ˇs´ı-ma (L28) 1,12 t a-mar 1 ˇs´ar `u 12 ˇsu-ˇsi mu-´u a-na 40 er´ın-hi-a [gar](L29) igi-40 er´ı n pu-ţ´u- ´ur 1,30 ta-mar 1,30 a-na 1,12 i-ˇs´ı-ma (L30) 1,48 ta-mar mu-´u ˇs`a er´ın 1-k[am uˇs] 1 宁丹 30 dagal (L31) [1],48 mu-´u ˇsu-up-lu mi-nu igi-48 igi-gub pa_5 pu-ţ´u-[´ur](L32) [1,15 t]a-mar 1,15 a-na 1,48 me-e ˇs`a [er´ın 1-kam i-ˇs´ı-ma](L33) [2,15 t]a-mar igi-30 dagal pu-ţ´u- ´ur 2 ta-mar (L34) [2,15 a-n]a 2 i-ˇs´ı-ma 4,30 ta-mar 4,30 ˇsu-up-lu

译文

反面，第25—34行

（第25行）··· ···芦苇床的水 ···。运河的水为 2,0 萨罗斯。 ···。（第26行）··· ···长度各为 5（宁丹），相当于 6 萨罗斯 ··· ···。（第27行）取 5 的倒数，（则）得 0;12。将 0;12 乘以 6 萨罗斯，（第28行）得 1,12,0。1 萨罗斯和 12 个六十进位单位即为水的体积。将其记作 40,0 名工人。（第29行）取 40,0 名工人的倒数，（则）得 0;0,1,30。将 0;0,1,30 乘以 1,12,0，（第30行）得 1;48。这是第一（原文如此）名工人（每 1 宁丹长度所对应）的水体积。若长度为 1 宁丹，宽度为 0;30（宁丹），（第31行）水的体积为 1;48，那么深度是多少？取 0;48（运河常数）的倒数，（第32行）得 1;15。将 1;15 乘以一名工人的 1;48 水量，（第33行）得 2;15。取宽度 0;30 的倒数，（则）得 2。（第34行）将 2;15 乘以 2，得 4;30。4;30（k`uˇs）即为深度。

数学计算

问题陈述几乎完全残缺，我们也未能找到类似的问题来帮助复原。不过，文本根据若干条件计算了一条运河的深度，这些条件很可能曾在问题陈述中给出。根据文本中进行的计算推断，缺失的条件可能如下：

问题：两千四百名工人（40,0 er´ın-hi-a）建造了一条宽度为 0;30 宁丹，其蓄水量为 6 ˇs´ar[4]（即 6,0,0 体积萨尔）。

[4] 请注意，在六十进制中，1 ˇs´ar=1 萨罗斯等于 1,0,0。

每名工人被分配去挖掘一段长度为 5 宁丹的运河。运河的深度是多少?

设一条运河的长度为 x，宽度为 y，深度为 z，并用 z' 表示其蓄水深度，如图6所示。如前所述，我们必须有

$$\frac{z'}{z} = 0;48. \tag{17}$$

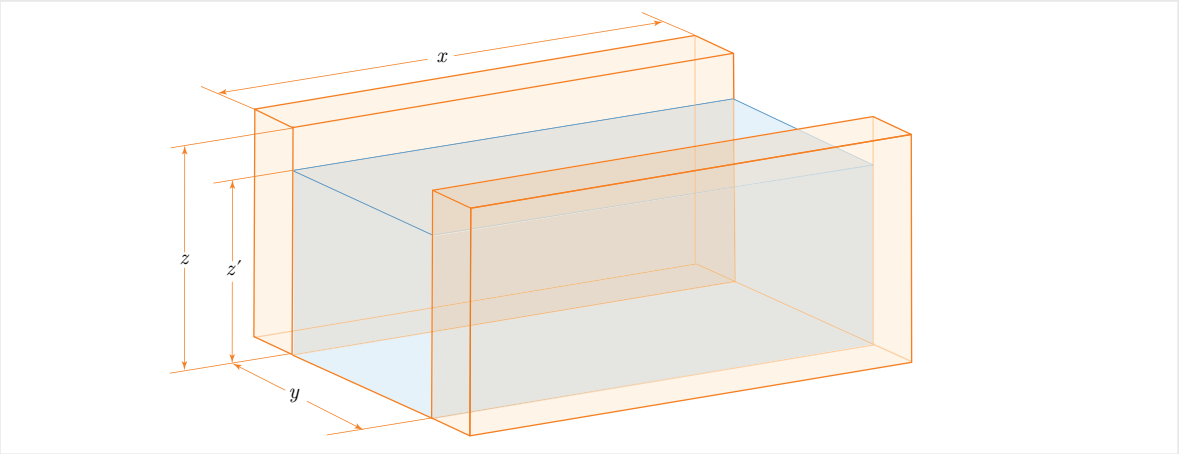

图 6：运河及其蓄水

设 V 为运河的体积，V' 为其蓄水的体积，S 为其横截面的面积，S' 为横截面中浸没在水中的部分的面积。从图中显然可知

$$\begin{cases} V = xyz \\ V' = xyz' \\ S = yz \\ S' = yz'. \end{cases} \tag{18}$$

注意，根据（17）和（18）可知

$$\frac{V'}{V} = \frac{S'}{S} = 0;48. \tag{19}$$

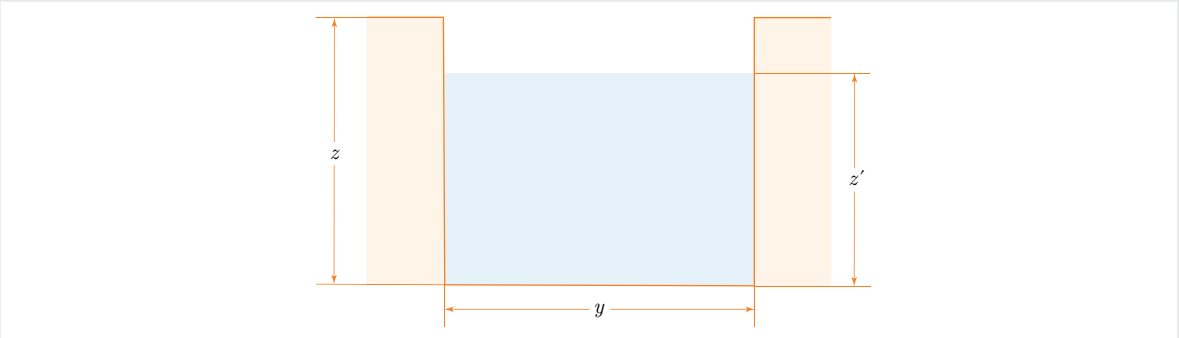

图 7：运河的横截面及其蓄水水位 r

在图7中，我们展示了运河的横截面及其蓄水。运河的高度为 z'，蓄水的高度为 z。

在第 26—30 行中，书吏计算出每 1 宁丹、每名工人的水量，即 V_1'。为此，他首先按如下方式求出每 1 宁丹、所有工人的水量体积 V_0'：

$$\begin{aligned} V_0' &= \frac{V'}{5} \\ &= \frac{1}{5} \times (6 \text{ šár}) \\ &= (0;12) \times (6,0,0) \\ &= 1,12,0 \\ &= 1 \text{ šár } 12 \text{ } \check{s}\bar{u}\check{s}i. \end{aligned}$$

（请注意，1 $\check{s}\bar{u}\check{s}i$ 等于 $1,0 = 60$。）然后，他用工人总数除以这个体积 $V_0' = 1$（12，0），得到 V_1'；第 30 行也将其称为“第一名工人的水量”：

$$\begin{aligned} V_1' &= \frac{V_0'}{(40,0)} \\ &= \frac{1}{(40,0)} \times (1,12,0) \\ &= (0;0,1,30) \times (1,12,0) \\ &= 1;48. \end{aligned}$$

请注意，$V_1' = 1;48$ 是长度为 1 的运河部分中蓄水的体积。也就是说，V_1' 是通过在 $x = 1$ 的第二个方程中假设(18)而得出的：

$$V_1' = 1yz' = yz' = S'.$$

这意味着 V_1' 等于运河下部被水淹没部分的横截面积：

$$S' = 1;48. \tag{20}$$

由 (18) 和 (20)，（根据第31-33行），我们可以得到 S：

$$\begin{aligned} S &= \frac{S'}{(0;48)} \\ &= \frac{1}{(0;48)} \times (1;48) \\ &= (1;15) \times (1;48) \end{aligned}$$

这意味着

$$S = 2;15. \tag{21}$$

由于假设 $y = 0;30$，我们可以（根据第 33—34 行）使用 (18) 和 (21)来求出运河深度，即 z，如下：

$$z = \frac{S}{y} = \frac{1}{(0;30)} \times (2;15) = 2 \times (2;15) = 4;30.$$

因此，运河深度为

$$z = 4; 30. \tag{22}$$

请注意，水深可以通过使用 (17) 和 (22) 轻松计算如下：

$$z' = (0; 48) \times (4; 30) = 3; 36.$$

3 古代埃兰数学的应用

本节将探讨数学在建设项目和埃兰建筑中的可能实际应用。读者会注意到，SMT No. 24 和 SMT No. 25 中展现的数学技能，很可能曾为受当时埃兰统治者之命负责修建埃兰基础设施及其他大型建筑物的人提供了极大帮助。

3.1 运河

和任何古代文明一样，水在古代埃兰人选择定居地点时发挥了决定性作用。埃兰人是古代近东最早的一批农民（参见[´ABW18]），他们利用附近的河流灌溉土地和农田。例如，古都苏萨建于至少有两条河流流经的地区[5]：卡克赫河和德兹河（参见图 8）。

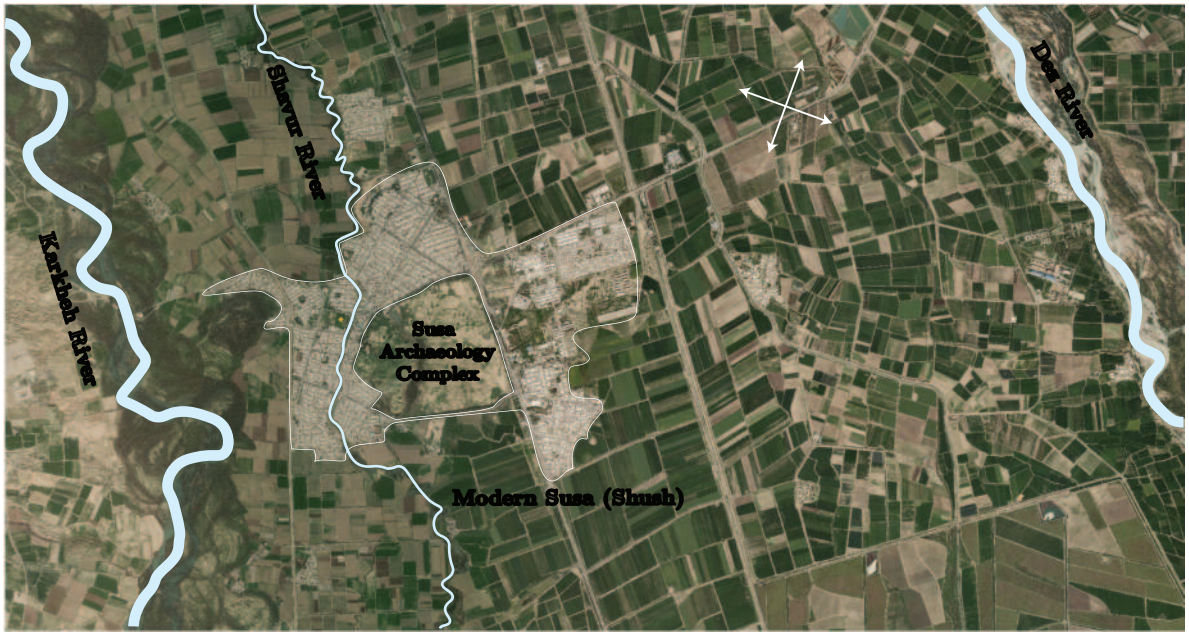

图 8：现代苏萨的卫星图（谷歌地图）

[5] Daniel Potts教授有力地论证了，苏萨只有一条河，现代的沙武尔河就是卡克赫河的古河道。详情请参阅 [Pot99]。

尽管古代埃兰时期卡克赫河河道的走向一直是学界颇有争议的话题，但有观点认为，由于卡克赫河的水位高于卡克赫河与德兹河之间农田的水位，苏萨人可能利用卡克赫河的水灌溉城周土地，或将水留作日后之用（可能用于饮用或制作泥砖）。根据一些研究（参见[Gra18，Sad14]），古苏萨附近至少有四个农业区，其中分布着40多条小型灌溉渠。通过分析在苏萨出土的其他法律、经济和行政类泥板，学者得以确定这些农业区中许多灌溉渠的名称和位置。这些泥板与**SMT**一样，年代均属苏卡尔马赫王朝时期，即公元前1900—1500年。我们在图**9**中展示了其中三个农业区及其所包含的灌溉渠数量。第四个农业区据称位于“扎蒙河的对岸”，但由于当时哪条河流被称为扎蒙河尚不明确，因此无法确定其位置。

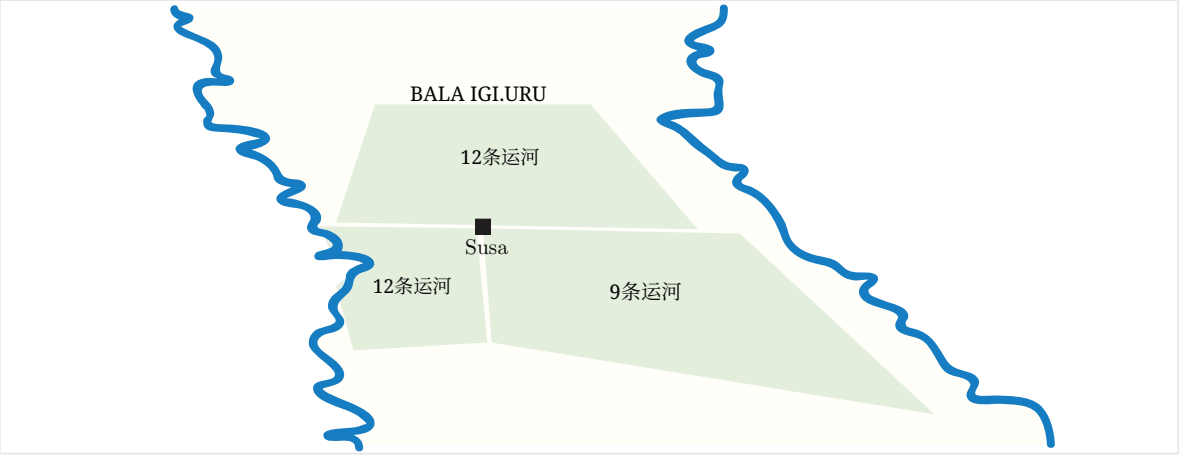

图9：苏萨附近灌溉渠可能的分布（改编自 [Gra18]）

除了古代苏萨周围的这套灌溉渠网络外，还有古代哈穆希运河系统。它由一组相互连通的运河组成，为卡克赫河与德兹河之间广阔的土地供水。考古证据表明，该网络的一些支渠可追溯至中埃兰时期（参见[Ada62、Ras20、Ras21]）。

这套运河系统的主干被称为哈穆希，并在名为*Pay-e Pol*（字面意思是“桥脚下”）的地点与卡克赫河相连。那里至今仍留有一座古坝的遗迹，它曾将河水分流。该运河的长度据认为约为 $50km$ ，若果真如此，它便可能灌溉卡克赫河与德兹河之间近 $200km^2$ 的土地。图**10** 展示了哈穆希运河网络的一条假设走向，该走向采用自 Adams [Ada62，图4]。哈穆希运河系统有数条支渠，据认为为游牧部族的牲畜供水。过去两个世纪中，许多到访胡齐斯坦的西方旅行者和学者都在报告中提及哈穆希运河，并指出它是

灌溉苏萨周边大片 [Ehl75，Fie39，Lor08，Raw36]的主要水源。尽管这套古代运河系统为苏萨地区灌溉了三千多年，但在1963年德兹河上建成一座混凝土坝后，它最终被现代运河网络取代。

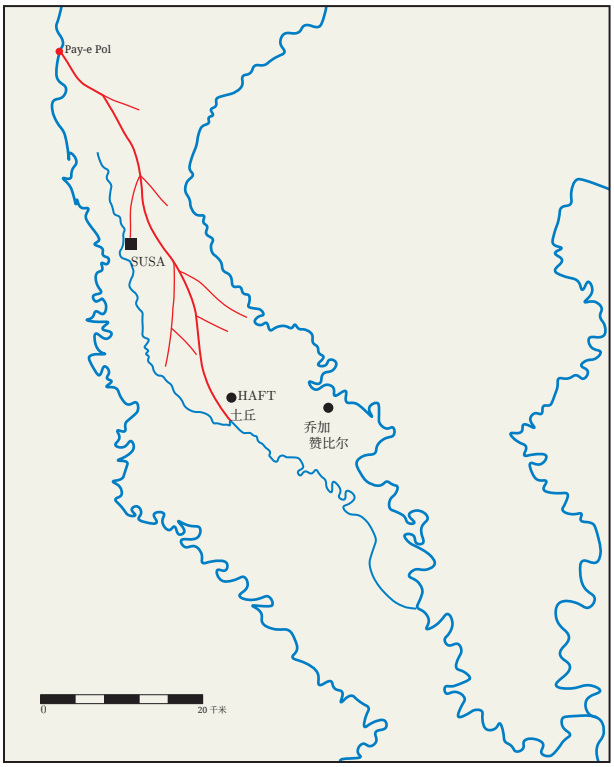

图10：哈穆希运河网络的假想走向

为了理解这条运河的历史意义及其对当地居民的重要性，尽管原有水利系统几乎没有留下任何实物痕迹，哈穆希这个名字仍通过许多祖先曾沿运河生活数百年的人的姓氏流传至今。[6]

除了运河之外，现代苏萨附近还有考古遗址，保存着其他水利设施的遗迹，其中一处位于埃兰圣城乔加赞比尔[7]。那里有一处由运河和蓄水池组成的水利综合体，蓄水池的长度为 $10.70m$，宽度为 $7.25m$，深度为 $4.35m$，容量约为 $332m^3$（见图11）。

尽管目前尚无令人满意的解释说明这项复杂工程的水力机制是如何运作的，但学者们提出了不同的假说。一些学者，包括吉尔什曼，认为这座蓄水池的水源是

[6] 第一作者的全名曾是“Nasser Heydari Harmushi”。[7]埃兰圣城乔加赞比尔（又称杜尔-温塔什，或称温塔什城）位于 $38km$ 苏萨东南方，由埃兰国王温塔什-纳皮里沙（公元前1275—1240年）创建，作为埃兰的宗教中心。这座综合体的主体是一座巨大的塔庙，供奉埃兰神祇因舒希纳克和纳皮里沙。更多信息请参见https://whc.unesco.org/en/list/113/或http://tchoghazanbil.com/。

卡克赫河的水经由哈穆希运河引入；这条运河是专为新圣城供水而修建的（见[Ghi68, Ste67]）。人们当时认为，饮用水随后通过一套较小的运河系统输送到城中各处。



图11：埃兰圣城乔加赞比尔的一座蓄水池（图片来源：乔加赞比尔世界遗产）

尽管吉尔什曼的观点数十年来一直占据主导地位，但现代考古研究已对他的分析提出了重大质疑（参见 [Saf19]）。莫菲迪-纳斯拉巴迪在 [Mof07]提出，这座蓄水池实际上是埃兰工程师设计的排水系统的一部分，旨在雨季将洪水排出圣城。

无论哪种情况，埃兰书吏的数学知识都可能有助于建造如此复杂的结构。他们的数学技能或可用于估算这样一个大型工程项目所需的时间和工人数。

4 结论

将 SMT第24号和 SMT No. 25 中所载问题的解读，与考古研究结合起来看，后者证实了这些问题刻写在泥板上时当地存在规模可观的运河网络；这些证据有力表明，苏萨书吏关注的是将数学实际应用于解决当地居民面临的挑战。这些文本表明，数学不仅在“苏萨数学学校”中教授，书吏也运用自己的数学技能，处理结构设计与建造过程中出现的问题，例如运河的修建；这些结构促进了古代埃兰的农业与经济发展。

参考文献

[Ada62] R. M. Adams, 《伊朗西南部早期的农业与城市生活》, 《科学》, 新系列, 第136卷, 第3511期（1962年4月13日）, 第109–122页。[´ABW18] J. ´Alvarez-Mon、G. P. Basello 和 Y. Wicks, 《埃兰世界》, CRC出版社, 2018年。[BR61] E. M. Bruins 和 M. Rutten, 《苏萨数学文献》 TMS [Paul Geuthner 东方学书店, 巴黎, 1961年。[Ehl75] E. Ehlers, 《伊朗农业的传统与现代形式：自19世纪末以来胡齐斯坦北部的聚落、经济与农业社会结构》, 《伊朗研究》, 第9卷第4期（1975年）, 第288–294页。[Fie39] H. Field, 《伊朗人类学研究贡献》, 芝加哥：菲尔德博物馆出版社, 1939年。[Ghi68] R. Ghirshman, 《乔加赞比尔（杜尔-温塔什）II：圣域、神庙、宫殿、陵墓》, 《伊朗考古代表团回忆录》第40卷, Paul Geuthner 东方学书店, 巴黎, 1968年。[Gra18] K. D. Graef, 《苏萨的田地：古巴比伦苏萨行政文书中的田地地形》, 载《古代近东的地形与地名学：展望与前景》, 第71卷, J. Tavernier、K. Abraham、V. Boschloos 和 E. Gorris 编。鲁汶：Peeters出版社（2018年）, 第267–311页。[Lor08] J. G. Lormier, 《波斯湾、阿曼和阿拉伯中部地名录》, 第二卷：地理与统计, 总统府图书馆, 1908年。[Mof07] B. Mofidi-Nasrabadi, 《乔加赞比尔考古发掘与调查》, 明斯特：Agenda出版社, 2007年。[Mur91-1] K. Muroi, 《巴比伦数学泥板 VAT 7537 中零与平方运算的表示法》, 《科学史》第1卷（1991年）, 第59–62页。[Mur92-4] K. Muroi, 《巴比伦数学中的小运河问题》, 《科学史》第二辑, 第1卷（1992年）, 第173–180页。[Mur03-1] K. Muroi, 《巴比伦数学中的数学术语 Takıltum 与配方法》, 《科学史》第12卷（2003年）, 第254–263页。[Neu35] O. Neugebauer, 《数学楔形文字文献》, 施普林格出版社, 1935年。[Pot99] D. T. Potts, 《埃兰语 Ul a、阿卡德语 Ulaya 与希腊语 Choaspes：Eulaios问题的解答》, 《亚洲研究所通报》第13卷（1999年）, 第27–44页。[Ras20] E. Rashidian, 《景观变迁与聚落迁移：公元前5至前2千年苏西亚纳大区域的聚落动态》, J. B. Metzler出版社, 2020年。[Ras21] E. Rashidian, 《河流的形成；基于伊朗西南部地质考古证据对“Nahr”这一混合型水道的界定》, 《水史》第13卷（2021年）, 第235–259页。

[Raw36] H. C. Rawlinson, 《从 Zohab（扎格罗斯山麓）沿山脉前往胡齐斯坦（苏西亚纳），再经卢里斯坦省前往克尔曼沙的行记》，1836年，《伦敦皇家地理学会会刊》第9卷（1839年），第26–119页。[Sad14] S.J. Sadafi, 《苏萨出土的古巴比伦时期买卖契约》，图宾根大学图书馆，2014年。[Ste67] M. J. Steve, 《乔加赞比尔出土的埃兰语和阿卡德语文献》，《伊朗考古考察团回忆录》第41卷，Paul Geuthner 东方学书店，巴黎，1967年。[Saf19] A. Safari 等, 《苏西亚纳西部平原的地理考古学：水利设施分析》（波斯语），《考古学研究期刊》第5卷第1期（2019年），第17–29页。