arXiv:2304.01379v1 [math.PR] 3 Apr 2023

感染年龄依赖的传染性流行病的灭绝时间

Anicet Mougabe–Peurkor *、Ibrahima Dram´e †、Modeste N'zi ‡ 和 Etienne Pardoux **

2023年4月5日

摘要

本文研究次临界流行病灭绝时间的分布函数。在足够大比例的人群已获得免疫和/或感染者的传染性降低，使得有效再生数小于 1 的情况下，我们对 SIR/SEIR 模型进行研究。该模型中，感染者的传染性依赖于感染年龄，这与 Kermack and McKendrick 在 1927 年的开创性论文中提出的模型相同 [9]。我们的主要结论是，将模型简化为常微分方程 SIR 模型（流行病学文献中普遍采用的做法），会导致对灭绝时间的估计偏短。

关键词：流行病模型；分枝过程；灭绝时间；感染年龄依赖的传染性；常微分方程 SIR 模型；有效再生数。

1 引言

考虑一场正在消退的流行病：感染者数量M 适中且不断减少，而人群总规模N 则大得多。在这一阶段，确定性模型的近似不再适用。与流行病的初期阶段一样，末期可以很好地用分枝过程来近似；在此情形下，这是一种次临界分枝过程。因此，灭绝时间是随机的。了解这一灭绝时间的分布函数颇有意义。事实上，如果次临界状态部分归因于对人群施加的某些规定，例如在公共交通工具、教室、工作场所、剧院等场所佩戴口罩，那么评估这些规定必须维持多久就十分重要。

我们的流行病模型是 SIR/SEIR 模型，即我们假设个体感染并康复后，会终生对这种疾病具有免疫力。这并不完全符合现实。不过，如果所研究时期不太长，那么在此期间失去免疫力的个体数量可以忽略不计。

*费利克斯·乌弗埃-博瓦尼大学，阿比让，科特迪瓦。mougabeanicet@yahoo.fr
†谢赫·安塔·迪奥普大学达喀尔分校，理学院，数学与应用实验室，16180 达喀尔-法恩，塞内加尔。iboudrame87@gmail.com
‡费利克斯·乌弗埃-博瓦尼大学，阿比让，科特迪瓦。modestenzi@yahoo.fr **艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，I2M，马赛，法国。etienne.pardoux@univ-amu.fr

另一方面，我们分析所依据的随机 SIR/SEIR 模型是非马尔可夫的。遵循 Kermack–McKendrick [9]以及 Forien、Pang、Pardoux [5], 的思路，我们考虑这样一种模型：每位感染者的传染性取决于感染年龄（且具有随机性，不同个体对应的实现值独立同分布）。我们将具有单个祖先的近似非马尔可夫分枝过程的灭绝时间分布函数刻画为一个 Volterra 型积分方程的唯一解，并给出该方程的收敛数值近似。该方程的推导基于 Crump 和 Mode [3]提出的方法。根据这一结果，我们在定理 3.5 中推导出一个公式，用于计算在时间 t_0 之后还需等待多久，流行病才会灭绝；前提是在时间t_0 时，大小为N 的人群中有 M名感染者，且 $M << N$。

借助数值方案，我们计算灭绝时间分布函数的一个近似，并将结果与一个马尔可夫分枝过程的灭绝时间分布函数进行比较。该分枝过程近似于经典马尔可夫 SIR 模型（其大数定律极限是最标准的 SIR 常微分方程模型），且其分布函数已有明确表达式。比较的两个模型具有相同的有效再生数R_{eff}（在流行病当前阶段，一名感染者平均拥有的“后代”数量），并且具有相同的连续时间指数衰减率 ρ 。我们的结论是，通常的 SIR 常微分方程模型会低估灭绝时间。

我们的研究受到 Griette 等人近期工作的启发 [7], ；该研究中，作者忽略了末期发生的新感染。值得注意的是，对于 2020 年武汉新冠疫情结束阶段的情况，数据支持这一近似。我们的研究并未采用这种简化假设，而是允许传染性遵循非常一般的规律，并允许传染期的持续时间遵循完全任意的规律。

本文结构安排如下。第 2 节介绍变化传染性 SIR 模型及其分枝过程近似。第 3 节研究分枝过程消亡时间的分布函数。第 4 节介绍几个 SIR/SEIR 模型的例子，包括经典的常微分方程 SIR 模型和常微分方程 SEIR 模型，并说明我们所考虑的变化传染性类型。第 5 节比较分枝过程近似、变化传染性模型和常微分方程 SIR 模型的消亡时间。第 6 节讨论比较所得的结果。最后，第 7 节（附录）证明第 3 节所建立方程的数值近似格式的收敛性。

记号 在下文中，我们使用以下记号： $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, $\mathbb{R}$ =$(-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 和 $\mathbb{R}_- = [0, \infty)$。对于 $x \in \mathbb{R}_+$, $[x]$ 表示 x 的整数部分， $\lceil x \rceil$ （即$\lfloor x \rfloor$）表示上取整函数（即下取整函数）。对于 $x \in \mathbb{R}$， x^+ （即 x^-）表示 x 的正部（即负部）。对于 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$， $a < b$， $\mathscr{U}([a, b])$ 表示 $[a, b]$上的均匀分布。$D([0, \infty))$ 表示从 $[0, \infty)$ 到 $\mathbb{R}$的函数空间，其中的函数在任意 $t > 0$ 处右连续且存在左极限。我们总是赋予空间 $D([0, \infty))$ Skorohod 拓扑，关于其定义，请参阅 Billingsley [2]。

2 具有变化的传染性的 SIR 模型

2.1 流行病模型

设 $\{\lambda_j(t), t \geq 0\}, j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 是一组相互独立的非负函数，其中 $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ 同分布，且 $\{\lambda_j\}_{j\leq -1}$ 也同分布。我们假设这些函数几乎必然属于 $D([0,\infty))$。考虑一个 SIR模型，其中初始时已感染的第 j 个个体在时刻 t 的传染性为 $\lambda_{-j}(t)$，而在时刻 0 之后感染的第 j 个个体在时刻 t 的传染性为 $\lambda_j(t-\tau_j)$，其中 $0<\tau_1<\cdots<\tau_\ell<\cdots$ 表示人群中依次发生感染的时刻。量 $t-\tau_j$ 是个体 j 在时刻 t 的感染时长。注意，我们假设 λ_j 在 $\mathbb{R}_-$上为零。新感染的个体是在全体人群中随机均匀选取的；若该个体是易感者，则在其感染时刻从 S 舱室转入 I舱室，否则该个体的状态不变。函数 $\lambda_j(t)$ 的示例将在下文给出。该函数最初可以在暴露期内为零，随后个体变得具有传染性；当感染时长达到 $\eta_j = \sup\{t : \lambda_j(t) > 0\}$时，个体康复（即转入康复者舱室），并终身具有免疫力。显然，一个重要的量是时刻 t 人群中的感染力总和：$\mathfrak{F}^N(t)$，即该时刻所有感染个体的传染性之和。这里 N 是人群中的个体总数。三个舱室中的个体数之和随时间保持不变：对于所有 $t \geq 0$，$S^N(t)+I^N(t)+R^N(t)=N$。对于 $X = S$、I 或 R，我们定义重归一化量 $\bar{X}^N(t) = X^N(t)/N$。[5]的主要结果是，当 $N \to \infty$时，$(\bar{S}^N(t), \bar{\mathfrak{F}}^N(t), \bar{I}^N(t), \bar{R}^N(t)) \to (\bar{S}(t), \bar{\mathfrak{F}}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$，其中极限是下列积分方程组的唯一解；该方程组已见于 Kermack and McKendrick [9]的开创性论文中：

$$\begin{cases} \bar{S}(t) &= \bar{S}(0) - \int_0^t \bar{S}(s)\bar{\mathfrak{F}}(s)ds, \\ \bar{\mathfrak{F}}(t) &= \bar{I}(0)\bar{\lambda}^0(t) + \int_0^t \bar{\lambda}(t-s)\bar{S}(s)\bar{\mathfrak{F}}(s)ds, \\ \bar{I}(t) &= \bar{I}(0)F_0^c(t) + \int_0^t F^c(t-s)\bar{S}(s)\bar{\mathfrak{F}}(s)ds, \\ \bar{R}(t) &= \bar{R}(0) + \bar{I}(0)F_0(t) + \int_0^t F(t-s)\bar{S}(s)\bar{\mathfrak{F}}(s)ds, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$\bar{\lambda}^0(t) = \mathbb{E}[\lambda_{-1}(t)]$ 和 $\bar{\lambda}(t) = \mathbb{E}[\lambda_1(t)]$，$F_0$（分别为 F）是 η_{-1}（分别为 η_1）的分布函数，并且 $F_0^c(t) = 1-F_0(t)$，$F^c(t) = 1-F(t)$。当 $\lambda \in D$ 几乎处处成立，且对某个 $\lambda^* > 0$，$0 \leq \lambda_j(t) \leq \lambda^*$ 几乎处处对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $t \geq 0$ 成立时，该收敛成立，见 [6]。[5]中的原始证明对 λ 施加了更多限制。

2.2 分枝过程近似

假设在时刻 t_0，人群中只有中等数量 $M << N$ 的个体受到感染，并且一个感染个体所感染的个体的平均数量 $R_{eff} = \bar{S}(t_0)\int_0^\infty \bar{\lambda}(t)dt$ 满足 $R_{eff} < 1$。那么，该流行病正在消退。可以用下面的非马尔可夫连续时间分枝过程对其进行良好近似。我们将在下一节研究其灭绝时间，并推导出在t_0 之后等待流行病灭绝所需时间的良好近似。注意，对于任意 $t \geq t_0$，我们用 $\bar{S}(t_0)$近似比例 $\bar{S}(t)$。

我们考虑分枝过程 $Z(t)$，初始时在时间 0 只有一个祖先。人群中的第 j 个体独立于所有其他个体，存活时长为 η_j，并在其寿命期间以速率 $\bar{S}(t_0)\lambda_j(t)$ 一次生育一个子代，其中（η_j λ_j）如上所述，

如上所述。这显然是一个非马尔可夫的连续时间分枝过程，属于 Crump–Mode–Jagers分枝过程这一类。

3 与变化传染性模型相关的分枝过程的灭绝时间

此后，$t \geq 0$表示$t - t_0 (t \geq t_0)$。我们定义 $\hat{} \lambda(t) := \bar{} S(t_0)\lambda(t)$。令$Z(t)$表示在连续时间分枝过程中，一个出生（即感染）于时刻0的个体在t 时的后代数量；该过程描述了t时感染个体的数量。这个祖先会在时间区间 $[0, \eta]$内以随机变化的速率 $\lambda(t)$感染$\hat{}$个易感者。其后代的行为方式相同，且彼此独立。

本文对感染力函数作如下假设。

假设 (H) 我们假设存在一个常数 $\lambda^* > 0$，使得

$$\lambda(t) \leq \lambda^* \text{ almost surely, for all } t \geq 0.$$

令$T_{ext} = \inf\{t > 0 : Z(t) = 0\}$ 表示流行病的灭绝时间；$G(s,t) = \mathbb{E}\left(s^{Z_t}\right), |s| \leq 1$表示$Z(t)$的概率生成函数；$F(t) = G(0,t)$表示灭绝时间的分布函数。

3.1 灭绝时间的分布函数

在本小节中，我们将把 Z 的灭绝时间的分布函数刻画为一个积分方程的唯一解。为此，我们仿照在 [4] 中定理4.1的证明所进行的计算。我们首先确定 $G(s,t)$ 的生成函数，它对应于 Z，以便随后推导灭绝时间的分布函数。

用 $Z_0(t)$ 表示祖先在时刻 t 的后代；对于 $j \geq 1$，用 $Z_j(t)$ 表示祖先出生后时刻 t 时其第j个直接后代的后代。于是，$\{Z_j(.), j \geq 0\}$ 是一列相互独立且同分布（i.i.d.）的随机过程，其分布与 Z 相同。为简化记号，我们将用 λ_0（分别用 η_0）表示与 Z_0 相关联的 λ（分别为 η）的取值。公式（3.1）由 [3] 给出：

$$Z_0(t) = \mathbb{1}_{\eta_0 > t} + \sum_{j=1}^{Q_0(t)} Z_j(t - t^j), \tag{3.1}$$

其中，$Q_0(t)$ 表示在时间区间 $(0,t]$ 内出生的祖先的直接后代数量。更重要的是，$Q_0(t)$ 是一个计数过程；在给定条件 $\lambda_0(\cdot)$ 下，它是强度随时间变化的非齐次泊松过程，强度为 $\hat{} \lambda_0(t)$，而 $0 < t^1 < t^2 < \cdots$ 是过程 $Q_0(t)$ 的依次跳跃时刻。

我们有

命题3.1 概率生成函数 G 满足以下积分方程

$$G(s,t) = \mathbb{E}\left[s^{\mathbb{1}_{\eta > t}} \exp\left\{ \int_0^t \left(G(s, t-u) - 1 \right) \hat{\lambda}(u) du \right\} \right].$$

证明。 由于 Z 与 Z_0, 具有相同的分布，我们首先计算 $\mathbb{E}\left[s^{Z_0(t)}|\hat{\lambda}_0\right]$，以推导 G 的值。由（3.1）可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s^{Z_0(t)}|\hat{\lambda}_0\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}} \mathbb{P}(Q_0(t)=k|\hat{\lambda}_0)\mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{k} s^{Z_j(t-t^j)}\Big|Q_0(t)=k,\hat{\lambda}_0\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}} \mathbb{P}(Q_0(t)=k|\hat{\lambda}_0)\mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{k} G(s,t-t^j)\Big|Q_0(t)=k,\hat{\lambda}_0\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}} \mathbb{P}(Q_0(t)=k|\hat{\lambda}_0)\frac{k!}{\left(\int_0^t \hat{\lambda}_0(v)dv\right)^k}\times \\
&\quad \int_0^t\int_0^{u_k}\dots\int_0^{u_2}\prod_{j=1}^{k} G(s,t-u_j)\hat{\lambda}_0(u_1)\dots\hat{\lambda}_0(u_k)du_1\dots du_k \\
&= s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}}\exp\left(-\int_0^t \hat{\lambda}_0(v)dv\right)\times \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_0^{u_k}\dots\int_0^{u_2}\prod_{j=1}^{k} G(s,t-u_j)\hat{\lambda}_0(u_1)\dots\hat{\lambda}_0(u_k)du_1\dots du_k \\
&= s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}}\exp\left(-\int_0^t \hat{\lambda}_0(v)dv\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_0^t G(s,t-u)\hat{\lambda}_0(u)du\right)^k \\
&= s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}}\exp\left\{\int_0^t \Big(G(s,t-u)-1\Big)\hat{\lambda}_0(u)du\right\}.
\end{aligned}$$

第三个等号利用了一个众所周知的结果：给定区间内泊松过程的跳跃次数后，其跳跃时刻的分布规律（见 [10], 中的习题 6.5.4，该习题讨论常数率的情形，一般情形可通过显然的时间变换得出）；第四个等号则利用了给定$Q_0(t)$时的条件分布 λ_0。由此得到

$$G(s,t)=\mathbb{E}\left[s^{\mathbb{1}_{\eta_0>t}}\exp\left\{\int_0^t \Big(G(s,t-u)-1\Big)\hat{\lambda}_0(u)du\right\}\right].$$

^ ^ 由于 (λ_0,η_0) 与 (λ,η) 的分布相同，我们可以在最后一个公式中省略下标 0，从而得到命题中的公式。■

项 $s^{\mathbb{1}_{\eta>t}}$可写为：$s^{\mathbb{1}_{\eta>t}}=\mathbb{1}_{\eta\le t}+s\mathbb{1}_{\eta>t}$。由此可直接推出关于$F(t)=G(0,t)$ 的下述推论。

推论 3.2 具有一个在时刻0 出生的唯一祖先的分枝过程，其灭绝时间的分布函数 F 满足以下积分方程：

$$F(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\le t}\exp\left\{\int_0^t \Big(F(t-u)-1\Big)\hat{\lambda}(u)du\right\}\right]. \tag{3.2}$$

事实是（3.2）刻画了F，这由以下关键结果得出。

命题 3.3 方程 （3.2）具有唯一的 $[0,1]$值解。

证明。 灭绝时间的分布函数满足此方程。下面证明此方程至多有一个取值于 $[0,1]$ 的解。为此，假设该方程有两个解 F^1 和 F^2，且二者均不大于 1。我们有

$$F^1(t)-F^2(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\le t}\left(\exp\left\{\int_0^t\left(F^1(t-u)-1\right)\hat{\lambda}(u)du\right\}-\exp\left\{\int_0^t\left(F^2(t-u)-1\right)\hat{\lambda}(u)du\right\}\right)\right].$$

由 $|e^{-x}-e^{-y}|\le|x-y|,\forall x,y>0$，可推得

$$\begin{aligned}\left|F^1(t)-F^2(t)\right|&\le\mathbb{E}\left[\int_0^t\hat{\lambda}(u)\left|F^1(t-u)-F^2(t-u)\right|du\right]\\&\le\hat{\lambda}^*\int_0^t\left|F^1(u)-F^2(u)\right|du,\end{aligned}$$

其中我们用到了假设（**H**） 以及记号 $\hat{}\lambda^*=\bar{}S(t_0)\lambda^*$。结合格朗沃尔引理即可得到所需结果。
■

3.2 流行病始于时刻 $\chi<0$。

现在考虑祖先在随机时刻 $\chi<0$ 感染的情形。那么，到时刻t 该祖先产生的总后代数可写为:

$$Z_0(t)=\mathbb{1}_{\eta_0>t+\chi}+\sum_{j=1}^{Q_0(t)}Z_j(t-t^j).$$

从一个简单的通过对命题 3.1证明中所采用论证的调整，我们可推得 e

命题 3.4 流行病从时刻 0 开始、且唯一祖先出生于时刻 $\chi(<0)$ 时的灭绝时间分布函数 $F\chi$ 满足:

$$F_\chi(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\le t+\chi}\exp\left\{\int_0^t\left(F_\chi(t-u)-1\right)\hat{\lambda}(u-\chi)du\right\}\right].$$

3.3 初始时有多个感染者的流行病。

在前两个小节中，我们考虑了从单个感染个体开始的流行病。本小节中，我们考虑在初始时刻有$M\in\mathbb{N}$ 个感染个体的流行病。我们的目标是确定灭绝时间的分布。为此，设 $\hat{}\,\hat{}\,(\lambda_i,\eta_i)_{1\le i\le M}$ 为一列随机变量对，其中 λ_i （分别为 η_i）表示祖先i的传染性（分别为寿命）。设 $(u_i)_{1\le i\le M}$ 为一列服从分布 $\mathscr{U}([0,1])$ 的独立同分布（i.i.d）随机变量。注意，序列 $\left(\hat{}\lambda_i,\eta_i,u_i\right)_{1\le i\le M}$是 $\hat{}$ i.i.d，并且对每个i，我们假设 (λ_i,η_i) 与 u_i 相互独立。我们假设个体i在时刻 $\chi_i=-u_i\eta_i$受到感染，我们认为这是最自然的模型。

根据命题 3.4，我们知道，以祖先i为起点的流行病的灭绝时间分布为

$$\tilde{F}(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tilde{\eta}\leq t}\exp\left\{\int_0^t\Big(\tilde{F}(t-r)-1\Big)\tilde{\lambda}(r)dr\right\}\right], \tag{3.3}$$

~ ^ 在 $\tilde{\eta}_i=\eta_i(1-u_i)$ 和 $\lambda_i(t)=\lambda_i(t-\chi_i)$ 的情况下。由于每个祖先所产生的所有感染个体，其繁殖动态都相同，因此根据分枝性质，我们可以得出本节的主要结果。

定理 3.5 若在时刻t_0 有 M 个感染个体，那么我们等待流行病消亡所需时间的分布函数可由下式很好地近似：

$$H(t)=\big(\tilde{F}(t)\big)^M.$$

4 随机函数 $\lambda(t)$的几个例子

我们的变化传染性模型实际上是一个 SIR/SEIR 模型，因为它允许感染后立即出现一个暴露期，在此期间 $\lambda(t)=0$。然而，我们不引入 E 舱室（E代表暴露，即感染个体感染后立即处于潜伏期、尚不具有传染性的状态），而是使用 I 舱室，其中包括所有感染个体，无论其处于潜伏期还是具有传染性。在最常用的模型中，$\lambda(t)$ 是分段常数的，跳跃时刻是随机的，最常见的情形是服从指数分布，因此该随机模型是马尔可夫的，其大数定律极限是一个常微分方程组（与积分方程（2.1）相对照）。

现在，我们回顾两个分段常数 $\lambda(t)$ 的经典例子，它们分别对应 SIR 模型和 SEIR模型；最后，我们介绍变化的传染性 $\lambda(t)$ 的例子，下一节将用它与更经典的 SIR 常微分方程模型进行比较。

4.1 经典 SIR 模型

最简单且常用的传染性 $\lambda(t)$ 是 $\lambda(t)=\lambda\mathbb{1}_{t\leq\eta}$，其中 λ 是一个正常数，而 η 是具有传染性期间的随机持续时间。在这种情况下，方程（3.2）可写为

$$F(t)=\int_0^t\exp\left\{\lambda\int_0^r\Big(F(t-u)-1\Big)du\right\}\mathbb{P}_\eta(dr).$$

在确定性 η（也就是. $\mathbb{P}_\eta=\delta_a$，且 满足 $\in\mathbb{R}_+$）这一特殊情形下，我们有

$$F(t)=\mathbb{1}_{t\geq a}\exp\left\{\lambda\int_0^a\Big(F(t-u)-1\Big)du\right\}\quad\text{with}\quad F(0)=0\quad\text{and}\quad F(a)=\exp(-\lambda a).$$

最常用的模型对应于 η 服从参数为 μ的指数分布。在这种情况下，积分方程组（2.1）可简化如下:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\lambda \bar{S}(t) I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \left(\lambda \bar{S}(t) - \mu\right) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t). \end{cases}$$

If 我们通过用S(t)替换$S(t)$，对第二个方程进行线性化,¯得到 ¯ n

$$I(t) = I(t_0) \exp\left[\left(\lambda \bar{S}(t_0) - \mu\right)(t - t_0)\right].$$

由此很容易看出

$$\rho = \lambda \bar{S}(t_0) - \mu. \tag{4.1}$$

尽管确定性模型在t $\geq t_0$, 时并不适用，但上述推导仍然正确，这一点将在 [5]中解释。另请注意，求解下文的方程（4.6）会得到相同结果，读者不难验证。

现在来计算R_{eff}。一个感染个体以速率 $\lambda S(t_0)$产生传染性接触。这意味着传染性接触的期望数量为

$$R_{eff} = \lambda \bar{S}(t_0) \times \mathbb{E}[\eta] = \frac{\lambda \bar{S}(t_0)}{\mu}. \tag{4.2}$$

近似分枝过程是连续时间马尔可夫分枝过程 (X (t))$_{t\geq 0}$，它描述了在零时刻出生的唯一祖先在时刻 t 仍存活的后代数量。人群中的每个个体都独立于其他个体，寿命服从参数为 μ 的指数分布，并在其寿命期间以速率 λS(t$_0$)生育。其后代按照相同的过程繁衍。我们考虑次临界情形 $\mu > \lambda$S(t$_0$)。令 G(s,t) $= \mathbb{E}\left(s^{X(t)}\right)$, |s| ≤ 1 表示 X (t) 的概率生成函数。在 Athreya and Ney [1], 第 109 页或 Iwasa, Nowak, and Michor [8], 公式（5）中，我们可以找到其显式形式:

$$G(s,t) = \frac{\mu(s-1) - e^{-\rho t}(\lambda \bar{S}(t_0)s - \mu)}{\lambda \bar{S}(t_0)(s-1) - e^{-\rho t}(\lambda \bar{S}(t_0)s - \mu)}.$$

其中 ρ 在 (4.1) 中定义。令 T$_{ext}$ =inf{t > 0: X (t) $= 0$}。注意，F (t) =G(0, t) $= \mathbb{P}$(X$_t = 0$) $= \mathbb{P}$(T$_{ext} \leq$ t) 是灭绝时间的分布函数。由 G(s, t) 的表达式可推得 F(t) 的值。

命题4.1 当在0时刻从单个祖先开始时，灭绝时间的分布函数为:

$$F(t) = \frac{1 - e^{\rho t}}{1 - R_{eff} \times e^{\rho t}},$$

其中 R_{eff} 定义于 (4.2)。

4.2 经典 SEIR 模型

在该模型中，个体感染后首先进入暴露阶段（隔室 E），持续时间为 ξ。在此期间，个体不具有传染性；随后，个体开始具有传染性，并持续η，在此期间以 λ 的速率感染易感者，最后康复。在这种情况下，$\lambda(t)$ 为$\lambda(t)=\lambda \mathbf{1}_{\xi\le t<\xi+\eta}$，且方程 (3.2) 的形式为

$$F(t)=\int_0^t \int_0^{t-r} \exp\left\{\lambda \int_s^{s+r} \Big(F(t-u)-1\Big)du\right\}\mathbb{P}_{(\xi,\eta)}(ds,dr).$$

当 ξ 和 η 为确定性量时，也就是说 $\mathbb{P}_{(\xi,\eta)}(ds,\ dr)=\delta_a(ds)\,\delta_b(dr)$，其中 $(a,\ b)\in\mathbb{R}_+^2$，我们有

$$F(t)=\mathbb{1}_{t\ge a+b}\exp\left\{\lambda \int_a^{a+b} \Big(F(t-u)-1\Big)du\right\},\quad \text{with}\quad F(u)=0,\quad \text{for all } u\in[0,a].$$

若 ξ 和 η 相互独立，并分别服从参数为 γ 和 μ 的指数分布，则确定性模型满足常微分方程

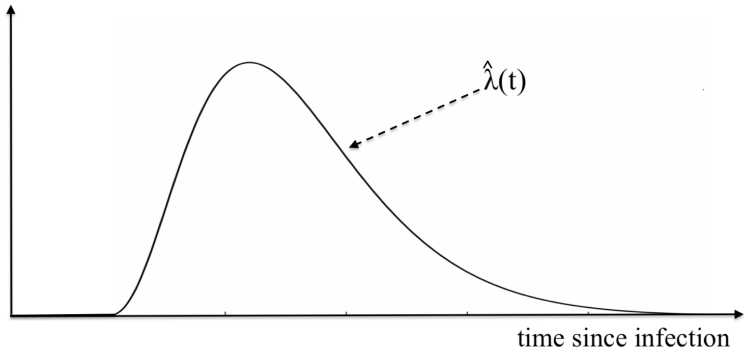
$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}(t)}{dt}=-\lambda\bar{S}(t)\bar{I}(t),\\ \frac{d\bar{E}(t)}{dt}=\lambda\bar{S}(t)\bar{I}(t)-\gamma\bar{E}(t),\\ \frac{d\bar{I}(t)}{dt}=\gamma\bar{E}(t)-\mu\bar{I}(t),\\ \frac{d\bar{R}(t)}{dt}=\mu\bar{I}(t). \end{cases}$$

在该模型中，同样有 $R_{eff}=\frac{\lambda\bar{S}(t_0)}{\mu}$。对下方的方程（4.6）求解 ρ，可得

$$\rho=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(\gamma-\mu)^2+4\gamma\bar{S}(t_0)\lambda}-(\mu+\gamma)\right]. \tag{4.3}$$

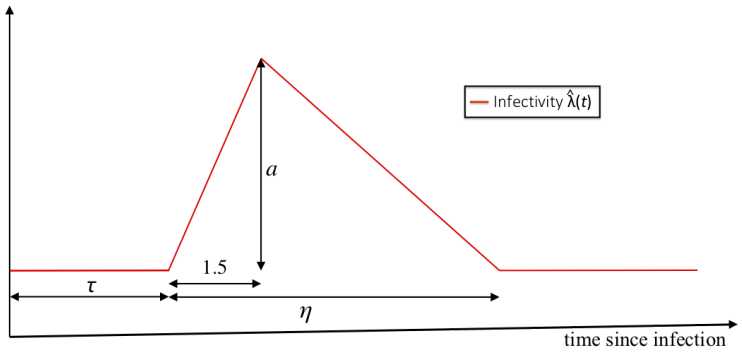
4.3 我们的变传染性模型

^^ 我们再次定义 $\lambda(t)=S(t_0)\lambda(t)$。传染性 $\lambda(t)$ 起初为零（对应于潜伏期），随后在数天内逐渐增加，然后 $\lambda(t)$ 开始下降并趋近于 0；个体康复时，传染性便降至 0（见图 1）。



ˆ 图 1： $\lambda(t)$ 的轨迹示例。

ˆ 在下文第 5 节的计算中，我们使用分段线性的 $\lambda(t)$，这样该函数只需依赖少量参数，见图 2。



ˆ 图 2：用于以下比较的 $\lambda(t)$ 轨迹。

这里， τ 是暴露期的持续时间， η 是传染期的持续时间。我们任意将增长期的长度设为 1.5 天，并将最大值 a 设为可自行设定的确定性量。换言之，在这种情况下，我们有

$$\hat{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < \tau \\ \frac{a}{1.5}(t-\tau) & \text{if } \tau \le t < \tau + 1.5 \\ a\frac{\tau+\eta-t}{\eta-1.5} & \text{if } \tau + 1.5 \le t < \tau + \eta \\ 0 & \text{if } \tau + \eta < t \end{cases} \tag{4.4}$$

令 $\mathscr{J}$ 为 τ 和 η 的联合分布。由推论 3.2，可推得

$$F(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\zeta \le t} \exp\left\{\frac{a}{1.5}\int_{\tau}^{\tau+1.5}(F(t-u)-1)(u-\tau)du + \frac{a}{\eta-1.5}\int_{\tau+1.5}^{\tau+\eta}(F(t-u)-1)(\tau+\eta-u)du\right\}\right],$$

其中 $\zeta = \tau + \eta$。因此，我们得到

$$F(t) = \int_0^t \int_0^t \mathbb{1}_{s+r\le t} \exp\left\{ \frac{a}{1.5} \int_s^{s+1.5} (F(t-u)-1)(u-s)du \right.$$
$$\left. + \frac{a}{r-1.5} \int_{s+1.5}^{s+r} (F(t-u)-1)(s+r-u)du \right\} \mathscr{J}(ds,dr).$$

有效再生数定义为

$$R_{eff} = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \hat{\lambda}(t)dt \right] \tag{4.5}$$

感染者数量的下降率 ρ 是以下方程的唯一解

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \hat{\lambda}(t)dt \right] = 1, \tag{4.6}$$

见 [5]中的定理 2.3。

5 我们的变化传染性模型与常微分方程 SIR 模型的比较

本节将比较我们的变化传染性模型中灭绝时间的分布函数，与具有相同R_{eff}的常微分方程 SIR 模型的分布函数；这里t_0, 时的有效再生数以及感染者数量的下降率 ρ 也相同。

以下假设随机变量 τ 和 η 在（4.4）中定义，且相互独立，$\tau \sim \mathscr{U}(1.5,2.5)$ 以及 $\eta \sim \mathscr{U}(7,13)$。

5.1 变化传染性模型中灭绝时间分布函数的近似

由于无法得到（3.2）的显式解，因此我们将采用第7节中的近似。换言之，我们将考虑以下近似函数（其收敛性将在下文第7 节中证明）：

$$F_n\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau+\eta\le\frac{k}{n}} \exp\left\{ \sum_{\ell=1}^{k} \left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right) - 1 \right) \int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \hat{\lambda}(u)du \right\} \right].$$

定义 $\xi_{n,\ell} = \int_{n\ell-1}^{\ell} \hat{\lambda}(u)du$。容易看出 $\xi_{n,\ell} \approx \hat{\lambda}(\ell_n)_n$。结合（4.4），我们可推得

$$\xi_{n,\ell} \approx \frac{a}{1.5}\left(\frac{\ell}{n} - \tau\right) \mathbb{1}_{\tau\le\frac{\ell}{n}<\tau+1.5} + a\left(\frac{\tau+\eta-\frac{\ell}{n}}{\eta-1.5}\right) \mathbb{1}_{\tau+1.5\le\frac{\ell}{n}<\tau+\eta}.$$

现在，利用随机变量 τ 和 η 相互独立这一事实，$\tau \sim \mathscr{U}(1.5;\ 2.5)$ 和 $\eta \sim \mathscr{U}(7;\ 13)$，我们可推得

$$
\begin{aligned}
F_n\left(\frac{k}{n}\right) &\approx \frac{1}{6}\int_{1.5}^{2.5}\int_{7}^{13} \mathbb{1}_{x+y\le \frac{k}{n}} \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\frac{a}{1.5}\left(\frac{\ell}{n}-x\right)\mathbb{1}_{x\le\frac{\ell}{n}<x+1.5}\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)a\frac{x+y-\frac{\ell}{n}}{y-1.5}\mathbb{1}_{x+1.5\le\frac{\ell}{n}<x+y}\right\}dxdy \\
&\approx \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}\sum_{j=7n}^{13n}\sum_{i=1.5n}^{2.5n}\mathbb{1}_{i+j\le k}\exp\left\{\sum_{\ell=i}^{i+1.5n}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)(\ell-i)\frac{a}{1.5n^2}\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{\sum_{\ell=i+1.5n}^{i+j}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\frac{i+j-\ell}{j-1.5n}\frac{a}{n}\right\}. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

5.2 $Reff$ 的计算

回顾（4.5）。我们首先计算随机量 $\int_0^\infty \hat{}\lambda(t)dt$。这是曲线 $\hat{}\lambda(t)$ 下方的曲面，也就是说，*i.e.* 两个三角形并集构成的曲面，并且 $\int_0^\infty \hat{}\lambda(t)dt = a\frac{\eta}{2}$。

因此，我们有

$$R_{eff} = \frac{a}{2}\mathbb{E}[\eta] = \frac{a}{2}\times 10 = 5a.$$

方程（4.6）

由（4.4），我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\hat{\lambda}(t)dt\right] = a\left(A_\rho + B_\rho\right), \quad \text{with}$$

$$A_\rho = \mathbb{E}\left(\int_\tau^{\tau+1.5} e^{-\rho t}\frac{t-\tau}{1.5}dt\right) \quad \text{and} \quad B_\rho = \mathbb{E}\left(\int_{\tau+1.5}^{\tau+\eta} e^{-\rho t}\frac{\tau+\eta-t}{\eta-1.5}dt\right).$$

利用 τ 和 η 相互独立这一事实，$\tau \sim \mathscr{U}(1.5;\ 2.5)$、$\eta \sim \mathscr{U}(7;\ 13)$，不难验证

$$A_\rho = \frac{1}{\rho}\left(e^{-1.5\rho}-e^{-2.5\rho}\right)\left[\frac{1}{1.5\rho^2} - e^{-1.5\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{1.5\rho^2}\right)\right], \quad \text{and}$$

$$B_\rho = \frac{1}{\rho}\left(e^{-1.5\rho}-e^{-2.5\rho}\right)\left\{e^{-1.5\rho}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{6\rho^2}\log\left(\frac{11.5}{5.5}\right)\right)+\frac{1}{\rho^2}\mathbb{E}\left[\frac{e^{-\rho\eta}}{(\eta-1.5)}\right]\right\}.$$

$\hat{}$ 请注意，映射 $\rho \mapsto \mathbb{E}\int_0^\infty e^{-\rho t}\lambda(t)dt$ 是递减的。因此，计算方程（4.6）的近似解很容易。

5.4 我们的变化传染性模型与常微分方程 SIR 模型的灭绝时间分布和期望的比较

接下来，我们比较本文的变化传染性模型与具有相同 R_{eff}和 ρ 条件下常微分方程 SIR 模型的灭绝时间。请注意，我们比较的是 F，而不是 H（参见第 3 节中的符号）。我们比较本文变化传染性模型中式（5.1）给出的灭绝时间分布，以及命题 4.1 中给出的常微分方程 SIR 模型的灭绝时间分布。

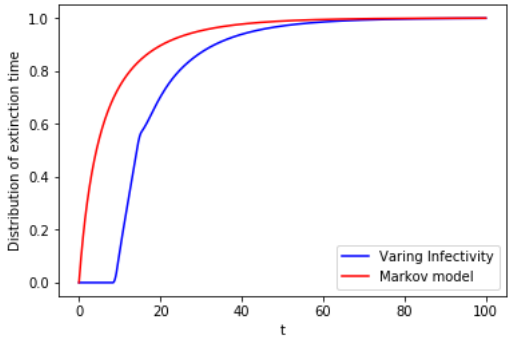


图 3：具有相同 $R_{eff} = 0.66$ 和 $\rho = -0.0683$ 的模型比较 .

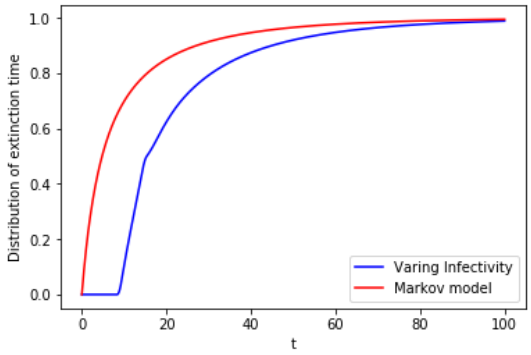


图 4：具有相同 $R_{eff} = 0.8$ 和 $\rho = -0.03816$ 的模型比较 .

我们还比较了我们的变化传染性模型和常微分方程 SIR 模型的灭绝时间期望。为此，回顾一下，灭绝时间可以改写为以下形式：$T_{ext} = \inf\{t - t_0 : I(t - t_0) = 0\}$。因此，对于常微分方程 SIR 模型，我们得到

$$\mathbb{E}[T_{ext}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_{ext} > t)dt = \int_0^\infty (1 - F(t))\, dt = \frac{(1 - R_{eff})}{\rho R_{eff}} \ln(1 - R_{eff}),$$

其中，我们使用了命题 4.1 中关于 $F(t)$的公式。

对于变化传染性模型，我们得到

$$\mathbb{E}[T_{ext}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_{ext} > t)dt = \int_0^\infty (1 - F_n(t))\, dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n\Lambda} \left(1 - F_n\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

其中， Λ是我们停止计算 $1-F_n(t)$的积分的位置。

	$R_{eff}=0.66$	$R_{eff}=0.8$
	$\rho=-0.0683$	$\rho=-0.03816$
变化传染性模型	$\mathbb{E}[T_{ext}]\approx 18.7854$	$\mathbb{E}[T_{ext}]\approx 22.6568$
常微分方程 SIR 模型	$\mathbb{E}[T_{ext}]=8.1369$	$\mathbb{E}[T_{ext}]=10.544$

6 结论：

我们的比较表明，在流行病末期，变化传染性 SIR 模型（实际上是其分枝过程近似）趋于比常微分方程 SIR 模型的分枝过程近似需要更长时间才能消亡。这并不太令人意外，因为变化传染性模型具有记忆，而常微分方程 SIR 模型则没有。当流行病传播突然发生变化时，这一点很容易看出来，例如近期新冠肺炎疫情期间多个国家实施的封锁。使用常微分方程模型的作者会从实施封锁开始逐渐调整感染率，但实际上感染率的变化非常突然。这是弥补常微分方程模型缺乏记忆的一种方式。我们认为，变化传染性 SIR 模型比常微分方程 SIR 模型需要更长时间才能忘却过去，这解释了为什么它需要更长时间才能消亡。变化传染性 SIR 模型比更经典的常微分方程 SIR 模型复杂，这或许解释了为什么大多数引用 Kermack and McKendrick 的 1927 年论文 [9]的作者只提及常系数这一非常特殊的情形，该情形在论文第 3.2 节中进行了研究。当然，使用简单模型很有吸引力，有时也更可取，因为这类模型有助于得出更多结论。然而，理解简单模型相较于更贴近现实的模型会引入哪些偏差至关重要。本文指出了其中一种偏差，即流行病末期被缩短。未来，我们计划针对各种变化传染性模型类别进行类似计算，以验证这些初步结论。

7 附录：灭绝时间分布函数的近似

在本小节中，我们定义一个函数序列 $\{F_n, n \geq 1\}$，它将使我们能够求得方程（3.2）的解。为此，对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们定义

$$F_n\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta \leq \frac{k}{n}} \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du\right\}\right] \tag{7.1}$$

对于每个$t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$，

$$F_n(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta \leq t} \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du - \int_{\frac{k-1}{n}}^{t}\lambda(u)du\right\}\right]. \tag{7.2}$$

本节的目标是证明，当 $n \longrightarrow +\infty$, $\{F_n(t), t > 0\} \longrightarrow \{F(t), t > 0\}$ 属于 $D([0,+\infty))$时，其中 F 是（3.2）的唯一解。

我们首先验证

引理 7.1 对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$F_n\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{k}{n}\right) \leq 1.$$

证明。 设$k \in \mathbb{Z}_+$。首先注意到$F(t) \leq 1$（因为F 是一个分布函数）。为证明下一个结论，我们将对k使用递推。显然$F_n(0) = 0$。现在假设$F_n\left(\frac{\ell}{n}\right) \leq F\left(\frac{\ell}{n}\right)$, $\forall 1 \leq \ell \leq k-1$。接下来证明$F_n\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{k}{n}\right)$。我们有

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{k}{n}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta \leq \frac{k}{n}} \exp\left\{\int_0^{\frac{k}{n}}\left(F\left(\frac{k}{n}-u\right)-1\right)\lambda(u)du\right\}\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta \leq \frac{k}{n}} \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\left(F\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\lambda(u)du\right\}\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta \leq \frac{k}{n}} \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du\right\}\right] \\
&= F_n\left(\frac{k}{n}\right),
\end{aligned}$$

where 我们用到了F 是非递减函数以及递推假设这一事实 . ■

上述结论可推广到所有t。

引理 7.2 对于任意 $t \geq 0$，我们有

$$F_n(t) \leq F(t) \leq 1.$$

证明。 我们首先注意到

$$\int_0^t (1-F(t-u))\,\lambda(u)du \le \sum_{\ell=1}^{\lceil nt\rceil} \int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} (1-F(t-u))\,\lambda(u)du + \int_{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}}^{t} \lambda(u)du.$$

由于F 是非递减的，且 $\frac{\lfloor nt\rfloor}{n} \le t$，我们推得

$$\int_0^t (1-F(t-u))\,du \le \sum_{\ell=1}^{\lceil nt\rceil} \int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \left(1-F\left(\frac{\lfloor nt\rfloor-\ell}{n}\right)\right)\lambda(u)du + \int_{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}}^{t} \lambda(u)du$$

$$\int_0^t (F(t-u)-1)\,du \ge \sum_{\ell=1}^{\lceil nt\rceil} \left(F_n\left(\frac{\lceil nt\rceil-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \lambda(u)du - \int_{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}}^{t} \lambda(u)du,$$

最后一个不等式用到了引理7.1 。将最后一个不等式与（7.2）结合，即得所需结果。■

我们有

命题 7.3 设 $T>0$。那么存在常数 C，使得对于所有 $n\ge 1$ 和 $0<s<t<T$，

$$-\frac{C}{n} - C(t-s) \le F_n(t)-F_n(s) \le C(t-s)+\phi(t)-\phi(s)+\frac{C}{n},$$

其中，$\phi(t)=\mathbb{P}(\eta\le t)$ 是 η的分布函数。

为了证明这个命题，我们需要一些技术引理。为简化下文中的记号，我们令

$$a_n(k)=\left[F_n\left(\frac{k+1}{n}\right)-F_n\left(\frac{k}{n}\right)\right]^- \quad \text{and} \quad b_n(k)=\left[F_n\left(\frac{k+1}{n}\right)-F_n\left(\frac{k}{n}\right)\right]^+. \tag{7.3}$$

定义 $\forall n\ge 1$、$k\in\mathbb{Z}_+$，

$$\Lambda_n(k)=\sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du \le 0, \tag{7.4}$$

（见引理 7.1），并将（7.1）改写为以下形式

$$F_n\left(\frac{k}{n}\right)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\le\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\right]. \tag{7.5}$$

我们需要以下引理。

引理 7.4 对于任意的 $n\ge 1$、$k\in\mathbb{Z}_+$，我们有

$$A_1(n,k)\le F_n\left(\frac{k+1}{n}\right)-F_n\left(\frac{k}{n}\right)\le A_2(n,k),$$

with

$$A_1(n,k)=\exp\left\{-\frac{\lambda^*}{n}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1}a_n(\ell)+1\right]\right\}-1 \tag{7.6}$$

and

$$A_2(n,k)=\exp\left\{\frac{\lambda^*}{n}\sum_{\ell=0}^{k-1}b_n(\ell)\right\}-1+\mathbb{P}\left(\frac{k}{n}<\eta\le\frac{k+1}{n}\right). \tag{7.7}$$

证明。 回顾式（7.4）和（7.5），我们首先注意到

$$\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k)=\sum_{\ell=1}^{k}\Big(F_n\Big(\frac{k+1-\ell}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k-\ell}{n}\Big)\Big)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du-\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\lambda(u)du.$$

由此可得

$$-\Big(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k)\Big)^{-}\geq-\sum_{\ell=1}^{k}\Big(F_n\Big(\frac{k+1-\ell}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k-\ell}{n}\Big)\Big)^{-}\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du-\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\lambda(u)du$$

and

$$\Big(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k)\Big)^{+}\leq\sum_{\ell=1}^{k}\Big(F_n\Big(\frac{k+1-\ell}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k-\ell}{n}\Big)\Big)^{+}\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
F_n\Big(\frac{k+1}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k}{n}\Big)&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k+1}{n}}\exp(\Lambda_n(k+1))-\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k+1}{n}}-\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\Big)\exp(\Lambda_n(k+1))+\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\left(\exp(\Lambda_n(k+1))-\exp(\Lambda_n(k))\right)\Big]\\
&\leq\mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k+1}{n}}-\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\Big)+\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\left(\exp(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k))-1\right)\Big]\\
&\leq\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big)+\mathbb{E}\left(\exp\left[(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k))^{+}\right]-1\right)\\
&\leq\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{\ell=1}^{k}\Big(F_n\Big(\frac{k+1-\ell}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k-\ell}{n}\Big)\Big)^{+}\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du\right\}\right]-1\\
&\quad+\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big)\\
&\leq A_2(n,k),
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了式（7.3）和式（7.7）。此外，我们还有

$$\begin{aligned}
F_n\Big(\frac{k+1}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k}{n}\Big)&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k+1}{n}}\exp(\Lambda_n(k+1))-\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\Big]\\
&\geq\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\Big(\exp(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k))-1\Big)\Big]\\
&\geq\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\eta\leq\frac{k}{n}}\exp(\Lambda_n(k))\Big(\exp(-(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k))^{-})-1\Big)\Big]\\
&\geq\mathbb{E}\Big[\exp(-(\Lambda_n(k+1)-\Lambda_n(k))^{-})-1\Big].
\end{aligned}$$

结合上述论证以及式（7.3）和式（7.6），我们可得

$$F_n\Big(\frac{k+1}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k}{n}\Big)\geq A_1(n,k).$$

■

回顾（7.3）。我们有

引理 7.5 设 $T > 0$。那么存在一个常数 C，使得对所有 $n \geq 1$ *and* $0 \leq kn < T$，-

$$\sum_{\ell=0}^{k} a_n(\ell) \leq C \quad \textit{and} \quad \sum_{\ell=0}^{k} b_n(\ell) \leq C.$$

证明。 我们来证明第一个断言。为此，先证明

$$a_n(k) \leq r(1+r)^{k-1}, \quad \text{with} \quad r = \frac{\lambda^*}{n}.$$

根据引理7.4，我们有

$$\begin{aligned} a_n(k) \leq -A_1(n,k) &= 1 - \exp\left\{ -r\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} a_n(\ell) + 1\right]\right\} \\ &\leq r\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} a_n(\ell) + 1\right). \end{aligned}$$

然而，很容易看出 $a_n(0) = 0$ 和 $a_n(1) \leq r$。设 $a_n(\ell) \leq r(1+r)^{\ell-1}, \forall 1 \leq \ell \leq k-1$。因此，很容易看出，

$$\begin{aligned} a_n(k) &\leq r\left(1 + r + r(1+r) + \ldots + r(r+1)^{k-2}\right) \\ &= r\left(1 + r\sum_{i=1}^{k-1}(1+r)^{i-1}\right) = r(1+r)^{k-1}. \end{aligned}$$

因此，由于 $kn \leq T$，-

$$\sum_{\ell=0}^{k} a_n(\ell) = \sum_{\ell=1}^{k} a_n(\ell) \leq \sum_{\ell=1}^{k} r(1+r)^{\ell-1} = (1+r)^k - 1 \leq e^{rk} \leq e^{\lambda^* T} \leq C_T.$$

现在证明第二个断言。首先有 $b_n(0) = F_n\left(\frac{1}{n}\right)$。于是我们有 -

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k} b_n(\ell) &= F_n\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\ell=1}^{k}\left(F_n\left(\frac{\ell+1}{n}\right) - F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)\right) + \sum_{\ell=1}^{k} a_n(\ell) \\ &= F_n\left(\frac{k+1}{n}\right) + \sum_{\ell=1}^{k} a_n(\ell). \\ &\leq 1 + \sum_{\ell=1}^{k} a_n(\ell), \end{aligned}$$

最后一个不等式中用到了引理7.1 。将此结果与第一个断言结合，即得所需结论。■

我们将需要以下内容

引理 7.6 设 $T>0$。那么存在一个常数 C，使得对所有 $n\geq 1$ *and* $0\leq {}^{\ell}n<kn-<T$-,

$$-C\left(\frac{k-\ell}{n}\right)\leq F_n\left(\frac{k}{n}\right)-F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)\leq C\left(\frac{k-\ell}{n}\right)+\phi\left(\frac{k}{n}\right)-\phi\left(\frac{\ell}{n}\right),$$

其中 $\phi(t)=\mathbb{P}(\eta\leq t)$ 是随机变量 η 的分布函数。

证明。回顾（7.6）和（7.7）。我们有

$$\begin{aligned}-A_1(n,k)&=1-\exp\left\{-\frac{\lambda^*}{n}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1}a_n(\ell)+1\right]\right\}\\&\leq\frac{\lambda^*}{n}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1}a_n(\ell)+1\right]\\&\leq\frac{C}{n},\end{aligned}$$

这里用到了引理7.5。然而，我们有

$$\begin{aligned}A_2(n,k)&=\exp\left\{\frac{\lambda^*}{n}\sum_{\ell=0}^{k-1}b_n(\ell)\right\}-1+\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big)\\&\leq C\frac{\lambda^*}{n}\exp\left\{C\frac{\lambda^*}{n}\right\}+\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big)\\&\leq\frac{C}{n}+\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big),\end{aligned}$$

这里用到了以下事实：$e^x-1\leq xe^x,\ \ \forall x\geq 0$ 以及引理7.5。现在将上述论证与引理7.4结合起来，可得

$$-\frac{C}{n}\leq F_n\Big(\frac{k+1}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{k}{n}\Big)\leq\frac{C}{n}+\mathbb{P}\Big(\frac{k}{n}<\eta\leq\frac{k+1}{n}\Big).$$

然而，我们注意到

$$F_n\left(\frac{k}{n}\right)-F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)=\sum_{j=\ell}^{k-1}\left(F_n\Big(\frac{j+1}{n}\Big)-F_n\Big(\frac{j}{n}\Big)\right).$$

将此结果与前面的不等式结合起来，即可得到所需结果。 ■

定义，$\forall n\geq 1, t>0$，其中 $k=\lceil nt\rceil$，

$$\Lambda_n(t)=\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(F_n\left(\frac{k-\ell}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du-\int_{\frac{k-1}{n}}^{t}\lambda(u)du,\tag{7.8}$$

(参见引理 7.1)，并将（7.2）改写为以下形式

$$F_n(t)=\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\eta\leq t}\exp\left(\Lambda_n(t)\right)\Big].\tag{7.9}$$

我们需要以下结果

引理 7.7 设 $T>0$。则存在常数 C，使得对所有 $n\geq 1$ 和 $0<{}^{\ell-1}n<s<{}^{\ell}n<kn<t<k+1 n<T$，——

$$(\Lambda_n(t)-\Lambda_n(k))^{+}=0,\quad (\Lambda_n(t)-\Lambda_n(k))^{-}\leq C\left(t-\frac{k}{n}\right),$$

$$(\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(s))^{+}\leq \frac{C}{n}\quad and\quad (\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(s))^{-}\leq \frac{C}{n}+C\left(\frac{\ell}{n}-s\right),$$

其中 $\Lambda_n(.)$定义于 (7.4)。

证明。 由（7.4）和（7.8），可得

$$-\lambda^{*}\left(t-\frac{k}{n}\right)\leq \Lambda_n(t)-\Lambda_n(k)=-\int_{\frac{k}{n}}^{t}\lambda(u)du\leq 0.$$

因此, 由此得到前两个断言。同理，由（7.4）和（7.8）可得

$$\begin{aligned}\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(s)&=\sum_{j=1}^{\ell-2}\left(F_n\left(\frac{\ell-j}{n}\right)-F_n\left(\frac{\ell-1-j}{n}\right)\right)\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\lambda(u)du-\int_{\frac{\ell-1}{n}}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du\\&\quad+\left(F_n\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\int_{\frac{\ell-2}{n}}^{\frac{\ell-1}{n}}\lambda(u)du+\int_{\frac{\ell-2}{n}}^{s}\lambda(u)du\\&=\sum_{j=1}^{\ell-2}\left(F_n\left(\frac{\ell-j}{n}\right)-F_n\left(\frac{\ell-1-j}{n}\right)\right)\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\lambda(u)du+F_n\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{\ell-2}{n}}^{\frac{\ell-1}{n}}\lambda(u)du\\&\quad-\int_{s}^{\frac{\ell}{n}}\lambda(u)du.\end{aligned}$$

结合引理 7.1、7.5 以及（7.3），我们可推得

$$(\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s))^{+}\leq \frac{C}{n}\quad \text{and}\quad (\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s))^{-}\leq \frac{C}{n}+C\left(\frac{\ell}{n}-s\right),$$

■

引理 7.8 设 $T>0$。则存在常数 C，使得对所有 $n\geq 1$ 且 $0<{}^{\ell-1}n<s<{}^{\ell}n<kn<t<k+1 n<T$，——

$$-\frac{C}{n}-C\left(\frac{\ell}{n}-s\right)\leq F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)-F_n(s)\leq \frac{C}{n}+\phi\left(\frac{\ell}{n}\right)-\phi(s)$$

and

$$-C\left(t-\frac{k}{n}\right)\leq F_n(t)-F_n\left(\frac{k}{n}\right)\leq C\left(t-\frac{k}{n}\right)+\phi(t)-\phi\left(\frac{k}{n}\right),$$

其中 $\phi(t)=\mathbb{P}(\eta\leq t)$ 是 η 的分布函数。

证明。 回顾（7.5）和（7.9）。由对引理 7.4的证明中论证的简单改编，并由引理 7.7，可得

$$\mathbb{E}\left(e^{[\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s)]^-}-1\right)\leq F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)-F_n(s)\leq\mathbb{P}\left(s<\eta\leq\frac{\ell}{n}\right)+\mathbb{E}\left(e^{[\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s)]^+}-1\right)$$

$$-\mathbb{E}\left([\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s)]^-\right)\leq F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)-F_n(s)\leq\phi\left(\frac{\ell}{n}\right)-\phi(s)+C\mathbb{E}\left([\Lambda_n(\ell)-\Lambda_n(\ell-1,s)]^+\right)$$

$$-\frac{C}{n}-C\left(\frac{\ell}{n}-s\right)\leq F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)-F_n(s)\leq\frac{C}{n}+\phi\left(\frac{\ell}{n}\right)-\phi(s).$$

同理，我们得到另一个断言。 ■

现在我们可以转向

命题的证明7.3： 结合引理7.6、7.8 以及以下事实

$$F_n(t)-F_n(s)=F_n(t)-F_n\left(\frac{k}{n}\right)+F_n\left(\frac{k}{n}\right)-F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)+F_n\left(\frac{\ell}{n}\right)-F_n(s),$$

我们推得

$$-\frac{C}{n}-C(t-s)\leq F_n(t)-F_n(s)\leq C\left(t-\frac{\ell}{n}\right)+\phi(t)-\phi(s)+\frac{C}{n}.$$

由此可得

$$-\frac{C}{n}-C(t-s)\leq F_n(t)-F_n(s)\leq C(t-s)+\phi(t)-\phi(s)+\frac{C}{n}.$$

所需结果由此得证 ■

回顾一下，本小节的目标是证明序列的收敛 $(F_n)_{n\geq1}$ 到 F，即方程 (3.2) 的唯一解。对于 $T>0$，定义 $w'_T(x.)\,\mathrm{x}\in D([0,+\infty))$ 在区间 $[0,T]$ 上的连续模为

$$w'_T(x,\delta)=\inf\max_{0\leq i<m}\sup_{t_i\leq s<t\leq t_{i+1}}|x(t)-x(s)|,$$

其中，下确界取遍所有递增序列 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$，且满足 $\inf_{0\leq i<m}|t_{i+1}-t_i|\geq\delta$。令 $\{x_n,\ n\geq1\}$ 为 $D([0,+\infty))$中的一个序列函数。以下结果是 [2] 中定理 12.3 的一个版本：

命题 7.9 设 $T>0$。序列 $\{x_n,n\geq1\}$ 在 $D([0,+\infty))$ 中相对紧的充要条件是

$$(i)\ \sup_{n\geq1}\sup_{0\leq t\leq T}|x_n(t)|<+\infty$$

and

$$(ii)\ \lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to+\infty}w'_T(x_n,\delta)=0.$$

现在我们证明序列 $(F_n)_{n\geq1}$ 满足上述命题的断言。

命题 7.10 序列 $(F_n)_{n\geq 1}$ 在 $D([0,+\infty))$中相对紧。

证明。条件(i)由引理 7.2得出。因此，只需验证 (ii)。为此，我们定义 $\psi(t)=\phi(t)+Ct, \quad \forall t>0$，其中同样 ϕ是定义在 η上的分布函数。由命题 7.3可知

$$|F_n(t)-F_n(s)|\leq \psi(t)-\psi(s)+\frac{C}{n}, \quad \forall t>s>0. \tag{7.10}$$

根据 $w'_T(.,.)$和（7.10）的定义，很容易推出

$$w'_T(F_n,\delta)\leq w'_T(\psi,\delta)+\frac{C}{n}.$$

注意，由于 $\psi\in D([0,+\infty))$，$w'_T(\psi,\delta)\to 0$如 $\delta\to 0$（见 [2]第 12 节，第 123 页）。因此，所需结果得证。■

现在我们可以陈述本节的主要结果了。

命题 7.11 当 $n\longrightarrow+\infty$，$\{F_n(t),\ t>0\}\longrightarrow\{F(t),\ t>0\}$属于 $D([0,+\infty))$，其中 F 是方程 (3.2)的唯一解。

证明。由命题 7.10可推得，至少沿某个子序列（但我们对该子序列仍使用与原序列相同的记号），F_n 收敛到一个记为 J 的极限，其中J 右连续且存在左极限。为了证明 $F=J$，只需证明 J 是方程（3.2）的解，然后应用命题 3.3。事实上，我们将（7.2）改写为

$$F_n(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\leq t}\exp\left\{\int_0^{\frac{\lfloor nt\rfloor-1}{n}}\left(F_n\left(\frac{\lfloor nt\rfloor-\lceil nu\rceil}{n}\right)-1\right)\lambda(u)du\right\}-\int_{\frac{\lfloor nt\rfloor-1}{n}}^{t}\lambda(u)du\right].$$

因此，只需证明

$$F_n(t)\longrightarrow J(t)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\eta\leq t}\exp\left\{\int_0^t\Big(J(t-u)-1\Big)\lambda(u)du\right\}\right],\ \text{as } n\to+\infty$$

即可得到所需结果。为此，我们注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\left|F_n\left(\frac{\lfloor nt\rfloor-\lceil nu\rceil}{n}\right)-J(t-u)\right|\lambda(u)du\leq\\
&\int_0^t\left|F_n\left(\frac{\lfloor nt\rfloor-\lceil nu\rceil}{n}\right)-F_n(t-u)\right|\lambda(u)du+\int_0^t|F_n(t-u)-J(t-u)|\lambda(u)du\\
&\leq\lambda^*\int_0^t\psi(t-u)-\psi\left(t-u-\frac{2}{n}\right)du+\frac{C}{n}\lambda^*t+\lambda^*\int_0^t|F_n(t-u)-J(t-u)|du,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了（7.10）。由于 ψ 左连续且局部有界，根据 Lebesgue 控制收敛定理，当 $n\to\infty$ 时，第一项趋于 0。第二项显然也趋于 0。由关于 Skorohod 拓扑的 D 中的收敛，$F_n(t-u)\to J(t-u)\,du$ 几乎处处成立。此外，引理 7.2使我们可以再次应用 Lebesgue 控制收敛定理，由此即可得到结论。■

致谢 作者感谢 Aur´elien Velleret，他的计算验证了第 5.4 节所示的结果；并感谢法国国家科学研究中心，该中心通过 DSCA 项目与马赛数学研究所合作，资助了 Anicet Mougabe 和 Ibrahima Dram´e 在马赛的访问。马赛数学研究所。

参考文献

[1] Athreya, K. B. 和 Ney, P. E. 分枝过程，施普林格出版社，纽约，1972年。[2] Billingsley, P. 概率测度的收敛，第2版。约翰·威立，纽约，1999年。[3] Crump K.S., Mode C.J.，一般年龄依赖分枝过程 I。*J. Math.Anal. and Ap-plic.***24**，494–508，1968年。[4] Crump K.S., Mode C.J.，一般年龄依赖分枝过程 II，*J. Math. Anal.andApplic.***25**，8–17，1969年。[5] Forien R., Pang G., Pardoux E.，具有变化传染性的流行病模型，*SIAM J. AppliedMath.***81**，第1893–1930页，2021年。[6] Forien R., Pang G., Pardoux E.，具有变化传染性的多区域多群体流行病模型，《概率、不确定性与定量风险》**7**，333–364，2022年。[7] Griette Q., Liu Z., Magal P., Thompson R.N.，流行病波结束时间的实时预测：以中国COVID-19为例，《公共卫生数学》，V. Kumar Murty、Jianhong Wu 编，菲尔兹研究所通讯系列，施普林格，2022年。[8] Iwasa, Y., Nowak, M. A. 和 Michor, F.，克隆扩增期间耐药性的演化，《遗传学》**172**，2557–2566，2006年。[9] Kermack O. 和 McKendrick A. G.，对流行病数学理论的贡献，*Proc. of theRoyal Soc. Series A*，**115**，第700–721页，1927年。[10] Pardoux E. 马尔可夫过程及其应用：算法、网络、基因组与金融，约翰·威立父子公司，2008年。