叶状射影结构的叶

ALEXANDER NOLTE

Abstract. 闭曲面群 $\pi_1(S)$ 的 PSL(4,$\mathbb{R}$) Hitchin 分支由单位切丛上适当凸叶状射影结构的全纯单值化组成。我们证明，任意此类射影结构的余维一叶状结构的各叶均射影等价，当且仅当其全纯单值化是福克斯型的。这意味着这些叶的对称性和形状受到限制。

我们还将结果应用于 $\mathbb{RP}^n$ 中适当凸域的射影类所构成的非 T_0 空间 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 的拓扑。具体而言，Benz´ecri 于 1960年 提出疑问： $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 中每个不包含任何真非空闭子集的闭子集是否都是一个点。我们的结果表明，对 $n \geq 2$ 而言，答案是否定的。

arXiv:2304.01380v2 [math.GT] 3 Oct 2023

1. Introduction

闭曲面群 Γ 的 PSL(4,$\mathbb{R}$) Hitchin 表示 ρ 诱导出一条奇异的 Γ-不变曲线 $\mathfrak{s}_\rho$，它从 Gromov 边界 $\partial\Gamma$ 映至 $\mathbb{RP}^2$ 中适当凸域的射影类空间 $\mathfrak{C}$。我们称 $\mathfrak{s}_\rho$ 为 ρ 的叶映射，并在此进行研究。

对于其他源自几何的等变映射，例如 $\partial\Gamma$ [4] [8] [9] [10][17] [32]， $\mathfrak{s}_\rho$ 的正则性与不规则性同样引人注目且值得研究。由于 $\mathfrak{C}$ 在点集拓扑方面极为丰富，我们所研究情形的相关特征具有独特性。具体而言， $\mathfrak{C}$ 是非分离的（即不满足 T_0），并且同时包含大量闭单点集和稠密单点集 [6] [15] [23]。

我们证明， $\mathfrak{s}_\rho$ 是常值映射，当且仅当 ρ 是福克斯型。Benoist 的一个命题 [5] 进而表明，对于非福克斯的 ρ，叶映射的像在 $\mathfrak{C}$中是闭集，不是单点，并且是极小的，也就是说，它们不包含任何非空真闭子集。因此，在 $\mathbb{RP}^n$ ($n \geq 2$) 中适当凸域的射影类空间 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 中，存在非单点的极小闭集。非分离空间中是否存在非单点极小闭集，是一个基本问题。自 Benz´ecri 在 1960年提出这一问题以来， $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 中的这一问题一直悬而未决（[6] §V.3）。

进一步来说。根据 Guichard-Wienhard 的工作， [20], PSL(4,$\mathbb{R}$) Hitchin 表示恰好是单位切丛 $T^1(S)$ 上适当凸叶状射影结构的整体单值化；这些结构是 T^1S 上 (PSL(4,$\mathbb{R}$) $\mathbb{RP}^3$) 结构的细化（见 §3）。根据定义，此类射影结构的发展映射将 T^1S 的半稳定测地叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶 $\widetilde{\ }$ 映射到射影平面中的适当凸域。 $\mathcal{F}$ 的叶空间可识别为 $\partial\Gamma$，而 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 定义为 $x \in \partial\Gamma$ 上的 $[\mathrm{dev}_\rho x] \in \mathfrak{C}$。¯对于 ρ 福克斯型， $\mathfrak{s}_\rho$ 为常值，即该椭圆。

叶映射会呈现反直觉现象。例如， $\mathfrak{s}_\rho$ 将任意非空开集 $U \subset \partial\Gamma$ 映射到整个 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$。一般而言，由于 $\mathfrak{C}$ 的不可分离性，确定叶映射何时为常值颇为困难。我们解决这一问题：

定理 1.1. 令 $\rho \in \mathrm{Hit}_4(S)$。以下条件等价：

(1) ρ 是福克斯型，*(2)* 叶映射 $\mathfrak{s}_\rho$ 是常值的，*(3)* 叶映射 $\mathfrak{s}_\rho$ 具有可数像，*(4)* 存在一片叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$，它是可分点、 $\mathfrak{C}$的一个闭点，或具有非离散的射影自同构群。

回顾一下，如果一个适当凸域允许一个由 SL(3, $\mathbb{R}$) 的离散子群给出的余紧作用，则称其为可分点 。条件（4）大大限制了非福克斯型 ρ中叶的对称性。这与某些叶具有对称性的观察形成对照： $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ 的不动点 $\gamma^{\pm} \in \partial\Gamma$ 的叶自同构群 $\mathfrak{s}_\rho(\gamma^{\pm})$包含 $\mathbb{Z}$。

尽管对于非福克斯型 ρ ， $\mathfrak{s}_\rho$ 并非常值似乎符合直觉，但这意味着叶映射会呈现一种相当惊人的现象，而任何映射到 T_1 空间都不可能出现这种现象：

定理 1.2. 对于非福克斯型 $\rho \in \mathrm{Hit}_4(S)$，叶映射 $\mathfrak{s}_\rho$： $\partial\pi_1 S \to \mathfrak{C}$ 是连续的，在 $\pi_1 S$ 轨道上为常值，但其本身并非常值。

请注意，在上述定理中， $\partial\pi_1 S$ 中的所有 $\pi_1 S$ 轨道都是稠密的。

Benoist 已证明， $\mathfrak{s}_\rho$ 在 $\mathfrak{C}$ 中的像是闭像（此结果见未发表的工作；详情参见 §4.4）。由 $\mathfrak{s}_\rho$ 的连续性以及 Γ 在 $\partial\Gamma$上的作用的极小性可知，像 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 是 $\mathfrak{C}$中的一个极小 闭集，即它是闭集，且不包含任何真非空闭子集。通过对非福克斯型 PSL(4， $\mathbb{R}$) Hitchin 表示的叶取锥，可以为所有 $n \geq 2$ 构造出 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 的非单点极小闭子集（§4.6）。

$\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$中所有已知的极小闭集例子，例如可分域 [6], ，都是点。因此，我们的结果意味着：

定理 1.3 定理。对于所有 $n \geq 2$， $\mathfrak{C}$（$\mathbb{RP}^n$）都包含不是点的极小闭集 .

Benz´ecri 在其开创性论文的结尾提出了几个关于 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 的问题；该论文证明了以他命名的紧性定理，并首次深入研究了 $\mathfrak{C}$ 的拓扑，见$n \geq 2$ ([6] §V.3)。第一个问题是， $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 的所有极小闭子集是否都是点。

熟知 $\mathfrak{s}_\rho$ 具有闭像的专家们原本认为定理 1.1-1.3 是正确的。然而，此前一直没有人找到证明，说明对于非福克斯型 ρ， $\mathfrak{s}_\rho$ 不是常值。这最终成为主要难点，也带来了技术上的挑战。我们的证明采用了多种方法，例如运用贝尔纲定理、Hitchin 表示的扎里斯基闭包分类，以及 Benoist 极限锥定理。

1.0.1. 叶的形状。 我们的结果进一步限制了非福克斯型适当凸叶状射影结构中各个叶的几何性质，下面对此加以说明。首先，这些结果表明，叶的边界点若不够平坦，就不可能具有过高的正则性。

推论 1.4。 设 ρ 为非福克斯型且 $x \in \partial\pi_1 S$。那么，叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 没有曲率非零的 C^2边界点。

这与 Benz´ecri 关于可分域的经典结果类似。值得注意的是，该结果对任意边界点都施加了限制。这与研究类似对象边界正则性的标准方法所能得到的限制不同；标准方法只控制行为最差的点（例如 [17] [32] [37]）。

将定理 1.1 与 $\mathfrak{C}$ 中所有叶的集合的闭性结合起来，可限制叶的边界行为能够有多复杂、多不对称。例如，Benz´ecri 在 [6] 中证明， $\mathfrak{C}$中存在稠密单点集。由此可知，这样的域不可能作为某个叶出现。

推论 1.5. 若 $\rho \in \mathrm{Hit}_4(S)$ 是非福克斯型且 $x \in \partial\Gamma$，则 $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{C}}\{\mathfrak{s}_\rho(x)\}$ 不含闭点。

在引言余下部分，我们将概述证明，并将我们的结果置于高阶 Teichm¨uller 理论这一更广泛研究领域的背景之下。

1.1. **定理 1.1 的证明概述**。我们的证明大致如下：首先，借助贝尔范畴论证处理变化的射影等价的正则性；随后，关于边界正则性和叶的凸性的考量 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 会在当 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 为常数时对 ρ 的特征值施加限制。结合这些限制与 Benoist 关于极限锥 [3] 以及 Hitchin 表示的 Zariski 闭包分类 [35] 的深入研究，我们便可推出定理 1.1。

按照 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的射影自同构群的大小进行分类讨论是很有用的。最复杂的情形是 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 具有离散自同构群。这种情形不适合有效运用 Benz´ecri 紧性定理，而且我们必须面对 $\mathfrak{C}$ 的不可分离性。其表现形式是，存在不连续路径 $A_t : [0,1) \to \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$，以及 $\mathbb{RP}^2$ 中的域 Ω，使得 $A_t\Omega$ 在豪斯多夫拓扑下连续。[1]

在这种情形下，为了在 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常数时对 ρ 的特征值施加约束，我们的论证分为两个主要部分。第一部分依赖贝尔纲定理，并表明可以在一个非空开子集 $U \subset \partial\Gamma$ 上避开上述病态现象；具体而言，我们可以安排等价类 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的代表元随 U 上的射影等价连续族变化。这使得一种“滑动”论证成为可能；通过将叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的边界正则性与 $\rho(\gamma)$ 的作用在域边界上的动力学进行比较，该论证可以施加约束。

我们得到的限制等价于：$\rho(\gamma)$ 的特征值的对数（$\gamma \in \Gamma$）满足一个显式的、与 γ 无关的齐次多项式。证明的最后一步是说明，满足这一约束的唯一可能情形是 ρ 为 4-Fuchsian。这里我们使用了两个重要结果，即 Guichard 对 Hitchin 表示的扎里斯基闭包所作的分类（见 [35]），以及 Benoist [3] 关于扎里斯基稠密表示的极限锥的一条深刻定理。

1.2. **背景与相关结果**。

1.2.1. 恰当凸射影结构。 定理1.1和定理1.2在曲面上的恰当凸射影结构研究中有一些显著的类似结果。这些结构参数化了 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ Hitchin 分支（[15], [11]）。

简言之，若曲面 S 上的射影结构 (dev,hol) 满足 dev 是从 $\widetilde{S}$ 到 $\mathbb{RP}^2$ 的一个适当凸域 Ω 的同胚，则称其为恰当凸的 。在这种情况下， Γ 通过 hol 在 Ω 上恰当地不连续作用，且没有不动点。

与定理 1.2 类似但容易得多的一个结论是：用上述记号， $\partial\Omega$ 在拓扑上是一个圆，而映射 $\mathrm{reg} : \partial\Omega \to (1,2]$将 $x \in \partial\Omega$ 关联到 x 处 $\partial\Omega$ 的正则性（例如参见 §2）是一个 Γ-不变映射，在 Γ的所有轨道上取值恒定；并且只有当 hol 属于 $\mathrm{Hit}_3(S)$ 的福克斯群轨迹时，它才是恒定的。

当然，这与定理 1.2 的类比并不完美，因为 reg 的值域 $(1,2]$, 比 $\mathfrak{C}$分离得好得多，而且其中没有连续性这一方面。尽管如此，这里仍有一个主题：非福克斯 $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ Hitchin 表示的不连续域的局部射影几何相当复杂（另见 [33]）。

恰当凸射影结构的几何已得到充分研究，而这一领域中的许多结构（例如 [4] [17]）都源于可除性的存在。叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的几何在多大程度上与之相似，目前尚不清楚。人们预期二者存在相似之处，这是因为 $\mathfrak{s}_\rho$ 的像具有闭性。

[1]一个容易处理的例子是考察 Ω 的射影自同构。我们还必须考虑例如这样的可能性：对于一个发散序列 $A_t \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$，域 $A_t\Omega$ 收敛到 Ω。

1.2.2. 几何结构与 *Hitchin* 表示。对于复单中心 Lie 群的所有分裂实形式 G ， G-Hitchin 分支由与 S [21]相关的流形 M_G 上几何结构空间的连通分支的整体单值化参数化。理解这些几何结构的定性几何，是高阶 Teichm¨uller 理论的一项研究计划，而本文正属于这一研究方向。关于 M_G 拓扑类型这一基本问题，近年来在 [1] 中备受关注的情形以及更一般的 [2] 和 [13]中都取得了重大进展。目前，对于这些几何结构的连通分支，尚无普遍适用的定性刻画。

事实上，在秩至少为 3 的上述李群 G 中，目前已知 M_G ，且与 Hitchin 表示相对应的几何结构已得到定性刻画的唯一李群是 PSL(4， $\mathbb{R}$)。研究低秩情形下这些几何结构时常用的解析工具（例如 [12]）在秩为 3 [34], 时会失效，因此，PSL(4， $\mathbb{R}$) 的 Hitchin 分支自然成为研究对象，可用于发展对 Hitchin 表示一般几何性质的预期。

1.2.3. 映射类群在 *Hitchin* 分支上的作用。高阶 Teichmüller 理论中一个由来已久的问题，是理解映射类群 Mod(S) 在 Hitchin 分支上的作用结构。Labourie 曾提出一个本可解决这一问题的猜想。对于上述秩为 2 [27], 的李群，Labourie 的猜想在 Hitchin 分支上成立；而在秩至少为 3 时，该猜想被 Markovi´c、Sagman 和 Smillie 的一系列论文最终推翻 [29] [30] [34]。

然而，Labourie 猜想的否定性结论似乎并未直接给出关于 Mod(S) 在 Hitchin 分支上的作用的信息，也未能解决我们所称的纤维化猜想（[36], 猜想 14）。为陈述纤维化猜想，令 $\mathcal{Q}^k(S)$ 表示 Teichm¨uller 空间上由全纯k-次微分构成的全纯丛（例如参见 [7]）。

问题 1.6 (纤维化猜想)。 *Hitchin* 分支是否自然地与丛直和 $\bigoplus_{k=3}^{n}\mathcal{Q}^k(S)$存在$\mathrm{Mod}(S)$-等变微分同胚，其中 $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ ？

作者的工作 [31] 表明，Fock 和 Thomas 关于高阶复结构的一个猜想 [14] 等价于纤维化猜想。纤维化猜想与本文的联系在于，它预言应当存在典范投影 Hit$_n$(S) $\to$ Hit$_k$(S)，其中 $2 \leq k < n$。目前已知的此类投影仅有$k = 2$ （例如 [25], [28], [22]）。

在介绍适当凸叶状射影结构的论文 [20] 中，Guichard 和 Wienhard 提出，这些几何对象或许可以用于研究 PSL(4, $\mathbb{R}$) 的纤维化猜想。促使我们开展研究并撰写本文的问题是：考察适当凸叶状射影结构的叶，是否会产生一个投影 Hit$_4$(S) $\to$Hit$_3$(S)。这将为 Fock-Thomas 猜想和纤维化猜想提供支持。

$\mathbb{RP}^2$ 的适当凸子集构成了与 SL(3, $\mathbb{R}$) Hitchin 分支对应的几何结构的背景，也作为适当凸叶状射影结构的叶出现。注意到$\mathfrak{s}_\rho$ 是连续的，且在 Γ-轨道上为常数，人们或许会希望 $\mathfrak{s}_\rho$ 也是常数， $\mathfrak{s}_\rho(x)$是可分点的，并且考察 $\rho \in$Hit$_4$(S)对 $\mathfrak{s}_\rho(x)$取值的作用会得到 Hit$_3$(S)中的一个元素。定理 1.1 表明，这一希望无法实现。

组织结构。引言之后是两节背景介绍：§2 讨论 $\mathbb{RP}^2$ 中的凸域，§3 讨论 Hitchin 表示与适当凸叶状射影结构。§4 证明定理 1.1-1.3，并给出一个证明：遵循 Benoist 的论证，并经其许可在此刊出，证明 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 在 $\mathfrak{C}$ 中是闭的。

致谢。若非 2021年莱斯大学关于阿诺索夫表示的读书小组，以及莱斯大学 RTG 几何—拓扑研讨班，本论文便无法完成。对于这些活动的参与者，我特别感谢 Chris Leininger、Mike Wolf、Alan Reid 和 Sara Edelman-Mu˜noz。

本文从与许多数学家的交流中获益良多，尤其是与 Olivier Guichard、Max Riestenberg、Jean-Philippe Burelle、Colin Davalo 和 Teddy Weisman 的交流。我要感谢 Yves Benoist 分享了他关于叶映射具有闭像的证明，并允许我在此刊印。还要特别感谢 Mike Wolf 的支持与指导。

本材料基于美国国家科学基金会通过第1842494号和第2005551号拨款所支持的工作。

2. Properly Convex Domains in $\mathbb{RP}^2$

本节回顾关于 $\mathbb{RP}^2$ 中适当凸子集的基础事实，这些事实对后续论证至关重要。具体而言，§2.1 讨论适当凸域的空间以及 Benz´ecri 紧性定理，§2.2 则涉及 Benoist 提出的一个关于边界正则性与凸性的事实。

我们先介绍定义和记号。若对于任意一对点 p，$q \in \Omega$，$\Omega \subset \mathbb{RP}^2$ 中都存在一条连接 p 与 q 的线段，则称集合 $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$ 为凸。域是 $\mathbb{RP}^2$ 的开连通子集。若凸域 Ω 包含在单个仿射图中，则称 Ω 为适当凸；若对于每个 p，$q \in \Omega$，连接 p 与 q 的线段都可以取为除端点外完全包含在 Ω 中，则称 Ω 为严格凸。

2.1. 适当凸集空间。令 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathbb{RP}^2$ 中适当凸域的集合。令 $\mathcal{C}^*$ 表示 $\mathbb{RP}^2$ 中带基点的适当凸域的集合，也就是说，由满足 $\Omega \in \mathcal{C}$ 且 $p \in \Omega$ 的二元组 $(\Omega\ p)$ 构成的集合。我们赋予 $\mathcal{C}$ 由闭包上的豪斯多夫拓扑诱导的拓扑，并赋予 $\mathcal{C}^*$ 由乘积 $\mathcal{C} \times \mathbb{RP}^2$ 诱导的拓扑。我们分别将 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^*$ 在 SL(3，$\mathbb{R}$) 的作用下的商记为 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{C}^*$。

$\mathfrak{C}$ 的拓扑只能区分某些点—— $\mathfrak{C}$ 中的单点集未必是闭集。这一现象在本文中占有重要地位。下面给出 $\mathfrak{C}$ 中非闭点的第一个例子。

例 2.1。设 e_1, e_2, e_3 是 $\mathbb{R}^3$的一组基。在一个包含 $[e_1]$、$[e_2]$和 $[e_3]$的仿射图中进行讨论。设Ω 是包含于此仿射图中的严格凸域，并在某个 $\lambda > \eta \geq 0$作用下保持不变，该作用为$A = \mathrm{diag}(e^{\lambda}, e^{\eta}, e^{-\lambda-\eta})$ 。例如，当 $\eta = 0$ 时，Ω 可以是一个椭圆。

令 ℓ 表示此仿射图中从 $[e_1]$ 到 $[e_3]$ 的线段，并且 $p \in \ell$。令 ℓ'表示由 $[e_2]$ 和 p确定的直线。那么 ℓ' 平分Ω。令 Ω' 表示Ω 中包含 $[e_3]$的连通分支。那么，由于其边界包含一条线段，Ω' 与Ω 并非射影等价；但 $A^n\Omega'$ 在豪斯多夫拓扑下收敛到Ω 。因此 $[\Omega] \in \{[\Omega']\}$。

$\mathfrak{C}$ 中点的闭包差异很大：根据下文的 Benz´ecri 紧致性定理，所有可分域都是闭点；而 Benz´ecri 还证明了（[6] §V.3，第321页） $\mathfrak{C}$中存在稠密单点集。 $\mathfrak{C}$的拓扑相当复杂，丰富到以 $\mathfrak{C}$ 为目标的映射的连续性并非无关紧要。

另一方面， $\mathfrak{C}$ 中的所有分离性不佳，显然都是由 SL(3, $\mathbb{R}$) 中元素的发散序列造成的，因为如果 $K \subset$ SL(3, $\mathbb{R}$) 是紧的且 $\Omega \in \mathcal{C}$，那么 Ω 在 K 作用下的轨道在 $\mathfrak{C}$中表示一个点。因此，如果能够对序列 $\Omega_n \in \mathcal{C}$ 获得比在 $\mathcal{C}$中的收敛更精细的控制，就可以

尽管 $\mathfrak{C}$中的点无法分离，仍可较容易地理解 Ω_n 的极限射影几何。

不过，实践中常用的方法是控制所讨论的域 Ω_n 中的一个点，并使用空间 $\mathfrak{C}^*$ 而非 $\mathfrak{C}$；但这种方法对下文并不太有用。根据 Benz´ecri 的以下基本结果，这足以保证极限的唯一性。

定理 2.2 (Benz´ecri 紧性)。 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{C}^*$上适当且余紧地作用。

由此立即可得：

推论 2.3。 $\mathfrak{C}^*$ 是一个紧豪斯多夫空间。

2.2. **域的正则性与凸性**。 本小节将介绍最适用于我们目的的凸集边界行为概念，以及一种相关情形，在该情形下，可以显式计算边界点处的这一量。

定义 2.4. 设 C 是 $\mathbb{R}^2$中的一条闭嵌入 C^1 曲线。对于 $1<\alpha<\infty$，我们称 $p\in C$ 是 C 的一个 α-模型点，如果存在 C 中包含 p 的一个开邻域 U 以及常数 $C_U>0$，使得对所有 $y\in U$，都有 $(1/C_U)d(y,x)^\alpha \le d(y,T_xC) \le C_U d(y,x)^\alpha$。

这里的距离是标准欧几里得距离。注意，点的 α-模型性质$p\in C$ 在射影变换下保持不变，且曲线 $y=|x|^\alpha$ 是 α-模型的（$\alpha>1$）。对于 $\alpha\in(1,2)$，点具有 α-模型性质意味着它是一个 C^α 点，而对任何 $\alpha'>\alpha$都不是 $C^{\alpha'}$。对于 $\alpha>2$，点具有 α-模型性质意味着它是一个 α-凸点（例如参见 [4], [17]），而对任何 $\alpha'<\alpha$都不是 α'-凸的。

以下引理实质上已包含在 Benoist 的工作中（[4], Corollaire 5.3 的证明）。我们在此采用的形式比其中陈述的版本稍强且更一般，它可由仔细考察 [4] 中给出的论证得出。

引理 2.5 (固定点处的模型)。 设$\Omega\subset\mathbb{RP}^2$ 是一个被 $A\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ 所保持的恰当凸、严格凸域，并且该群与$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 共轭，其中 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>0$。记 $l_i=\log\lambda_i$ 为 $i=1,2,3$，并令 x_{A^+} 表示 A 在 $\mathbb{RP}^2$中的吸引不动点。

那么 $x_{A^+}\in\partial\Omega$ 是 α-模型的，条件为

$$\alpha=\frac{l_1-l_3}{l_1-l_2}.$$

鉴于此引理对本文的重要性，以及 [4] 中关于可除性的既定假设（我们将证明，在我们的情形下该假设一般并不成立），我们在附录中给出引理 2.5 的证明。

3. Properly Convex Foliated Projective Structures and Hitchin Representations

本节回顾 Hitchin 表示以及 Guichard 和 Wienhard 在 [20] 中发展的适当凸叶状射影结构理论的相关特征，为后续讨论做准备。我们还证明了若干基本引理，并约定了后文将使用的记号。§3.3 是本节中唯一未见于现有文献的部分。

记号。 设 S 是一个亏格为 $g\ge 2$ 的闭定向曲面，$\Gamma=\pi_1(S)$，且 $\Gamma=\pi_1(T^1(S))$。令 $\mathcal{G}$、$\mathcal{F}$ 分别表示 T^1S 的稳定和半稳定测地叶状结构。令$\sim$ $\sim$ $\sim\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 在 T^1S 上的提升，并令 $\mathcal{G}$、$\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 在T^1S 的万有覆盖上的提升。

3.1. **Hitchin 表示与超凸 Fr´enet 曲线**。 Hitchin 表示 $\Gamma \to \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ 可由 Labourie 和 Guichard [24], [19] 关于特殊等变曲线几何的研究来刻画。这一视角是我们方法的核心，我们在此回顾相关内容。

对于 $1 \le k \le n$，用 $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的 k-格拉斯曼流形。连续曲线$\xi = (\xi^1, \ldots\ldots, \xi^{n-1})$: $\partial\Gamma \to \bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathbf{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 若满足以下条件，则称为超凸 ***Fren´et*** 曲线：
(1)（凸性）对于任意满足 $\sum_{l=1}^{j} k_l \le n$ 的 $k_1, \ldots\ldots, k_j$，以及互不相同的 $x_1, \ldots\ldots, x_j \in \partial\Gamma$，向量空间和 $\xi^{k_1}(x_1) + \ldots + \xi^{k_j}(x_j)$ 是直和；(2)（密切性）对于任意 $x \in \partial\Gamma$ 和满足 $K = \sum_{l=1}^{j} k_l < n$ 的 $k_1, \ldots\ldots, k_j$，对于任意由互不相同的点组成的 j 元组序列 $(x_1^m, \ldots\ldots, x_j^m)$，若对所有 l，序列 x_l^m 收敛到 x，则有$\xi^K(x) = \lim_{m\to\infty} \left[\xi^{k_1}(x_1^m) \oplus \ldots \oplus \xi^{k_j}(x_j^m)\right]$。

超凸 Fren´et 曲线 $(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ 完全由 ξ^1 确定。此类曲线的标准例子是 Veronese 曲线 $\xi^1 : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^n$，在 $\mathbb{R}^k (k = 2, n+1)$ 的模型中，它是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、次数为 $k-1$ 的齐次多项式 $[f] \mapsto [f^n]$。这里与我们相关、并作为 Hitchin 表示工作定义的结果如下:

定理 3.1 (Labourie [24], Guichard [19]). *表示 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ 是 **Hitchin** 表示，当且仅当存在一条 ρ-等变的超凸 **Fren´et** 曲线。*

我们将 $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ 的 Hitchin 连通分支记为 $\mathrm{Hit}_n(S)$。一个对我们有用的事实是，Hitchin 表示 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ 总可以提升为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$。

尽管双曲凸 Fren´et 曲线的定义是用 ξ^k 的和来表述的，但 Guichard [18] 的工作表明，ξ^k 的交也具有良好的性质；我们与 Fren´et 性质打交道时，往往就是通过这种方式。

命题 3.2 (Guichard [18]). *设 $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ 是一条双曲凸 **Fren´et** 曲线。那么：*

(1) (一般位置) 若 $n = \sum_{i=1}^{j} k_i$ 和 $x_1, \ldots, x_j \in \partial\Gamma$ 互不相同，则

$$\bigcap_{i=1}^{j} \xi^{n-k_i}(x_i) = \{0\};$$

(2) (对偶密切) 对于任意满足 $K = \sum_{l=1}^{j} k_l < n$ 的 $x \in \partial\Gamma$ 和 $k_1, \ldots, k_j$，以及任意由 $\partial\Gamma$ 中互不相同的点构成的 j 元组序列 $(x_1^m, \ldots, x_j^m)$，若对每个 l，x_l^m 都收敛到 x，则

$$\xi^{n-K}(x) = \lim_{m\to\infty} \bigcap_{i=1}^{j} \xi^{k_i}(x_i^m).$$

3.2. **适当凸叶状射影结构**。在本小节中，我们回顾曲面上测地叶状结构的性质，这些性质使得曲面上适当凸叶状射影结构的定义得以确立；陈述其定义和基本性质，并汇集 Guichard 和 Wienhard 在 [20] 中的主要结果。本文采用的记号及此处的内容遵循 [20]。

3.2.1. 测地叶状结构。在 S 上固定一个双曲度量，可将 T^1S 和 $T^1\mathbb{H}^2$ 的测地叶状结构对应起来，并将 $\partial\Gamma$ 与 $\partial\mathbb{H}^2$ 对应起来。众所周知，$T^1\mathbb{H}^2$ 可描述为 $\partial\Gamma$ 中由互不相同的点构成的定向相容三元组（t_+、t_0、t_-）。我们将这类三元组组成的空间记为 $\partial\Gamma^{(3)+}$。通过将 $(p, v) \in T^1(S)$ 与测地线 ℓ 的无穷远端点对应起来，可得到这一对应；该测地线由 v 确定，其端点为 t_-、t_+，并且

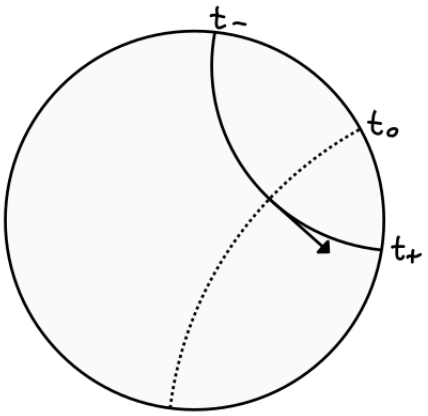


FIGURE 1. 单位切丛 $T^1\mathbb{H}$。

测地线在 p 处垂直于 ℓ，且其端点 t_0 使得（t_+、t_0、t_-）构成定向相容三元组（见图 1）。

在此对应下，半稳定测地叶状结构$\mathcal{F}$ 的叶是 $\partial\Gamma^{(3)+}$ 中具有固定 t_+ 矩阵元素的元素集合；稳定测地叶状结构 $\mathcal{G}$ 的叶是 $\partial\Gamma^{(3)+}$ 中具有固定 t_- 和 t_+ 矩阵元素的元素集合。因此，$\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$ 的叶空间分别与 $\partial\Gamma$ 和 $\partial\Gamma^{(2)}$ 相对应：$= \Gamma \times \Gamma - \{(x,\ x) \mid x \in \Gamma\}$。下文中，我们将 $\partial\Gamma$ 和 $\partial\Gamma^{(2)}$ 的元素与$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$的相应叶视为一一对应。

$T^1\widetilde{S}$与 $\partial\Gamma^{(3)+}$之间的这一对应关于 Γ的自然作用是等变的，因此，偶对$(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$的拓扑类型与双曲度量的选择无关。

3.2.2. 适当凸叶状射影结构。考虑 T^1S，以及它的稳定和半稳定叶状结构（$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$）。令 $\mathcal{P}(S)$ 表示 T^1S 上射影结构的集合。

定义 3.3。设 P 是 T^1S上的一个射影结构，将其视为由图表$\{(U,\varphi_U)\}$到 $\mathbb{RP}^3$构成的图册，且过渡映射为射影变换。记 P 的展开数据（的一个代表）为 $(\mathrm{dev},\mathrm{hol})$。

(1) 若对任意图表 (U,φ_U)，以及包含在叶 $g_v \cap U \in \mathcal{G}|_U$和 $f_v \cap U \in \mathcal{F}|_U$中的 $v \in U$，都有 $\varphi_U(g_v \cap U)$ 包含于一条射影直线，且$\varphi_U(f_v \cap U)$ 包含于一个射影平面，则称 P为叶状的。*(2)* 若对任意叶 $f \in \mathcal{F}$，其展开像 $dev(f)$ 都是射影平面中的一个适当凸域，则称 P 为适当凸的。*(3)* 若存在一个 T^1S 到自身的同胚 h，它同伦于单位元，且是 h 与P之间的射影等价，从而 $h^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$和 $h^*\mathcal{G} = \mathcal{G}$，则称两个叶状射影结构 P、P'等价。*(4)* 令 $\mathcal{P}_f(S)$ 和 $\mathcal{P}_{pcf}(S)$ 分别表示 T^1S上叶状射影结构和适当凸叶状射影结构的等价类集合。

请注意，由于等价关系变得更精细，忘掉额外结构后从 $\mathcal{P}_f(S)$ 和 $\mathcal{P}_{pcf}(S)$ 到 $\mathcal{P}(S)$ 的自然映射是否为单射尚不明确。适当凸叶状射影结构的发展映射总是经由 $\widetilde{T^1S}$ 分解，这是 [20], 的推论，因此我们可以用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 代替 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。

令 $p : \overline{\Gamma} \to \Gamma$ 为由投影 $T^1(S) \to S$诱导的映射。在 [20], 中证明，对于适当凸叶状射影结构 (dev,hol)，其值

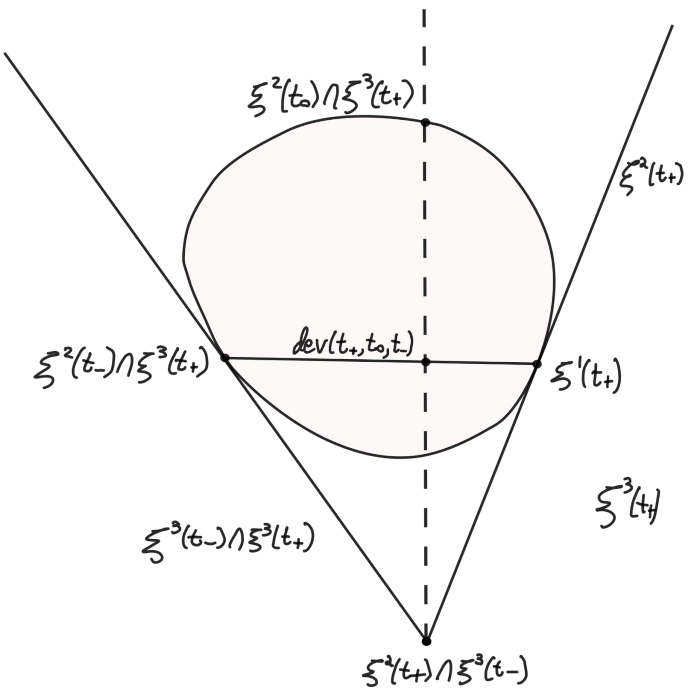


FIGURE 2. Fren´et 曲线所描述的发展映射。

hol(γ) ($\gamma\in\overline{\Gamma}$) 仅取决于 $p(\gamma)$。因此，任意适当凸叶状射影结构都会诱导一个表示 $\mathrm{hol}_*:\Gamma\to\mathrm{PSL}(4,\mathbb{R})$，且该表示在共轭意义下唯一。用 $[\mathrm{hol}_*]$ 表示相应的表示共轭类。在 [20]中，证明了以下关于 PSL(4, $\mathbb{R}$) Hitchin 分支的适当凸叶状射影结构刻画。

定理 3.4 (Guichard-Wienhard [20])。 全纯单值化映射 $\mathcal{P}_{pcf}(S)\to\mathrm{Hit}_4(S)$ 由 $(\mathrm{dev},\mathrm{hol})\mapsto[\mathrm{hol}_*]$ 给出，是一个同胚。

我们研究中的一个重要定义如下:

定义 3.5。 给定一个由表示 ρ诱导的适当凸叶状射影结构，在对 $\mathcal{F}$ 和 $\partial\Gamma$的叶空间进行自然识别后，我们将$\mathfrak{s}_\rho(x)\in\mathfrak{C}$ 记为 $\mathrm{dev}(x)$ 的射影等价类。我们称 $\mathfrak{s}_\rho$ 为 ρ的叶映射 。

Guichard 和 Wienhard 在证明所有 Hitchin 表示都会诱导出适当凸叶状射影结构时，发展出的一项有用工具，是根据超凸 Fren´et 曲线 $\xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$，明确描述相应射影结构的发展映射。参见图 2 及下文的讨论。

更具体地，固定一个 Hitchin 表示 $\rho:\Gamma\to\mathrm{PSL}(4,\mathbb{R})$，并用 $\xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ 表示相应的等变 Fren´et 曲线。利用将 $\widetilde{\partial\Gamma}$ 识别为 $\mathcal{F}$ 的叶空间这一对应关系，用 $x\in\partial\Gamma$ 表示 T^1S 上测地叶状结构的半稳定叶。

按照 Guichard-Wienhard 的记号，定义二元映射 $\xi^1:\partial\Gamma\times\partial\Gamma\to\mathbb{RP}^3$ 如下:

$$\xi^1_t(t')=\begin{cases}\xi^3(t)\cap\xi^2(t') & t\neq t'\\ \xi^1(t) & t=t'\end{cases}.$$

那么，我们可以将所求射影结构的发展映射定义为

$$\mathrm{dev}:\qquad \partial\Gamma^{3+}\to\mathbb{RP}^3$$

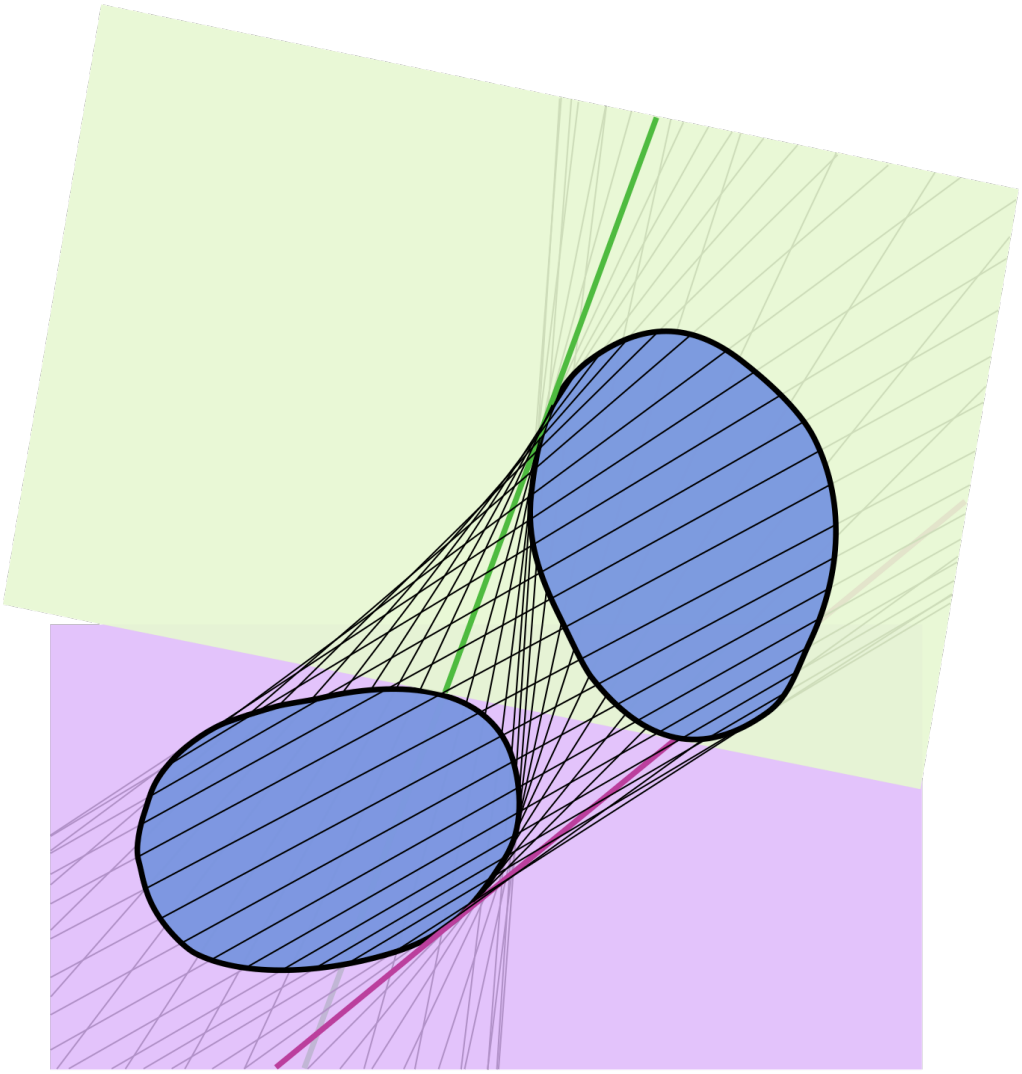


FIGURE 3. 不连续域两个切片的相关部分示意图，以及由直线构成的边界直纹。

$$(t_+, t_0, t_-) \mapsto \overline{\xi^1(t_+)\xi^1_{t_+}(t_-)} \cap \overline{\xi^1_{t_-}(t_+)\xi^1_{t_+}(t_0)},$$

其中，我们用 ab 表示由 a 和 b 确定的 $\mathbb{RP}^3$ 中的直线。记 $\Omega_\rho := \overline{\mathsf{dev}}(\partial\Gamma^{(3)+})$。

这里先作一些定性说明。Ω_ρ 的边界由 $\partial\Omega = \bigsqcup_{t\in\partial\Gamma} \xi^2(t)$ 给出，其中不相交性是超凸性的结果。对于任意 $x \in \partial\Gamma$，叶 $\mathsf{dev}(x)$ 是 $\xi^3(x) \cap \Omega_\rho$。$\mathsf{dev}(x)$ 的边界由 $\{\xi^2(y) \cap \xi^3(x) : y \neq x\} \cup \{\xi^1(x)\}$ 给出。在 $\xi^2(y) \cap \xi^3(x)$ 处，$\partial\mathsf{dev}(x)$ 的一条支撑直线是 $\xi^3(y) \cap \xi^3(x)$；而在 $\xi^1(x)$ 处，$\partial\mathsf{dev}(x)$ 的一条支撑直线是 $\xi^2(x)$。由于 Fren´et 曲线的一般位置性质以及我们对 $\mathsf{dev}(x)$ 边界的描述，这些直线不与 $\mathsf{dev}(x)$ 相交。我们将在 §3.3 中证明这些支撑直线是唯一的。

3.3. 关于叶的边界的两点注记。 在本小节中，我们描述叶的两个基本几何特征$\mathsf{dev}(x)$。

我们的第一个观察是，Ω 的边界由 $\xi^2(x)$ $(x \in \partial\Gamma)$ 进行的直纹，为叶的边界 $\partial\mathsf{dev}(x)$ 诱导出了自然的识别。几何上，p of $\mathsf{dev}(x)$ 中的任意边界点恰好包含于唯一一个 $\xi^2(y)$ 中，且对于 $y \in \partial\Gamma$ 成立。给定另一个 $x' \in \partial\Gamma$，

边界的识别将 p 映射到 $\xi^2(y)$ 与 $\partial\mathrm{dev}(x')$ 的唯一交点（见图 3）。下面以符号形式表示这一点。

定义 3.6. 对于 $x, x' \in \partial\Gamma$，定义映射 $\Xi_{x\to x'}$ ： $\partial\mathrm{dev}(x) \to \partial\mathrm{dev}(x')$ 为$\Xi_{x\to x'}(\xi^1_x(y)) = \xi^1_{x'}(y)$，其中 $y \in \partial\Gamma$。

由于 $\xi^1_x(y)$ 的连续性（这由命题 3.2 中的对偶密切性推出），映射 $\Xi_{x\to x'}(y)$ 关于 x、x' 和 y 连续变化。

我们的第二个观察涉及 $x \in \partial\Gamma$ 的 $\partial\mathrm{dev}(x)$ 边界结构：它们是严格凸的，并且 C^1。尤其是，严格凸性是我们稍后用于证明某些障碍的工具。

命题 3.7 (基本正则性)。 对于所有 $x \in \partial\Gamma$，叶 $\mathrm{dev}(x)$ 都是严格凸的，并具有 C^1 边界。

证明。 为证明 $\mathrm{dev}(x)$ 是 C^1，我们考虑对偶真凸域 $\mathrm{dev}(x)^* \subset \xi^3(x)^*$。边界 $\partial\mathrm{dev}(x)^*$ 是一个由支撑直线构成的拓扑圆，这些支撑直线支撑于$\partial\mathrm{dev}(x)$。路径 $\partial\Gamma \to \partial\mathrm{dev}(x)^*$ 由下式给出

$$y \mapsto \begin{cases} (\xi^3(y) \cap \xi^3(x))^* & y \neq x \\ \xi^2(x)^* & y = x \end{cases}$$

是从 $\partial\Gamma \cong S^1$ 到 $\partial\mathrm{dev}(x)^* \cong S^1$的连续单射，因此必为满射。因此，$\mathrm{dev}(x)$ 的所有支撑直线都必须具有 $\xi^3(y) \cap \xi^3(x)$ 或 $\xi^2(x)$ 的形式。特别地，$\mathrm{dev}(x)$ 的所有边界点都有唯一的切线，这意味着 $\partial\mathrm{dev}(x)$ 是 C^1。

严格凸性可由 Fren´et 曲线的一般位置性质推出，证明如下。反设 $\partial\mathrm{dev}(x)$ 包含一个区间 I，且该区间包含于一条直线 ℓ_I 中。对于任意满足 $\xi^1_x(y)$ 位于 I 内部的 $y \neq x \in \partial\Gamma$，必有 $\xi^3(y) \cap \xi^3(x) = \ell_I$，因为这是一条在 I 中某点处支撑 $\partial\mathrm{dev}(x)$ 的支撑直线。这与 Fren´et 曲线的一般位置性质矛盾，从而证明了严格凸性。□

4. Proofs of the Main Theorems

本节将证明我们的主要定理。绝大部分工作都用于证明，除非 Hitchin 表示 ρ 是 4-Fuchsian，否则 $\mathfrak{s}_\rho$ 不会是常数。我们先在 §4.1 中设定记号。随后在 §4.2 中概述证明核心部分的结构，本文余下部分将依照这一纲要展开。

4.1. 记号、约定与定义。

首先设定记号，以便比较叶的射影类型。

群 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{RP}^2$ 中一般位置的四点组上单纯传递地作用。因此，固定一点 $t_0 \in \partial\Gamma$，并取一族连续变化的四个点

$$\{(p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)) \mid t \in \partial\Gamma\} \subset \mathbb{RP}^3$$

使得 $p_i(t) \in \xi^3(t)$ $(i = 1, ..., 4)$，且点 $(p_1(t)\ p_2(t)\ p_3(4)\ p_4(t))$ 对所有 $t \in \partial\Gamma$均在 $\xi^3(t)$ 中处于一般位置，由此得到对所有 $t \in \partial\Gamma$ 都确定良好的射影等价$\xi^3(t) \to \xi^3(t_0)$。

构造此类归一化的一种方法是取 4 个不同的点 x_1、..... $x_4 \in \partial\Gamma$，并令 $p_i(t)$（$i = 1$，2，3，4）为 $\xi^2(x_i)$ 与 $\partial\mathrm{dev}(t)$ 的唯一交点。点 $p_i(t)$ 的连续性使得这种归一化是连续的，即从一个具有 4 个一般位置不动点的参考 $\mathbb{RP}^2$ 到 $\xi^3(t) \subset \mathbb{RP}^3$ 所诱导的映射连续变化。

在下文中，我们将一次性固定这样一种归一化，并将所有域 $\mathrm{dev}(t)$ 视为 $\mathbb{RP}^2 \cong \xi^3(t_0)$ 的子集。在需要时，我们将映射 $\xi^3(t) \to$

$\xi^3(t_0)$ 记作 $N_{t\to t_0}$。我们将 $\mathsf{dev}(t)$ 的 $N_{t\to t_0}$ 记作 C_t。有时若不这样做会使记号极其繁琐，我们会滥用记号，省略用于将 $\mathsf{dev}(t)$ 与 C_t 视为相同对象的归一化。

定义 4.1。给定如上所述的 *Hitchin* 表示 ρ、域 C_t、子集 $S\subset\partial\Gamma$ 和参考点 $s_0\in S$，叶在 S 上的一个射影等价是一个函数$f:\ S\to$ 自同构群$(\xi^3(t_0))$，使得 $f(t)C_{s_0}=C_t$ 对所有 $t\in S$均成立。

在给定子集 $S\subset\partial\Gamma$ 上，叶的射影等价不一定存在。当且仅当存在一族在 $\partial\Gamma$ 上的射影等价时，叶映射 $\mathfrak{s}_\rho$ 才是常值的。除非明确说明，我们不假设集合 S 上的射影等价具有连续性或任何形式的正则性、可测性等性质。

有时，将叶的射影等价视为叶之间的二元映射会很有用，其中叶被看作 $\mathbb{RP}^3$ 的子集；接下来的记号便于进行这种表示。

定义 4.2。给定叶在 S 上的射影等价 f 以及 t、$t'\in S$，定义射影等价 $f(t,t')$：$\mathsf{dev}(t)\to\mathsf{dev}(t')$ 为

$$f(t,t')=N_{t'\to t_0}^{-1}\circ f(t')\circ f(t)^{-1}\circ N_{t\to t_0}.$$

下面引入最后一项记号：若 $x\in\partial\Gamma$ and $p\in\partial C_x$，且若 x 是α-建模的，我们将 C_x 在 p 处的建模系数 α 记为 $\mathsf{model}_x(p)$。

4.2. 非福克斯叶映射非常值的证明概要。我们的证明假设 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常值，因此存在一个定义在 $\partial\Gamma$上的射影等价 f，并通过对 $\rho(\Gamma)$的特征值施加约束，证明 ρ 是 4-Fuchsian。

为了使我们的论证有一个切入点，我们需要对单个叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$的自同构有所了解。我们用来获得这种了解的二分法是闭子群定理；在我们的情形中，该定理意味着：要么对每个 $x\in\partial\Gamma$，每个 $\mathfrak{s}_\rho(x)$的射影自同构群都是离散的，要么存在一个 $x\in\partial\Gamma$，使得 $\mathrm{Aut}(\xi^3(t_0)\ C_x)\subset\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$ 包含一个一参数子群。

离散情形最为复杂。在这种情形下，我们首先证明，尽管 f 可能处处不连续，但我们可以修改 f，从而得到一个定义在某个非空开集 $U\subset\partial\Gamma$上的连续射影等价族 f；利用叶映射的等变性，还可以扩展该开集。这一现象背后的直观原因是，f 的所有不连续性都源自两个方面：$\mathfrak{s}_\rho$（x）的射影自同构，以及发散的射影等价族 A_t，使得对于某个 t'，$A_tC_{t_0}$ 在豪斯多夫拓扑下收敛到 $C_{t'}$。我们通过精心选取 $\partial\Gamma$ 的可数覆盖 S_i，使得 f 在每个 S_i上都具有良好的性质，再应用贝尔纲定理，证明某个 S_i 足够大，因而具有实用价值。

接下来，我们利用基于边界点的 α-建模的“滑动”论证，证明若 $\gamma\in\Gamma$，且在某个适当的开集 $U_\gamma\subset\partial\Gamma$上存在射影等价连续族 g，则 ρ（γ）的特征值对数满足某个齐次多项式。

最后，我们运用由 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常数这一条件得到的特征值约束，证明 ρ 必须是福克斯型的。这里我们使用两个工具。我们的出发点是，Hitchin 表示的扎里斯基闭包分类迫使 $\rho(\Gamma)$ 在某个适当的李群中扎里斯基稠密。在这个李群中，我们可以运用 Benoist 关于扎里斯基稠密子群的极限锥的研究，并发现，除非 ρ 是福克斯型的，否则我们的多项式约束与极限锥的结构不相容。

如果某个叶的自同构群不是离散的，闭子群定理便迫使任意叶具有极为受限的结构，尤其是边界相当光滑。再结合 $\mathfrak{s}_\rho$ 的像的闭性，问题便归结为

每个叶都是一个椭圆。随后可像离散情形那样，利用 Hitchin 表示的 Zariski 闭包分类和 Benoist 极限锥定理来处理。

离散情形是§4.3的主题。§4.3.1讨论连续性，§4.3.2讨论边界α建模约束。在§4.3.3中，我们证明 ρ 是福克斯型，或者 $\rho(\Gamma)$是扎里斯基稠密的。在4.3.4中，我们回顾Benoist 定理关于极限锥的论述，并用它证明 ρ是福克斯型。我们证明叶映射具有闭像，这部分见4.4。随后在§4.5完成对非离散情形的讨论。我们说明定理1.1和定理1.2如何由§4.6推出。

4.3. **离散情形**。在本小节中，我们假设，对于所有 $x \in \partial\Gamma$，群Aut($\xi^3(t_0)$ C_x)（即 C_x 的射影自同构群）都是离散的。

4.3.1. 连续性。 我们首先要处理 $\mathfrak{C}$ 中点分离性较差的问题。从 Benz´ecri 紧性定理可以得到一些直觉：对于自同构群 Aut(Ω) 离散的域 Ω，Aut(Ω) 的射影等价以及发散序列 A_n s o $A_n\Omega \to \Omega$ 在 $\mathfrak{C}$ 中应当是射影等价族唯一可能的不连续性。本段的关键观察是，在这种情形下，与这两个例子一样， f 的所有不连续性都源于（局部而言）具有确定大小的跳跃。

了解域 C_t 在豪斯多夫拓扑下连续变化是有用的。

引理 4.3 (叶映射基础)。 设 $\rho \in$ 命中$_4(S)$。那么 C_t 在 t 中连续， $\mathfrak{s}_\rho$ 连续，并且如果 $x \in \partial\Gamma$ ，则对所有 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\mathfrak{s}_\rho(x) = \mathfrak{s}_\rho(\gamma x)$ 。

注意，由于该作用是极小的， Γ 在 $\partial\Gamma$ 上的作用轨道是稠密的。因此，对所有的 $x \in \partial\Gamma$，叶映射 $\mathfrak{s}_\rho(x)$在稠密集 Γx上为常值。

证明。 注意到，C_t 在 $\xi^3(\overline{t_0})$中的域上关于豪斯多夫拓扑连续变化，因为 ∂C_t 由连续函数 $\partial\Gamma \to \xi^3(t_0)$参数化，该函数在 $x \in \partial\Gamma$时由$N_{t\to t_0} \circ \Xi_{t_0\to t}(x)$给出，而 $\Xi_{t_0\to t}$ 关于 t连续依赖。因此， $\mathfrak{s}_\rho(t) = [C_t] \in \mathfrak{C}$ 连续变化。

对于另一个断言，若 $\gamma \in \Gamma$，则有 $\mathfrak{s}_\rho(\gamma x) = [\rho(\gamma)(\mathrm{dev}(x))]$, ，其中 $\rho(\gamma)|_{\xi^3(x)} : \xi^3(x) \to \xi^3(\gamma x)$由一个线性映射诱导，因此是射影等价。□

现在我们准备好证明本段的主要命题。

命题 4.4 (修改为连续性). 假设 $\mathfrak{s}_\rho$ *is* 的像可数，且每个叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的自同构群都是离散的。那么 $\mathfrak{s}_\rho$ 是常数，并且在某个非空开集 $U \subset \partial\Gamma$上，存在一个叶的连续射影等价 f 。

证明。 根据假设，我们可以将 $\partial\Gamma = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} D_m$ 写成若干个 D_m 集，使得对所有 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个相对于参考点$s_m \in D_m$、定义在 D_m 上的叶的射影等价 f_m 。首先，固定 SL(3, $\mathbb{R}$) 上的一个右不变度量 d_P，以及$\partial\Gamma$上的一个度量 d_S 。注意，对所有 $s \in D_m$，都有 Aut($\xi^3(t_0)$ C_s) $= f_m(s)$Aut($\xi^3(t_0)C_{s_m}$) $f_m(s)^{-1}$。

接下来，我们需要在 $f_m(s)$ 中对 Aut($\xi^3(t_0)$ C_s) 与单位元之间的间隔进行局部一致控制。为此，我们采用如下记号：对于配备右不变度量的李群 G 的离散子群 Λ ，令 $\kappa(\Lambda) :=$ inf$\{d(e,\ g)\ |\ g \in \Lambda - \{e\}\}$。将 Ψ_g 下的共轭简记为 $h \mapsto ghg^{-1}$。我们通过以下事实获得控制；该事实直接源于共轭映射的可微性。为方便读者，我们在附录中给出证明。

引理 4.5 (离散性在共轭下保持)。 设 G 是一个李群， $\Lambda < G$ 是一个离散子群。考虑函数 η : $g \mapsto \kappa(\Psi_g(\Lambda))$。给定 $g_0 \in G$ 。则存在 g_0 的一个邻域 U ，使得对于所有 $h \in U$， $\eta(h) > \kappa($ $\Psi_{g_0}(\Lambda))/3$ 。

给定 m ，参考点为 $s_m \in D_m$。根据引理 4.5（离散性在共轭下保持稳定），对于每个 $g \in$ SL(3, $\mathbb{R}$)，都存在一个集合 K_g ，具有以下性质：

(1) K_g 是紧的，且其内部包含 g；(2) 令 κ_g 表示 $\inf_{h\in K_g}(\kappa(\Psi_{h^{-1}}(\text{自同构群}(\xi^3(t_0)\ C_{s_m}))))\ =\inf_{h\in K_g}(\kappa(\text{自同构群}(\xi^3(t_0)\ hC_{s_m})))$,则有 $\kappa_g>0$；(3) 映射 $K_g\times K_g\to \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$，由 $(h_1,h_2)\mapsto h_1h_2^{-1}$给出，其像包含于球 $B_{\kappa_g/2}(e)$ 中。

现在令 $\{K^m_{g_i}\}$ 为由此类紧集构成的 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$ 的一个可数覆盖。定义 $S^m_i\subset\partial\Gamma$ 为 $f_m^{-1}(K^m_{g_i})$。我们证明：

断言： f_m 在 S^m_i 上的限制是一致连续的。

断言的证明。固定 $\epsilon>0$。我们必须证明存在某个 $\delta>0$，使得若 $d_S(t,\ t')<\delta$ 且 $f_m(t)\ f_m(t')\in K^m_{g_i}$，则 $d_P(f_m(t)\ f_m(t'))<\epsilon$。

我们首先指出，映射 $B_{\kappa_{g_i}/2}(e)\times K^m_{g_i}\to\mathbb{R}$ 由 $(A,\ h)\mapsto d_{\mathrm{Haus}}(hC_{s_m},\ AhC_{s_m})$ 给出，该映射是连续的，并且根据 κ_{g_i} 的构造，其零点集恰为 $\{e\}\times K^m_{g_i}$。由紧致性可知，存在一个 $\epsilon'>0$，使得若 $h\in K^m_{g_i}$、$A\in B_{\kappa_{g_i}/2}(e)$ 且$d_{\mathrm{Haus}}(hC_{s_m},\ AhC_{s_m})<\epsilon'$，则 $A\in B_\epsilon(e)$。

由于 $\partial\Gamma$ 是紧的，映射 $t\mapsto C_t$ 关于 $\xi^3(t_0)$上的豪斯多夫拓扑一致连续，因此存在一个 $\delta>0$，使得若 $d_S(t,t')<\delta$，则 $d_{\mathrm{Haus}}(C_t,C_{t'})<\epsilon'$。所以，若 $d_S(t,t')<\delta$ 且 $t,t'\in S^m_i$，则有

$$\epsilon'>d_{\mathrm{Haus}}(\overline{C_t},\overline{C_{t'}})=d_{\mathrm{Haus}}(\overline{C_t},f_m(t')f_m(t)^{-1}\overline{C_t}).$$

由于 $C_t=f_m(t)C_{s_m}$ 与 $f_m(t)\in K^m_{g_i}$，且 $f_m(t')f_m(t)^{-1}\in B_{\kappa_{g_i}/2}(e)$，根据之前的观察，利用右不变性可得 $\epsilon>d_P(e,f_m(t')f_m(t)^{-1})=d_P(f_m(t')\ f_m(t))$。□

这一断言的意义在于，对于任意 i 和 m，都存在一个 $f_m|_{S^m_i}$到S^m_i.的连续延拓 $\sim f^m_i$。因此，f^m_i是覆盖 S^m_i的叶之间的连续射影等价。

现在，由于 S^m_icover $\partial\Gamma$，集合 $\{S^m_i\}$ 是由闭集构成的可数覆盖。因此，根据贝尔纲定理，至少有一个 S^m_i 具有非空内部。对于任意这样的 i，m，$\sim$ $\sim$，令 $f=f^m_i$，即可得到所需的连续族叶的射影等价，它定义在开集 U 上。

在构造中，我们注意到，事实上所有 C_x（$x\in U$）都彼此射影等价。由于 Γ 在 $\partial\Gamma$ 上的作用是极小的，且具有北南动力学，因此所有 C_x（$x\in\partial\Gamma$）都彼此射影等价。□

利用 Γ 在 $\partial\Gamma$ 上的作用，我们可以扩展存在连续族射影等价的开集。

推论 4.6（扩展域）。假设 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常数，且每个叶 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的自同构群都是离散的。设 $\gamma\in\Gamma-\{e\}$ 分别有吸引不动点和排斥不动点$\gamma^+,\gamma^-\in\partial\Gamma$。那么，存在一个包含 γ^+ 和 γ^- 的连通开集 U，以及定义在 U 上的叶的连续射影等价 f。

证明。命题 4.4（调整为连续性）给出了一个开集 $U\subset\partial\Gamma$，以及定义在 U 上的叶的连续射影等价 f。由 dev 的等变性可知，对任意 $\eta\in\Gamma$，我们有

$$C_{\eta x}=N_{\eta x\to t_0}(\mathrm{dev}(\eta x))=N_{\eta x\to t_0}(\rho(\eta)\mathrm{dev}(x))=N_{\eta x\to t_0}(\rho(\eta)(N^{-1}_{x\to t_0}(C_x))).$$

因此定义 $f\colon\ \eta U\to\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$ 为

$$\eta x\mapsto N_{\eta x\to t_0}\circ\rho(\eta)\circ N^{-1}_{x\to t_0}\circ\widetilde{f}(x)$$

在 ηU 上给出叶的连续射影等价。该推论现在可由 Γ 在 $\partial\Gamma$ 上的作用所产生的北南动力学得出。□

4.3.2. 边界模型。 在本段中，为了使记号简洁，我们省略归一化映射 $N_{x\to t_0}$: dev(x) $\to \xi^3(t_0)$。本段的目标是证明以下断言。

命题 4.7 (建模约束)。 假设 ρ 是 *Hitchin* 表示，$\mathfrak{s}_\rho$ 是常数，并且对所有 $x \in \partial\Gamma$， $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 的自同构群都是离散的。那么对所有$\gamma \in \Gamma - \{e\}$,

$$\mathrm{model}_{\gamma^+}(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)) = \mathrm{model}_{\gamma^-}\xi^1(\gamma^-).$$

我们证明命题 4.7 的一个关键依据，是以下对叶的离散自同构群的应用；它使我们能够确定叶的连续射影等价在特定点处的取值。该结果表明，在适当意义下，连续射影等价在特定点处与 ρ 交换。

引理 4.8 (交换性引理)。 设 $\gamma \in \Gamma - \{e\}$。若 f 是定义在连通开集 U 上的叶的连续射影等价，且该开集包含某个 $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ 对应的 γ^+，则对所有 $s \in U$ 和 $p \in \mathrm{dev}(\gamma^+)$，有

$$\rho(\gamma)(p) = [f(\gamma s, \gamma^+) \circ \rho(\gamma) \circ f(\gamma^+, s)](p)$$

证明。 由以下公式给出的映射

$$A_s : \mathrm{dev}(\gamma^+) \to \mathrm{dev}(\gamma^+)$$
$$p \mapsto [f(\gamma s, \gamma^+) \circ \rho(\gamma) \circ f(\gamma^+, s)](p)$$

构成一族连续的 dev(γ^+) 的射影等价，因此根据 Aut($\xi^3(t_0)$ C_{γ^+}) 的离散性，它们必为常值。在 $s = \gamma^+$ 处，我们有 $A_s = \rho(\gamma)$。□

现在我们可以证明命题 4.7 了。

命题 *4.7* 的证明。 设 $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ 给定。根据推论 4.6，存在一个包含 γ^+ 和 γ^- 的连通开集 U，以及一个定义在 U 上的连续叶的射影等价 f。设 $I \subset \partial\Gamma$ 为端点分别为 γ^+, γ^- 的闭区间。我们的策略是在受控点 $\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$ 处限制 $f(\gamma^+, s)$, 然后得出建模系数在受控点处相等。

断言（固定于 $\xi^2(\gamma^-)$）。对于所有 $s \in I - \{\gamma^-\}$，都有 $f(\gamma^+, s)(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)) = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(s)$。

断言的证明。 我们用两种不同的方法计算一个辅助极限。固定 $s \in I - \{\gamma^-\}$。根据引理 4.8，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，有

$$f(\gamma^n s, \gamma^+) \circ \rho(\gamma^n)\big[f(\gamma^+, s)[(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)]\big] = \rho(\gamma)^n[\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)] = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+),$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} f(\gamma^n s, \gamma^+) \circ \rho(\gamma^n) \circ f(\gamma^+, s)[(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)] = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+).$$

另一方面，令 $p \in \partial\mathrm{dev}(s) - \{\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(s)\}$。那么，对于某个$t' \neq \gamma^-$，有 $p = \xi^2(t') \cap \xi^3(s)$; 或者对于满足 $s \neq \gamma^-$ 的某个 $p = \xi^1(s)$，有此结论。在第一种情况下，我们得到（见图 4.3.2）

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n s = \gamma^+$$
$$\lim_{n\to\infty} \rho(\gamma)^n p = \lim_{n\to\infty} \xi^3(\gamma^n s) \cap \xi^2(\gamma^n t') = \xi^1(\gamma^+),$$

这里我们用到了 Γ 在 $\partial\Gamma$ 上作用的北南动力学以及对偶密切。在第二种情况下，同理可得

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\gamma)^n \xi^1(s) = \lim_{n\to\infty} \xi^1(\gamma^n s) = \xi^1(\gamma^+).$$

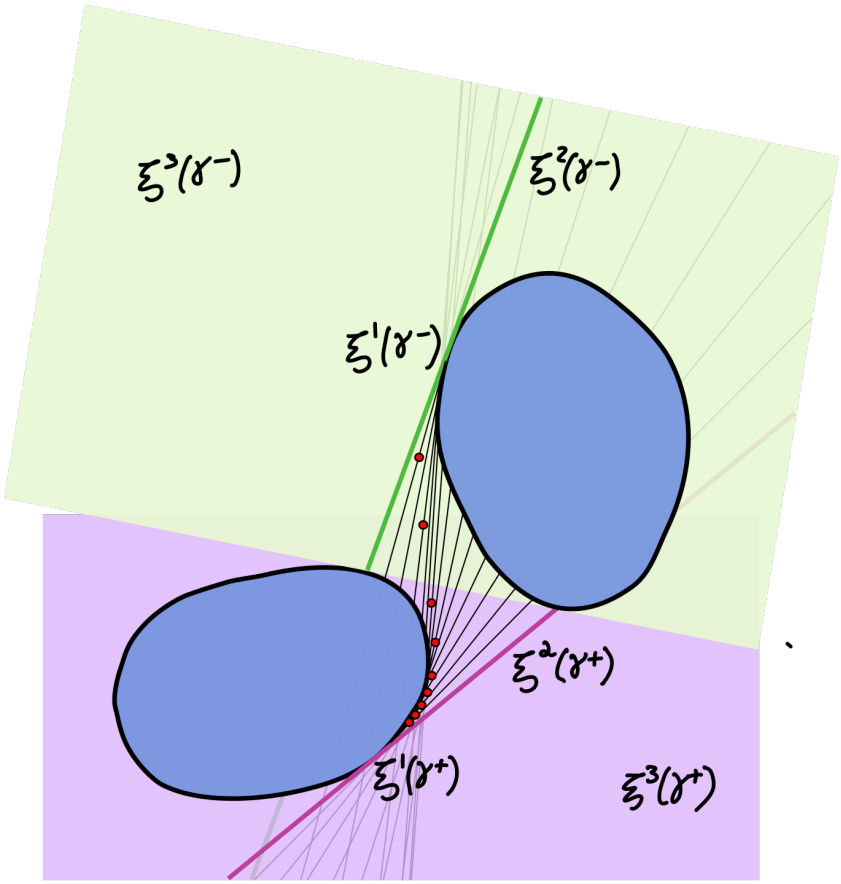


FIGURE 4. 命题 4.7 的情形示意图。红点说明，如果 $p = f(\gamma^+, s)(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+))$ 不在 $\xi^2(\gamma^-)$ 上，那么 $\rho(\gamma)^n p$ 收敛到 $\xi^1(\gamma^+)$。

因此，由于 f 的连续性，且 $f(\gamma^+, \gamma^+)$ 是 $\xi^3(\gamma^+)$ 上的单位元，

$$\lim_{n\to\infty} f(\gamma^n s, \gamma^+) \circ \rho(\gamma^n)(p) = \xi^1(\gamma^+).$$

由于 $\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+) \neq \xi^1(\gamma^+)$，唯一的可能性是 $f(\gamma^+, s)(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)) = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(s)$。□

接下来我们观察到 $f(\gamma^-, \gamma^+)(\xi^1(\gamma^-)) = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$。为此，注意到根据对偶密切，对于任意满足对所有 n 都有 $s_n \neq \gamma^-$ 的序列 $s_n \to \gamma^-$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(s_n) = \xi^1(\gamma^-).$$

由于 f 是连续的，并且对所有 n，$f(s_n, \gamma^+)(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(s_n)) = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$，我们必有 $f(\gamma^-, \gamma^+)(\xi^1(\gamma^-)) = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$。

由于 $f(\gamma^-, \gamma^+) : \xi^3(\gamma^-) \to \xi^3(\gamma^+)$ 是一个将 $\xi^1(\gamma^-)$ 映到$\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$的射影等价，我们得出模型$_{\gamma^+}(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)) =$ 模型$_{\gamma^-}\xi^1(\gamma^-)$。□

4.3.3. 扎里斯基稠密性。在下文中，我们固定 ρ 的一个提升：$\Gamma \to \mathrm{PSL}(4, \mathbb{R})$ 到 $\mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$。如第 3 节所述，这样的提升总是存在的。在本段中，我们通过引理 2.5（固定点处的模型），考察命题 4.7（建模约束）给出的对 ρ 特征值的约束，并证明关于 ρ的扎里斯基闭包的一个二分结论。

我们按如下方式获得特征值数据。在命题 4.7 的假设下，令$\gamma \in \Gamma - \{e\}$，将 $\rho(\gamma)$ 的特征值记为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$，并按模从大到小排列；对于 $i = 1, \ldots, 4$，记 $\log |\lambda_i|$ 为 ℓ_i。由于 ρ 是 Hitchin，$\ell_1 > \ell_2 >$

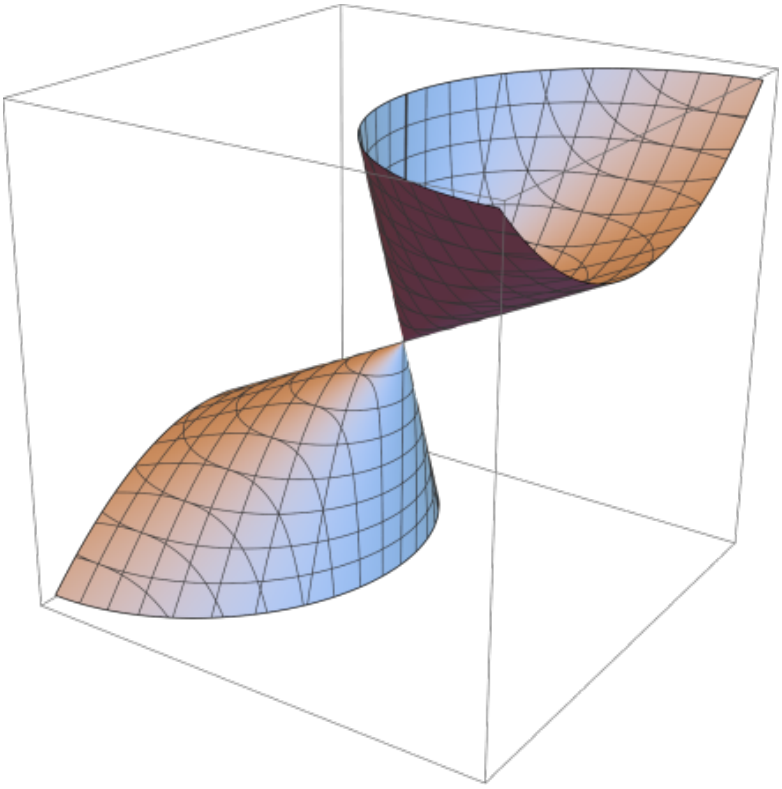


FIGURE 5. 方程4.2的零点集。图像由 Wolfram Mathematica 生成。

$\ell_3 > \ell_4$ 且所有 λ_i 的符号相同。将相应的特征直线记为 e_1, e_2, e_3, e_4。我们有 $e_1 = \xi^1(\gamma^+)$、$e_2 = \xi^2(\gamma^+) \cap \xi^3(\gamma^-)$、$e_3 = \xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)$、$e_4 = \xi^1(\gamma^-)$（参见[20] §5，尤其是其中的图 7）。将引理 2.5（固定点处的模型）应用于 $\rho(\gamma)$ 在不变子空间 $\xi^3(\gamma^+)$ 和 $\xi^3(\gamma^-)$ 上的限制，以及约束模型 $\gamma^+(\xi^2(\gamma^-) \cap \xi^3(\gamma^+)) = $ 模型 $_{\gamma^-}\xi^1(\gamma^-)$，可得

$$\frac{\ell_1 - \ell_3}{\ell_2 - \ell_3} = \frac{\ell_2 - \ell_4}{\ell_3 - \ell_4}, \tag{4.1}$$

或者等价地，

$$(\ell_1 - \ell_3)(\ell_3 - \ell_4) - (\ell_2 - \ell_4)(\ell_2 - \ell_3) = 0. \tag{4.2}$$

注。 方程*4.2*的齐次性是这一约束具有诸多用途的原因。出现这种情况是意料之中的，因为在 γ 和 γ^n（$n \in \mathbb{N}$）处计算模型的点是相同的。

注。 也可以将同样的论证应用于 γ^{-1} 而不是 γ，从而得到两个不同点处建模系数相等的结论；与针对 γ 的论证相比，这两个点并不相同。如此得到的方程乍看与方程 *4.1* 不同，但可以证明二者等价。因此，这并未提供新的信息。

Hitchin 表示的扎里斯基闭包已得到分类。[2] 对于 ρ 在 PSL(4, $\mathbb{R}$) Hitchin 连通分支中的一个提升到 SL(4, $\mathbb{R}$)，分类指出，$\rho(\Gamma)$ 的扎里斯基闭包共轭于主 SL(2, $\mathbb{R}$)（此时 ρ 是福克斯型），或共轭于 Sp(4, $\mathbb{R}$)，或等于 SL(4, $\mathbb{R}$)。我们将通过这一条件证明 ρ 是福克斯型。

我们首先证明，$\rho(\Gamma)$ 的扎里斯基闭包不与 Sp(4, $\mathbb{R}$) 共轭。这种情形背后的线性代数包含在下面的引理中。

[2]该分类归功于 Guichard 的未发表工作，也可由 Sambarino 的近期成果推出 [35]。

引理 4.9 (对角形式). 假设 $A \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ 可对角化，且其实特征值为 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$，其中 $|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|>|\lambda_4|>0$，满足方程 ***4.1***，并且$A$ 与形如 $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ 的矩阵共轭。那么 A 与某个形如$\mathrm{diag}(\lambda^3,\lambda,\lambda^{-1},\lambda^{-3})$ 的矩阵共轭，其中 $\lambda\in\mathbb{R}-[-1,1]$。

证明。 这只是一个计算。令 $\alpha=\ell_1-\ell_2,\beta=\ell_2-\ell_3,\gamma=\ell_3-\ell_4$。于是 $\alpha,\beta,\gamma>0$，方程 4.1 等价于 $(\alpha+\beta)\gamma=(\beta+\gamma)\beta$，化简后得到 $\beta^2=\alpha\gamma$。

半单辛矩阵 A 的特征值成倒数对出现；也就是说，若 λ 是 A 的一个特征值，重数为 m，那么 $1/\lambda$ 也是一个特征值，重数为 m。对我们而言，这意味着 $\ell_1-\ell_2=\ell_3-\ell_4$，因此 $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2$，并且由正性可知 $\alpha=\beta=\gamma$。也就是说，$A\in\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ $\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4=0$，这蕴含了该断言。□

任意福克斯型表示 ρ，在相差一个负号的意义下，$\rho(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ 共轭于某个形如 $\mathrm{diag}(\lambda^3,\lambda,\lambda^{-1},\lambda^{-3})$ 的矩阵，其中 $\lambda>1$。接下来我们证明，这一性质能够区分福克斯型表示。特别地，非福克斯表示不可能取值于 $\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ 的一族彼此不同的主 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 子群中。

命题 4.10 (由特征值判定 Fuchsian)。 假设 ρ 是一个 $\mathrm{PSL}(4,\mathbb{R})$*Hitchin* 表示到 $\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ 的提升，使得对所有 $\gamma\in\Gamma$, $\rho(\gamma)$ 都共轭于某个形如 $\mathit{diag}(\lambda^3,\lambda,\lambda^{-1},\lambda^{-3})$ 的矩阵，其中 $\lambda=\lambda(\gamma)\in\mathbb{R}-\{0\}$为正数。那么 ρ是福克斯型的。

注。 利用下一段所述的 *Benoist* 定理，可以对下文给出更简短的证明。这里仍给出下述证明，因为它更为明确，且不直接依赖这类强大的工具：它没有使用 *Benoist* 极限锥定理，而是采用了对称多项式基本定理。

证明。 根据 Hitchin 表示的 Zariski 闭包分类，[35], 只需证明 $\rho(\Gamma)$ 的扎里斯基闭包既不是 $\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$，也不共轭于 $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$。

我们先回顾一下：若 $a_1,\dots,a_4$是 $A\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ 的特征值，那么 A的特征多项式的系数 $\sigma_i(i=0,\dots,3)$ 是变量 $a_1,\dots,a_4$ 的初等对称多项式，并且都是 A的矩阵元素的多项式。因此，设 $F(a_1,a_2,a_3,a_4)=\prod_{i,j\in\{1,\dots,4\}}(a_i-a_j^3)$。那么 F是关于$\{a_1,\dots,a_4\}$的对称多项式，因此根据对称多项式基本定理，它属于多项式环 $\mathbb{Z}[\sigma_0,\dots,\sigma_3]$。因此，$F$是关于$A$的矩阵元素的多项式 G。由于所有 σ_i 都是共轭不变的，G也如此。

此外请注意，若 A与一个形如 $\mathrm{diag}(\lambda^3,\lambda,\lambda^{-1},\lambda^{-3})$ 的矩阵共轭，则 $F(\lambda^3,\lambda,\lambda^{-1},\lambda^{-3})$ 为零。因此，对于满足我们假设的 Hitchin 表示 ρ，$\rho(\Gamma)$ 的扎里斯基闭包包含于 G的零点集中。

另一方面，例如，辛矩阵 $A=\mathrm{diag}(3,2,1/2,1/3)\in\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ 不在 G 的零点集中，因为 $F(3,2,1/2,1/3)\neq 0$。由于 G 在共轭下不变，这表明 $\rho(\Gamma)$ 的扎里斯基闭包不可能包含任何与 $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ 共轭的 SL(4 子群，这就得到了该断言。□

我们立即得到：

推论 4.11 (扎里斯基闭包二分性)。 假设对于所有 $\gamma\in\Gamma-\{e\}$，我们都有$\mathrm{model}_{\gamma^+}(\xi^2(\gamma^-)\cap\xi^3(\gamma^+))=\mathrm{model}_{\gamma^-}\xi^1(\gamma^-)$。那么 ρ 是 4-福克斯型或扎里斯基稠密。

证明。 结合引理 4.9、命题 4.10 以及 Hitchin 表示的扎里斯基闭包分类。□

4.3.4. 极限锥。 我们在此通过证明以下结论来完成离散情形：

命题 4.12 (扎里斯基稠密性不可能)。 假设 $\mathfrak{s}_\rho$ 是常数，且 $\mathfrak{s}_\rho(x)$具有离散自同构群。那么 $\rho(\Gamma)$ 不可能在$\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$中扎里斯基稠密。

我们所遇障碍的根源在于 ρ 的特征值与扎里斯基稠密性不相容。为展示这种不相容性，我们将分析极限锥 $\ell_{\rho(\Gamma)}$；Benoist 曾研究过扎里斯基稠密表示的极限锥。我们先回顾极限锥的定义和 Benoist 定理。相关理论已针对连通实约化线性半单李群 G建立，但本文将只讨论 SL(4，$\mathbb{R}$) 和 Sp(4，$\mathbb{R}$) 这两种情形。

设 H 是 SL(4,$\mathbb{R}$) 的一个 Cartan 子群，例如相对于 $\mathbb{R}^4$ 的某组基，其行列式为 1 的对角矩阵全体；设 $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ 的相应 Cartan 子代数为 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$。我们将 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$ 与超平面等同

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$$

并取闭 Weyl 室 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}\subset\mathfrak{a}_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$，其定义如下

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})} \mid x_1\geq x_2\geq x_3\geq x_4\}.$$

设 $H_{\mathrm{Sp}}<H$ 是 Sp(4,$\mathbb{R}$) 的一个 Cartan 子群，例如 H 中保持标准辛形式不变的元素全体；相应的 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})}$ 可与满足 $x_1+x_4=x_2+x_3=0$ 的元素 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$ 等同。

对于 $A\in$ SL(4,$\mathbb{R}$)，以及 $i=1$，2，3，4，记 $\lambda_i(A)$ 为 A 的模最大广义特征值，其中 i^{th} 的模最大。我们定义

$$\begin{aligned}\Lambda:\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})&\to\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}\\ A&\mapsto(\log|\lambda_1(A)|,\log|\lambda_2(A)|,\log|\lambda_3(A)|,\log|\lambda_4(A)|).\end{aligned}$$

定义 4.13. 给定一个子群 $H<\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$（分别为 $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$），$H$ 的极限锥 ℓ_H 是 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$（分别为 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})}$）中包含 $\Lambda(H)$ 的最小闭锥。

对我们而言，$\ell_{\rho(\Gamma)}$ 是上一节记号中由 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 张成的半直线的闭包。以下结果归功于 Benoist：

定理 4.14 (Benoist [3])**.** 假设 $H<\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$（分别为 $H<\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$）是扎里斯基稠密的。那么 ℓ_H 是 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})}$（分别为 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})}$）中具有非空内部的凸锥。

事实上，Benoist 在 [3], 中证明了更多结果，例如，具有非空内部的凸锥可由扎里斯基稠密子群实现，以及 ℓ_H 与基于奇异值的类似定义等价。以上结果就是我们所需要的。

现在我们已经可以完成离散情形的证明。

命题 4.12 的证明。对于任意 $\gamma\in\Gamma$，$\rho(\gamma)$ 的特征值绝对值的对数 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 必须满足方程4.2的二次齐次多项式：$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3)(x_3-x_4)-(x_2-x_4)(x_2-x_3)=0$。该多项式在 $\mathfrak{a}^+_{\mathfrak{sl}}(4,\mathbb{R})$ 上并非恒为 0，因此由齐次性可知，其零点集 X 是一个正余维闭锥。由于 $\Lambda(\rho(\Gamma))\subset X$，极限锥 $\ell_{\rho(\Gamma)}$ 必为空内部；而根据 Benoist 定理，若 $\rho(\Gamma)$ 在 Zariski 意义下稠密，这是不可能的。□

4.4. 所有叶的集合。 按照 Benoist 的建议，我们改编 Benz´ecri [6] 的一个论证（另见定理 4.5.6 的 [16], 证明），以刻画$\mathfrak{s}_\rho$的像。这将在下文用于给出自同构群非离散情形的一个简短证明。我们沿用上一节的记号，尤其是归一化 N。

命题 4.15 (Benoist)。设 $t\in\partial\Gamma$。则 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)=\mathrm{Cl}_{\mathfrak{C}}(\{[C_t]\})$。

证明。由 Γ 在 $\partial\Gamma$ 上作用的极小性、$\mathfrak{s}_\rho$ 的连续性，以及注意到对于 $\gamma\in\Gamma$ 和 $t\in\partial\Gamma$，有 $[\mathfrak{s}_\rho(t)]=[\mathfrak{s}_\rho(\gamma t)]$，可知 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)\subset\mathrm{Cl}_{\mathfrak{C}}(\{C_t\})$。因此，只需证明 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 在 $\mathfrak{C}$ 中是闭集。

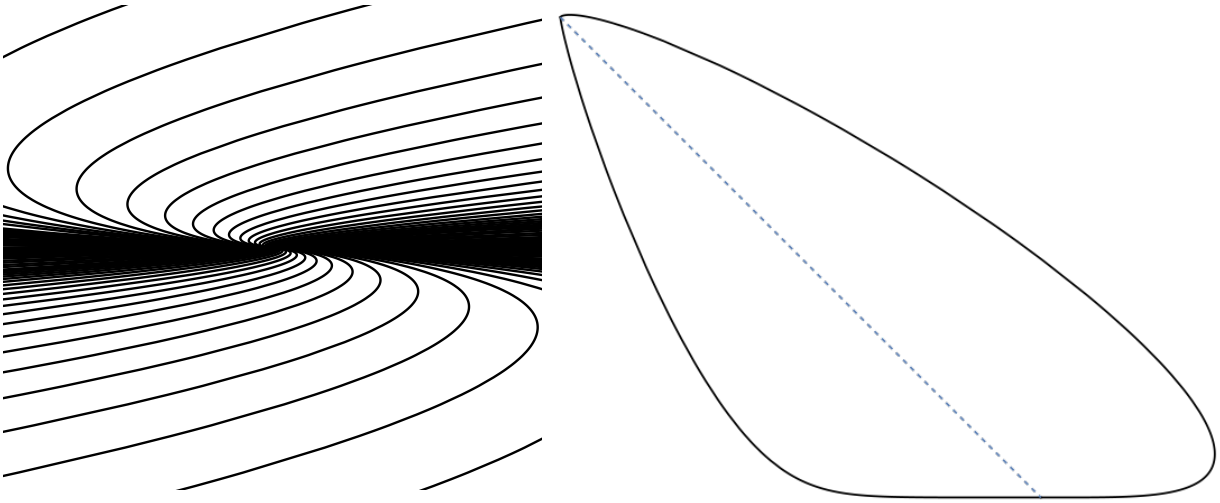


FIGURE 6. $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 的一参数子群的一些示例轨道。

接下来，我们描述为证明这一点需要验证的条件。要证明 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 在 $\mathfrak{C}$ 中是闭集，只需证明 $\{C_t\}$ $(t\in\partial\Gamma)$ 的 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 轨道之并在 $\mathcal{C}$ 中是闭集；这等价于证明原像 $\Pi^{-1}(\{\mathfrak{s}_\rho(t)\}) = \{\mathfrak{s}_\rho(t)\}\times\mathfrak{s}_\rho(t)$ $(t\in\partial\Gamma)$ 的 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 轨道之并在 $\mathcal{C}^*$ 中的闭性。而这又等价于证明 $\bigcup_{t\in\partial\Gamma}\Pi^{-1}(\{\mathfrak{s}_\rho(t)\})$ 在投影 $\mathcal{Q}^*:\mathcal{C}^*\to\mathfrak{C}^*$ 下的像 $\mathfrak{L}$ 是闭集。根据 Benz´ecri 紧性定理，$\mathfrak{C}^*$ 是豪斯多夫空间，因此 $\mathfrak{C}^*$ 中的紧集是闭集。由于 $\mathfrak{C}^*$ 是第二可数的，只需验证 $\mathfrak{L}$ 是序列紧致的。这正是我们要证明的。

取一个紧集 $K\subset\Omega_\rho$，使得 $\rho(\Gamma)K=\Omega_\rho$。利用 K 和 $\partial\Gamma$ 的紧性可以验证，归一化后 K 的像与叶的补集一致地分离，也就是说，存在某个 $\delta>0$，与 $t\in\partial\Gamma$无关，使得若 $p\in K\cap\xi^3(t)$，则$d_{t_0}(N_t(p),\ C_t^c)>\delta$。

因此，设 $c_n\in\mathfrak{L}$ 是一个序列。对所有 n，选取一片叶 C_{t_n} 和 $p_n\in\mathrm{Int}(C_{t_n})$，使得$\mathcal{Q}^*((C_{t_n},\ p_n))=c_n$。由于 $\rho(\Gamma)K=\Omega_\rho$，在对归一化的复合以及 $\rho(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ 在Ω_ρ上的作用所产生的射影等价进行应用之后，我们可以安排使得 $p_n\in K\cap C_{t_n}$。由 K 的紧性以及归一化的连续性性质可知，取一个子序列后，存在某个 $t_\infty\in\partial\Gamma$ 和 $p_\infty\in C_{t_\infty}\cap K$，使得 $\lim_{n\to\infty}(C_{t_n},\ p_n)=(C_{t_\infty},\ p_\infty)$ 在 $\mathcal{C}^*$中成立。因此，$\mathcal{Q}^*(C_{t_\infty},\ p_\infty)\in\mathfrak{L}$是 c_n的一个极限点，因此 $\mathfrak{L}$ 是紧的，证毕。□

4.5. **非离散情形**。我们证明：

命题 4.16 (仅有椭圆)。假设存在某个 $x\in\partial\Gamma$，使得 $\mathfrak{s}_\rho(x)$ 具有非离散自同构群。那么 ρ 是4-福克斯型的，并且对所有$y\in\partial\Gamma$，$\mathfrak{s}_\rho(y)$ 都是椭圆。

证明。设 $x\in\partial\Gamma$ 使得 $\mathrm{Aut}(\xi^3(t_0),\ C_x)$ 是非离散的。那么根据闭子群定理，$\mathrm{Aut}(\xi^3(t_0),\ C_x)$ 包含一个一参数子群 $H=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$。于是，对任意$p_0\in\partial C_x$，轨道 Hp_0 完全包含于 ∂C_x 中。

由于 A_t 在 $t\neq0$ 中的不动点要么是孤立的，要么包含在一条由不动点组成的直线上，并且 C_x 严格凸，因此 ∂C_x 包含一条非平凡的 H轨道 $\mathcal{O}$，它必定是光滑的。注意，$\mathcal{O}$ 不可能处处曲率为零，因为那样$\mathcal{O}$ 就会是一条线段，而 C_x 是严格凸的。因此，∂C_x 必定有一个 C^2 点具有

非零曲率。一个标准结论（例如 [16] 练习 4.5.2.3）表明，椭圆$[O] \in \mathfrak{C}$ 包含于 $\{[C_x]\}$的 $\mathfrak{C}$-闭包中。

根据命题 4.15，存在某个 $y \in \partial\Gamma$ 使得 $[C_y] = [O]$。由于椭圆的射影类是 $\mathfrak{C}$中的一个闭点，根据引理 4.3（叶映射基础），原像$\mathfrak{s}_\rho^{-1}(\{[O]\}) \subset \partial\Gamma$ 是闭集，且包含 $\partial\Gamma$的一个稠密子集，因此必为 $\partial\Gamma$的全部。所以对于所有 $t \in \partial\Gamma$，叶 C_t 都是椭圆。

设 $\gamma \in \Gamma - \{e\}$。由于我们知道 C_{γ^+} 和 C_{γ^-} 都是椭圆，我们可以将 α-建模引理 2.5 应用于 $\xi^1(\gamma^+)$和 $\xi^1(\gamma^-)$，由此得到（采用 §4.3.3 中的记号）

$$\frac{\ell_1 - \ell_3}{\ell_1 - \ell_2} = 2 = \frac{\ell_2 - \ell_4}{\ell_3 - \ell_4}. \tag{4.3}$$

记 $\alpha = \ell_1 - \ell_2$，$\beta = \ell_2 - \ell_3$，$\gamma = \ell_3 - \ell_4$；它们都是正的。

方程 4.3 的第一个等式表明 $\alpha = \beta$，而第二个等式 $2 = (\beta + \gamma)/\gamma$ 表明 $\beta = \gamma$。因此 $\alpha = \beta = \gamma$；再结合条件 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 0$（由 $\rho(\gamma) \in \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ 得出），可知 $\rho(\gamma)$ 共轭于某个形如 $\mathrm{diag}(\lambda^3, \lambda, \lambda^{-1}, \lambda^{-3})$ 的矩阵，其中 $\lambda > 1$。命题 4.10（由特征值判定为福克斯型）表明ρ 是福克斯型。□

4.6. 结果的推论。 最后，我们说明引言中所述的结果如何推导得出。首先注意：

定理 *4.17.* *</style}*叶映射 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常值，当且仅当 ρ 是福克斯型。若 ρ 是福克斯型，则 $\mathfrak{s}_\rho$ 取值为该椭圆。

证明。 福克斯型情形由 Guichard-Wienhard 在 [20] 中证明。由推论 4.11、命题 4.12 和命题 4.16 可知，若 ρ 不是福克斯型表示，则 $\mathfrak{s}_\rho$ 不是常值函数。□

主要定理如下：

定理 *1.1* 的证明。 第一个等价性即定理 4.17。（2）与（3）等价，是因为命题 4.4 给出了常值性与可数像之间的等价关系。关于（4）与（1）等价性中涉及福克斯型表示的部分，可由椭圆的标准性质推出。由引理 4.3（叶映射基础）以及可分域是 $\mathfrak{C}$ 的闭点，可知若 $\mathfrak{C}$ 是闭点，或可分域作为一片叶出现，则（2）成立。由命题 4.16 可知，若一片叶的自同构群非离散，则 ρ 是福克斯型表示；特别是，该命题并未假设 $\mathfrak{s}_\rho$ 为常值函数。□

定理 *1.2* 的证明。结合定理 4.17 与引理 4.3（叶映射基础）。 □

定理 *1.3* 的证明。对于 ρ 非福克斯型，$\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 是 $\mathfrak{C}$ 的非单点闭子集，这由定理 1.1 和命题 4.15 得出。根据命题 4.15 的刻画，$\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 是 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 中任意一点的闭包，因此 $\mathfrak{s}_\rho(\partial\Gamma)$ 在闭集中是极小的。这就证明了关于 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^2)$ 的定理。

根据 Benz´ecri [6]（§V.3，命题 4）关于凸包的 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$-闭包的经典刻画，$\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 关于 $n \geq 3$ 的结果可归结为 $n = 2$ 情形。特别地，Benz´ecri 的刻画意味着：若 $\Omega \in \mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$ 的 $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)}(\{[\Omega]\})$ 有一个非点的极小闭子集 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^n)$，那么由以下方式构造的区域 $\Omega' \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ 在 $\mathfrak{C}(\mathbb{RP}^{n+1})$ 中也具有同样性质：在仿射图 $\mathcal{A}$ 中，取 Ω 的一个包含副本，并使其与 $\mathcal{A}$ 的交集是 $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ 的一个副本 P 和一个点 $p \in \mathcal{A} - P$，然后取该包含副本的凸包。□

推论 *1.4* 的证明。这由一个标准事实直接得出（例如 [16] 习题 4.5.2.3）：在 $\mathbb{RP}^2$ 中具有一个非零曲率点的适当凸域 Ω 包含 Ω 的 {[闭包中的椭圆。若 $\rho \in \mathrm{Hit}_4(S)$，那么由于 $\mathfrak{s}_\rho$ 具有闭像，这意味着，若某个叶 $\mathfrak{s}_\rho$ 包含一个具有非零曲率的边界点，则存在一个叶 $\mathfrak{s}_\rho(y)$ 与该椭圆射影等价。由此我们得出 ρ 是福克斯型的（定理 1.1 ）。□

推论 1.5 的证明与推论 1.4 的证明类似。

Appendix A. Proofs of Some Useful Facts

在本附录中，我们证明主要证明中使用的两个事实。为方便读者，我们重述论文正文中的相关表述。

第一个是引理 2.5，内容关于在适当的射影映射下保持不变的域的不动点处的模型。

引理 A.1（固定点处的模型）。设 $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$ 是一个适当凸的严格凸域，在 $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ 下保持不变，并且共轭于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，其中 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$。记 $l_i = \log \lambda_i$ 为 $i = 1、2、3$，并令 x_{A^+} 表示 A 在 $\mathbb{RP}^2$中的吸引不动点。

那么 $x_{A^+} \in \partial\Omega$ 是 α-建模的

$$\alpha = \frac{l_1 - l_3}{l_1 - l_2}.$$

引理 *2.5* 的证明。我们遵循 Benoist 在 [4], 中的论证，仔细追踪涉及的误差项，并指出一些一致性的来源，从而证明比 [4]中所断言的稍强的 α-建模结论。

设 e_1, e_2, e_3 分别是 A 的特征向量，其特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。取一个仿射图，使 A 的排斥超平面为无穷远超平面，x_{A^+} 位于原点，A^+ 的吸引超平面 y_{A^+} 为水平轴，直线 $[e_1][e_3]$ 与此仿射图的交线为竖直轴，且 Ω 包含于上半平面。严格凸性意味着 $\partial\Omega$ 与水平轴仅在原点相交，且不包含任何线段。记 A的排斥不动点为 x_{A^-}。

只需构造常数 C_1, C_2，使得对于所有属于包含 x_{A^+} 且 x_{A^+} 位于其内部的紧子集 $x \neq x_{A^+}$ $K \subset \partial\Omega$ 的 $x \neq x_{A^+}$，

$$C_1 \leq \log d(x, x_{A^+}) - \alpha^{-1} \log d(x, y_{A^+}) \leq C_2. \tag{A.1}$$

在这个坐标系中，A 的作用由 $\begin{bmatrix} \lambda_2/\lambda_1 & \\ & \lambda_3/\lambda_1 \end{bmatrix}$ 给出。因此，如果 $p = (a, b)$，我们有 $d(A^n p, x_{A^+}) = \frac{1}{\lambda_1^n}(\lambda_2^{2n}|a| + \lambda_3^{2n}|b|)^{1/2}$，并且 $d(A^n p, y_{A^+}) = \lambda_3^n b/\lambda_1^n$。当 n 足够大时，我们可以假设 $\lambda_2^{2n}|a|^2 \leq \lambda_2^{2n}|a|^2 + \lambda_3^{2n}|b|^2 \leq \max\{\lambda_2^{2n+2}|a|^2, \lambda_2^{2n-2}|a|^2\}$。因此，我们有

$$\begin{aligned} \log d(A^n p, x_{A^+}) &= -n\ell_1 + \frac{1}{2}\log(\lambda_2^{2n}|a|^2 + \lambda_3^{2n}|b|^2) \\ &\leq n(\ell_2 - \ell_1) + |\ell_2| + \log|a|, \end{aligned}$$

下界 $n(\ell_2 - \ell_1) + \log|a|$ 同理可得。此外，

$$\alpha^{-1} \log d(A^n p, y_{A^+}) = \alpha^{-1} \log\left(\frac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n}|b|\right) = n(\ell_2 - \ell_1) + \alpha^{-1}\log|b|,$$

因此，对于这个 p，我们有方程 A.1，其中 $C_1 = \log|a| + \alpha^{-1}\log|b|$ 以及 $C_2 = |\ell_2| + \log|a| + \alpha^{-1}\log|b|$。

现在我们观察到，如果 $p = (a, b) \in \partial\Omega - \{x_{A^-}\}$ 包含在这个仿射图中，那么由 Ω 的凸性可知，$\partial\Omega - \{x_{A^-}\}$ 中位于 p和 gp之间的所有点都在紧

盒 $B = [(\lambda_2/\lambda_1)a,\ a] \times [(\lambda_3/\lambda_1)b,\ b]$中。特别地，$\Omega$ 中位于 p 和x_{A^+} 之间的线段包含在 $\{x_{A^+}\} \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n B)$中。在 B上，上述所有估计都可以一致地进行，从而得到所需的常数。□

我们在此证明的第二个也是最后一个事实，是对李群中共轭离散子群的定量离散性进行局部控制；这一事实在命题 4.4（调整为连续性）的证明中发挥作用。

回顾我们的记号：Λ 是赋有右不变度量的李群 G 的离散子群，$\kappa(\Lambda) = \inf\{d(e, g) \mid g \in \Lambda - \{e\}\}$，而共轭记作$\Psi_g$：$h \mapsto ghg^{-1}$。

引理 A.2 (离散性在共轭下保持)。设 G 是一个李群，$\Lambda < G$ 是 G的一个离散子群。考虑函数 η：$g \mapsto \kappa(\Psi_g(\Lambda))$。给定 $g_0 \in G$。则存在 g_0 的一个邻域 U，使得对所有 $h \in U$，均有 $\eta(h) > \kappa(\Psi_{g_0}(\Lambda))/3$。

引理 *A.2* 的证明。当然，对于 $h \in G$，我们有 $\Psi_h(\Lambda) = \Psi_{hg_0^{-1}}(\Psi_{g_0}(\Lambda))$。利用这一点，我们考虑群 $\Lambda' = \Psi_{g_0}(\Lambda)$。只需证明：

断言。存在 e 的一个邻域 U，使得对 $h \in U$，有 $2\kappa(\Psi_h\Lambda') > \kappa(\Lambda')$。

固定一个 $R > 0$，令 $L_R = B_R(e)$ 为以单位元为中心、半径为 R 的闭球，并令 $K \subset G$ 为紧集。那么 $(g,\ p) \mapsto ||D_p\Psi_g||$ 是连续的。因此存在某个$C = C(K,\ R)$，使得对所有 $g \in L_R$ 和 $p \in K$，都有 $||D_p\Psi_g|| \leq C$；特别地，$\Psi_\cdot(p)$ 在 L_R 上是 C-Lipschitz 的。

令 $r > 0$ 和 $\epsilon > 0$。那么对所有 $h \in B_r(e)$ 和 $g \in B_\epsilon(e)$，我们有 $\Psi_g(h) \in B_{r+C\epsilon}(e)$。因此令 $\epsilon <$ 为 $\min(\kappa_{\Lambda'}/3C, R)$，且令 $r < \kappa_{\Lambda'}/3$。那么对所有 $g \in B_\epsilon(e)$ 和 $h \in B_r(e)$，我们有 $\Psi_g(h) \in B_{2\kappa_{\Lambda'}/3}$. 接下来注意，若 $\gamma \in G, g \in B_\epsilon(e)$，且 $\Psi_g(\gamma) \in B_r(e)$，则$\gamma = \Psi_{g^{-1}}(\Psi_g(\gamma)) \in B_{2\kappa_{\Lambda'}/3}(e)$，特别地有 $\gamma \notin \Lambda'$。由此可知，对所有属于$B_\epsilon(e)$的 g 以及 $\gamma \in \Lambda'$，我们有 $g^{-1}\gamma g \notin B_{\kappa'_\Lambda/3}(e)$，因此在 $U = B_\epsilon(e)$ 上，$\kappa_{g^{-1}\Lambda g} > \kappa_\Lambda/3$。□

References

[1] Daniele Alessandrini、Colin Davalo 和 Qiongling Li。《具有（拟）Hitchin 全纯单值化的射影结构》，2021年。arxiv:2110.15407。[2] Daniele Alessandrini、Sara Maloni、Nicolas Tholozan 和 Anna Wienhard。《与阿诺索夫表示相关的纤维丛》，2023年。arxiv:2303.10786。[3] Yves Benoist。线性群的渐近性质。《几何与泛函分析》，7(1):1–47，1997年。[4] Yves Benoist。可分凸集 I。载于代数群与算术，第339–374页。塔塔基础研究所，孟买，2004年。[5] Yves Benoist。个人通信。2023年。[6] Jean-Paul Benzécri。关于局部仿射与局部射影流形。《法国数学会通报》，88:229–332，1960年。[7] Lipman Bers。作为模空间函数的全纯微分。《美国数学会通报》，第206–210页，1961年。[8] Rufus Bowen。拟圆的豪斯多夫维数。高等科学研究所 ´数学出版物，(50):11–25，1979年。[9] Martin Bridgeman、Beatrice Pozzetti、Andrés Sambarino 和 Anna Wienhard。纯虚方向上的豪斯多夫维数海森矩阵。《伦敦数学会通报》，54(3):1027–1050，2022年。[10] James W. Cannon 和 William P. Thurston。群不变佩亚诺曲线。《几何与拓扑》，11:1315–1355，2007年。[11] Suhyoung Choi 和 William Goldman。闭曲面上的凸实射影结构是闭的。《美国数学会会刊》，第657–661页，1993年。[12] Brian Collier、Nicolas Tholozan 和 Jérémy Toulisse。曲面群到 $SO_0(2,\ n)$ 的极大表示的几何。《杜克数学杂志》，168(15):2873–2949，2019年。[13] Colin Davalo。近测地浸入与不连续域，2023年。arxiv:2303.11260。[14] Vladimir Fock 和 Alexander Thomas。高阶复结构。《国际数学研究通知》，第15873–15893页，2021年。

[15] William Goldman。紧曲面上的凸实射影结构。《微分几何杂志》，第791–845页，1990年。[16] William M. Goldman。《流形上的几何结构》，《数学研究生教材》第227卷。美国数学学会，美国罗德岛州普罗维登斯， [2022] ©2022年。[17] Olivier Guichard。可分凸集的 Hölder 正则性。Ergodic Theory Dynam. Systems，25(6):1857–1880，2005年。[18] Olivier Guichard。超凸曲线的一种对偶性。《几何奉献》，112:141–164，2005年。[19] Olivier Guichard。Hitchin 分支与曲面群的超凸表示。《微分几何杂志》，80(3):391–431，2008年。[20] Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。凸叶状射影结构与 $PSL_4(R)$ 的 Hitchin 分支。《杜克数学杂志》，第381–445页，2008年。[21] Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。阿诺索夫表示：不连续域及其应用。《数学发明》，第357–438页，2012年。[22] Sebastian Hensel 和 Jenya Sapir。从填充流到 Teichmüller 空间的投影，2021年。arxiv:2109.14768。[23] Victor Kac 和 Ernest Borisovich Vinberg。拟齐次锥。《数学札记》，1:347–354，1967年。[24] François Labourie。阿诺索夫流、曲面群与射影空间中的曲线。《数学发明》，165(1):51–114，2006年。[25] François Labourie。曲面上的平坦射影结构与三次全纯微分。《纯粹与应用数学季刊》，2007年。[26] François Labourie。交比、阿诺索夫表示与 Teichmüller 空间上的能量泛函。《巴黎高等师范学院科学年刊》，第437–469页，2008年。[27] François Labourie。秩 2 中的循环曲面与 Hitchin 分支。《数学年刊》，第1–58页，2017年。[28] John Loftin。仿射球面与凸 $\mathbb{RP}^n$-流形。《美国数学杂志》，第255–274页，2001年。[29] Vladimir Marković。闭黎曼曲面乘积中的极小曲面不唯一性。《几何与泛函分析》，第31–52页，2022年。[30] Vladmir Marković、Nathaniel Sagman 和 Peter Smillie。在 $\mathbb{R}^n$ 以及双曲曲面乘积中的不稳定极小曲面，2022年。arxiv:2206.02938。[31] Alexander Nolte。从高阶复结构空间到 Hitchin 分支的典范映射，2022年。arxiv:2204.04732。[32] Rafael Potrie 和 Andrés Sambarino。Hitchin 表示的特征值与熵。《数学发明》，209(3):885–925，2017年。[33] Beatrice Pozetti 和 Andrés Sambarino。重新审视利普希茨极限集：希尔伯特熵与不可微性，2022年。hal-03898485。[34] Nathaniel Sagman 和 Peter Smillie。非紧型对称空间中的不稳定极小曲面，2022年。arxiv:2208.04885。[35] Andrés Sambarino。正表示的无穷小扎里斯基闭包，2020年。arxiv:2012.10276。[36] Anna Wienhard。高阶 Teichmüller 理论导论。载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》第二卷：特邀报告，第1013–1039页。World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2018年。[37] Tengren Zhang 和 Andrew Zimmer。阿诺索夫表示极限集的正则性，2017年。arxiv:1903.11021。

Rice University, Houston TX, USA电子邮箱地址：alex.nolte@rice.edu