arXiv:2304.01370v1 [math.RT] 3 Apr 2023

高阶森田–立川对应

Tiago Cruz

Abstract. 表示论中的重要对应可以视为 Morita–Tachikawa 对应的限制。此外，这一对应促使人们研究许多类代数，例如 Morita 代数和 gendo-对称代数。具体而言，Morita–Tachikawa 对应指出，有限维代数上生成元-余生成元的自同态代数，恰好是主维数至少为二的有限维代数。

本文引入拟生成元和拟余生成元的概念，分别推广生成元和余生成元。利用这些新概念，我们提出 Morita–Tachikawa 对应的高阶版本，其中考虑相对于一个自正交模的相对主维数，该模的投射维数和内射维数可以任意。这些新版本也适用于有限生成且作为交换诺特环上的模为投射模的诺特代数。

1. Introduction

著名的 Morita–Tachikawa 对应将主维数至少为二的基本有限维代数，与由一个基本有限维代数和一个无重数生成元-余生成元组成的有序对联系起来（例如参见 [Mue68, Theorem 2]）。这一对应的一个重要特例是著名的 Auslander 对应 [Aus71]，它标志着 Auslander 与 Reiten 的思想开始应用于表示论。Auslander 对应以及许多已知的对应，例如 Iyama高阶 Auslander对应 [Iya07] 和 Iyama–Solberg 对应 [IS18]，也都是 Morita–Tachikawa对应的特例。此外，由这些对应产生的代数也出现在许多不同领域，例如簇理论、同调代数和代数李理论等（参见 [KSX01]；另见 [CIM22]及其中的参考文献）。Morita–Tachikawa对应还促使人们定义并研究许多新的代数类，例如 Morita 代数 [KY13], 、gendo-Frobenius 代数 [Yı 22] 和 gendo-对称代数 [FK11] ，它们分别是自内射代数、Frobenius代数和对称代数在 Morita–Tachikawa对应下的对应对象。关于 Gorenstein 代数在 Morita–Tachikawa对应下的对应对象，另见 [GK15] 。最近，这些对应也开始出现在正合范畴的语境中 [HKvR22, ENI21, Gre22]。

另一方面，这类对应与主维数理论密切相关。近年来，人们越来越关注相对主维数，并将其用作研究某些倾斜模存在性与唯一性的工具（参见 [CBS17、AT21、CP23]及其中的参考文献），也用来研究拟遗传代数上特征倾斜模直和项的自同态代数的表示论（例如参见[KSX01、Cru22b、CE22]）。此外，这些进展表明，相对主维数理论仍处于起步阶段。特别是，该理论需要一个相对于 Morita–Tachikawa对应的对应理论。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16E10，次要分类：16G10，16G30。

Key words and phrases. 森田–Tachikawa对应、生成元、拟生成元、拟余生成元。

从经典主维数转向相对主维数，例如可以将极小 Auslander–Gorenstein 代数所固有的性质推广到更一般的有限维 Gorenstein 代数；这些代数配备了具有良好性质的自正交模。 [CP23]将这类对称为相对 Auslander–Gorenstein 对。但迄今为止，除了一种特殊情形外，尚未发现适用于这类对的相对 Auslander 对应；在该情形下，自正交模的投射维数与内射维数之和至多为一（参见 [LZ21]）。

因此，我们应当预期存在一种相对 Morita–Tachikawa 对应，它既考虑相对主维数，又可用于未来的研究，例如发现相对 Iyama–Solberg 对应，以刻画相对 Auslander–Gorenstein 对。

本文将这一预期具体化，并发展了 Morita–Tachikawa 对应的高阶版本。为此，必须引入生成元和余生成元的高阶版本，并指出 Morita–Tachikawa 对应本身是两种对应的交汇。模范畴的生成元是指包含所有不可分解投射模作为直和项的模，而余生成元则是其对偶概念。对于每个非负整数 n，我们都可以考虑生成元的一种高阶 n 版本，并将其称为 n-拟生成元，以推广模范畴生成元的概念。按照这一术语，生成元恰好是 0-拟生成元。类似地，我们也可以考虑其对偶概念 n-拟余生成元。在如今称为 Morita 理论的发展过程中，Morita 指出，投射模与生成元形成某种二分。事实上，Morita 观察到，任何具有双中心化子性质的投射模，都是其自同态代数上的生成元。本着同样的思路，有限域上有限维代数的 n-拟生成元源自对具有双中心化子性质且投射维数为 n 的自正交模的研究。更确切地说，通过使用 n-拟生成元而非仅使用生成元，我们得到如下对应：

定理（参见定理 3.3）。设 k 为一个域。对于每个非负整数 n，以下两者之间存在双射 Φ 和 Ψ:

$$\Gamma := \left\{ (B, M) \colon \begin{array}{c} B \text{ is a finite-dimensional algebra over } k \\ M \text{ is an } n\text{-quasi-generator of } \operatorname{mod}\text{-}B \end{array} \right\}$$

and

$$\Lambda := \left\{ (A, M) \colon \begin{array}{c} A \text{ is a finite-dimensional algebra over } k, \\ M \text{ is a finitely generated } A\text{-module with projective dimension exactly } n, \\ \text{without self-extensions, that is, } \operatorname{Ext}_A^{i>0}(M, M) = 0 \text{ satisfying} \\ M\text{-}\operatorname{domdim} A \geq 2 \end{array} \right\}$$

如下给出：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xrightarrow{\Phi} \Lambda & & \Lambda \xrightarrow{\Psi} \Gamma \\ (B, M) \mapsto (\operatorname{End}_B(M), M) & \text{and} & (A, M) \mapsto (\operatorname{End}_A(M)^{op}, M) \end{array}.$$

注意， $\Gamma \cap \Lambda$ 是域上有限维代数上的 n-倾斜模的类。固定 $n = 0$后，这个交集 $\Gamma \cap \Lambda$ 就是投射生成元的类，它们是 Morita 理论研究的主要对象。满足 $\operatorname{Ext}_A^{i>0}(M, M) = 0$ 的模 M在文献中称为自正交模。

定理 3.3 中的一一对应，结合其对偶版本后，限制为经典森田–高崎对应的高阶版本。事实上，经典森田–高崎对应对应于以下对应中的情形 $n = m = 0$ 。

定理（见定理 3.5）。设 k 是一个域。对于每一对非负整数 n 和 m，以下对象之间存在一一对应：

$$\Gamma := \left\{ (B, M) : \begin{array}{c} B \text{ is a finite-dimensional algebra over } k \\ M \text{ is an } n\text{-quasi-generator of } \operatorname{mod}\text{-}B \\ M \text{ is an } m\text{-quasi-cogenerator of } \operatorname{mod}\text{-}B \end{array} \right\}$$

$$\text{and} \quad \Lambda := \left\{ (A, M) : \begin{array}{l} A \text{ 是定义在 } k \text{ 上的有限维代数，} M \text{ 是 } A \text{ 一个有限生成的 -模，其投射维数恰为 } n, \text{ 内射维数恰为 } m, \\ \text{且没有自扩张，也就是说，} \operatorname{Ext}^{i>0}_A(M, M) = 0 \\ A \geq 2 \end{array} \right\}.$$

定理 3.5 和定理 3.3 实际上都是针对诺特代数表述的，这些代数在交换诺特环上有限生成且为投射模。

最后，我们探讨自正交拟生成元与同调猜想之间的联系。特别地，我们证明，若松倾斜猜想与 Auslander–Reiten 猜想之间存在一个涉及自正交拟生成元的中间猜想。

2. Preliminaries

本文中，R 均为带单位元的交换诺特环，A 均为投射的诺特 R-代数，即满足以下条件的结合 R-代数：A 作为 R-模是有限生成投射模。我们用 A-mod 表示有限生成左 A-模所构成的范畴，用 mod-A 表示有限生成右 A-模所构成的范畴。记 A-proj 为 A-mod 的满子范畴，其中的模均为投射模。给定 $M \in A$-mod（或 $M \in$mod-A），记 $\operatorname{add}_A M$ 为 A-mod（分别为 mod-A）的满子范畴，其中的模是 M 在 A 上的直和的直和项。用 A^{op} 表示 A 的对代数，用 D 表示标准对偶函子 $\operatorname{Hom}_R(-, R)$: A-mod $\to A^{op}$-mod。给定 $M \in A$-mod，记 $\operatorname{End}_A(M)$ 为 M 的自同态代数，其中乘法 fg 定义为 g 与 f 的复合$f \circ g$，对任意 $f, g \in \in \operatorname{End}_A(M)$ 均如此。用 $\operatorname{pdim}_A M$ 表示 M 关于 A 的投射维数。所谓 (A, R)-正合列，是指一个 A-模的正合列，且作为 R-模的正合列分裂。若 $\operatorname{Ext}^{i>0}_A(M, M) = 0$，则称 $M \in A$-mod 为自正交模。

2.1. 相对主维数。给定 $Q \in A$-模$\cap R$-投射对象，我们称 Q 具有双中心化子性质，如果 R-代数之间的典范映射 $A \to \operatorname{End}_B(Q)$ 是 R-代数的同构，其中 $B = \operatorname{End}_A(Q)^{op}$。

检测双中心化子性质是否存在的一个有用工具是相对主维数。现在，我们将遵循 [Cru22b]和 [Cru22a]，回顾相对主维数的定义及其一些技术细节。

定义 2.1。设 $M, Q \in A$-模 $\cap R$-投射对象。M 相对于 Q的相对主维数（记作 Q-domdim $_{(A,R)} M$）大于或等于 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，如果存在一个 (A, R)-正合列 $0 \to M \to Q_1 \to \cdots \to Q_n$，其中 $Q_i \in \operatorname{add}_A Q$，且该正合列经 $\operatorname{Hom}_A(-, Q)$作用后仍保持正合。若对每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$都有 Q-$\operatorname{domdim}_{(A,R)} M \geq n$，则记作 Q-$\operatorname{domdim}_{(A,R)} M = +\infty$。

特别地，如果存在一个 (A, R)-正合列 $0 \to M \to Q_1 \to \cdots Q_n \to 0$ with$Q_i \in \operatorname{add}_A Q$，且它在 $\operatorname{Hom}_A(-, Q)$ 下仍然正合，那么 Q-主维数$_{(A,R)} M = +\infty$。我们将

用 Q-主维数(A,R) 表示值 Q-主维数$_{(A,R)}$ A。类似地，我们可以通过定义 Q-余主维数$_{(A,R)}$ M := DQ-主维数$_{(A^{op},R)}$ DM，来考察 M 关于 Q 的相对余主维数。若 A 是域 R 上的有限维代数，我们将简写为 Q-主维数$_A$ M；并用 Q-主维数 A 代替 Q-主维数$_A$ A。

对于域上的有限维代数，将 Q 固定为忠实投射内射模，即可从相对主维数中恢复经典主维数。与经典情形类似，相对主维数也具有一些左右对称性，例如 Q-主维数$_{(A,R)}$ $A = Q$-主维数$_{(A,R)}$ DA（见 [Cru22b，推论 3.1.5]）。

相对主维数的一个非常重要的性质是，它可以通过某些 Tor 群的消失性质来刻画。

定理 2.2. 设 $Q \in A$-模 $\cap R$-投射，使得 $\mathrm{Hom}_A(Q,Q) \in R$-投射。记 B 为自同态代数 $\mathrm{End}_A(Q)^{op}$。对于 $M \in A$- 模 $\cap R$- 投射， Q- 主维数 $_{(A,R)}$ $M \geq n \geq 2$ 当且仅当映射 χ^r_{DM}: $\mathrm{Hom}_A(DQ, DM)$ $\otimes_B DQ \to DM$（由 $f \otimes h \mapsto f(h)$ 给出）是一个同构，并且 $\mathrm{Tor}_i^B(\mathrm{Hom}_A(DQ, DM)$ $DQ) = \mathrm{Tor}_i^B$ $(\mathrm{Hom}_A(M, Q)$ $DQ) = 0$, $1 \leq i \leq n-2$。

证明。参见 [Cru22b，定理 3.1.4.]。 □

特别地，只要满足 Q -proj，关于 $DQ \otimes_A Q \in R$的假设就成立。此外，在这种情况下，$B = \mathrm{End}_A(Q)^{op}$ 具有基变换性质（例如参见 [Cru22a，命题 2.3、命题 2.1]）：

$$S \otimes_R \mathrm{End}_A(Q)^{op} \simeq \mathrm{End}_{S\otimes_R A}(S \otimes_R Q)^{op},$$

作为 S-代数，对每个作为 R-代数的交换诺特环 S 都成立。在大多数情况下（当 $\mathrm{End}_A(Q)^{op}$ 仍是具有基变换性质的投射诺特 R-代数时），并且 M 关于 Q具有某种基变换性质时，Q-$\mathrm{domdim}_{(A,R)}$ M 的计算可以归约为在代数闭域上的有限维代数上的计算（参见 [Cru22b，定理 3.2.5.]）。特别是，当$DQ \otimes_A Q$ 和 $DQ \otimes_A M$ 都是有限生成投射 R-模时，情况正是如此。

由定理 2.2 可知，满足 $\mathrm{Hom}_A(Q,Q) \in R$-proj 和 Q-$\mathrm{domdim}_{(A,R)}$ $A \geq 2$ 条件的 $Q \in A$-mod $\cap R$-proj 模具有双中心化子性质。事实上，这样的模Q 具有双中心化子性质，当且仅当 $D\chi^r_{DA}$ 是一个同构（见 [Cru22b，引理 5.1.2.]）。一般而言，映射 $D\chi^r_{DM}$ 可作如下简化：

引理 2.3. 映射 $D\chi^r_{DM}$ 包含在如下交换图中

$$\begin{array}{ccccc} DDM & \xrightarrow[D\chi^r_{DM}]{} & D(\mathrm{Hom}_A(DQ, DM) \otimes_B DQ) & \xrightarrow[\simeq]{\kappa} & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(DQ, DM), DDQ) \\ {\scriptstyle\omega_M}\uparrow{\scriptstyle\simeq} & & & & \downarrow{\scriptstyle\simeq\,\mathrm{Hom}_B(\varphi, DDQ)} \\ M & \xrightarrow{\alpha_M} & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,Q), Q) & \xrightarrow[\simeq]{\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,Q),\omega_Q)} & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,Q), DDQ) \end{array} , \quad (1)$$

其中， α_M是映射 $M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,Q)$ $Q)$，其定义为对每个$m \in M$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_A($ $M, Q)$，有 $\alpha_M(m)(f) = f(m)$。这里， ω 是恒等函子在 A-mod $\cap R$-proj 与 D^2 之间的自然变换，φ是典范映射 $\mathrm{Hom}_A(M,Q) \to \mathrm{Hom}_A(DQ, DM)$，而 κ 是由张量-Hom伴随给出的同构。

证明。事实上，对于任意 $m \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M,Q)$， $h \in DQ$ 都有以下结论：

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,Q), \omega_Q) \circ \alpha_M(m)(f)(h) = \omega_Q(\alpha_M(m)(f))(h) = \omega_Q(f(m))(h) = h \circ f(m)$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_B(\varphi, DDQ)\circ\kappa\circ D\chi^r_{DM}\circ\omega_M(m)(f)(h) &= \mathrm{Hom}_B(\varphi, DDQ)\circ\kappa(\omega_M(m)\circ\chi^r_{DM})(f)(h)\\ = \kappa(\omega_M(m)\circ\chi^r_{DM})(\varphi(f))(h) &= \omega_M(m)\circ\chi^r_{DM}(\varphi(f)\otimes h) = \omega_M(m)(\varphi(f)(h))\\ &= \varphi(f)(h)(m) = h\circ f(m).\end{aligned}$$ □

关于 φ 为同构的情形，参见例如 [Cru22a，命题 2.2.]。

2.2. 生成元。如今，森田提出的一个经典结果指出，生成元是其自同态代数上的投射模。

定理 2.4。设 M 是一个右 A-模。 M 是生成元，当且仅当 M 在 $\mathrm{End}_A(M)$ 上是投射的，且 M 具有双中心化子性质。

证明。例见 [Lan02, XVII, 定理 7.1]。 □

设 $M \in$ mod-$A \cap R$-proj 是 mod-A 的一个生成元。由森田定理以及[Cru22b, 引理 5.1.2、定理 3.1.4] 可知，只要 $DM \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} M \in R$-proj，就有 M-domdim$_A A \geq 2$。固定 $B = \mathrm{End}_A(M)$ 后，森田定理推出 M 在 B 上是投射的，因此

$$\mathrm{Tor}^B_{i>0}(DQ, \mathrm{Hom}_A(A, Q)) \simeq \mathrm{Tor}^B_{i>0}(DQ, Q) = 0. \tag{2}$$

因此，根据 [Cru22b, 定理 3.1.4]，有 M-domdim $A = +\infty$。

另一种理解这一点（对于有限维代数）的方法如下。假设A 是域上的有限维代数，并设 M 是 A的右模，且为A的生成元。因此，极小 add M-逼近总是存在（见 [AS80]）。此外，对于每个 $X \in A$-模，极小右 add M-逼近 $M \to X$ 都是满射。事实上，诱导的序列 $\mathrm{Hom}_A(A, M) \to \mathrm{Hom}_A(A, X)$ 是满射，因为 $A \in$add M。因此， M-codomdim$_A DA = +\infty$。根据 [Cru22b，推论 3.1.5.]， M-domdim $A = M$-codomdim$_A DA = +\infty$。

推论 2.5. 设 A 是一个投射的诺特 R-代数，且 $M \in A^{op}$-mod$\cap R$-proj。若M是 A作为右模的生成元，并且 $M \otimes_A DM \in R$-proj，则 M-domdim$(A, R) \geq 2$。

证明。根据假设， $A \in$add M，因此对于 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，都有 $R/\mathfrak{m} \otimes_R A \in$add $R/\mathfrak{m} \otimes_R M$。这意味着 $R/\mathfrak{m} \otimes_R M$ 是 $R/\mathfrak{m} \otimes_R A$ 上的生成元。根据前面的讨论，对于 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，都有 $R/\mathfrak{m} \otimes_R M$-domdim $R/\mathfrak{m} \otimes_R A \geq 2$。由 [Cru22b，定理 3.2.5.]，有 M-domdim$(A, R) \geq 2$。□

2.3. 余生成元。模 $M \in A$-mod $\cap R$-proj 称为 (A, R)-余生成元，如果 $DA \in$add M。如果 $M \in$add DA，则称其为 (A, R)-内射。注意，由于 A 是投射诺特的， M 是 (A, R)-余生成元，当且仅当 DM 是 A^{op} 的生成元。因此，关于生成元的所有结果都可以对偶化为关于 (A, R)-余生成元的结果。特别要注意的是，森田关于 (A, R)-余生成元的定理如下：

推论 2.6. 设 $M \in$ mod-$A \cap R$-proj。 M 是当且仅当 M 是 $(\mathrm{End}_A(M)\ R)$-内射且 M 具有双中心化子性质的 (A, R)-余生成元。

2.3.1. 相对内射维数。（A, R）-内射模首次出现在 [Hoc56] 中。在基环上为投射模的（A, R）-内射模，恰好是 A-mod$\cap R$-proj 中的内射对象。事实上，它们可以用以下方式刻画：

命题 2.7. 设 $M \in A$-mod$\cap R$-proj。以下断言等价。

(a) M 是(A, R)-内射的；(b) 每个(A, R)-正合列 $0 \to M \to V \to W \to 0$ 都在 A上分裂；(c) A-模的典范同态 $M \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M)$在 A上分裂；

(d) 函子$\mathrm{Hom}_A(-,M)$在(A,R)-正合列上是正合的；(e) 对每个 $X\in A$-模$\cap R$-投射，$\mathrm{Ext}^1_A(X,M)=0$。

证明。例如参见 [Cru22a，命题 2.6.，命题 2.10]。 □

给定 $M\in A$-模 $\cap R$-投射，我们称 M具有 (A,R)-内射维数 n，记作 $\mathrm{idim}_{(A,R)}M$，当且仅当对所有 $N\in A$-模 $\cap R$-投射都有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(N,M)=0$，且对某个 $X\in A$-模$\cap R$-投射有 $\mathrm{Ext}^{n+2}_A(X,M)\neq 0$。

根据命题 2.7，作为 R-模的 (A,R)-内射模是相对于 $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ 的无环对象，其中 $X\in A$-模 $\cap R$-投射是任意的。因此，可以使用由 (A,R)-内射模构成的余解消来计算 (A,R)-内射维数。给定 $M\in A$-模$\cap R$-投射，对 DM 的投射分解应用 D 即可得到这样的余解消。

引理 2.8. 设 $M\in A$-mod$\cap R$-proj。以下断言等价。

(1) $\mathrm{idim}_{(A,R)}M\leq n$；(2) 若 $0\to M\to X_0\to X_1\to\cdots\to X_{n-1}\to M'\to 0$是一个 (A,R)-正合列，且其中所有$X_i\in A$-mod $\cap R$-proj 都是 (A,R)-内射的，则 M'是 (A,R)-内射的。

证明。假设 (b) 成立。则 M存在长度至多为$n+1$的 (A,R)-内射余解消（计入 X_0）。由于 (A,R)-内射余解消对于所有 $X\in A$-mod $\cap R$-proj 关于 $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ 都是无环的，因此 $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(X,M)=0$ 对所有 $X\in A$-mod $\cap R$-proj 均成立。反之，考虑一个 (A,R)-正合列 $0\to M\to X_0\to X_1\to\cdots\to X_{n-1}\to M'\to 0$，其中所有 $X_i\in A$-mod $\cap R$-proj 都是 (A,R)-内射的。由 $M\in R$-proj 可得 $M'\in R$-proj。设$X\in A$-mod $\cap R$-proj。利用所有 X_i 关于 $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ 都是无环的这一事实，将 $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ 作用于前述正合列，可得 $0=\mathrm{Ext}^{n+1}_A(X,M)\simeq\mathrm{Ext}^1_A(X,M')$。由命题 2.7，$M'$是 (A,R)-内射的。□

注 2.9. 引理 2.8 的一个直接推论是等式

$$\mathrm{pdim}_A M=\mathrm{idim}_{(A^{op},R)}DM$$

对每个 $M\in A$-模$\cap R$-投射对象都成立。

这一事实也可以直接由以下结果推出。

引理 2.10. 设 $M,N\in A$-模 $\cap R$-投射对象。那么对所有 $i\geq 0$，有 $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\simeq\mathrm{Ext}^i_{A^{op}}(DN,DM)$，且 $\mathrm{Tor}^A_i(DM,N)\simeq\mathrm{Tor}^{A^{op}}_i(N,DM)$。

证明. 第一个等式见 [Cru22a, 引理 2.15]。对于第二个，注意到

$$\mathrm{Tor}^{A^{op}}_i(N,DM)=H_i(N^\bullet\otimes_{A^{op}}DM)\simeq H_i(DM\otimes_A N^\bullet)=\mathrm{Tor}^A_i(DM,N),\tag{3}$$

对所有 $i\geq 0$，其中 $N^\bullet$ 表示 N 在 A上的删除项的左投射分解。 □

3. Quasi-generators

现在我们将引入拟生成元和拟余生成元，以证明主要结果。

定义 3.1. 设 $M\in$ mod-$A\cap R$-proj，且 n 为非负整数。若 $M\otimes_A DM\in R$-proj，并且 n 是满足存在一个 (A,R)-正合列的最小整数，则称 M 为 mod-A 的 n-拟生成元

$$0\to A\to M_0\to\cdots\to M_n\to 0\tag{4}$$

该正合列在 $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ 下仍保持正合，且每个 M_i都属于 $\mathrm{add}_A M$。

对偶地，我们定义相对拟余生成元的概念。

定义 3.2. 设 $M \in \text{mod-}A \cap R\text{-proj}$ 且 n 为非负整数。若 $M \otimes_A DM \in R\text{-proj}$，且 n 是满足存在一个 (A,R)-正合列的最小整数，则称 M 为一个 n-拟 (A,R)-余生成元

$$0 \to M_n \to \cdots \to M_0 \to DA \to 0 \tag{5}$$

该正合性在 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$作用下仍然成立，并且每个 M_i 都属于 $\mathrm{add}_A M$。

这样，右模 M 是 mod-A 的 n-拟生成元，当且仅当 DM 是一个n-拟（A^{op},R）-余生成元。采用这一术语是为了与[Cru22a]中的用法保持一致。类似地，也可以为左模考虑相同的定义。

定理 3.3. 设 R 是一个交换诺特环。对于每个非负整数 n，存在 Φ 和 Ψ之间的双射：

$$\Gamma := \left\{ (B,M) \colon \begin{array}{c} B \text{ is a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \text{ is an } n\text{-quasi-generator of } \mathrm{mod}\text{-}B \end{array} \right\}$$

and

$$\Lambda := \left\{ (A,M) \colon \begin{array}{c} A \text{ a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \in A\text{-mod} \cap R\text{-proj} \text{ has the following properties:} \\ M\text{-domdim}(A,R) \geq 2,\ \mathrm{pdim}_A M = n, \\ DM \otimes_A M \in R\text{-proj} \text{ and } \mathrm{Tor}^A_{i>0}(DM,M) = 0 \end{array} \right\}$$

如下给出：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xrightarrow{\Phi} \Lambda & & \Lambda \xrightarrow{\Psi} \Gamma \\ (B,M) \mapsto (\mathrm{End}_B(M), M) & \text{and} & (A,M) \mapsto (\mathrm{End}_A(M)^{op}, M) \end{array}.$$

证明。设$(A,Q) \in \Lambda$。由于 $\mathrm{pdim}_A Q = n$，存在一个正合列

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to Q \to 0 \tag{6}$$

满足 $P_i \in A$-投射条件。应用 $DQ \otimes_A -$，得到正合列

$$0 \to DQ \otimes_A P_n \to DQ \otimes_A P_{n-1} \to \cdots \to DQ \otimes_A P_0 \to DQ \otimes_A Q \to 0 \tag{7}$$

由于满足 $DQ \otimes_A Q \in R$-投射条件，(7) 是 $(^{op}, R)$-正合的，且 $\mathrm{End}_A(Q)^{op}$ 是一个投射诺特《代数》。记 $B = \mathrm{End}_A(Q)^{op}$。将 D 应用于 (7)，得到一个 (B, R)-正合列（另见 [Cru22a，命题 2.1.]）

$$0 \to B \to \mathrm{Hom}_A(P_0,Q) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_A(P_n,Q) \to 0. \tag{8}$$

注意，每个 $\mathrm{Hom}_A(P_i,Q) \in$都是 $\mathrm{Hom}_A(A,Q) =$的直和项。为证明 (8) 在施加 $\mathrm{Hom}_B(-,Q)$ 后仍然正合，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{P_n}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{P_{n-1}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(P_n,Q)\ Q) & \to & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(P_{n-1},Q)\ Q) & \cdots & \to & \mathrm{Hom}_B(B,Q) & 0 \end{array} \longrightarrow$$

由于 Q-$\mathrm{domdim}(A,R) \geq 2$，根据 [Cru22b, 定理 3.1.3.]，映射 $\chi^r_{DP_i}$ 是同构，且 $Q \otimes_B DQ \simeq DA \in R$-proj。由引理 2.3，前一个图表的交换性以及上方行的正合性表明，在 $\mathrm{Hom}_B(-,Q)$ 下，(8) 仍然正合。这说明，对于某个 $i \leq n$，Q 是 mod-B 的一个 i-拟生成元。它确实是 mod-B 的一个 n-拟生成元，因为将 $\mathrm{Hom}_B(-,Q)$ 应用于长度为 i 的正合列 (4)，会得到一个 Q 在 A 上长度为 i 的投射分解；这将与 Q 在 A 上的投射维数为

n。此外， Q 具有双中心化子性质，因为 Q-domdim$(A,R) \geq 2$ （见 [Cru22b, 引理 5.1.2.]），也就是说， $A \simeq \mathrm{End}_B(Q)$ 作为 R-代数。由此可知， $\Phi \circ \Psi$ 是单位元。

反过来，假设 $(B,Q) \in \Gamma$。根据假设， Q-domdim(B,R) 为无穷大，且$Q \otimes_B DQ \in R$-proj。因此， $A := \mathrm{End}_B(Q)$ 是一个投射的诺特 R-代数。根据 [Cru22b, 定理 3.1.4] （针对右模），典范映射

$$DQ \otimes_A Q \simeq DQ \otimes_{\mathrm{End}_B(Q)} \mathrm{Hom}_B(DQ, DB) \to DB$$

是一个同构，并且 $\mathrm{Tor}^A_{i>0}(DQ,Q) = \mathrm{Tor}^A_{i>0}(DQ, \mathrm{Hom}_B(DQ,DB)) = 0$。因此， $DQ \otimes_A Q \in R$-proj。此外， Q 具有双中心化子性质，也就是说，根据 [Cru22b, 引理 5.1.2.]， $B \simeq \mathrm{End}_A(Q)^{op}$ 作为 R-代数。因此，假设 Φ定义良好，我们得到 $\Psi \circ \Phi$是单位元。于是，只需证明 $(A,Q) \in \Lambda$。根据构造，由于 $Q \otimes_B DQ \in R$-proj，典范映射 $Q \otimes_B DQ \to D\,\mathrm{Hom}_B(Q,Q) = DA$ 是一个同构（见 [Cru22a, 命题 2.1.]）。根据 [Cru22b, 定理 3.1.4.]， Q-domdim$(A,R) \geq 2$。还需证明 $\mathrm{pdim}_A Q = n$。根据假设，存在一个 (B,R)-正合列 $0 \to B \to Q_0 \to \cdots \to Q_n \to 0$，它在施加 $\mathrm{Hom}_B(-,Q)$ 后仍然正合。由于每个 $\mathrm{Hom}_B(Q_i,Q)$ 都是 A 上的投射模，我们得到 $\mathrm{pdim}_A Q \leq n$。若 $\mathrm{pdim}_A \leq i < n$，则根据前一方向， Q 将是 mod-$\mathrm{End}_A(Q)^{op}$ =mod-B的一个 i-拟生成元，这与 n的极小性矛盾。□

对定理 3.3 进行对偶化，可得如下结论。

定理 3.4. 设 R 为交换诺特环。对每个非负整数 n，存在双射 Φ和 Ψ，其对应关系如下：

$$\Gamma := \left\{ (B,M) : \begin{array}{c} B \text{ is a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \text{ is an } n\text{-quasi-}(B,R)\text{-cogenerator as right } B\text{-module} \end{array} \right\}$$

and

$$\Lambda := \left\{ (A,M) : \begin{array}{c} A \text{ a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \in A\text{-mod} \cap R\text{-proj has the following properties:} \\ M\text{-domdim}(A,R) \geq 2,\ \mathrm{idim}_{(A,R)} M = n, \\ DM \otimes_A M \in R\text{-proj and } \mathrm{Tor}^A_{i>0}(DM,M) = 0 \end{array} \right\}$$

定义如下：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xrightarrow{\Phi} \Lambda & & \Lambda \xrightarrow{\Psi} \Gamma \\ (B,M) \mapsto (\mathrm{End}_B(M), M) & \text{and} & (A,M) \mapsto (\mathrm{End}_A(M)^{op}, M) \end{array}.$$

证明。根据拟生成元的定义， D 在 Γ 与 Γ 之间诱导出一个双射，其对应关系为 $(B,M) \mapsto (B^{op}, DM)$。将此双射记为 γ。由引理 2.10、备注 2.9, [Cru22b、推论 3.1.5]， D在 Λ与 Λ 之间诱导出一个双射，其对应关系为 $(A,M) \mapsto (A^{op}, DM)$。将此双射记为 ψ。映射 Φ 是 $\psi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma$与 Ψ的复合，而 Ψ是复合$\gamma^{-1} \circ \Psi \circ \psi$。因此，由定理 3.3 即得所需结论。□

结合定理 3.4 和定理 3.3，我们得到：

定理 3.5。设 R 为交换诺特环。对于每一对非负整数 n 和 m，以下对象之间存在一一对应：

$$\Gamma \cap \Gamma := \left\{ (B,M) : \begin{array}{c} B \text{ is a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \text{ is an } n\text{-quasi-generator of mod-}B \\ M \text{ is an } m\text{-quasi-}(B,R)\text{-cogenerator as right } B\text{-module} \end{array} \right\}$$

and

$$\Lambda \cap \Lambda := \left\{ (A,M) \colon \begin{array}{c} A \text{ a projective Noetherian } R\text{-algebra,} \\ M \in A\text{-mod} \cap R\text{-proj has the following properties:} \\ M\text{-domdim}(A,R) \geq 2,\ \operatorname{idim}_{(A,R)} M = m,\ \operatorname{pdim}_A M = n \\ DM \otimes_A M \in R\text{-proj and } \operatorname{Tor}^A_{i>0}(DM, M) = 0 \end{array} \right\}.$$

特别地，这推广了 [Cru22a，定理 4.1]，并因此也推广了 [Mue68，定理 2]；其已发表的证明建立在 [Tac64、Mor58] 的工作之上。

4. Self-orthogonal quasi-generators

现在假设 A 是域 k 上的有限维代数。回顾倾斜模的定义。

定义 4.1。给定 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，若模 $T \in A$-mod 满足以下条件，则称其为 n-倾斜模：

(a) T 的投射维数不超过 n （在 A 上）；(b) T 是自正交的，即 $\operatorname{Ext}^{i>0}_A(T,T) = 0$；
(c) 存在正合列 $0 \to A \to T_0 \to \cdots \to T_n \to 0$，其中所有 $T_i \in$ 均属于 $\operatorname{add}_A T$。

由于 n-倾斜模是自正交的，最后一个条件可以改为：T 是某个 $0 \leq i \leq n$ 的 i-拟生成元。

反过来，拟生成元成为倾斜模的必要且充分条件是什么？我们提出如下猜想：

猜想 4.2. 设 A 是域 k上的有限维代数。每个自正交n-拟生成元的投射维数至多为 n。

因此，该猜想意味着每个自正交 n-拟生成元实际上都是一个 n-倾斜模。注意，如果 $n = 0$，那么猜想 4.2 正是 [AR75] 中提出的 Auslander–Reiten 猜想。类似的猜想还有若松倾斜猜想，该猜想最初由 [Wak88] 提出。

猜想 4.3（若松倾斜猜想）。设 A 是域上的有限维代数。设 $T \in A$-模。若 T 是自正交且投射维数有限，并满足T-$\operatorname{domdim}_A A = +\infty$，则 T是一个倾斜模。

我们可以看出，若松倾斜猜想实际上强于猜想 4.2。

命题 4.4. 若若松倾斜猜想对域上的所有有限维代数均成立，则猜想 4.2 也成立。

证明. 设 M 是一个自正交的 n-拟生成元（作为左 A-模）。特别地，$0 = D\operatorname{Ext}^{i>0}_A(M,M) = \operatorname{Tor}^A_{i>0}(M, DM)$。由定理 3.3，$M$ 是自正交的，并且作为 $\operatorname{End}_A(M)$-模，其投射维数恰为 n，且 M-$\operatorname{domdim}_{\operatorname{End}_A(M)} \operatorname{End}_A(M) \geq 2$。记 B 为自同态代数 $\operatorname{End}_A(M)$。由于 $\operatorname{End}_B(M)^{op} \simeq A$，根据 [Cru22b，定理 3.1，4]，我们得到 M-$\operatorname{domdim}_B B = +\infty$。因此，$M \in B$-mod 满足若松倾斜猜想的条件，故若松倾斜猜想表明，M 是一个 n-倾斜模，其系数环为 B。因此，对于某个 $i = 0$，M 是 mod-B 的 i-拟生成元，n，....., 。由定理 3.3，我们得到 M 在 A 上的投射维数为 i 。□

因此，若固定 $n = 0$，我们便能以另一种方式看出，若松倾斜猜想比 Auslander–Reiten 猜想更强。通过

结合 [BR07，第 3.1] 命题与 [AR75] 也可以看出这一事实。因此，将上述猜想简称为其首字母缩写后，它们之间的关系如下：

$$(WTC) \implies (C4.2) \implies (ARC).$$

猜想 4.2 的另一个有趣推论，是用拟生成对象刻画 Gorenstein 代数。事实上，如果猜想 4.2 对域上的所有有限维代数都成立，那么域上的有限维代数 A 是 Gorenstein 代数，当且仅当DA是某个非负整数 n 对应的 n-拟生成元。

Acknowledgments

作者谨此感谢 Chrysostomos Psaroudakis 为改进这份手稿提出的意见。

References

[AR75] M. Auslander 和 I. Reiten. 关于中山猜想的一种推广形式。Proc. Am. Math. Soc., 52:69–74, 1975. doi:10.2307/2040102.[AS80] M. Auslander 和 S. O. Smalø. Artin 代数上的预投射模。J. Algebra, 66:61–122, 1980. doi:10.1016/0021-8693(80)90113-1.[AT21] T. Adachi 和 M. Tsukamoto. 关于内射模的倾斜模与主维数。Q. J. Math., 72(3):855–884, 2021. doi:10.1093/qmath/haaa050.[Aus71]M. Auslander. Artin 代数的表示维数。在 Bernice Auslander 协助下编写。玛丽女王学院数学笔记。伦敦：玛丽女王学院。179 页，1971.[BR07] A. Beligiannis 和 I. Reiten. 挠理论的同调与同伦方面，第 883 卷，Mem. Am. Math. Soc. 普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS），2007. doi:10.1090/memo/0883.[CBS17]W. Crawley-Boevey 和 J. Sauter. 关于表示有限代数的箭图格拉斯曼簇与轨道闭包。Math. Z., 285(1-2):367–395, 2017. doi:10.1007/s00209-016-1712-z.[CE22] T. Cruz 和 K. Erdmann. Temperley-Lieb 代数的拟遗传覆盖与相对主维数。2022. arXiv:2212.00099.[CIM22] A. Chan、O. Iyama 和 R. Marczinzik. 主 Auslander-Gorenstein 代数与 Koszul 对偶。2022. arXiv:2210.06180.[CP23]T. Cruz 和 C. Psaroudakis. 相对 Auslander–Gorenstein 对。2023. arXiv:2302.10704.[Cru22a]T. Cruz. Noetherian 代数主维数的整数理论。《代数杂志》，591:410–499，2022. doi:https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.09.029.[Cru22b] T. Cruz. 关于分裂拟遗传覆盖与 Ringel 对偶，2022. arXiv:2210.09344.[ENI21] R. Ebrahimi 和 A. Nasr-Isfahani. 正合范畴的高阶 Auslander 对应。2021. arXiv:2108.13645.[FK11] M. Fang 和 S. Koenig. 对称代数上生成元的自同态代数。J. Algebra, 332(1):428–433, 2011. doi:10.1016/j.jalgebra.2011.02.031.[GK15] N. Gao 和 S. Koenig. 等级、主维数与 Gorenstein 代数。J. Algebra, 427:118–141, 2015. doi:10.1016/j.jalgebra.2014.11.028.[Gre22] J. F. Grevstad. 正合范畴的高阶 Auslander–Solberg 对应。2022. arXiv:2207.05547.

[HKvR22]R. Henrard、S. Kvamme 和 A.-C. van Roosmalen. 正合范畴的 Auslander 公式与对应。Adv. Math., 401:65, 2022. 编号 108296. doi:10.1016/j.aim.2022.108296.[Hoc56] G. Hochschild. 相对同调代数。Trans. Am. Math. Soc., 82:246–269, 1956. doi:10.2307/1992988.[IS18] O. Iyama 和 Ø. Solberg. Auslander-Gorenstein 代数与预簇倾斜。Adv. Math., 326:200–240, 2018. doi:10.1016/j.aim.2017.11.025.[Iya07]O. Iyama. Auslander 对应。Adv. Math., 210(1):51–82, 2007. doi:10.1016/j.aim.2006.06.003.[KSX01] S. K¨onig、I. H. Slung˚ard 和 C. Xi. 双中心化子性质、主维数与倾斜模。Journal of Algebra, 240(1):393–412, 2001. doi:10.1006/jabr.2000.8726.[KY13]O. Kerner 和 K. Yamagata. Morita 代数。J. Algebra, 382:185–202, 2013. doi:10.1016/j.jalgebra.2013.02.013.[Lan02] S. Lang. 《代数》，Grad. Texts Math. 第211卷。纽约：Springer，第3版修订版，2002.[LZ21] S. Li 和 S. Zhang. 具有有限相对主维数的代数与几乎 n-预簇倾斜模。J. Pure Appl. Algebra, 225(2):论文编号 106498，19页，2021. doi:10.1016/j.jpaa.2020.106498.[Mor58] K. Morita. 模的对偶及其在满足极小条件的环理论中的应用。Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A, 6:83–142, 1958.[Mue68] B. J. Mueller. 按主维数分类代数。Can. J. Math., 20:398–409, 1968. doi:10.4153/CJM-1968-037-9.[Tac64] H. Tachikawa. 关于 QF-3 代数的主维数。Trans. Amer. Math. Soc., 112:249–266, 1964. doi:10.2307/1994293.[Wak88] T. Wakamatsu. 关于自扩张平凡的模。J. Algebra, 114(1):106–114, 1988. doi:10.1016/0021-8693(88)90215-3.[Yı22] C.. Yırtıcı. Gendo-Frobenius 代数与余乘法。Algebr Represent Theor, 2022. doi:10.1007/s10468-022-10156-z.

(Tiago Cruz) Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: tiago.cruz@mathematik.uni-stuttgart.de