arXiv:2304.01368v1 [math.CO] 3 Apr 2023

慢着色 $3k$-连通图

Joan M. Morris GregoryJ. Puleo

数学与统计系 221帕克楼，奥本大学 阿拉巴马州奥本 36849

jmh0127@auburn.edu gjp0007@auburn.edu

摘要

slow coloring game 由 Mahoney、Puleo 和 West 提出，是由两名玩家 Lister 和 Painter 在图G上进行的游戏。在第 i轮，Lister 标记 $V(G)$ 的一个非空子集 M。这样他得分 $|M|$ 分。Painter 则删除 M的一个极大独立子集。该过程持续进行，直至所有顶点都被删除。Lister 的目标是使得分最大化，而 Painter 的目标是使其最小化。双方都能保证的最佳得分称为 G的 *slow coloring number* 或 *sum-color cost* ，记作 $\circ s(G)$。

Puleo 和 West 发现，对于一棵有 n个顶点的树 T，慢着色数至多为$\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$；当 T 包含一个顶点度为 1 或 3 的生成森林时，可以达到这个最大值。这意味着，每个具有完美匹配的 n 个顶点图 G 都满足 $\circ s(G) \geq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$。本文证明，对于 $|V(G)| \geq 4k$ 且具有完美匹配的 $3k$-连通图，下界更高：$\circ s(G) \geq \frac{3n}{2} + k$。

1 引言

慢着色博弈 [6] 由两位玩家 Lister 和 Painter 在图 G 上进行。每一轮中，Lister 标记图的一个非空子集，我们称之为 M，并获得 $|M|$ 分。接着，Painter 选择 M 的一个极大独立子集并将其删除。这个过程持续进行，直到所有顶点都被删除。Lister 力求使得分最大化，而 Painter 力求使其最小化。每位玩家能够保证的最佳得分称为慢着色数，或图 G, $\circ s(G)$ 的和着色代价。慢着色也称为在线和可涂性，是着色参数发展历程中近期出现的一个问题。其他这些着色变体有助于我们

更好地理解慢着色博弈和和着色代价。图 G 的正常着色，是为图 G 的顶点指派颜色，使得相邻顶点必须获得不同的颜色。
Erdos-Rubin-Taylor [2] 和 Vizing [10, 9]，独立提出的列表着色，为图赋予列表指派 L，使每个顶点 v 都获得一个包含 $L(v)$ 种可用颜色的列表。

定义 1.1。如果一个图 G具有适当的顶点着色，且所用颜色来自 $L(v)$所指派的列表，那么称图 G是 L-可着色的。若对于函数 $f: V(G) \to \mathbb{N}$，图 G 对于每个满足 $|L(v)| \geq f(v)$ 的列表指派 L都是 L-可着色的，则称图 G 具有 f-可选择性。若对于整数 k，图 G 在 $f(v) = k$对所有 v时具有 f-可选择性，则称图 G 对于整数 k 具有 k-可选择性。

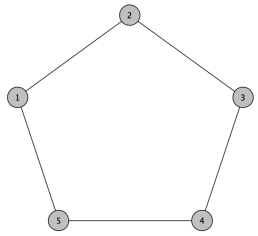
人们还可以考虑其他指标来评估列表着色，例如列表大小的最小和或平均值。例如，由 Isaak 引入的和可选择性，$\chi_{SC}(G)$，定义为在所有使 G 具有 f-可选择性的 f 中， $\sum(f(v))$ 的最小值。 [4]

我们可以通过引入在线因素来修改列表着色的定义：根据时间函数揭示顶点的列表；随着时间推移，更多信息会被揭示出来。我们可以将其视为一种博弈，使用与慢着色相关部分所描述的相同玩家和轮次结构。在第 i 轮，Lister 标记图中的一组 M 顶点。我们可以将这一标记视为揭示列表中包含颜色 i 的所有顶点。随后，Painter 选择一个独立子集 M 来获得颜色 i。然而，与慢着色相比，我们对该博弈采用不同的计分方式：Lister 试图最大化一个顶点被选中的次数，从而在 Painter 为其着色之前揭示其完整的隐藏列表。

我们在此指出它与可选择性的联系：可选择性关注任意顶点上的最大列表。对于决定各顶点列表大小的函数 f，如果某个顶点 v 被标记超过 $f(v)$ 次，则 Lister 获胜。Painter 则通过在此情况发生之前为所有顶点着色来获胜。因此，Painter 通过阻止某个顶点 v 被标记超过 $f(v)$ 次，赢得 f-涂色博弈。如果 Painter 能够获胜，则称该图具有 f-可涂色性。若对于所有 v，图均对于函数 $f(v) = k$ 都具有 f-可涂色性，则称该图具有 k-可涂色性；图的可涂色性是满足这一条件的最小 k。可涂色性由 Schauz [8]和 Zhu [12]独立引入。与可选择性一样，我们可以研究这一性质的最小和，或平均值——即 G的和可涂色性；Carraher、Mahoney、Puleo 和 West [1]首次研究了这一概念。记作 $\chi_{SP}(G)$，图 G 的和可涂色性是满足 G 具有 f-可涂色性的 $\sum(f(v))$ 的最小值。

为阐明这一过程，考虑一个长度为 5 的圈，记作 C_5，其顶点标记为 v_1、...、 v_5。

例 1.2. 我们定义一个函数 f，使得对于每个 $v \in V(C_5)$，v 的列表大小为 $f(v) = 2$。



在第一步中，*Lister* 选取 C_5、v_1、. . . 、v_5 中的所有顶点，揭示它们的列表中有颜色 1 。*Painter* 则选择一个独立集，将其中的顶点染成颜色 1。不失一般性地，设他选择 v_1 和 v_3。在第二轮中，*Lister* 选取 v_4、v_5，揭示它们的列表中有颜色 2 。由于这两个顶点相邻，*Painter* 只能选取其中一个。设他选择 v_5，并将其染成颜色2。在最后一轮中，*Lister* 选取 v_2、v_5，揭示它们的列表中有颜色 3 。这迫使 v_5 的列表为 $L(v_5) = \{1, 2, 3\}$。由于 $|L(v)| > 2 = f(v_5)$，这表明 C_5 不是2-可 *Painter* 着色的。对所有 v 使用 $f(v) = 3$ 执行同样的过程，可知 C_5 是3-可 *Painter* 着色的。

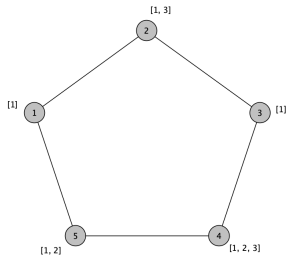


图 1： C_5 及其揭示的列表

由于可涂色性关注的是一个顶点被标记的次数以及其列表的大小，因此我们不关注分配给顶点的具体颜色。因此，正如 [1], 中所观察到的，我们可以用以下方式看待可涂色性：Painter 根据函数$f(v)$，向图 G 的顶点分配令牌 G，该函数对应于各顶点列表的大小。每当 Lister 标记一个顶点时，就会移除一个

令牌。当某个顶点的所有令牌都用完时，该顶点就被标记了 $f(v)$ 次。如果某个顶点被标记的次数超过 $f(v)$（没有剩余令牌可“支付”），Lister 就赢得博弈。由此，和可涂色性就是所用令牌总数的最小值。如果我们沿着这个方向继续，并在在线过程中考察和可涂色性，就会得到慢着色。

在慢着色中，Painter 不必根据 f 预先分配标记，而是可以随着博弈进行，向各顶点分配标记。这样 Painter 就能预留标记，并在需要时使用，比如用在特别难处理的顶点上。因此，我们可以看到 $\mathring{s}(G) \leq \chi_{SP}(G)$，因为 Painter 总能按照由 $\chi_{SP}(G)$ 定义的函数来进行博弈。这里同样可以看出，已标记顶点的具体颜色不会影响参数；对于每一轮 i，我们都可以使用不同的颜色i。因此，如前所述，在第 i 轮删除一个顶点，就相当于给它指定颜色 i。

1.1 历史

慢着色最早由 Mahoney、Puleo 和 West 于 2017年 引入[6]。他们给出了慢着色数 $\mathring{s}$ 的一般上界和下界；该数取决于图的顶点数以及其独立数。独立数是指图中满足任意两个顶点都不相邻的最大顶点子集 G：

$$\frac{|V(G)|}{2\alpha(G)} + \frac{1}{2} \leq \frac{\mathring{s}(G)}{|V(G)|} \leq \max\left\{\frac{|V(H)|}{\alpha(H)} : H \subset G\right\}$$

他们还针对特定情形得出了结果，包括独立数为二的图、 n个顶点的树以及完全二部图。2018年，Gutowski 等人 [3] 研究了若干类稀疏图的慢着色数，包括 k-退化图、可无环地 k着色的图、平面图和外平面图。

大约在同一时期，Puleo 和 West [7] 发表了关于树的慢着色的研究成果。他们提出了一种计算树的慢着色数的算法，并得出了刻画具有最大值和最小值的 n个顶点树的结果。他们特别证明了两个定理，其中第二个定理将有助于我们得出结果：

定理1.3。 *[7]* 对于每棵具有 n 个顶点的树 T，

$$n + \sqrt{2n} \approx n + u_{n-1} = \mathring{s}(K_{1,n-1}) \leq \mathring{s}(T) \leq \mathring{s}(P_n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$$

其中 $u_r =$ 最大值$\{k:\ t_k \geq r\}$ 对于 $t_k = \binom{k+1}{2}$、 k、 $r \in \mathbb{N}$。

定理 1.4。 *[7]如果 T是一个有 n 个顶点的森林，那么 $\chi_s(T) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$当且仅当 T 包含一个生成森林，其中每个顶点的度为 1 或 3；但当 n 为奇数时，允许有一个顶点的度为 0 或 6。*

利用任何含有完美匹配的图都以其中一个这样的生成森林为子图这一事实，可以自然地推出一个推论。由于增加边只会进一步提高和着色代价，这就为含有完美匹配的图类给出了一个下界。若 G 是一个含有完美匹配的图，且 $|V(G)| = n$，则有 $\chi_s(G_\sigma) \geq \frac{3n}{2}$。

1.2 主要结果

本文中，我们使用 Lister策略，为足够大的、具有完美匹配的 $3k$-连通图保证一个更高的下界：

定理 1.5。 设 G 是一个 $3k$-连通图，满足 $|V(G)| \geq 4k$ 且具有完美匹配。那么， G 的慢着色数下界为

$$\chi_s(G_\sigma) \geq \frac{3n}{2} + k$$

这个界在 $k = 1$ 情形下是紧的，在 $k > 1$ 情形下则不可能是紧的。

2 主要结果

在本节中，设 G 是一个 $3k$-连通图，满足 $|V(G)| \geq 4k$，且有一个边集 P，它诱导出一个完美匹配。Lister 首先利用 $2k$ 对 P 中的顶点进行标记，共标记 $4k$ 个顶点。Painter 随后删除标记顶点的一个独立子集 D。注意，$|D| \leq 2k$，因为 D 在 P 的每一对中至多包含一个顶点。令 $G^- = G - D$。

引理 2.1。 G^- 是 k-连通的。

证明。 我们需要证明，对于任意满足 $|S| \leq k-1$、 $G^- - S$ 的 $S \subset V(G^-)$，其都是连通的。令 $D^* = D \cup S$；则 $|D^*| \leq 2k + (k-1) = 3k-1$。由于 G 是 $3k$-连通的，因此 $G - D^*$ 是连通的。由于

$$G - D^* = G - D - S = G^- - S,$$

$G^- - S$ 是连通的，因此 G^- 是 k-连通的。 □

考虑 G 中通过匹配边与 D 中顶点相连的顶点；称它们为 β-顶点，并将这类顶点的集合记为 D'。因此， G^- 包含$|D| = |D'| \leq 2k$ β-顶点。我们分别考虑 $|D'|$ 为偶数和 $|D'|$ 为奇数的情形。

对于两个集合 A， B 集合 A 和 B 的对称差定义为这样一个元素集：其中每个元素恰好属于 A， B中的一个；记作$A \oplus B$。

引理 2.2. 如果 $|D'| = 2k^*$，那么 $\mathring{s}(G^-) \geq \frac{3}{2}n - 3k^*$。

证明。回想一下， G^- 包含 $|D'| \leq 2k$ β-个顶点。将D' 任意划分为两个集合 A 和 B, 每个集合的大小均为 k^*。根据引理 2.1， G^- 是 k-连通的。因此，根据门格尔定理 [11] ，且由于 $k^* \leq k$，在 A 中的顶点与 B中的顶点之间存在 k^* 条顶点互不相交的路径，记为 P_1， P_2，.....， P_{k^*}。令 $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k^*}$.

按如下方式构造生成森林 F：令 F_0 为 G^- 中剩余的所有匹配边的集合。定义 F_1 如下：

$$F_1 = F_0 \oplus E(P).$$

下面证明 F_1 中的每个顶点的度为 1 或 3。首先考虑一个 β-顶点 v_β。由于 G^- β-顶点不与匹配边关联，$d_{F_0}(v_\beta) = 0$。由于它们是 P 中一条路径的端点， $d_P(v_\beta) = 1$。因此， $d_{F_1}(v_\beta) = 1$。

现在考虑所有剩余顶点。令 v 为一个非 β-顶点的顶点。由于 v 在 G^- 中保留了其匹配边， $d_{F_0}(v) = 1$。此外，$d_P(v)$ 为偶数：若该顶点与 P 不相交，则 $d_P(v) = 0$；若该顶点属于 P 中的一条路径，则 $d_P(v) = 2$。由于 P_1, P_2，..... P_k 两两顶点不相交， v 至多属于这样的一条路径。因此，对于非 β-顶点，$d_{F_1}(v)$ 为 1 或 3。由此， F_1 中的每个顶点的度都是 1 或 3

最后，通过反复任意选取并移除圈，直到不再有圈为止，由 F_1构造出 F。由于移除任何一个圈都不会影响所有顶点度数为奇数这一事实，因此 F 是 G^- 中的生成森林，其中所有顶点的度数均为 1 或 3，符合要求。由于 $|V(G^-)| = n - 2k^*$，根据 [7]，我们有

$$\mathring{s}(G^-) \geq \frac{3}{2}(n - 2k^*) \geq \frac{3}{2}n - 3k^*.$$

□

引理 2.3。若 $|D'| = 2k^* + 1$，则 $\mathring{s}(G^-) > \frac{3}{2}n - 3k^*$.

证明。只有当 $|D| < 2k$ 时， β-顶点的数量才可能为奇数。任意选取一个 β-顶点 v_β，并将 G^- 分成两个不相交子图： $G_1^- = G^- - v_\beta$ 和 G_2^-，其中 v_β是孤立顶点。注意， G_1^-是 k-连通的，因为要使 β-顶点的数量为奇数，必须有 $|D| \leq 2k-1$；因此， G_1^- 是从 $3k$-连通图 G中移除至多 $2k$ 个顶点后得到的。

现在 v_β 已被移除，我们将 D^- 定义为 G_1^- 中剩余的 β 顶点集合。注意，由于 $|D'| = 2k^* + 1$， $|D^-| = 2k^*$ 。根据我们在引理 2.2 中使用的论证，可以得出 $\mathring{\mathrm{s}}(G_1^-) \geq \frac{3}{2}(n - 2k^*) = \frac{3}{2}n - 3k^*$.

由于 G_2^- 仅由一个顶点组成，因此 $\mathring{\mathrm{s}}(G_2^-) = 1$。根据 [6]， $\mathring{\mathrm{s}}(G^-) \geq \mathring{\mathrm{s}}(G_1^-) + \mathring{\mathrm{s}}(G_2^-)$，所以

$$\mathring{\mathrm{s}}(G^-) \geq \frac{3}{2}n - 3k^* + 1 > \frac{3}{2}n - 3k^*.$$

□

推论 2.4. $\mathring{\mathrm{s}}(G^-) \geq \frac{3}{2}n - 3k$

证明。 根据引理 2.2 和引理 2.3，由于 $k^* \leq k$,

$$\mathring{\mathrm{s}}(G^-) \geq \frac{3}{2}n - 3k^* \geq \frac{3}{2}n - 3k.$$

□

定理 2.5。 设 G 为一个 $3k$-连通图，满足 $|V(G)| \geq 4k$ 且具有完美匹配。那么， G 的慢着色数下界为

$$\mathring{\mathrm{s}}(G) \geq \frac{3n}{2} + k.$$

证明。 假设 Lister 首先选择 $4k$ 个顶点 – $2k$ 个匹配对。Painter 的回应是删除标记顶点中的一个独立子集，D；因此 $|D| \leq 2k$。注意， G^- 至少有 $n - 2k$ 个顶点。

根据推论 2.4，我们知道 $\mathring{\mathrm{s}}(G^-) \geq \frac{3}{2}n - 3k$。

在 G^- 上采用最优策略，Lister 通过选择 $4k$ 个顶点并针对这一回应所能达到的最终分数 $\mathring{\mathrm{s}}$ 至少为

$$\mathring{\mathrm{s}}(G) \geq \left(\frac{3}{2}n - 3k\right) + 4k = \frac{3}{2}n + k$$

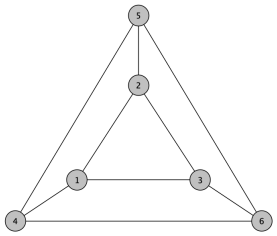
由于无论 Painter 针对我们的 Lister 所作的选择删除哪些顶点，这个界都成立，因此我们得出

$$\mathring{\mathrm{s}}(G) \geq \frac{3}{2}n + k.$$

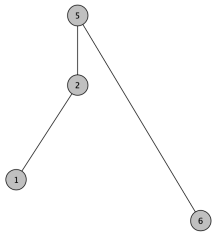
□

推论 2.6. 当 $k = 1$ 时，定理 *2.5* 中的不等式是紧的，但对于 $k > 1$ 则不可能是紧的。

证明。 我们首先注意到，要达到等号，必须满足两个条件。首先，$|D| = 2k$。如果 Painter 可以从每个匹配对中删除一个顶点，也就是说，每个匹配对中各取一个顶点能够构成一个独立集，那么这一条件就能满足。其次，所得的图 G^- 必须满足定理 1.4。该定理要求G^- 是一个森林，并且包含一个生成森林，其中每个顶点的度为 1 或 3。下图称为三棱柱图，同时满足这两个条件。



令 G 为三棱柱图。 G 是 3-连通的，有 $6 > 4$个顶点，并有一个由 {(1,4),(2,5),(3,6)}给出的完美匹配。因此，G 满足定理 2.5 的要求。我们假设 Lister 选择全部 6 个顶点，而 Painter 从两个匹配对中各删去一个顶点，即 3 和 4。



所得图 G^- 是一个森林，并包含一个生成森林，其中顶点的度为 1 和 3。因此，根据定理 1.4，我们有 $\chi_s(G^-) = \frac{3}{2}(4) = 6$。再加上 Lister 的一步，以求得 $\bar{G}$的慢着色数，我们有 $\chi_s(G) \leq 6 + 4 = 10 = \frac{3}{2}(6) + 1$。

为说明该不等式对 $k > 1$ 并不紧，考虑惠特尼定理 [11]，该定理指出 $\kappa(G) \leq \delta(G)$，其中 $\kappa(G)$ 是顶点连通度，$\delta(G)$ 是 G 的最小度。若 G $3k$-连通，则 $\delta(G) \geq 3k$。我们至多删除 $2k$ 个顶点，因此有 $\delta(G^-) \geq 3k - 2k = k$。但是 $k \geq 2$，所以 $\delta(G^-) \geq 2$。因此，G^- 必定含有一个圈，不满足定理 1.4 的要求。由此，对于 $k > 1$，我们可以得出结论：$\chi_s(G) > \frac{3}{2}n + k$。 □

参考文献

[1] James M. Carraher、Thomas Mahoney、Gregory J. Puleo 和 Douglas B. West。广义 theta 图的和可涂色性。*GraphsCombin.*，31(5):1325–1334，2015。[2] Paul Erd˝os、Arthur L. Rubin 和 Herbert Taylor。图的可选择性。载于*Proceedings of the West Coast Conference on Combina-torics, Graph Theoryand Computing (Humboldt State Univ., Arcata,Calif., 1979)*，Congress. Numer.，XXVI，页码 125–157，温尼伯（曼尼托巴省），1980。Utilitas Math. [3] Grzegorz Gutowski、Tomasz Krawczyk、Krzysztof Maziarz、Douglas B. West、Micha-l Zajac 和 Xuding Zhu。稀疏图上的慢着色游戏：k-退化图、平面图和外平面图。*Journal of Com-binatorics*，12(2):283–302，2021。[4] Garth Isaak。2 × n 数组的和列表着色。*Electronic Journal ofCombinatorics*，9(8)，2002，。[5] Thomas R. Mahoney。图的在线可选择性。博士论文，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，2015。[6]Thomas Mahoney、Gregory J. Puleo 和 Douglas B. West。在线和可涂色性：慢着色游戏。*DiscreteMath.*，341(4):1084–1093，2018年。[7] Gregory J. Puleo 和 Douglas B. West。在线和可涂色性：树的慢着色。*Discrete Appl. Math.*，262:158–168，2019。[8] Uwe Schauz。油漆先生与纠错夫人。*Electron. J. Comb.*，16(1)，2009。

[9] Zsolt Tuza。具有局部约束的图着色——综述。*Discuss.Math. Graph Theory*，17(2):161–228，1997。[10] VadimG. Vizing。用指定颜色给图的顶点着色。*Diskret. Analiz*，（29 Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem）：3–10，101，1976。[11] Douglas B. West。图论导论。Prentice Hall，第2版，2000年9月。[12] Xuding Zhu。图的在线列表着色。*Electr. J. Comb.*，16，10，2009。