arXiv:2304.01381v1 [math.AC] 3 Apr 2023

由李代数上的双分次构造的自由分解

XIANGLONG NI 和 JERZY WEYMAN

Abstract. 我们构造了两个自由分解族，用以分解限制在大开胞上的某些反施伯特簇的理想。我们猜想，这些例子具有一般性性质，可转化为具有给定贝蒂数的完美理想的结构定理，从而推广 Buchsbaum 和 Eisenbud 关于余维三戈伦斯坦理想的著名定理。

Contents

1. 引言 1
2. 一般构造 3
3. 余维三完美理想 3
3.1. D_n 3
3.2. E_6 3
3.3. E_7 3
3.4. E_8 4
4. 余维四戈伦斯坦理想 4
4.1. $E_4 = A_4$ 4
4.2. $E_5 = D_5$ 4
4.3. E_6 4
4.4. E_7 4
4.5. E_8 5
5. 无环性的证明 6
6. 不变量 7
7. 致谢 8
参考文献 8

1. 引言

在 [3], Buchsbaum 和 Eisenbud 给出了其刻画局部环 R中余维三 Gorenstein 理想 I 的自由分解的经典结果：在自由模中进行基变换后， R/I 的分解具有如下形式

$$0 \to R \xrightarrow{d_3} F_1^* \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} R$$

其中，对于奇数 $n \geq 3$， d_2 是一个反对称矩阵，而 d_1、d_3 由 d_2 的 $(n-1)$ 个 $\times(n-1)$ Pfaffian 构成。特别地，在以 x_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ 个变量为变量的多项式环 S 上，这种分解的一般形式是无挠上同调的，而所有其他此类分解均可通过某种特化 $S \to R$ 得到。

从某种意义上说，明确给出一般例子，使这成为可能的最强结构定理。此类其他结果还包括经典的希尔伯特-伯奇定理（当 pdim $R/I = 2$ 时）。由于几乎完全交与 Gorenstein 理想相关联，它们在余维三 [1], [4] 中的分解也完全得到了理解。

不过，除这些情形外，目前仍缺乏此类明确的结构定理。就一般例子而言，最接近的是以下猜想（基本已得到证明，见 [6] 和 [10]）：由六个生成元生成的余维四 Gorenstein 理想，是余维三 Gorenstein 理想的超曲面截面。于是，此类理想的一般分解将是由五个生成元生成的一般 Buchsbaum-Eisenbud复形与另一个不定元 f对应的复形 $0 \to S \xrightarrow{\cdot f} S$ 的张量积。

本文构造了两族用于分解完美理想的复形，并猜想它们具有与上述情形类似的一般性性质。具体而言，我们猜想，我们的每个例子都可以特化为具有相同贝蒂数的任意完美理想的分解。这个猜想的动机来自与 Weyman的泛环 [14], [15]之间的深刻联系。解释这一联系需要大量关于泛环的背景知识，而这些知识对构造本身并非必需，因此我们将其留待后续论文阐述，以便本文聚焦于例子。

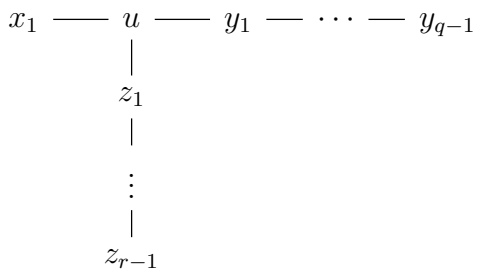
我们的例子源自类型为 D_n 和 E_n的李代数，利用由 Dynkin 图上特定顶点对诱导的双分次。在第一系列例子中，对于 D_n这一情形，我们重新得到由 n 个生成元生成的余维三戈伦斯坦理想的通用 Buchsbaum-Eisenbud 分解，以及 Brown 关于几乎完全交的密切相关结果。将相同的构造应用于 E_n，我们得到贝蒂数为 (1, 5, 6, 2)、(1, 6, 7, 2)、(1, 5, 7, 3)、(1, 7, 8, 2) 和 (1, 5, 8, 4) 的分解。

在第二系列例子中，对于 E_6这一情形，我们重新得到由六个生成元生成的余维四戈伦斯坦理想的（猜想意义上的）通用分解。随后，我们自然地猜想，来自 E_7 和 E_8 的类似例子分别适用于七个和八个生成元的通用情形。

我们先介绍必要的表示论背景，然后概述第2节中分解的一般构造。接着，在第3节中，我们会在可行的情况下逐一明确描述每个长度三的例子，并在第4节中逐一描述每个长度四的例子。在第5节中，我们证明这些复形能够分解限制在大开胞上的某些反施伯特簇的理想。最后，在第6节中，我们说明如何从不变量的角度诠释第3节和第4节中分解的线性截面，从而拓展 [12] 中的相关观察。

2. The general construction

我们将讨论单键 Dynkin 图（类型为 A_n、 D_n和 E_n）。尽管这并不常见，为了与 [15] 中的记号一致，我们将以下列 T形状展示这些图。



在某些退化情形下，右臂的长度可能为零，从而得到类型 A_n。我们主要关注类型 D_n 和 E_n，因为有趣的例子都是由这些情形产生的。

对于这样的图，令 $\mathfrak{g}$ 为其对应的复单李代数。Dynkin 图的每个节点 t 都对应于 $\mathfrak{g}$ 的一个单根 α_t 。令 n 表示 $\mathfrak{g}$的秩，即 Dynkin 图中的节点数。由于这些单根构成了 $\mathfrak{g}$的根空间的一组基，因此 $\mathfrak{g}$ 的每个有限维表示 V 都具有 $\mathbb{Z}^n$-多重分次。当然，这也包括伴随表示：也就是 $\mathfrak{g}$ 自身的情形。

通过指定 Dynkin 图中某个节点子集 I（等价地，即指定某些单根），我们可以将这种 $\mathbb{Z}^n$ 分次粗化为 $\mathbb{Z}^{|I|}$ 分次，并称之为 V上的I-分次。每个分次分量都是子代数 $\mathfrak{g}^{(I)}$ 的一个表示；该子代数对应于删除 I中的顶点后所剩下的图。就我们的目的而言， I 通常是一个单元素集合。

对于 Dynkin 图的每个顶点 t ，令 ω_t 表示相应的基本权。支配整权 ω 是 ω_t的非负整数线性组合。令 $V(\omega)$表示 $\mathfrak{g}$ 中最高权为 ω的有限维不可约表示。若要指称子代数 $\mathfrak{g}^{(I)}$的一个表示，我们将改写作 $V(\omega, \mathfrak{g}^{(I)})$。

$V(\omega)$ 的完整 I-分次分解可通过算法计算；例如参见 [8]。尤其是，顶部分量很容易读出：它就是 $V(\omega, \mathfrak{g}^{(I)})$（忽略 $t \in I$ 对应的 ω 中 ω_t 的系数）。我们用 i_t^{top} 表示对顶端 t-分次分量的嵌入，用 p_t^{bottom}表示到最底端 t-分次分量的投影。

例 2.1。设 $I = \{x_1\}$。与 $\mathfrak{g}$ 的这些节点相对应的子代数

$$y_{q-1}, \ldots, y_1, u, z_1, \ldots, z_{r-1}$$

是 $\mathfrak{sl}(F)$，其中 $F = \mathbb{C}^{q+r}$。若 V是 $\mathfrak{g}$的一个表示，则 V 的每个 x_1-分次分量都是 $\mathfrak{sl}(F)$ 的一个表示。例如， $V(\omega_{z_{r-1}})$ 的顶端 x_1-分次分量是 $V(\omega_{z_{r-1}}, \mathfrak{sl}(F)) = F^*$。对于 $V(\omega_{y_{q-1}})$，它是 $V(\omega_{y_{q-1}}, \mathfrak{sl}(F)) = F$；对于 $V(\omega_{x_1})$，它是平凡表示 $V(0, \mathfrak{sl}(F)) = \mathbb{C}$，因为 $x_1 \in I$。

随后可根据具体情况利用对偶性推断底分量。

注 2.2. 为了使本节的论述简洁统一，我们假设所考虑的 Dynkin 类型具有自对偶表示。对于 D_n （偶数 n）、 E_7和 E_8，情况确实如此。对于其余情况——即 A_n （任意 n）、 D_n （奇数 n）和 E_6——在下文中将顶点 x_1 替换为其对偶，并相应地调整 $\mathfrak{sl}$（F_2） $= \mathfrak{g}^{(x_1)}$

这样调整是为了仍能构造出一个复形；具体原因将在需要时作更详细的解释。例如，参见 §3.1.2。

现在我们描述两族复形的构造。对于长度三构造，我们将关注由顶点 x_1 and z_1 诱导的分次。为了更好地描述分次分量，我们固定 $\mathfrak{g}$ 的以下子代数:

- $\mathfrak{sl}(F_3)$ corresponding to the nodes $z_2, z_3, \ldots, z_{r-1}$, where $F_3 = \mathbb{C}^{r-1}$,
- $\mathfrak{sl}(F_2)$ corresponding to the nodes $y_{q-1}, \ldots, y_1, u, z_1, \ldots, z_{r-1}$, where $F_2 = \mathbb{C}^{q+r}$, and
- $\mathfrak{sl}(F_1)$ corresponding to the nodes $y_{q-1}, \ldots, y_1, u, x_1$, where $F_1 = \mathbb{C}^{q+2}$.

按照这一记号，每个 x_1-分次分量都是 $\mathfrak{sl}(F_2)$ 的一个表示，而每个 z_1- 分次分量都是 $\mathfrak{sl}(F_3) \times \mathfrak{sl}(F_1)$ 的一个表示。例如， $V(\omega_{z_{r-1}})$ 的最高 z_1-分次分量是 F_3^*，最低 x_1-分次分量是 F_2（对于后者，我们使用该表示是自对偶的这一假设）。

令 G 为与 $\mathfrak{g}$ 对应的单连通复李群。那么， $\mathfrak{g}$ 的表示 V 也是 G 的表示。令 $\rho_V(g)$ 表示 $g \in G$ 在 V 上的作用。对于每个 $g \in G$，我们构造一个复形

$$0 \to F_3^* \to F_2 \to F_1^* \to \mathbb{C}$$

的 $\mathbb{C}$-向量空间如下。

利用表示 $V = V(\omega_{z_{r-1}})$，我们将 d_3 定义为复合映射

$$F_3^* \xrightarrow{i_{z_1}^{\mathrm{top}}} V \xrightarrow{\rho_V(g)} V \xrightarrow{p_{x_1}^{\mathrm{bottom}}} F_2.$$

利用表示 $V = V(\omega_{y_{q-1}})$，我们将 d_2 定义为该复合映射的对偶

$$F_1 \xrightarrow{i_{z_1}^{\mathrm{top}}} V \xrightarrow{\rho_V(g)} V \xrightarrow{p_{x_1}^{\mathrm{bottom}}} F_2^*.$$

注 2.3。注意， g 在对偶 V^* 上的作用，是通过g^{-1} 在 V上的作用进行前复合。这意味着， d_2 也可以定义为复合映射

$$F_2 \xrightarrow{i_{x_1}^{\mathrm{top}}} V^* \xrightarrow{\rho_V(g^{-1})} V^* \xrightarrow{p_{z_1}^{\mathrm{bottom}}} F_1^*.$$

最后，利用表示 $V = V(\omega_{x_1})$，我们将 d_1 定义为复合映射

$$F_1^* \xrightarrow{i_{z_1}^{\mathrm{top}}} V \xrightarrow{\rho_V(g)} V \xrightarrow{p_{x_1}^{\mathrm{bottom}}} \mathbb{C}.$$

由于我们将顶部和底部分次分量识别为$\mathfrak{sl}(F_i)$的特定表示，因此每个微分只在相差一个非零标量倍数的意义下确定。在后文明确描述这些微分时，将默认选取此类标量。

引理 2.4. 上述定义的映射序列构成一个复形。

证明。复合 d_2d_3 是伴随表示于张量积 $d_3 \otimes d_2^*$ 再取迹 :

$$F_3^* \otimes F_1 \to V(\omega_{z_{r-1}}) \otimes V(\omega_{y_{q-1}}) \to V(\omega_{z_{r-1}}) \otimes V(\omega_{y_{q-1}}) \to F_2 \otimes F_2^* \to \mathbb{C}.$$

分支 $F_3^* \otimes F_1$ 是不可约表示 $V(\omega_{z_{r-1}} + \omega_{y_{q-1}})$ 的最高 z_1 分次分量，该表示在张量积中恰好出现一次。这个不可约子表示的最低 x_1 分次分量是 $V(\omega_{z_{r-1}} + \omega_{y_{q-1}}, \mathfrak{sl}(F_2)) = \mathfrak{sl}(F_2)$，即 $F_2^* \otimes F_2$ 中 $\mathbb{C}$ 的互补因子。由于分支 $F_3^* \otimes F_1$ 和 $\mathbb{C}$ 位于不同的子表示中，这个复合映射必然为零。

对复合映射 d_1d_2 也可以作类似论证，只需考察张量积 $d_2^*\otimes d_1$:

$$\mathbb{C}\to F_1\otimes F_1^*\to V(\omega_{y_{q-1}})\otimes V(\omega_{x_1})\to V(\omega_{y_{q-1}})\otimes V(\omega_{x_1})\to F_2^*\otimes\mathbb{C}.$$

这里， $F_2^*\otimes\mathbb{C}$ 是 $V(\omega_{y_{q-1}}+\omega_{x_1})$的底部 x_1分次分量，它在张量积中只出现一次。但其顶部 z_1分次分量是 $\mathfrak{sl}(F_1)$，在 $F_1\otimes F_1^*$中与 $\mathbb{C}$ 互补，因此我们再次得出复合映射为零。□

对于 $t\in\{x_1,z_1\}$，令 $\mathfrak{n}_t$ 表示 $\mathfrak{g}$ 在 t分次下负部分对应的幂零子代数。指数映射 exp: $\mathfrak{n}_t\to G$ 是到其像 N_t上的微分同胚； N_t是 G的一个幺幂子群。因此， N_t 的坐标环就是 $\mathfrak{n}_t$的坐标环，即 $R_t=\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}_t^*)$。

设 $L_t\in\mathfrak{n}_t\otimes R_t$ 为“迹元”，即 $1\in\mathbb{C}$ 在映射下的像

$$\mathbb{C}\to\mathfrak{n}_t\otimes\mathfrak{n}_t^*\subset\mathfrak{n}_t\otimes R_t.$$

换言之， L_t 表示 $\mathfrak{n}_t$的一个一般元。 $\mathfrak{n}_t$ 在每个表示V上的作用，可以理解为 L_t 在 σ_V 下的像：$(\mathfrak{n}_t\to\mathrm{End}(V))\otimes R_t$。注意，$\sigma_V(L_t)$是幂零的，因此其指数映射在代数意义下有定义。

如果在我们的构造中用 $\exp\sigma_V(L_t)$ 替换 $\rho_V(g)$，就得到一个由自由R_t-模构成的复形 $\mathbb{F}_t$

$$0\to F_3^*\otimes R_t\to F_2\otimes R_t\to F_1^*\otimes R_t\to\mathbb{C}\otimes R_t.$$

注意，多项式环 $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}_t^*)$ 和复形 $\mathbb{F}_t$ 都按单根具有 $\mathbb{Z}^n$-多重分次。无需实际计算微分，即可完全通过组合方法推导出 $\mathbb{F}_t$ 上的多重分次；我们将在第 3 节以 E_6 为例说明这一过程。

由上述内容，我们实际上得到了两个定义在不同多项式环上的复形 $\mathbb{F}_{x_1}$ 和 $\mathbb{F}_{z_1}$。因此，自然会问它们之间有何关系。

引理 2.5. 设 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_{x_1}+\mathfrak{n}_{z_1}\subset\mathfrak{g}$，且 $R=\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}^*)$。视为定义在 R 上时，复形$\mathbb{F}_{x_1}$ 和 $\mathbb{F}_{z_1}$ 是等价的，即存在 R 的一个自同构 ϕ，使得$\phi^*\mathbb{F}_{x_1}\cong\mathbb{F}_{z_1}$ 作为复形成立。

证明。我们仅使用 $\mathbb{F}_{x_1}$ 与 $\mathbb{F}_{z_1}$之间“共享”的坐标来引入第三个复形。令 $\mathfrak{n}_{x_1,z_1}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中在 x_1,z_1-双分次下严格为负的部分，即 $\mathfrak{n}_{x_1,z_1}=\mathfrak{n}_{x_1}\cap\mathfrak{n}_{z_1}$。令 $\mathbb{F}_{x_1,z_1}$ 表示在上述构造中用 $\mathfrak{n}_{x_1,z_1}$ 替换 $\mathfrak{n}_t$ 所得到的复形。我们断言， $\mathbb{F}_{x_1}$ 和 $\mathbb{F}_{z_1}$ 都等价于这个复形（视为定义在 R 上），这足以证明该引理。

为简洁起见，我们只考虑 $\mathbb{F}_{x_1}$，因为 $\mathbb{F}_{z_1}$ 的情形非常相似。将 $L_{x_1}=L_0+L_-$ 分解为 L_0，其中 L_0 关于 z_1-分次的次数为 0，而 L_- 集中在负的 z_1 次数上。贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式表明，存在一个 $\sim L$，使得

$$\exp\widetilde{L}=(\exp L_0)(\exp L_-).$$

具体而言，$\widetilde{L}=L_{x_1}+\frac{1}{2}[L_0,L_-]+\cdots$；这是良定义的，因为这些项最终会~变为零。$L_{x_1}$ 的每个坐标都是一个变量 $x\in R$，而 L 的公式表明，~中相应的坐标 x' 等于 L 的 x，再加上其他次数严格更低的项。因此，将每个 ϕ 映到 x' 的映射 x 是可逆的。张量积 $\phi^*\mathbb{F}_{x_1}$ 正是复形~，它是在整个构造中用 L 替换 L_{x_1} 得到的。

因此， $\phi^*\mathbb{F}_{x_1}$的微分 d_3、 d_2^*、 d_1具有如下形式

$p_{z_1}^{\mathrm{bottom}}$指数映射$(\sigma_V($ $\widetilde{L}))i_{x_1}^{\mathrm{top}}=p_{z_1}^{\mathrm{bottom}}\exp(\sigma_V(L_0))\exp(\sigma_V(L_-))i_{x_1}^{\mathrm{top}}=M_Vp_{z_1}^{\mathrm{bottom}}\exp(\sigma_V(L_-))i_{x_1}^{\mathrm{top}}$

其中， M_V 是 $\exp(\sigma_V(L_0))$ 在 V 的底部 z_1-分次分量上的限制，即该分次分量的一个自同构。因此，对复形中各模进行基变换后，我们可以忽略项 M_V。这样剩下的就是 $\mathbb{F}_{x_1,\ x_2}$，正如所需。□

我们将在 §5 中证明，这些复形 $\mathbb{F}_t$ 实际上是无挠上同调的。我们之所以关注这些复形，主要源于以下猜想，参见 [16]。

猜想 2.6（余维三一般性猜想）。设 S 是一个局部 $\mathbb{C}$-代数，并假设

$$\mathbb{G}\colon 0 \to S^{r-1} \to S^{q+r} \to S^{q+2} \to S$$

对某个完美理想 I 给出 S/I 的分解。则存在一个同态 $\phi\colon R_t \to S$，使得 $\phi^*\mathbb{F}_t \cong \mathbb{G}$。

若此猜想得到证明，将可为贝蒂数为 $(1, n, n, 1)$、$(1, 4, n, n-3)$、$(1, 5, 6, 2)$、$(1, 5, 7, 3)$、$(1, 6, 7, 2)$、$(1, 5, 8, 4)$ 和 $(1, 7, 8, 2)$ 的余维三完美理想建立结构定理。我们将在 §3 中看到，此猜想与关于此列表中前两种情形的众所周知的结果相一致。

第二族例子采用非常相似的构造。我们假设 Dynkin 图具有如下形式

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & — & u & — & y_1 & — & \cdots & — & y_{q-1} \\ & & | & & & & & & \\ & & z_1 & & & & & & \\ & & | & & & & & & \\ & & z_2 & & & & & & \end{array}$$

即当 $4 \le n \le 8$ 时，它为 E_n，其中 $E_4 = A_4$ 且 $E_5 = D_5$。我们不使用 x_1 和 z_1 分次，而使用 x_1 和 z_2 分次。（注 2.2 同样适用。）为了描述分次分量，我们固定 $\mathfrak{g}$ 的以下子代数：

- $\mathfrak{sl}(F)$ 对应于节点 $y_{q-1}, \dots, y_1, u, z_1, z_2$，其中 $F = \mathbb{C}^{q+2}$，以及
- $\mathfrak{sl}(H)$ 对应于节点 $y_{q-1}, \dots, y_1, u, z_1$，其中 $H = \mathbb{C}^{q+1}$。

在此设定下，x_1-分次分量是 $\mathfrak{sl}(F)$ 的表示，而 z_2-分次分量是 $\mathfrak{so}(H \oplus H^*)$ 的表示。

对于每个 $g \in G$，我们都可以构造一个由 $\mathbb{C}$ 向量空间组成的自对偶复形

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{d_4} F^* \xrightarrow{d_3} H \oplus H^* \xrightarrow{d_2} F \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}.$$

利用表示 $V = V(\omega_{z_2})$，我们将 d_4 定义为复合映射

$$\mathbb{C} \xrightarrow{i_{z_2}^{\mathrm{top}}} V \xrightarrow{\rho_V(g)} V \xrightarrow{p_{x_1}^{\mathrm{bottom}}} F^*.$$

利用 表示 $V = V(\omega_{y_{q-1}})$，我们将 d_3 定义为复合映射的对偶 e

$$H \oplus H^* \xrightarrow{i_{z_2}^{\mathrm{top}}} V \xrightarrow{\rho_V(g)} V \xrightarrow{p_{x_1}^{\mathrm{bottom}}} F.$$

然后我们定义 $d_2 = d_3^*$ 和 $d_1 = d_4^*$。

引理 2.7. 上述定义的映射序列构成一个复形。

证明。此过程与长度为三的情形类似。对于复合映射 $d_3 d_4$，考虑张量积表示 $V(\omega_{z_2}) \otimes V(\omega_{y_{q-1}})$。不可约表示 $V(\omega_{z_2} + \omega_{y_{q-1}})$ 在此张量积中恰好出现一次。其最高 z_2-分次分量为 $H \oplus H^*$，

但其最低 x_1-分次分量为 $\mathfrak{sl}(F)$，与 $F^* \otimes F$ 中的 $\mathbb{C}$互补。因此$H \oplus H^*$ 和 $\mathbb{C}$ 位于不同的子表示中，这意味着复合映射为零。

还需考察复合映射 $d_2 d_3$，它与.....互为伴随

$$\mathbb{C} \to S_2(H \oplus H^*) \to S_2V(\omega_{y_{q-1}}) \to S_2V(\omega_{y_{q-1}}) \to S_2F \subset F \otimes F$$

对称平方 $S_2(H \oplus H^*)$ 分解为 $\mathbb{C} \oplus V(2\omega_{y_{q-1}}, \mathfrak{sl}(H \oplus H^*))$，其中前一个 $\mathbb{C}$因子是我们感兴趣的部分。然而，后一个部分出现在$V(2\omega_{y_{q-1}}) \subset S_2V(\omega_{y_{q-1}})$中，其底部的 z_1-分次分量是 S_2F。因此，我们再次看到$\mathbb{C}$ 和 $F \otimes F$ 属于不同的子表示，从而得出复合映射为零。□

对于 $t \in \{x_1, z_2\}$，令 $\mathfrak{n}_t$ 表示在 t-分次下作为 $\mathfrak{g}$ 负部分的幂零子代数。按照长度三构造中的做法，我们利用 $\exp \mathfrak{n}_t = N_t \subset G$的参数化，得到多项式环 R_t 上的两个复形 $\mathbb{F}_t$。引理 2.5 的陈述和证明在此情形下同样适用。同样，我们将其无环性的证明推迟到 §5。我们有如下猜想，参见 [17]。

猜想 2.8（余维四 Gorenstein 泛性猜想）。设 S 是一个局部$\mathbb{C}$代数，并假设

$$\mathbb{G}\colon 0 \to S \to S^{q+2} \to S^{2q+2} \to S^{q+2} \to S$$

分解 S/I，其中 I是某个完美理想。则存在一个同态 $\phi\colon R_t \to S$，使得 $\phi^*\mathbb{F}_t \cong \mathbb{G}$。

若该猜想得到证明，它将为至多由 $n = 8$ 个生成元生成的余维四 Gorenstein 理想给出结构定理。正如我们将在 §4 中看到的，该猜想对于$n \leq 5$显然成立；而对于 $n = 6$，它则与一个众所周知（且大体已解决）的猜想相吻合。

3. Perfect ideals of codimension three

现在我们将逐一明确描述每种 Dynkin 类型下的构造结果。本节考察第一类例子，它们给出分解长度为三、可分解完美理想的（猜想上泛型的）分解。与 D_n、 E_6和 E_7对应格式的以下分解，均已在 Macaulay2 中完整实现。对于 E_8，虽然伴随表示 $V(\omega_8)$ 尚可处理，但表示 $V(\omega_2)$ 和 $V(\omega_1)$ 规模巨大，因此我们只能实现三个微分中的一个。

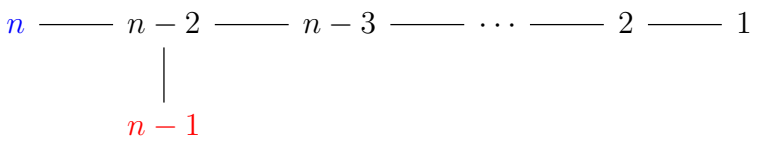
最简单的例子其实是 A_n，也就是说， T形图的右臂长度为零。这种情形并没有特别有趣，而且还有许多其他情形值得讨论，因此为简洁起见，我们略过不谈。有兴趣的读者可以验证，在这种情形下，猜想 2.6 显然成立：所得复形给出了一个由三个生成元生成的完全交的一个分解。

对于 D_n，我们将详细介绍第2节的构造，并展示它如何还原熟知的复形。转而讨论 E_n时，我们会着重尽可能明确地描述最终结果，同时假定其构造过程完全类似。

如第2节所述，对于每种格式，我们都得到两个等价的复形 $\mathbb{F}_{x_1}$ 和 $\mathbb{F}_{z_1}$。复形 $\mathbb{F}_{x_1}$ 更容易显式描述，因此我们将重点讨论它。

3.1. D_n。这里我们考虑与 Dynkin 图 D_n 相关的李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n)$。感兴趣的三个基本表示是标准表示 $V(\omega_1)$，以及半旋量表示 $V(\omega_{n-1})$ 和 $V(\omega_n)$。如果 n 为偶数，那么这些表示都是自对偶的。然而，如果 n 为奇数，那么半旋量表示 $V(\omega_{n-1})$ 和 $V(\omega_n)$ 互为对偶。我们先考虑 n 为偶数的情形，然后简要说明 n 为奇数时所需的改动。

3.1.1. 顶点（n，$n-1$），格式（1，n，n，1），n 为偶数。对于这种格式，我们将 Dynkin 图画成如下形式



以符合例如 [15] 中采用的“$T_{p,q,r}$”约定。$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{sl}(F_1)$ 和 $\mathfrak{sl}(F_2)$ 如第2节所述，其中 $F_1=F_2=\mathbb{C}^n$。注意，$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(F_1\oplus F_1^*)$（或 $\mathfrak{so}(F_2\oplus F_2^*)$）。下方列出了 $V(\omega_{n-1})$、$V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_n)$ 在单根 α_{n-1} 和 α_n 所诱导的分次下的分解。方框中的分支将构成我们自由分解中的模。

$$
\begin{aligned}
V(\omega_{n-1}) &= \mathbb{C}\oplus\bigwedge^2 F_1\oplus\cdots\oplus\boxed{\bigwedge^n F_1}\\
&= \boxed{F_2}\oplus\bigwedge^3 F_2\oplus\cdots\oplus\bigwedge^{n-1} F_2\\
V(\omega_1) &= F_1^*\oplus\boxed{F_1}\\
&= \boxed{F_2^*}\oplus F_2\\
V(\omega_n) &= F_1\oplus\bigwedge^3 F_1\oplus\cdots\oplus\boxed{\bigwedge^{n-1} F_1}\\
&= \boxed{\mathbb{C}}\oplus\bigwedge^2 F_2\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n F_2
\end{aligned}
$$

令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在（$n-1$）分次[1], 中的负部分，即

$$\mathfrak{n}=\bigwedge^2 F_1^*,$$

并令(从较粗的 $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^*]$ 为其 ($\mathbb{Z}^n$ -分次) 坐标环 .

oarser ($n-1$)-分次的角度来看，这是一个所有生成元次数均为 1 的普通多项式环。) 更具体地说，我们将按照以下约定选取基。

定义 3.1. 如果 $\mathfrak{sl}(F)$ 对应于 Dynkin 图上的节点 $t_1,\dots,t_{n-1}$，我们称有序列表 $e_1,\dots,e_n$ 是 F的一个标准基，若 e_1 是一个最高权向量，且 $e_2,\dots,e_n$ 是通过依次对 e_1 应用与根 $-\alpha_{t_1},\dots,-\alpha_{t_{n-1}}$ 对应的李代数生成元得到的。

[1]也可以取 $\mathfrak{g}$ 在 n-分次中的负部分，但由于 D_n 上的节点 n 和 $n-1$ 具有对称性，这样做是多余的。在这种情况下得到的复形与此处给出的复形对偶。

设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 F_1的一个标准基。那么

$$R = \mathbb{C}[\{b_{ij}\}_{1 \le i < j \le n}]$$

其中 b_{ij} 对应于 $e_i \wedge e_j$。

我们将构造如下形式的分解

$$0 \to \mathbb{C} \otimes R \xrightarrow{\exp_{n-1}} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_n} \mathbb{C} \otimes R$$

其中，$\exp_i$ 表示 $\exp \mathfrak{n}$ 在 $V(\omega_i)$上的作用，我们简要说明如下 ly.

为描述该分解，我们先从微分 d_2: $F_2 \otimes R \to F_1^* \otimes R$入手，因为它来自三个表示中最小的一个：标准表示 $V(\omega_1)$。在 $(n-1)$-分次下，该表示只有两个分次分量： F_1^*和 F_1。$\mathfrak{n}$ 在 $V(\omega_1)$上的作用是显然的收缩映射

$$(\bigwedge^2 F_1^*) \otimes F_1 \to F_1^*.$$

也就是说， $\mathfrak{n}$中的一个元素等价于一个交错映射 $F_1 \to F_1^*$，它在 $V(\omega_1)$上的作用正是该映射。取坐标 b_{ij} 在 $\mathfrak{n}$上时， $\mathfrak{n}$ 中一般元的作用由下列严格上三角分块矩阵表示

$$X = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & B \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$$

其中 B: $F_1 \to F_1^*$是变量 b_{ij}上的一般斜对称矩阵，而 $0_{n\times n}$表示一个 $n \times n$零矩阵。该作用的指数映射为

$$\exp X = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0_{n\times n} & I_n \end{bmatrix}$$

按照第2节，我们取 d_2^*为此矩阵中将 $(n-1)$-分次的顶部分量 F_1映射到 n-分次的底部分量 F_2^*的部分。令 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$为 $e_1, \ldots, e_n$的对偶基，则 F_2^*在 $V(\omega_1)$中的一组基由 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1} \in F_1^*$以及 $e_n \in F_1$组成。

Thus

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & \cdots & -b_{1(n-1)} & 0 \\ b_{12} & 0 & \cdots & -b_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{1(n-1)} & b_{2(n-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{(n-1)n} & -1 \end{bmatrix}$$

注 3.2. 构造中的许多步骤都涉及对表示进行显式识别。这些同构可乘以任意非零标量进行调整，因此整个过程中符号和系数有相当大的自由度。

对于微分 d_3，我们转而考察表示 $V(\omega_{n-1})$。 $\mathfrak{n}$ 对 $V(\omega_{n-1})$ 的作用由以下缩并给出

$$\bigwedge^2 F_1^* \otimes \bigwedge^k F_1 \to \bigwedge^{k-2} F_1.$$

In 关于 $\mathfrak{n}$上的坐标 b_{ij}， 此作用将 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \in \bigwedge^k F_1$ 映射为 t o

$$\sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} b_{ij} \Big(\bigwedge_{\substack{1 \le r \le k \\ r \ne i,j}} e_r \Big) \in \bigwedge^{k-2} F_1 \tag{3.1}$$

对 $\bigwedge^k F_1$的其他基元素也可类似处理。将此作用记为 X。不难证明

$$X^s(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = s! \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=2s}} \pm P_I\Big(\bigwedge_{\substack{1 \le r \le k \\ r \notin I}} e_r \Big) \in \bigwedge^{n-2s} F_1 \tag{3.2}$$

其中， P_I 表示 B 的子矩阵的 Pfaffian，其行列指标取自 I。

微分 d_3 是指数映射 X 的一部分，它将 V（ω_{n-1}）在（$n-1$）分次中的上部 $\bigwedge^n F_1$ 映射到 n 分次中的下部 F_2。从（$n-1$）分次的角度看，后者的基由 $e_i \wedge e_n \in \bigwedge^2 F_1$（$1 \le i \le n-1$）与 $1 \in \mathbb{C}$ 一起给出。因此，我们的微分为

$$d_3 = \begin{bmatrix} P_{\{2,3,4,\ldots,n-2,n-1\}} \\ -P_{\{1,3,4,\ldots,n-2,n-1\}} \\ P_{\{1,2,4,\ldots,n-2,n-1\}} \\ \vdots \\ -P_{\{1,2,3,\ldots,n-3,n-1\}} \\ P_{\{1,2,3,\ldots,n-3,n-2\}} \\ P_{\{1,2,3,\ldots,n-3,n-2,n-1,n\}} \end{bmatrix}$$

注意，前 $n-1$ 个矩阵元是 B 的（$n-2$）×（$n-2$）阶子 Pfaffian，而最后一个矩阵元是整个矩阵 B 的 Pfaffian。

最后，还有一个来自另一个半旋量表示 V（ω_n）的微分 d_1。由于情况与 d_3 类似，这里简要说明，直接给出结果：

$$d_1 = \begin{bmatrix} -P_{\{2,3,4,\ldots,n-2,n-1\}} & P_{\{1,2,4,\ldots,n-2,n-1\}} & \cdots & P_{\{1,2,3,\ldots,n-3,n-1\}} & -P_{\{1,2,3,\ldots,n-3,n-2\}} & 0 \end{bmatrix}$$

我们构造的分解显然不是极小的。但鉴于猜想 2.6，这是意料之中的，因为余维三的 Gorenstein 理想的极小生成元个数为奇数，而 n 此处是偶数 [13]。

注 3.3。该分解也通过 [5, 定理 4.1], 以不同的方法得出。此外，删除 d_1的最后一个零矩阵元、 d_2的最后一列以及 d_3 的最后一个矩阵元（ B的 Pfaffian）后，我们得到一个等价的、格式为 $(1, n-1, n-1, 1)$ 的极小分解，它正是 [3]中熟知的一般例子。在 §3.1.2 中应用于 n 为奇数的情形时，我们的构造也会得到这个极小分解。

3.1.2. 顶点 $(n, n-1)$，格式 $(1, n, n, 1)$， n 为奇数。我们使用与前一小节相同的记号，但现在假设 n 为奇数。

对于这种情况， $V(\omega_n)$、 $V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_{n-1})$ 在由单根 α_{n-1} 和 α_n 诱导的分次中的分解如下所示。

$$\begin{aligned} V(\omega_{n-1}) &= F_1 \oplus \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^n F_1} \\ &= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^2 F_2 \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n-1} F_2 \\ V(\omega_1) &= F_1^* \oplus \boxed{F_1} \\ &= \boxed{F_2^*} \oplus F_2 \\ V(\omega_n) &= \mathbb{C} \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-1} F_1} \\ &= \boxed{F_2} \oplus \bigwedge^3 F_2 \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n F_2 \end{aligned}$$

这里我们遇到了一个障碍：上面框出的分支不再像在 n even 的情形下那样相互匹配。之前的构造会从 $V(\omega_n)$ 和 $V(\omega_1)$ 得到两个 $n \times n$ 矩阵，并从 $V(\omega_{n-1})$ 得到一个 1×1 矩阵；显然，它们无法拼合成一个 $(1, n, n, 1)$ 分解。

注 2.2 中提到的调整解决了这个问题。顶点 n 和 $n-1$ 在 Dynkin 图上互为对偶。如果不用 n-分次中的底部片段，而改用 $(n-1)$-分次中的底部片段，我们就得到

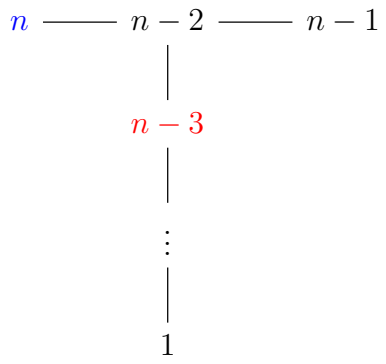
$$\begin{aligned} V(\omega_{n-1}) &= \boxed{F_1} \oplus \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^n F_1} \\ V(\omega_1) &= \boxed{F_1^*} \oplus \boxed{F_1} \\ V(\omega_n) &= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-1} F_1} \end{aligned}$$

设 $\mathfrak{n}$ 为 $(n-1)$-分次中 $\mathfrak{g}$ 的负部分，并设 R 为其坐标环。采用与 §3.1.1 类似的方法，可得到一个分解

$$0 \to \mathbb{C} \otimes R \xrightarrow{\exp_n} F_1 \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_{n-1}} \mathbb{C} \otimes R$$

由于构造的具体细节与 n even 的情形几乎完全相同，为简洁起见，我们省略这些细节。输出的差异见注 3.3：按照 [3]，可得到一个由 n 个生成元生成的余维三戈伦斯坦理想的通用分解。

3.1.3. 顶点 $(n, n-3)$，格式 $(1, 4, n, n-3)$，n even。对于此格式，我们将 Dynkin 图绘制如下：



我们固定 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{sl}(F_1)$、$\mathfrak{sl}(F_2)$ 和 $\mathfrak{sl}(F_3)$，如第2节所述，其中 $F_1 = \mathbb{C}^4$、$F_2 = \mathbb{C}^n$ 和 $F_3 = \mathbb{C}^{n-3}$。

$V(\omega_1)$、$V(\omega_{n-1})$ 和 $V(\omega_n)$ 在由单根 α_{n-3} 和 α_n 诱导的分次下的分解如下所示。

$$
\begin{aligned}
V(\omega_1) &= F_3 \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \boxed{F_3^* \otimes \bigwedge^4 F_1} \\
&= \boxed{F_2} \oplus F_2^* \\
V(\omega_{n-1}) &= F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \bigwedge^2 F_3^* \otimes F_1^* \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1} \\
&= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^3 F_2^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n-1} F_2^* \\
V(\omega_n) &= F_1 \oplus F_3^* \otimes F_1^* \oplus \bigwedge^2 F_3^* \otimes F_1 \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1^*} \\
&= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^2 F_2^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n F_2^*
\end{aligned}
$$

我们可以令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 n-分次下的负部分，或者令其为 $\mathfrak{g}$ 在 $(n-3)$-分次下的负部分。尽管由此得到的两个复形看起来截然不同，但根据引理 2.5，它们是等价的。

暂且采用前一种选择，于是

$$\mathfrak{n} = \bigwedge^2 F_2$$

其坐标环为（$\mathbb{Z}^n$-分次）$R = \mathrm{Sym}(\mathfrak{n}^*)$。（从较粗的 n-分次角度来看，这是一个普通的多项式环，所有生成元的次数均为 1。）令 f_1、……、f_n 为 F_2 的标准基。于是

$$R = \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1 \le i < j \le n}]$$

与 x_{ij} 对偶于 $f_i \wedge f_j$。

我们构造一个如下形式的分解

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_{n-1}^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_n} \mathbb{C} \otimes R.$$

微分 d_3 来自标准表示 $V(\omega_1)$，因此它是最简单的。 $\mathfrak{n} = \bigwedge^2 F_2$ 在 $V(\omega_1)$ 上的作用 $= F_2 \oplus F_2^*$由下列矩阵给出

$$X = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & B \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}, \qquad \exp X = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0_{n\times n} & I_n \end{bmatrix}$$

其中 B 是变量 x_{ij}上的一般斜对称矩阵。我们需要指数映射 exp X 中从 $F_3^* \otimes \bigwedge^4 F_1$ 映射到 F_2的部分。设 $\phi_1, \ldots, \phi_n \in F_2^*$是 $f_1, \ldots, f_n$的对偶基。分支$F_3^* \otimes \bigwedge^4 F_1 \subset V(\omega_1)$的基为 $\phi_4, \phi_5, \ldots, \phi_n$。 因此， 微分 d_3 由 B 的最后 $n-3$ 列组成：

$$d_3 = \begin{bmatrix} -x_{14} & -x_{15} & \cdots & -x_{1n} \\ -x_{24} & -x_{25} & \cdots & -x_{2n} \\ -x_{34} & -x_{35} & \cdots & -x_{3n} \\ 0 & -x_{45} & \cdots & -x_{4n} \\ x_{45} & 0 & \cdots & -x_{5n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{4n} & x_{5n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对于半旋量表示， $\mathfrak{n}$ 的作用 X 在 (3.1) 和 (3.2) 中给出（全文将e 替换为 ϕ ， 并将 b 替换为 x ）。 微分 d_2 是指数映射 exp X中从 $\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1 \subset V(\omega_{n-1})$ 映射到 $F_2^* \subset V(\omega_{n-1})$ 的部分（或其对偶）。 为简洁起见，设 $\phi_I = \bigwedge_{i\in I} \phi_i$和$[n] = \{1, \ldots, n\}$。 $\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1 \subset V(\omega_{n-1})$的一组基为

$$\phi_{[n]\setminus\{1\}}, \phi_{[n]\setminus\{2\}}, \phi_{[n]\setminus\{3\}} \in \bigwedge^{n-1} F_2^* \text{ and } \phi_{4,\ldots,n} \in \bigwedge^{n-3} F_2^*.$$

因此，我们的矩阵 d_2 由 B的以下 Pfaffian 构成：

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 & P_{[n]\setminus\{1,2\}} & -P_{[n]\setminus\{1,3\}} & P_{[n]\setminus\{1,4\}} & -P_{[n]\setminus\{1,5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{1,n\}} \\ -P_{[n]\setminus\{1,2\}} & 0 & P_{[n]\setminus\{2,3\}} & -P_{[n]\setminus\{2,4\}} & P_{[n]\setminus\{2,5\}} & \cdots & -P_{[n]\setminus\{2,n\}} \\ P_{[n]\setminus\{1,3\}} & -P_{[n]\setminus\{2,3\}} & 0 & P_{[n]\setminus\{3,4\}} & -P_{[n]\setminus\{3,5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{3,n\}} \\ 0 & 0 & 0 & P_{[n]\setminus\{1,2,3,4\}} & -P_{[n]\setminus\{1,2,3,5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{1,2,3,n\}} \end{bmatrix}.$$

最后， d_1 是 exp X 中从 $\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1^* \subset V(\omega_n)$映到 $\mathbb{C} \subset V(\omega_n)$的部分。在 $V(\omega_n)$中，前者的一组基为

$$\phi_{[n]\setminus\{2,3\}}, \phi_{[n]\setminus\{1,3\}}, \phi_{[n]\setminus\{1,2\}} \in \bigwedge^{n-2} F_2^* \text{ and } \phi_{1,\ldots,n} \in \bigwedge^{n} F_2^*.$$

因此我们有

$$d_1 = \begin{bmatrix} -P_{[n]\setminus\{2,3\}} & -P_{[n]\setminus\{1,3\}} & -P_{[n]\setminus\{1,2\}} & P_{[n]} \end{bmatrix}.$$

通过表示论构造，我们恢复了 [1, 命题 3.2]中描述的完全相同的正合分解。该命题证明了，这个分解对于奇类型 $n-3$的高度 3 几乎完全交是泛型的。

也可以重复上述过程，改为取 $\mathfrak{g}$ 在（$n-3$）-分次中的负部分作为 $\mathfrak{n}$ 。在这种情况下，情况会稍微复杂一些，因为 $\mathfrak{n}$集中在

两个次数上：

$$\mathfrak{n} = \Big(\bigwedge_{-2}^{2} F_3 \otimes \bigwedge^{4} F_1^*\Big) \oplus \Big(F_3 \otimes \bigwedge_{-1}^{2} F_1^*\Big).$$

所得复形定义在基环 $R = \mathbb{C}[\{b_{ij,k}\}_{1\le i<j\le 4, 1\le k\le n-3}, \{c_{hk}\}_{1\le h<k\le n-3}]$ 上，其中 $|b_{ij,\ k}| = 1$ 和 $|c_{hk}| = 2$（在 R 上较粗的 $(n-3)$-分次中）。

由于前面讨论的例子已经说明了我们的 D_n 型构造如何还原经典复形（这是本节的主要目标），我们不再深入探讨当前例子。感兴趣的读者可在 [5,定理 5.1],中找到所得复形，尽管那里采用了不同的方法。

3.1.4. 顶点 $(n, n-3)$，格式 $(1, 4, n, n-3)$，n 为奇数。最后，我们考察 n 为奇数时与 §3.1.3 类似的情形。由于此时图 D_n 上的对偶性将顶点 $n-1$ 和 n 互换，我们将按照注 2.2 考察 $(n-1)$-分次中的最低分次部分，而不是 n-分次中的最低分次部分。

因此，为了描述 $(n-1)$-分次中的分次分量，我们固定与节点 $n, n-2, n-3, \dots, 1$ 对应的子代数 $\mathfrak{sl}(F_2) \subset \mathfrak{g}$，其中 $F_2 = \mathbb{C}^n$。子代数 $\mathfrak{sl}(F_1)$ 和 $\mathfrak{sl}(F_3)$ 遵循通常约定。

$V(\omega_1)$、$V(\omega_{n-1})$ 和 $V(\omega_n)$ 在由单根 α_{n-3} 和 α_{n-1} 诱导的分次下的分解如下所示。

$$\begin{aligned}
V(\omega_1) &= F_3 \oplus \bigwedge^{2} F_1 \oplus \boxed{F_3^* \otimes \bigwedge^{4} F_1} \\
&= \boxed{F_2} \oplus F_2^* \\
V(\omega_{n-1}) &= F_1 \oplus F_3^* \otimes F_1^* \oplus \bigwedge^{2} F_3^* \otimes F_1 \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1} \\
&= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^{3} F_2^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n} F_2^* \\
V(\omega_n) &= F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \bigwedge^{2} F_3^* \otimes F_1^* \oplus \cdots \oplus \boxed{\bigwedge^{n-3} F_3^* \otimes F_1^*} \\
&= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^{2} F_2^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^{n-1} F_2^*
\end{aligned}$$

其余部分与 n 偶数的情形相当相似，因此我们从简介绍。令 $\mathfrak{n} = \bigwedge^2 F_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 $(n-1)$ 分次中的负部分。其（$\mathbb{Z}^n$分次）坐标环为 $R = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}^*)$。像处理 n 偶数的情形那样，取显式变量，得到

$$R = \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{1\le i<j\le n}].$$

与 n 偶数的情形一样，微分 d_3 由变量 x_{ij}上的一般斜对称矩阵 B 的最后 $n-3$ 列给出。

$$d_3 = \begin{bmatrix} -x_{14} & -x_{15} & \cdots & -x_{1n} \\ -x_{24} & -x_{25} & \cdots & -x_{2n} \\ -x_{34} & -x_{35} & \cdots & -x_{3n} \\ 0 & -x_{45} & \cdots & -x_{4n} \\ x_{45} & 0 & \cdots & -x_{5n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{4n} & x_{5n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

微分 d_2 为

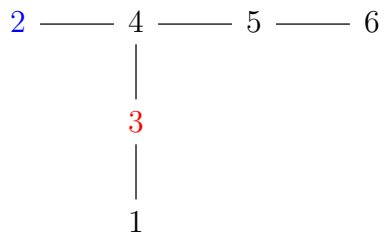
$$d_2 = \begin{bmatrix} P_{[n]\setminus\{1\}} & -P_{[n]\setminus\{2\}} & P_{[n]\setminus\{3\}} & -P_{[n]\setminus\{4\}} & P_{[n]\setminus\{5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{n\}} \\ 0 & 0 & P_{[n]\setminus\{1,2,3\}} & -P_{[n]\setminus\{1,2,4\}} & P_{[n]\setminus\{1,2,5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{1,2,n\}} \\ 0 & P_{[n]\setminus\{1,2,3\}} & 0 & P_{[n]\setminus\{1,3,4\}} & -P_{[n]\setminus\{1,3,5\}} & \cdots & -P_{[n]\setminus\{1,3,n\}} \\ P_{[n]\setminus\{1,2,3\}} & 0 & 0 & -P_{[n]\setminus\{2,3,4\}} & P_{[n]\setminus\{2,3,5\}} & \cdots & P_{[n]\setminus\{2,3,n\}} \end{bmatrix}$$

最后

$$d_1 = \begin{bmatrix} -P_{[n]\setminus\{1,2,3\}} & P_{[n]\setminus\{3\}} & P_{[n]\setminus\{2\}} & P_{[n]\setminus\{1\}} \end{bmatrix}.$$

再一次，这与 [1, 命题 3.3], 中所述的复形一致，也佐证了此处的猜想 2.6。

3.2. E_6。本小节考虑与 Dynkin 图E_6相关联的李代数 $\mathfrak{g}$：



我们照常取 $\mathfrak{sl}(F_1)$ $\mathfrak{sl}(F_3) \subset \mathfrak{g}$，但鉴于注 2.2，我们取与节点 1、3、4、5、6 对应的 $\mathfrak{sl}(F_2)$，而不是与节点 6、5、4、3、1 对应的情形。若取后者，则下文所有 F_2 都应替换为 F_2^*，反之亦然。

我们关注的三个基本表示是 $V(\omega_1)$、 $V(\omega_6)$ 和 $V(\omega_2)$。它们在三重分次和二重分次下的分解如下所示。

$$\begin{aligned}
V(\omega_1) &= F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \bigwedge^2 F_3^* \otimes \bigwedge^3 F_1 \oplus \boxed{S_{2,1}F_3^* \otimes \bigwedge^5 F_1} \\
&= \boxed{F_2} \oplus \bigwedge^2 F_2^* \oplus \bigwedge^5 F_2^* \\
V(\omega_6) &= F_3 \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus F_3^* \otimes \bigwedge^4 F_1 \oplus \boxed{\bigwedge^2 F_3^* \otimes S_{2,1^4}F_1} \\
&= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^4 F_2^* \oplus S_{2,1^5}F_2^* \\
V(\omega_2) &= F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{2,2}F_3^* \otimes S_{2^4,1}F_1} \\
&= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus S_{2^6}F_2^*
\end{aligned}$$

完整的 $V(\omega_2)$ 分解可见于 [8]。

为定义 $\mathbb{F}_i$ $(i = 2, 3)$，令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 i-分次中的负部分。照常，令 $R = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}^*)$ 为 $\mathfrak{n}$ 的坐标环。这两个分解 $\mathbb{F}_i$ 具有如下形式

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_6^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{C} \otimes R$$

其中 $\exp_i$ 表示 $\exp \mathfrak{n}$ 对 $V(\omega_i)$ 的作用。这些分解具有相同的多重分次

$$\begin{aligned}
0 \to &\bigoplus \begin{matrix} R(-(4,\ 7,\ 9,\ 12,\ 8,\ 4)) \\ R(-(5,\ 7,\ 9,\ 12,\ 8,\ 4)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_1} &\bigoplus \begin{matrix} R(-(3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 5,\ 2)) \\ R(-(3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 5,\ 3)) \\ R(-(3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 6,\ 3)) \\ R(-(3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 6,\ 3)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_6^*} &\bigoplus \begin{matrix} R(-(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 1)) \\ R(-(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 2)) \\ R(-(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 2)) \\ R(-(2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2)) \\ R(-(2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2)) \end{matrix} \to \\
&\xrightarrow{\exp_2} R.
\end{aligned}$$

我们展示如何通过组合方法推断这种分次，而无需计算微分本身。令 A 表示 E_6的嘉当矩阵。其逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & 5/3 & 2 & 4/3 & 2/3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5/3 & 2 & 10/3 & 4 & 8/3 & 4/3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4/3 & 2 & 8/3 & 4 & 10/3 & 5/3 \\ 2/3 & 1 & 4/3 & 2 & 5/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

表示基本权是单根的线性组合。因此，相对于单根， $F_1^* \subset V(\omega_2)$中的权的坐标为

$$\begin{aligned} A^{-1}\omega_2 &= (1,2,2,3,2,1) \\ A^{-1}\omega_2 - \alpha_2 &= (1,2,1,3,2,1) \\ A^{-1}\omega_2 - \alpha_2 - \alpha_4 &= (1,2,1,2,2,1) \\ A^{-1}\omega_2 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5 &= (1,2,1,2,1,1) \\ A^{-1}\omega_2 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 &= (1,2,1,2,1,0). \end{aligned}$$

微分 d_1 从 F_1^*映射到 $V(\omega_2)$的最低权向量，其坐标为$A^{-1}(-\omega_2) = (-1,-2,-2,-3,-2,-1)$。相减后，我们得到上文所述的 $F_1^* \otimes R$上的多重分次。

$F_2^* \subset V(\omega_6)$中的权的坐标为

$$\begin{aligned} A^{-1}(-\omega_1) &= (-4/3,-1,-5/3,-2,-4/3,-2/3) \\ A^{-1}(-\omega_1) + \alpha_1 &= (-1/3,-1,-5/3,-2,-4/3,-2/3) \\ &\vdots \\ A^{-1}(-\omega_1) + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= (-1/3,-1,-2/3,-1,-1/3,1/3). \end{aligned}$$

（注意， $V(\omega_6)$中的最低权为 $-\omega_1$。） $F_1 \subset V(\omega_6)$中的最高权坐标为 $A^{-1}\omega_6 = (2/3, 1, 4/3, 2, 5/3, 4/3)$。取对偶后，这应与 $F_1^* \subset V(\omega_2)$ 中的最低权相符。因此，可以通过从 $F_2^* \subset V(\omega_6)$的上述坐标中相减，得到 $F_2 \otimes R$上的多重分次

$$(2/3,1,4/3,2,5/3,4/3) + (2,3,4,5,3,1) = (8/3,4,16/3,7,14/3,7/3).$$

通过以类似方式考察 $V(\omega_1)$，可以推断 $F_3^* \otimes R$ 上的多重分次，因此这里省略计算。

注 3.4. 注意，将二重分次（即第二个坐标）粗化后，我们得到 [12, 定理 3.0.1] 中给出的分次。我们将在 §5 中探讨这一与舒伯特簇的联系。

接下来，我们将明确描述各微分。对于 $\mathbb{F}_2$，幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 为

$$\mathfrak{n} = \bigwedge^6 F_2 \oplus \bigwedge^3 F_2$$

分别处于次数 -2和 -1。设 $e_6, \ldots, e_1$是 F_2的标准基。设 $x_{ijk} \in \bigwedge^3 F_2^*$与 $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ 对偶，且 $y \in \bigwedge^6 F_2^*$与 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_6$对偶。那么我们的基环为

$$R = \mathbb{C}[\{x_{ijk}\}_{1 \le i < j < k \le 6}, y]$$

其中 $|x_{ijk}| = 1$ 和 $|y| = 2$。

微分 d_3 =指数映射$_1$ 是

$$\begin{bmatrix} -x_{236}x_{146} + x_{136}x_{246} - x_{126}x_{346} & X_2 \\ X_1 & -x_{235}x_{145} + x_{135}x_{245} - x_{125}x_{345} \\ -x_{234}x_{146} + x_{134}x_{246} - x_{124}x_{346} & -x_{234}x_{145} + x_{134}x_{245} - x_{124}x_{345} \\ -x_{234}x_{136} + x_{134}x_{236} - x_{123}x_{346} & -x_{234}x_{135} + x_{134}x_{235} - x_{123}x_{345} \\ -x_{234}x_{126} + x_{124}x_{236} - x_{123}x_{246} & -x_{234}x_{125} + x_{124}x_{235} - x_{123}x_{245} \\ -x_{134}x_{126} + x_{124}x_{136} - x_{123}x_{146} & -x_{134}x_{125} + x_{124}x_{135} - x_{123}x_{145} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{1}{2}\Big(& - x_{345}x_{126} + x_{245}x_{136} - x_{145}x_{236} - x_{235}x_{146} + x_{135}x_{246} \\ & - x_{125}x_{346} - x_{234}x_{156} + x_{134}x_{256} - x_{124}x_{356} + x_{123}x_{456}\Big) - y \\ X_2 = \frac{1}{2}\Big(& - x_{345}x_{126} + x_{245}x_{136} - x_{145}x_{236} - x_{235}x_{146} + x_{135}x_{246} \\ & - x_{125}x_{346} + x_{234}x_{156} - x_{134}x_{256} + x_{124}x_{356} - x_{123}x_{456}\Big) + y. \end{aligned}$$

在继续之前，我们说明一下：尽管我们完整地列出了这个微分，但通常不会在后续示例中这样做。首先，对于更复杂的微分，完整列出会占用太多篇幅。此外，这种构造具有高度对称性，因此没有必要这样做：描述若干有代表性的矩阵元后，其余矩阵元即可通过对指标进行适当的置换得到。

介绍每个微分时，我们首先给出一张“条目表”，列出每个矩阵元中项的数量。然后，我们只明确描述少数几个有代表性的矩阵元。

微分 d_2 =指数映射$_6^*$ 的条目表如下

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

位置 (1, 6) 处的 11 项矩阵元为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(& x_{345}x_{126} - x_{245}x_{136} - x_{145}x_{236} + x_{235}x_{146} \\ & + x_{135}x_{246} - x_{125}x_{346} - x_{234}x_{156} - x_{134}x_{256} \\ & + x_{124}x_{356} - x_{123}x_{456}\Big) + y. \end{aligned}$$

位置 (1, 1) 处的 3 项矩阵元为

$$x_{134}x_{125} - x_{124}x_{135} + x_{123}x_{145}.$$

最后一行为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{123} & -x_{124} & x_{134} & -x_{234} \end{bmatrix}.$$

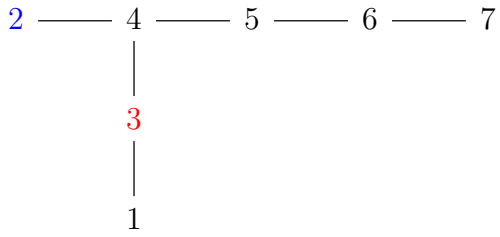
最后， d_1 =指数映射$_2$ 的条目表是

$$\begin{bmatrix} 17 & 17 & 17 & 17 & 86 \end{bmatrix}$$

86项条目具有以下形式： $\Delta + y^2$，其中 Δ 是 $\bigwedge^3 F_1$ 上次数为 4 的唯一 $\mathfrak{sl}(F_2)$-不变量（相差一个比例因子）。第一个 17项条目是 $-\frac{\partial \Delta}{\partial x_{156}} + x_{234}y$，其余条目可通过置换指标 $\{1,2,3,4\}$ 得到。这一不变量及其偏导数的出现将在第6节中讨论。

3.3. E_7。在本小节中，我们考虑与 Dynkin 图E_7对应的李代数 $\mathfrak{g}$ 。顶点对 (2, 3) 给出格式为 (1, 6, 7, 2) 的复形，而顶点对 (2, 5) 给出格式为 (1, 5, 7, 3) 的复形。在每种情形下，我们都只显式描述复形 $\mathbb{F}_2$ 的一个微分。

3.3.1. 顶点 (2, 3)，格式 (1, 6, 7, 2)。对于这一格式，我们将 Dynkin 图绘制如下



令 $F_1 = \mathbb{C}^6$、$F_2 = \mathbb{C}^7$ 和 $F_3 = \mathbb{C}^2$。固定 $\mathfrak{g}$ 的下列子代数:

- $\mathfrak{sl}(F_3)$ 对应于节点 1,
- $\mathfrak{sl}(F_1)$ 对应于节点 7, 6, 5, 4, 2,
- $\mathfrak{sl}(F_2)$对应节点 7、6、5、4、3、1。

我们感兴趣的三个基本表示是 $V(\omega_1)$、$V(\omega_7)$ 和 $V(\omega_2)$。它们的完整分解见 [8]。

表示 $V(\omega_1)$ 是伴随表示。它在三重分次中有 7 个分次分量，在二重分次中有 5 个:

$$V(\omega_1) = F_3 \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{3,2}F_3^* \otimes S_{2^6}F_1}$$
$$= \boxed{F_2} \oplus \bigwedge^4 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{2^6,1}F_2$$

表示 $V(\omega_7)$ 在三重分次中有 5 个分次分量，在二重分次中有 4 个:

$$V(\omega_7) = F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{2,2}F_3^* \otimes S_{2,1^5}F_1}$$
$$= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^2 F_2 \oplus \bigwedge^5 F_2 \oplus S_{2,1^6}F_2$$

表示 $V(\omega_2)$ 在三重分次中有 9 个分次分量，在二重分次中有 8 个:

$$V(\omega_2) = F_1 \oplus F_3^* \otimes \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{4,4}F_3^* \otimes S_{3^5,2}F_1}$$
$$= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^3 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{3^7}F_2$$

Fol按照第2节的构造，我们得到形式如下的分解 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_3$

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_7^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{C} \otimes R.$$

这两个分解都具有多重分次

$$
\begin{aligned}
0 \to & \bigoplus \begin{matrix} R(-(8, & 13, & 17, & 24, & 18, & 12, & 6)) \\ R(-(9, & 13, & 17, & 24, & 18, & 12, & 6)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_1} & \bigoplus \begin{matrix} R(-(5, & 9, & 11, & 16, & 12, & 8, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 11, & 16, & 12, & 8, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 12, & 16, & 12, & 8, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 12, & 17, & 12, & 8, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 12, & 17, & 13, & 8, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 12, & 17, & 13, & 9, & 4)) \\ R(-(6, & 9, & 12, & 17, & 13, & 9, & 5)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_7^*} & \bigoplus \begin{matrix} R(-(4, & 6, & 8, & 11, & 8, & 5, & 2)) \\ R(-(4, & 6, & 8, & 11, & 8, & 5, & 3)) \\ R(-(4, & 6, & 8, & 11, & 8, & 6, & 3)) \\ R(-(4, & 6, & 8, & 11, & 9, & 6, & 3)) \\ R(-(4, & 6, & 8, & 12, & 9, & 6, & 3)) \\ R(-(4, & 7, & 8, & 12, & 9, & 6, & 3)) \end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_2} R.
\end{aligned}
$$

我们只明确描述微分 d_2 of $\mathbb{F}_2$ 。这个微分最简单，因为 $V(\omega_7)$ 在二重分次中只有 4 个分次分量（因此微分的条目次数至多为 3）。

为此，设 $f_1, \ldots, f_7$ 是 F_2 的一个标准基，并设

$$R = \mathbb{C}[\{x_{ijk}\}_{1\le i<j<k\le 7}, \{y_{1\ldots\hat{i}\ldots 7}\}_{1\le i\le 7}]$$

其中 x_{ijk} 对应于 $f_i \wedge f_j \wedge f_k$， $y_{1\ldots\hat{i}\ldots 7}$也同理。 d_2 的条目表为

$$
\begin{bmatrix}
15 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 \\
35 & 15 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 \\
35 & 35 & 15 & 35 & 35 & 35 & 35 \\
35 & 35 & 35 & 15 & 35 & 35 & 35 \\
35 & 35 & 35 & 35 & 15 & 35 & 35 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 11
\end{bmatrix}.
$$

位置 (1, 1) 处的 15项条目为

$$
\begin{aligned}
& x_{145}x_{136}x_{127} - x_{135}x_{146}x_{127} + x_{134}x_{156}x_{127} - x_{145}x_{126}x_{137} + x_{125}x_{146}x_{137} \\
& -x_{124}x_{156}x_{137} + x_{135}x_{126}x_{147} - x_{125}x_{136}x_{147} + x_{123}x_{156}x_{147} - x_{134}x_{126}x_{157} \\
& +x_{124}x_{136}x_{157} - x_{123}x_{146}x_{157} + x_{134}x_{125}x_{167} - x_{124}x_{135}x_{167} + x_{123}x_{145}x_{167}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

位置 (1, 2) 处的 35项矩阵元为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(&x_{245}x_{136}x_{127}+x_{145}x_{236}x_{127}-x_{235}x_{146}x_{127}-x_{135}x_{246}x_{127}+x_{234}x_{156}x_{127}\\&+x_{134}x_{256}x_{127}-x_{245}x_{126}x_{137}+x_{125}x_{246}x_{137}-x_{124}x_{256}x_{137}-x_{145}x_{126}x_{237}\\&+x_{125}x_{146}x_{237}-x_{124}x_{156}x_{237}+x_{235}x_{126}x_{147}-x_{125}x_{236}x_{147}+x_{123}x_{256}x_{147}\\&+x_{135}x_{126}x_{247}-x_{125}x_{136}x_{247}+x_{123}x_{156}x_{247}-x_{234}x_{126}x_{157}+x_{124}x_{236}x_{157}\\&-x_{123}x_{246}x_{157}-x_{134}x_{126}x_{257}+x_{124}x_{136}x_{257}-x_{123}x_{146}x_{257}+x_{234}x_{125}x_{167}\\&-x_{124}x_{235}x_{167}+x_{123}x_{245}x_{167}+x_{134}x_{125}x_{267}-x_{124}x_{135}x_{267}+x_{123}x_{145}x_{267}\Big)\\&-x_{127}y_{123456}+x_{126}y_{123457}-x_{125}y_{123467}+x_{124}y_{123567}-x_{123}y_{124567}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

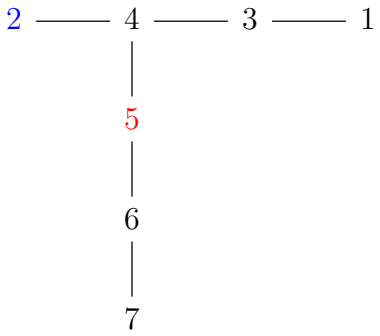
位置 (6, 1) 处的三项矩阵元为

$$x_{134}x_{125}-x_{124}x_{135}+x_{123}x_{145}.$$

位置 (6, 6) 处的十一项矩阵元为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(&x_{345}x_{126}-x_{245}x_{136}+x_{145}x_{236}-x_{135}x_{246}+x_{125}x_{346}-x_{234}x_{156}\\&+x_{134}x_{256}-x_{124}x_{356}+x_{123}x_{456}\Big)-y_{123456}.\end{aligned}$$

3.3.2. 顶点 (2, 5)，格式 (1, 5, 7, 3)。对于这种格式，我们将 Dynkin 图画作



设 $F_1=\mathbb{C}^5$、$F_2=\mathbb{C}^7$ 和 $F_3=\mathbb{C}^3$。固定 $\mathfrak{g}$ 的以下子代数:

与节点 6、7 对应的 • $\mathfrak{sl}(F_3)$,
- $\mathfrak{sl}(F_1)$ 对应节点 1、3、4、2,
- $\mathfrak{sl}(F_2)$ 对应节点 1、3、4、5、6、7。

我们关注的三个基本表示是 $V(\omega_7)$、$V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_2)$。它们的完整分解见 [8]。

该表示 tion $V(\omega_7)$ 在五重分次中有 6 个分次分量，在二重分次中有 4 个 :

$$\begin{aligned}V(\omega_7)&=F_3\oplus\bigwedge^2F_1\oplus\cdots\oplus\boxed{S_{2,1,1}F_3^*\otimes S_{2^5}F_1}\\&=\boxed{F_2}\oplus\bigwedge^2F_2^*\oplus\bigwedge^5F_2^*\oplus S_{2,1^6}F_2^*\end{aligned}$$

表示 $V(\omega_1)$ 是伴随表示。它在五重分次中有 7 个分次分量，在二重分次中有 5 个:

$$V(\omega_1) = F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{2,2,2}F_3^* \otimes S_{3,2^4}F_1}$$
$$= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^4 F_2^* \oplus \cdots \oplus S_{2^6,1}F_2^*$$

表示 $V(\omega_2)$ 在五重分次中有 10 个分次分量，在二重分次中有 8 个:

$$V(\omega_2) = F_1 \oplus F_3^* \otimes \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{3,3,3}F_3^* \otimes S_{4^4,3}F_1}$$
$$= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^3 F_2^* \oplus \cdots \oplus S_{3^7}F_2^*$$

按照第2节的构造，我们得到如下形式的分解 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_5$

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_7} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{C} \otimes R.$$

两个分解都具有多重分次

$$0 \to \bigoplus \begin{matrix} R(-(8,\ 13,\ 16,\ 24,\ 19,\ 12,\ 6)) \\ R(-(8,\ 13,\ 16,\ 24,\ 19,\ 13,\ 6)) \\ R(-(8,\ 13,\ 16,\ 24,\ 19,\ 13,\ 7)) \end{matrix} \to$$

$$\xrightarrow{\exp_7} \bigoplus \begin{matrix} R(-(6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 14,\ 9,\ 4)) \\ R(-(6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 14,\ 9,\ 5)) \\ R(-(6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 14,\ 10,\ 5)) \\ R(-(6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 15,\ 10,\ 5)) \\ R(-(6,\ 10,\ 12,\ 19,\ 15,\ 10,\ 5)) \\ R(-(6,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 10,\ 5)) \\ R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 10,\ 5)) \end{matrix}$$

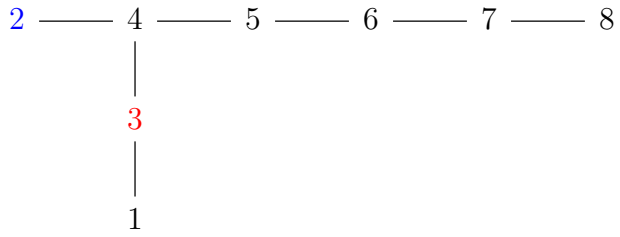
$$\xrightarrow{\exp_1^*} \bigoplus \begin{matrix} R(-(3,\ 6,\ 7,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 6,\ 7,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 6,\ 8,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 7,\ 8,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)) \end{matrix} \to$$

$$\xrightarrow{\exp_2} R$$

若取 $f_7, \ldots, f_1$ 为 F_2 的标准基，并按前一小节中的方式定义 R，则 $\mathbb{F}_2$ 的微分 d_3 是 d_2 中对应于 (1, 6, 7, 2) 的前三行的转置。

3.4. E_8。最后，我们考察与 Dynkin 图 E_8 相关的李代数 $\mathfrak{g}$。顶点对 (2, 3) 给出格式为 (1, 7, 8, 2) 的复形，而顶点对 (2, 5) 给出格式为 (1, 5, 8, 4) 的复形。其构造与 E_7 的构造完全类似，因为这里同样不存在例外对偶性。遗憾的是，所有微分都过于复杂，无法在此明确描述。Macaulay2 中仅实现了每种情况下最简单的微分，即 (1, 7, 8, 2) 对应的 d_2 和 (1, 5, 8, 4) 对应的 d_3。这些微分由伴随表示 $V(\omega_8)$ 构造而成，该表示是三个极端基本表示中维数最小的一个。

3.4.1. 顶点 (2, 3)，格式 (1, 7, 8, 2)。对于这种格式，我们将 Dynkin 图画成如下形式：



设 $F_1 = \mathbb{C}^7$、$F_2 = \mathbb{C}^8$ 和 $F_3 = \mathbb{C}^2$。固定 $\mathfrak{g}$ 的以下子代数：

- $\mathfrak{sl}(F_3)$ 对应于节点 1，
- $\mathfrak{sl}(F_1)$ 对应于节点 8、7、6、5、4、2，
- $\mathfrak{sl}(F_2)$ 对应于节点 8、7、6、5、4、3、1。

所关注的三个基本表示是 $V(\omega_1)$、$V(\omega_8)$ 和 $V(\omega_2)$。它们的完整分解见 [8]。

表示 $V(\omega_1)$ 在三重分次中有 15 个分次分量，在二重分次中有 11 个：

$$\begin{aligned} V(\omega_1) &= F_3 \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{7,6}F_3^* \otimes S_{47}F_1} \\ &= \boxed{F_2} \oplus \bigwedge^4 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{47,3}F_2 \end{aligned}$$

表示 $V(\omega_8)$ 是伴随表示。它在三重分次中有 9 个分次分量，在二重分次中有 7 个：

$$\begin{aligned} V(\omega_8) &= F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{4,4}F_3^* \otimes S_{3,2^6}F_1} \\ &= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^2 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{3,2^7}F_2 \end{aligned}$$

表征 n $V(\omega_2)$ 在三重分次中有 21 个分次分量，在二重分次中有 17 个 ：

$$\begin{aligned} V(\omega_2) &= F_1 \oplus F_3^* \otimes \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{10,10}F_3^* \otimes S_{6^6,5}F_1} \\ &= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^3 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{6^8}F_2 \end{aligned}$$

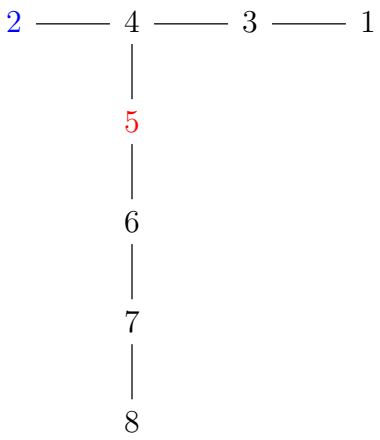
按照第2节的构造，我们得到如下形式的分解 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_3$

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_8^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{C} \otimes R.$$

两个分解都具有多重分次

$$
\begin{aligned}
0 \to \bigoplus & \begin{matrix} R(-(20, & 31, & 41, & 60, & 48, & 36, & 24, & 12)) \\ R(-(21, & 31, & 41, & 60, & 48, & 36, & 24, & 12)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_1} \bigoplus & \begin{matrix} R(-(13, & 21, & 27, & 40, & 32, & 24, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 27, & 40, & 32, & 24, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 40, & 32, & 24, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 41, & 32, & 24, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 41, & 33, & 24, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 41, & 33, & 25, & 16, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 41, & 33, & 25, & 17, & 8)) \\ R(-(14, & 21, & 28, & 41, & 33, & 25, & 17, & 9)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_8^*} \bigoplus & \begin{matrix} R(-(10, & 15, & 20, & 29, & 23, & 17, & 11, & 5)) \\ R(-(10, & 15, & 20, & 29, & 23, & 17, & 11, & 6)) \\ R(-(10, & 15, & 20, & 29, & 23, & 17, & 12, & 6)) \\ R(-(10, & 15, & 20, & 29, & 23, & 18, & 12, & 6)) \\ R(-(10, & 15, & 20, & 29, & 24, & 18, & 12, & 6)) \\ R(-(10, & 15, & 20, & 30, & 24, & 18, & 12, & 6)) \\ R(-(10, & 16, & 20, & 30, & 24, & 18, & 12, & 6)) \end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_2} R.
\end{aligned}
$$

3.4.2. 顶点 (2, 5)，格式为 (1, 5, 8, 4)。对于这种格式，我们绘制 Dynkin 图 a s



设 $F_1 = \mathbb{C}^5$、$F_2 = \mathbb{C}^8$ 和 $F_3 = \mathbb{C}^4$。固定 $\mathfrak{g}$ 的以下子代数：

- $\mathfrak{sl}(F_3)$，对应于节点 6、7、8，
- $\mathfrak{sl}(F_1)$ 对应于节点 1、3、4、2，
- $\mathfrak{sl}(F_2)$ 对应于节点 1、3、4、5、6、7、8。

我们关注的三个基本表示是 $V(\omega_8)$、$V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_2)$。它们的完整分解见 [8]。

表示 $V(\omega_8)$ 是伴随表示。它在五重分次中有 11 个分次分量，在二重分次中有 7 个:

$$V(\omega_8) = F_3 \oplus \bigwedge^2 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{3,2^3}F_3^* \otimes S_{4^5}F_1}$$
$$= \boxed{F_2} \oplus \bigwedge^2 F_2^* \oplus \cdots \oplus S_{3,2^7}F_2^*$$

表示 $V(\omega_1)$ 在五重分次中有 17 个分次分量，在二重分次中有 11 个:

$$V(\omega_1) = F_1^* \oplus F_3^* \otimes F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{4^4}F_3^* \otimes S_{7,6^4}F_1}$$
$$= \boxed{F_2^*} \oplus \bigwedge^4 F_2^* \oplus \cdots \oplus S_{4^7,3}F_2^*$$

表示 n $V(\omega_2)$ 在五重分次中有 25 个分次分量，在二重分次中有 17 个 :

$$V(\omega_2) = F_1 \oplus F_3^* \otimes \bigwedge^3 F_1 \oplus \cdots \oplus \boxed{S_{6^4}F_3^* \otimes S_{10^4,9}F_1}$$
$$= \boxed{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^3 F_2^* \oplus \cdots \oplus S_{6^8}F_2^*$$

按照第2节中的构造，我们得到形式如下的分解 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_5$

$$0 \to F_3^* \otimes R \xrightarrow{\exp_8} F_2 \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} F_1^* \otimes R \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{C} \otimes R.$$

这两个分解都具有多重分次

$$0 \to \bigoplus \begin{matrix} R(-(20,\ 31,\ 40,\ 60,\ 49,\ 36,\ 24,\ 12)) \\ R(-(20,\ 31,\ 40,\ 60,\ 49,\ 37,\ 24,\ 12)) \\ R(-(20,\ 31,\ 40,\ 60,\ 49,\ 37,\ 25,\ 12)) \\ R(-(20,\ 31,\ 40,\ 60,\ 49,\ 37,\ 25,\ 13)) \end{matrix} \to$$

$$\xrightarrow{\exp_8} \bigoplus \begin{matrix} R(-(16,\ 25,\ 32,\ 48,\ 39,\ 29,\ 19,\ 9)) \\ R(-(16,\ 25,\ 32,\ 48,\ 39,\ 29,\ 19,\ 10)) \\ R(-(16,\ 25,\ 32,\ 48,\ 39,\ 29,\ 20,\ 10)) \\ R(-(16,\ 25,\ 32,\ 48,\ 39,\ 30,\ 20,\ 10)) \\ R(-(16,\ 25,\ 32,\ 48,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10)) \\ R(-(16,\ 25,\ 32,\ 49,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10)) \\ R(-(16,\ 25,\ 33,\ 49,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10)) \\ R(-(17,\ 25,\ 33,\ 49,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10)) \end{matrix} \to$$

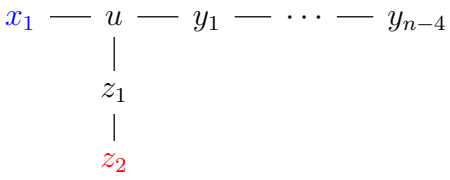
$$\xrightarrow{\exp_1^*} \bigoplus \begin{matrix} R(-(9,\ 15,\ 19,\ 29,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\ R(-(10,\ 15,\ 19,\ 29,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\ R(-(10,\ 15,\ 20,\ 29,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\ R(-(10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\ R(-(10,\ 16,\ 20,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \end{matrix} \to$$

$$\xrightarrow{\exp_2} R.$$

4. Gorenstein ideals of codimension four

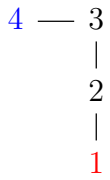
现在我们明确描述第二类例子，它们给出了由 $n=4$、……、8 个生成元生成的余维四 Gorenstein 理想的分解。我们猜想这些分解是一般的（对于各自的生成元数量而言）。

这里我们考虑如下形式的 Dynkin 图



当 n 从 4 取到 8 时，我们分别得到图 $E_4=A_4$、$E_5=D_5$、E_6、E_7、E_8。根据引理 2.5，对于每一种情况，我们都得到两个等价的复形 $\mathbb{F}_{x_1}$ 和 $\mathbb{F}_{z_2}$。我们只描述复形 $\mathbb{F}_{x_1}$。

4.1. $E_4=A_4$。对于 $n=4$，我们有图 A_4，如下所示，采用标准的 Bourbaki 编号，其对应的李代数为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(5)$。



我们关注的表示是 $V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_3)$。根据注 2.2，由于节点 4 和 1 在 Dynkin 图上互为对偶，我们将使用 1-分次中的最低分次分量，而不是 4-分次中的最低分次分量。为此，令 $F=\mathbb{C}^4$，并用 $\mathfrak{sl}(F)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中对应于节点 4、3、2 的子代数。其分解为

$$V(\omega_1)=\boxed{F^*}\oplus\boxed{\mathbb{C}}$$
$$V(\omega_3)=\boxed{F}\oplus\boxed{\bigwedge^2 F}$$

令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 1-分次中的负部分。明确地说，$\mathfrak{n}=F^*$。与前面一样，令$R=\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}^*)$，即

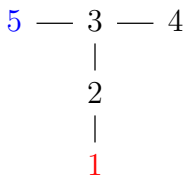
$$R=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,x_4]$$

其中 $x_1,\dots,x_4$是 F的一组基。我们的构造给出一个分解

$$0\to\mathbb{C}\otimes R\xrightarrow{\exp_1}F^*\otimes R\xrightarrow{\exp_3^*}\bigwedge^2 F\otimes R\xrightarrow{\exp_3}F\otimes R\xrightarrow{\exp_1^*}\mathbb{C}\otimes R.$$

注意到 $\bigwedge^2 F\cong\bigwedge^2 F^*$。$\mathfrak{n}$ 在 $V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_3)$ 上的作用是显然的，由此很容易证明，这个分解正是关于变量 x_1、……、x_4 的 Koszul 复形。因此，一般性猜想在这个非常简单的情形下成立，因为这显然是一个由 $n=4$ 个生成元上的余维四 Gorenstein 理想的通用分解（即一个完全交）。

4.2. $E_5 = D_5$。对于 $n = 5$，我们有图 D_5 及其对应的李代数$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(10)$。



由于节点 5 和 4 在 D_5 上互为对偶，我们将采用 4-分次中的底部分次分量，而非五重分次。照常采用 1-分次中的顶部分次分量。令 $\mathfrak{sl}(F)$ 为 $\mathfrak{g}$ 中对应于节点 1、2、3、5 的子代数（其中 $F = \mathbb{C}^5$），并令 $\mathfrak{sl}(H)$ 为 $\mathfrak{g}$ 中对应于节点 2、3、5 的子代数（其中 $H = \mathbb{C}^4$）。$V(\omega_1)$ 在 1-分次和 4-分次下的分解为

$$\begin{aligned} V(\omega_1) &= \mathbb{C} \oplus (H \oplus H^*) \oplus \boxed{\mathbb{C}} \\ &= \boxed{F^*} \oplus F \end{aligned}$$

注意，在 1-分次中，这些分支是 $\mathfrak{so}(H \oplus H^*)$ 的表示。另一个值得关注的表示是 $V(\omega_4)$:

$$\begin{aligned} V(\omega_4) &= (H \oplus \bigwedge^3 H) \oplus \boxed{(\mathbb{C} \oplus \bigwedge^2 H \oplus \bigwedge^4 H)} \\ &= \boxed{F} \oplus \bigwedge^3 F \oplus \bigwedge^5 F \end{aligned}$$

令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 4-分次中的负部分，即 $\mathfrak{n} = \bigwedge^2 F^*$，并照常令 R 为其坐标环。

我们的构造得到一个分解

$$0 \to \mathbb{C} \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F^* \otimes R \xrightarrow{\exp_4^*} (\mathbb{C} \oplus \bigwedge^2 H \oplus \bigwedge^4 H) \otimes R \xrightarrow{\exp_4} F \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} \mathbb{C} \otimes R.$$

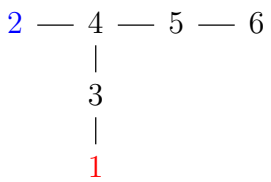
然而，这个分解不是极小的。在表示 $V(\omega_4)$ 中，两个方框分支之间有一维重叠，因为 $F = H \oplus \mathbb{C}$，导致 $\exp_4$ 中出现单位。简化后，我们得到同构的极小复形

$$0 \to \mathbb{C} \otimes R \xrightarrow{\exp_1} H^* \otimes R \xrightarrow{\exp_4^*} \bigwedge^2 H \otimes R \xrightarrow{\exp_4} H \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} \mathbb{C} \otimes R$$

但这只是 $H \subset \bigwedge^2 F$ 上的一个 Koszul 复形（回想一下 $R = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^2 F)$）。

再一次，一般性猜想成立：已知余维为 c 的戈伦斯坦理想不能由 $c+1$ 个元素 [7], 极小生成；因此，在余维四的情形下，任何分解戈伦斯坦理想的 (1, 5, 8, 5, 1) 复形都必定是 Koszul 复形加上一个分裂复形。

4.3. E_6。前两个例子仅得到了 Koszul 复形，但对于 $n = 6$，该构造会产生更有趣的结果。现在我们来处理 E_6:



写作 $\mathfrak{g}$ fo 对应的李代数。我们如下选取 $\mathfrak{g}$ 的一些子代数:

对应于节点 6、5、4、3 的 • $\mathfrak{sl}(H)$，其中 $H=\mathbb{C}^5$,

对应于节点 6、5、4、3、1 的 • $\mathfrak{sl}(F)$，其中 $F=\mathbb{C}^6$。

Note 对应于节点 6、5、4、3、2 的子代数是 $\mathfrak{so}(H\oplus H^*)$.

按照此记号，表示 $V(\omega_1)$ 和 $V(\omega_6)$ 在 1-分次和二重分次下分解为

$$\begin{aligned} V(\omega_1) &= (H\oplus H^*)\oplus V(\omega_3,\mathfrak{so}(H\oplus H^*))\oplus \boxed{\mathbb{C}} \\ &= \boxed{F^*}\oplus \bigwedge^2 F\oplus \bigwedge^5 F \\ V(\omega_6) &= \mathbb{C}\oplus V(\omega_2,\mathfrak{so}(H\oplus H^*))\oplus \boxed{(H\oplus H^*)} \\ &= \boxed{F}\oplus \bigwedge^4 F\oplus S_{2,1^5}F \end{aligned}$$

令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在二重分次中的负部分:

$$\mathfrak{n}=\bigwedge_{-2}^{6} F^*\oplus \bigwedge_{-1}^{3} F^*.$$

令 $e_1,\dots,e_6$ 为 F 的标准基。令 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_6$ 为对偶基。照例，我们将 $R=\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}^*)$ 记为 $\mathfrak{n}$ 的坐标环，即

$$R=\mathbb{C}[\{x_{ijk}\}_{1\le i<j<k\le 6},y]$$

其中 x_{ijk} 对应于 e_{ijk} （ $e_i\wedge e_j\wedge e_k$ 的简写），而 y 对应于 $e_{1\dots 6}$.

我们构造如下形式的自由分解

$$0\to \mathbb{C}\otimes R\xrightarrow{\exp_1} F^*\otimes R\xrightarrow{\exp_6^*} (H\oplus H^*)\otimes R\xrightarrow{\exp_6} F\otimes R\xrightarrow{\exp_1^*}\mathbb{C}\otimes R.$$

由于它是自对偶的，只需描述 $d_4=\exp_1$ 和 $d_3=\exp_6^*$。

$\mathfrak{n}$ 的一般元具有如下形式

$$\sum x_{ijk}\epsilon_{ijk}+y\epsilon_{1\dots 6}$$

其中， ϵ_I 是$\bigwedge_{i\in I}\epsilon_i$的简写。 $V(\omega_1)$中的一个最高权向量是 $e_{1\dots 5}$，因此，要确定d_4，我们只需对上述元在 $e_{1\dots 5}$上的作用取指数映射，即

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sum x_{ijk}\epsilon_{ijk}\right)^2+y\epsilon_{1\dots 6}\right)\cdot e_{1\dots 5}\in F^*\otimes R.$$

计算表明，上述表达式中 ϵ_1、……、 ϵ_5 的系数是 5×5 一般斜对称矩阵的 4×4Pfaffian

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{345} & -x_{245} & x_{235} & -x_{234} \\ -x_{345} & 0 & x_{145} & -x_{135} & x_{134} \\ x_{245} & -x_{145} & 0 & x_{125} & -x_{124} \\ -x_{235} & x_{135} & -x_{125} & 0 & x_{123} \\ x_{234} & -x_{134} & x_{124} & -x_{123} & 0 \end{bmatrix}.$$

其系数具有以下形式

$$y+\frac{1}{4}\sum_{I\subset[6]}\pm x_I x_{[6]\setminus I}.$$

根据对 d_4（以及因此对 d_1）的这一计算，一般性猜想预测，由 $n=6$ 个生成元生成的余维四戈伦斯坦理想是由 5 个生成元生成的余维三戈伦斯坦理想的超曲面截面。这是一个众所周知的猜想，在某些温和假设下已得到证明；参见 [6] 和 [10]。

环 R 和这个分解是 $\mathbb{Z}^6$-分次的；多重分次如图 1 所示。

4.4. E_7。我们将 Dynkin 图绘制如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 \\ & & | & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \\ & & | & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \end{array}$$

记 $\mathfrak{g}$ 为相应的李代数。我们固定 $\mathfrak{g}$ 的一些子代数如下：

- $\mathfrak{sl}(H)$ 对应于节点 7、6、5、4、3，其中 $H=\mathbb{C}^6$，
- $\mathfrak{sl}(F)$ 对应于节点 1、3、4、5、6、7，其中 $F=\mathbb{C}^7$。

注意 对应于节点 7、6、5、4、3、2 的子代数为 $\mathfrak{so}(H\oplus H^*)$.

表示 $V(\omega_1)$ 是伴随表示。它在 1-分次中有 5 个分次分量，在二重分次中也有 5 个：

$$\begin{aligned} V(\omega_1) &= \mathbb{C}\oplus\bigwedge^{\text{odd}} H\oplus\cdots\oplus\boxed{\mathbb{C}} \\ &= \boxed{F^*}\oplus\bigwedge^{4} F^*\oplus\cdots\oplus S_{2^6,1}F^* \end{aligned}$$

表示 $V(\omega_7)$ 在 1-分次中有 3 个分次分量，在二重分次中有 4 个：

$$\begin{aligned} V(\omega_7) &= (H\oplus H^*)\oplus\bigwedge^{\text{even}} H\oplus\boxed{(H\oplus H^*)} \\ &= \boxed{F}\oplus\bigwedge^{2} F^*\oplus\bigwedge^{5} F^*\oplus S_{2,1^6}F^* \end{aligned}$$

取 R，使其与第 3 节中格式为 (1,5,7,3) 的情形相同。我们将描述分解中的微分d_2 =exp$_7$

$$0\to\mathbb{C}\otimes R\xrightarrow{\exp_1}F^*\otimes R\xrightarrow{\exp_7^*}(H\oplus H^*)\otimes R\xrightarrow{\exp_7}F\otimes R\xrightarrow{\exp_1^*}\mathbb{C}\otimes R.$$

许多矩阵元与 (1, 6, 7, 2) 分解的微分 d_2 相同，因为它是使用相同的表示构造的。条目表为

$$\begin{bmatrix} 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 15 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 \\ 35 & 35 & 35 & 35 & 15 & 35 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 \\ 35 & 35 & 35 & 15 & 35 & 35 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 \\ 35 & 35 & 15 & 35 & 35 & 35 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 \\ 35 & 15 & 35 & 35 & 35 & 35 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 15 & 35 & 35 & 35 & 35 & 35 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

位置 (7, 1) 处的 15项条目和位置 (6, 1) 处的 35项条目分别与 (3.3) 和 (3.4) 中的相同。位置 (7, 7) 处的 11项条目为

$$\frac{1}{2}\Big(x_{345}x_{126} - x_{245}x_{136} - x_{145}x_{236} + x_{235}x_{146} + x_{135}x_{246}$$
$$-x_{125}x_{346} - x_{234}x_{156} - x_{134}x_{256} + x_{124}x_{356} - x_{123}x_{456}\Big) - y_{123456}$$

且位置 (7, 8) 处的 3 项矩阵元为

$$-x_{145}x_{136} + x_{135}x_{146} - x_{134}x_{156}.$$

分解上的多重分次见图 2。

4.5. E_8。我们将 Dynkin 图绘制如下：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 & - & 8 \\ & & | & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & & & \\ & & | & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \end{array}$$

写作 $\mathfrak{g}$ fo $\mathfrak{r}$ 对应的李代数。我们固定 $\mathfrak{g}$ 的一些子代数如下：

- $\mathfrak{sl}(H)$ 对应于节点 8、7、6、5、4、3，其中 $H = \mathbb{C}^7$，
- $\mathfrak{sl}(F)$ 对应于节点 1、3、4、5、6、7、8，其中 $F = \mathbb{C}^8$。

注意，对应于节点 8、7、6、5、4、3、2 的子代数是 $\mathfrak{so}(H \oplus H^*)$。

表示 $V(\omega_1)$ 在 1-分次下有 9 个分次分量，在二重分次下有 11 个：

$$V(\omega_1) = \mathbb{C} \oplus \bigwedge^{\text{odd}} H \oplus \cdots \oplus \boxed{\mathbb{C}}$$
$$= \boxed{F^*} \oplus \bigwedge^{4} F^* \oplus \cdots \oplus S_{4^7,3}F^*$$

表示 $V(\omega_8)$ 是伴随表示。它在 1-分次下有 5 个分次分量，在二重分次下有 7 个：

$$V(\omega_8) = (H \oplus H^*) \oplus \bigwedge^{\text{even}} H \oplus (\mathbb{C} \oplus \bigwedge^{2}(H \oplus H^*)) \oplus \bigwedge^{\text{odd}} H \oplus \boxed{(H \oplus H^*)}$$
$$= \boxed{F} \oplus \bigwedge^{2} F^* \oplus \cdots \oplus S_{3,2^7}F^*$$

该构造给出一个分解

$$0 \to \mathbb{C} \otimes R \xrightarrow{\exp_1} F^* \otimes R \xrightarrow{\exp_8^*} (H \oplus H^*) \otimes R \xrightarrow{\exp_8} F \otimes R \xrightarrow{\exp_1^*} \mathbb{C} \otimes R$$

多重分次如图3所示。我们不会明确描述任何微分，不过值得指出的是，Macaulay2 中已实现了 $\exp_8$。

$$
\begin{aligned}
0 \to & R(-(6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 8,\ 4)) \to \\
\xrightarrow{\exp_1} \bigoplus & \begin{matrix} R(-(4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 5,\ 2)) \\ R(-(4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 5,\ 3)) \\ R(-(4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 6,\ 3)) \\ R(-(5,\ 5,\ 7,\ 9,\ 6,\ 3)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\text{指数映射}_6^*} \bigoplus & \begin{matrix} R(-(3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 1)) \\ R(-(3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 2)) \\ R(-(3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 3,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 3,\ 5,\ 6,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 4,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 4,\ 2)) \\ R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 2)) \\ R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 3)) \end{matrix} \to \\
\xrightarrow{\exp_6} \bigoplus & \begin{matrix} R(-(1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1)) \\ R(-(2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1)) \\ R(-(2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1)) \\ R(-(2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1)) \\ R(-(2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 1)) \\ R(-(2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2)) \end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_1^*} R.
\end{aligned}
$$

FIGURE 1. 由 E_6构造的分解上的多重分次。

$$
\begin{aligned}
0 \to & R(-(10,\ 13,\ 17,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \to \\
& \xrightarrow{\exp_1} \bigoplus \begin{array}{l}
R(-(7,\ 9,\ 12,\ 17,\ 13,\ 9,\ 5)) \\
R(-(7,\ 9,\ 12,\ 17,\ 13,\ 9,\ 4)) \\
R(-(7,\ 9,\ 12,\ 17,\ 13,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 9,\ 12,\ 17,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 9,\ 12,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 9,\ 11,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(6,\ 9,\ 11,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4))
\end{array} \to \\
& \xrightarrow{\text{指数映射}_7} \bigoplus \begin{array}{l}
R(-(5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 8,\ 5,\ 2)) \\
R(-(5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 8,\ 5,\ 3)) \\
R(-(5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 8,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 6,\ 8,\ 11,\ 9,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 6,\ 9,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 10,\ 7,\ 4)) \\
R(-(5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 10,\ 7,\ 3)) \\
R(-(5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 10,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 7,\ 9,\ 13,\ 9,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 7,\ 9,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)) \\
R(-(5,\ 7,\ 8,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3))
\end{array} \to \\
& \xrightarrow{\exp_7} \bigoplus \begin{array}{l}
R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1)) \\
R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 3,\ 2)) \\
R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 4,\ 2)) \\
R(-(3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 6,\ 4,\ 2)) \\
R(-(3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2)) \\
R(-(3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2)) \\
R(-(4,\ 4,\ 6,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2))
\end{array} \to \\
& \xrightarrow{\exp_1^*} R.
\end{aligned}
$$

FIGURE 2. 由 E_7构造的分解上的多重分次。

$$
\begin{aligned}
0 \to & R(-(22,\ 31,\ 41,\ 60,\ 48,\ 36,\ 24,\ 12)) \to \\
& \xrightarrow{\exp_1} \bigoplus \begin{matrix}
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 41,\ 33,\ 25,\ 17,\ 9)) \\
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 41,\ 33,\ 25,\ 17,\ 8)) \\
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 41,\ 33,\ 25,\ 16,\ 8)) \\
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 41,\ 33,\ 24,\ 16,\ 8)) \\
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 41,\ 32,\ 24,\ 16,\ 8)) \\
R(-(15,\ 21,\ 28,\ 40,\ 32,\ 24,\ 16,\ 8)) \\
R(-(15,\ 21,\ 27,\ 40,\ 32,\ 24,\ 16,\ 8)) \\
R(-(14,\ 21,\ 27,\ 40,\ 32,\ 24,\ 16,\ 8))
\end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_8^*} \bigoplus \begin{matrix}
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 29,\ 23,\ 17,\ 11,\ 5)) \\
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 29,\ 23,\ 17,\ 11,\ 6)) \\
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 29,\ 23,\ 17,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 29,\ 23,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 29,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 15,\ 20,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 15,\ 21,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 31,\ 25,\ 19,\ 13,\ 7)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 31,\ 25,\ 19,\ 13,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 31,\ 25,\ 19,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 31,\ 25,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 31,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 21,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)) \\
R(-(11,\ 16,\ 20,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6))
\end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_8} \bigoplus \begin{matrix}
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 11,\ 7,\ 3)) \\
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 11,\ 7,\ 4)) \\
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 11,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 15,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 19,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 10,\ 13,\ 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)) \\
R(-(8,\ 10,\ 14,\ 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4))
\end{matrix} \to \\
& \xrightarrow{\exp_1^*} R.
\end{aligned}
$$

FIGURE 3. 由 E_8构造的分解上的多重分次。

5. Proof of acyclicity

现在，我们将本文考察的复形与舒伯特簇联系起来，并在此过程中证明它们的无环性。

定理 5.1. §2 中定义的两族复形均为无环的。

我们需要用到的交换代数中的主要工具是 Buchsbaum-Eisenbud 无环性判据：

定理 5.2 ([2]). 设 R 是一个环。一个复形

$$0 \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_2 \xrightarrow{d_1} F_0$$

自由 R-模的复形正合当且仅当

$$\operatorname{rank} F_k = \operatorname{rank} d_k + \operatorname{rank} d_{k+1}$$

and

$$\operatorname{depth} I(d_k) \geq k$$

对于 $k = 1, \ldots, n$，其中 $I(d_k)$ 是 d_k 的（秩为 d_k）$\times$（秩为 d_k）子式所生成的理想。

注意，我们的复形都定义在多项式环上，因此深度与余维相同。

证明的其余部分来自表示论，具体而言，是对舒伯特簇和 Pl¨ucker 坐标的研究。所需背景可见 [9]。我们将按 [12], 的方式进行准备，以便为第6节做准备。固定一个 Dynkin 图 T，令 $\mathfrak{g}$（分别为 G）表示相应的复单李代数（分别为单连通群）。选取一个顶点 $i \in T$，令 P_i 表示由单根 α_i 所诱导的分次中对应于非正部分 $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{g}$ 的极大抛物子群（以下简称“i-分次”）。

令 W 表示 T 的魏尔群，$W_{P_i} \subset W$ 表示 $T \setminus \{i\}$ 的魏尔群。舒伯特簇 $X_w \subset G/P_i$ 以及定义在 G/P_i 上的（极端）Pl¨ucker 坐标 p_w，均由 W/W_{P_i} 的元素 w 编号。若 τ、$w \in W$ 分别是各自陪集中的最短长度代表元，则函数 p_τ 在 X_w 上消失，当且仅当 $\tau \not\leq w$ 在 Bruhat 序中。并且，$\{p_\tau = 0 : \tau \not\leq w\}$ 在集合论意义上刻画了 X_w。我们将用$X^w = w_0 X_{w_0 w}$ 表示反舒伯特簇，其中 $w_0 \in W$ 是最长元素。若 w 是其陪集中的最短长度代表元，则 $\operatorname{codim} X^w = \ell(w)$。

设 $V = V(\omega_i)^*$ 为最低权为 $-\omega_i$ 的表示，并令 V^{bot} 表示其在 i 分次中的一维底分量，该分量由一个最低权向量张成。G/P_i 到 $\mathbb{P}(V)$ 的 Pl¨ucker 嵌入由以下公式给出

$$\begin{aligned} G/P_i &\to \mathbb{P}(V) \\ [g] &\mapsto [V^{\mathrm{bot}} \hookrightarrow V \xrightarrow{g\cdot} V] \end{aligned} \tag{5.1}$$

于是，Pl¨ucker 坐标 p_w 就是 $\mathbb{P}(V)$ 上对应于 V 中极端权 $w \cdot (-\omega_i)$ 的齐次坐标。

令 $\mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 i-分次中的负部分，并令 N_i 为相应的幺幂子群。则 $N_i w_0 \subset G/P_i$ 是开舒伯特胞 C_{w_0}，它由 Pl¨ucker 坐标 p_{w_0}非零给出，我们将其规范化为 1。因此

我们可以通过以下方式对这个局部片进行参数化

$$\mathfrak{n}_i \to \mathbb{P}(V)$$
$$X \mapsto [\mathbb{C} \hookrightarrow V \xrightarrow{\exp(X)\cdot} V]$$

其中 $\mathbb{C} \hookrightarrow V$ 是最高权直线，即由与 i 对偶的节点在 T 上诱导的分次中的一维顶分量。

和之前一样，记 e R_i 为多项式环 Sym $\mathfrak{n}_i^*$。因此，大开胞是 Spec Sym $\mathfrak{n}_i^*$.

例 5.3。在说明如何利用这一方法证明定理 5.1 之前，我们先以 n 为偶数时的 D_n 型为例，具体说明这一方法。下文中我们取 $i = n$，并省略下标 i。

商集 G/P 是正交格拉斯曼流形 $OG(n, 2n)$，它可以通过映射置于经典格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(n, 2n)$ 中：

$$G/P \to \mathrm{Gr}(n, 2n)$$
$$[g] \mapsto [V(\omega_1)^{\mathrm{bot}} \hookrightarrow V(\omega_1) \xrightarrow{g\cdot} V(\omega_1)]$$

其中，令 $SL(F)$ 表示 Dynkin 图上对应于顶点 $1, \ldots, n-1$ 的子群，则标准表示 $V(\omega_1)$ 是 $F^* \oplus F$，并带有显然的二次型 $Q(\varphi, x) = \varphi(x)$。

设 B 是 $\mathfrak{n} = \bigwedge^2 F^*$中的一般元，将其视为一个反对称矩阵 $F \to F^*$，其元素属于 $R = \mathrm{Sym}\,\mathfrak{n}^*$。开胞由分块矩阵$\begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}^\top$参数化给出。$B$ 的反对称性反映出，$F^* \oplus F$中的列空间是二次型 Q的一个各向同性子空间。

然而，G/P 上的 Pl¨ucker 坐标并不表现为该矩阵的子式；相反，它们的平方才是。为此，回想一下，Pl¨ucker 坐标来自将 G/P嵌入到 $\mathbb{P}(V(\omega_n))$ 中。对开舒伯特胞进行参数化的映射 $V(\omega_n)^{\mathrm{top}} \hookrightarrow V(\omega_n)$ 指数映射$\xrightarrow{B}$ $V(\omega_n)$ 为

$$\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \cdots & Q_{n/2-1} & Q_{n/2} \end{bmatrix}^\top$$

其中 Q_j 由 B的（$2j$）×（$2j$）Pfaffian 构成。特别地，$p_{w_0} = Q_0 = 1$ 和 $p_1 = Q_{n/2}$是 B的 Pfaffian。

另一方面，$\begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}^\top$ 的子式是 $\mathbb{P}$（$\bigwedge^n V$（ω_1））上的坐标，其中包含 $\mathbb{P}$（V（$2\omega_n$））。这可以通过权计算看出：$F \subset V$（ω_1）中的权可以通过依次将 ω_1 关于 s_1、.....、s_{n-1}反射得到，它们的和为

$$\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) + (\omega_3 - \omega_2) + \cdots + (\omega_{n-2} - \omega_{n-3})$$
$$+(\omega_n + \omega_{n-1} - \omega_{n-2}) + (\omega_n - \omega_{n-1}) = 2\omega_n.$$

因此，$\bigwedge^n F \subset \bigwedge^n V$（$\omega_1$）是 V（$2\omega_n$）$= \bigwedge^n F^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n F \subset \bigwedge^n V$（$\omega_1$）的最高权重部分。若 p_w 是 V（ω_n）中极端权重 ω 对应的坐标，那么p_w^2 将是 V（$2\omega_n$）$\subset \bigwedge^n V$（ω_1）中极端权重 2ω 对应的坐标；例如，$p_1^2 = \det B$。

这个例子说明了我们如何将 G/P嵌入经典格拉斯曼流形，以及 Pl¨ucker 坐标的（幂）如何出现在该格拉斯曼流形的经典 Pl¨ucker 坐标中，其中 G/P。我们将利用这一点来证明定理 5.1。

对于我们构造的所有复形，无环性的证明几乎完全相同，因此为避免记号上的繁琐，我们只讨论每个族中的一个具体情形。对于具有例外对偶的 Dynkin 图，只需做少量调整，具体如下

注 2.2 所述。我们不讨论这些调整，因为它们仅适用于类型A_n (无趣)， D_n (已知)，以及 E_6 (足够简单，可在 Macaulay2 中验证其无环性)。

无环性证明（针对余维三例子）。对于长度三的情形，我们将证明由 E_8 构造的 (1, 7, 8, 2) 复形 $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ 的无挠上同调。根据引理 2.5，只需处理其中一个，因此我们只考虑 $\mathbb{F}_2$。同样的思路也可直接用于证明 $\mathbb{F}_3$ 的无挠上同调；不过，处理 $\mathbb{F}_2$ 将有助于第6节。于是设 $G = E_8$ 和 $i = 2$。下文中我们将省略下标 i。商集 W/W_P 与该权的 W-轨道一一对应

$$\omega_2 = \begin{matrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}.$$

由其陪集内长度最小的元素 $w \in W$ 作用，我们得到布鲁哈特图 ℓ

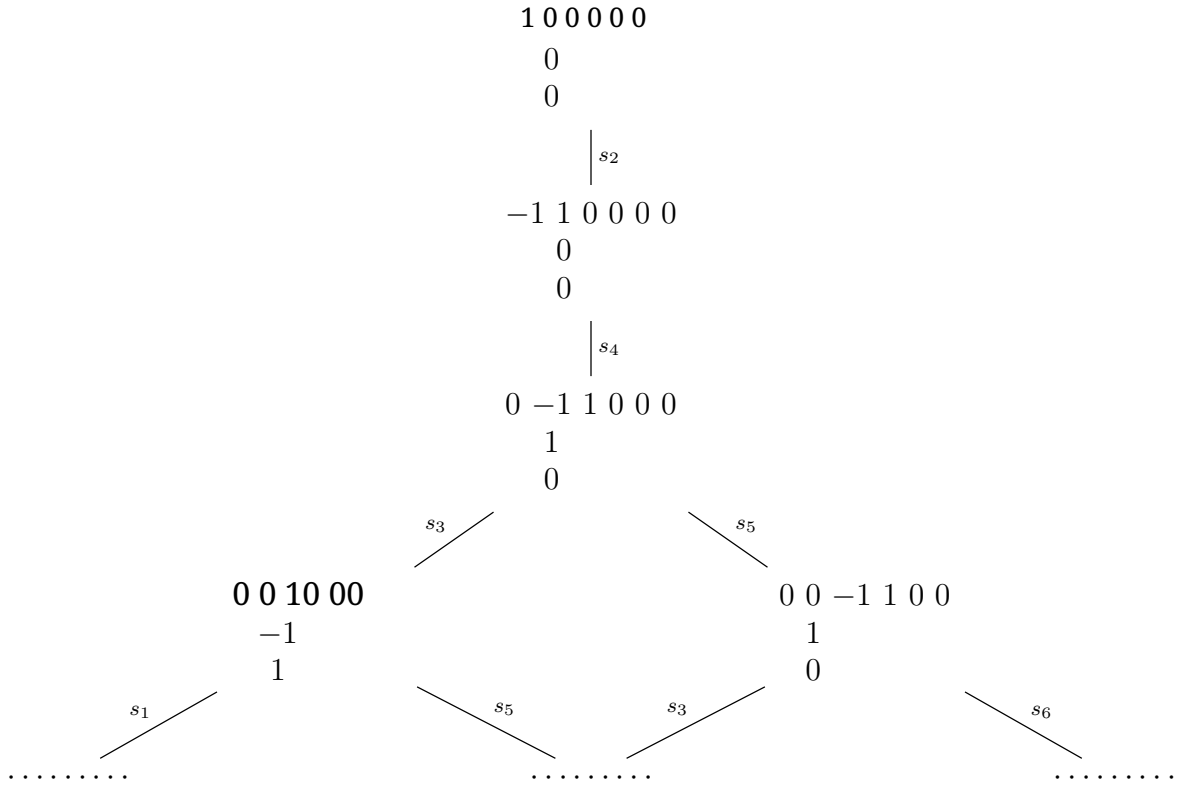


FIGURE 4. W/W_{P_2} 针对 E_8。

对于图4中的 W/W_P，其中 s_i 表示在顶点 i处的反射。Pl¨ucker 坐标p_1, p_{s_2}从集合论意义上定义了余维二（相反）舒伯特簇 $X^{s_4 s_2}$。坐标 $p_{s_4 s_2}$ 在 $X^{s_4 s_2}$上不为零，因此（$p_1, p_{s_2}, p_{s_4 s_2}$）的零点集的余维为三。（事实上，它是两个余维三舒伯特簇$X^{s_3 s_4 s_2}, X^{s_5 s_4 s_2}$的并集。）

现在我们将在每个理想 $I(d_k)$ 中定位这三个 Pl¨ucker 坐标的幂次，这将表明余维数 codim $I(d_k) = 3$。对于微分 d_3，令 $V = V(\omega_1)$，并考虑

N通过（5.1）嵌入 Gr(8, V) 中。表示 V在二重分次中有 11 个分次分量：

$$V = F_2 \oplus \bigwedge^4 F_2 \oplus \cdots \oplus S_{4^7,3}F_2$$

（其中 $S_{4^7,\ 3}F_2 \cong F_2^*$）因此，这个嵌入可由一个 3875×8 分块矩阵参数化表示，为简洁起见将其转置，

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 & \cdots & Q_9 & Q_{10} \end{bmatrix}^\top$$

其中 Q_j 的各项次数为 j。特别地， Q_{10} 是映射到最底部分次分量的部分，而 Q_0 只是单位矩阵。

顶部分量中出现的权之和为

$$\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1) + (\omega_4 - \omega_3) + (\omega_2 + \omega_5 - \omega_4) + (\omega_2 + \omega_6 - \omega_5)$$
$$+(\omega_2 + \omega_7 - \omega_6) + (\omega_2 + \omega_8 - \omega_7) + (\omega_2 - \omega_8) = 5\omega_2$$

展示了 $V(5\omega_2)$ 在 $\bigwedge^8 V(\omega_1)$ 中的 $= \bigwedge^8 F_2 \oplus \cdots \oplus \bigwedge^8 F_2^*$。因此，在对 N上的 $p_{w_0} = 1$ 进行归一化后，对于每个 Pl¨ucker 坐标 p_w，我们都能在 3875×8 矩阵中找到 p_w^5 作为一个子式。

注意， d_3^* 是映射到三重分次中底部部分 $F_3 \subset V$的 2×8 子矩阵。我们有 $p_1^5 = \det Q_{10}$，因此，计算 p_1^5 的子式显然包含构成 d_3的 Q_{10} 的两列。关键观察是，如果 w 不包含反射 s_3，子式 p_w^5 也会包含这两列。这是因为除 s_3 之外的每个 $s_i \in W$ 都由 $SL(F_1) \times SL(F_3)$中的一个元素表示。因此我们得出结论，子式 p_1^5、$p_{s_2}^5$和 $p_{s_4s_2}^5$ 属于 $I_2(d_3)$（例如，通过拉普拉斯展开）。

对于 d_2，我们改取 $V = V(\omega_8)$。由一个 248×8矩阵，我们得到 N 到 Gr(8, V) 的一个嵌入

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 & \cdots & Q_5 & Q_6 \end{bmatrix}^\top.$$

现在， p_1^3 是 det Q_6。 Q_6 的六列来自最低的 3-分次分量 $F_1^* \subset V$，因此子式 $p_{s_2}^3$ 和 $p_{s_4s_2}^3$ 也是如此（同样因为我们不使用反射s_3）。因此，这三个子式都属于 $I_6(d_2)$。

最后，对于 d_1，我们取 $V = V(\omega_2)$。由一个 147250×1矩阵，我们得到 N 到 $\mathbb{P}(V)$ 的一个嵌入

$$\begin{bmatrix} 1 & Q_1 & \cdots & Q_{15} & Q_{16} \end{bmatrix}^\top.$$

在这个嵌入中， p_1 恰好是矩阵元 Q_{16}。微分 d_1^* 是该矩阵中映到最低 3-分次分量 $F_1 \subset V$ 的部分。通过与之前相同的推理，我们推出 p_{s_2} 和 $p_{s_4s_2}$ 也是 d_1 的矩阵元。□

无环性的证明（针对余维四的戈伦斯坦例子）。我们将考虑由 E_8 构造的例子。根据引理 2.5，只需处理 $\mathbb{F}_1$。证明方法与长度三的情形相同：只需在理想 $I(d_k)$ 中找到足够多的 Pl¨ucker 坐标的幂，即可推得这些理想的余维为四。注意，该复形是自对偶的，因此只需考虑 $I(d_1)$ 和 (d_2)。

这一次我们取 $i = 1$，而 W/W_P 的布鲁哈特图的顶部如图 5 所示。仿照长度三情形的论证，可以在每个理想中找到最顶部的四个 Pl¨ucker 坐标 p_1、p_{s_1}、$p_{s_3s_1}$、$p_{s_4s_3s_1}$ 的幂。考察 G/P 到 Gr(14, $V(\omega_8)$) 的嵌入，可对 $I_7(d_2)$ 证明这一点；考察到 $\mathbb{P}(V(\omega_1))$ 的嵌入，可对 $I_1(d_1)$ 证明这一点。其余证明完全相同，故从略。□

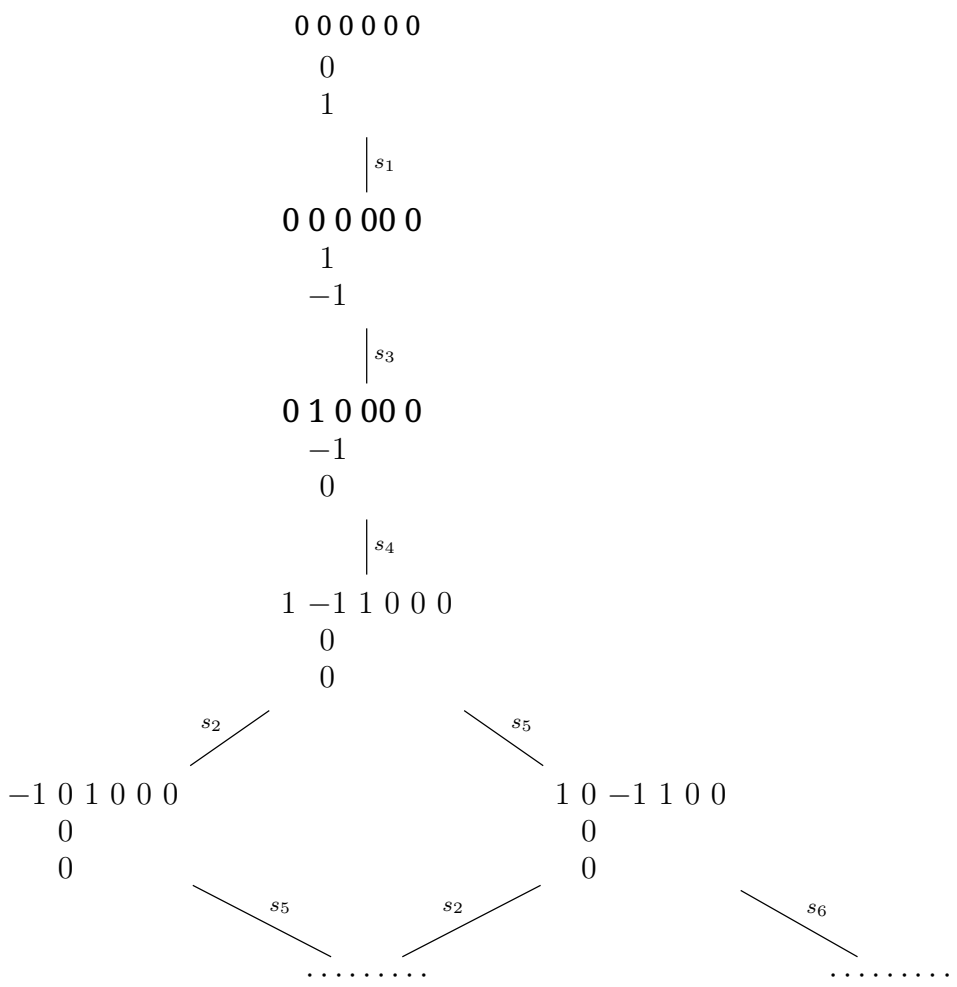


FIGURE 5. W/W_{P_1} 对于 E_8。

6. Invariants

对于与 Dynkin 图 E_n （$n = 6, 7, 8$）相关的格式，定理 5.1 的证明实际上表明，复形 $\mathbb{F}_2$ 分解了 [12] 中所讨论的（受限）舒伯特簇 $Y^{\sigma_3}, Y^{\sigma_3'}$ 的坐标环。以证明中采用的 (1, 7, 8, 2) 为例，我们发现， $\mathbb{F}_2$ 的微分 d_1 恰好由 Pl¨ucker 坐标 $p_1, p_{s_2}, p_{s_4s_2}, \ldots, p_{s_8s_7s_6s_5s_4s_2}$ 组成；这些坐标生成了 N 中 $Y^{\sigma_3} = N \cap X^{\sigma_3}$ 的理想，其中$\sigma_3 = s_3s_4s_2$ [12, §5]。在那篇论文中，作者利用链式关系推导了每个分解的分次贝蒂数，并指出余维会对这些数施加各种方程——也就是说，$\sum(-1)^i t^{b_{i,j}}$ 必须能被 $(1-t)^3$ 整除。现在我们已经给出了这些分解的显式描述；事实上，将 §3 中列出的 $\mathbb{Z}^n$-多重分次贝蒂数粗化为二重分次后，便可得到 [12] 中所述的结果。

将 $\mathfrak{n}^*_{\geq 2}$ 中的所有变量设为零后得到的 Y^{σ_3}、$Y^{\sigma_3'}$ 的线性截面也在 [12] 中进行了研究。我们用自己的构造重新表述这一结果，并将其扩展到包括长度为四的分解：

命题 6.1。设 $i = 2$ （分别为 $i = 1$）。令 $\mathfrak{n}_k$ 表示 $\mathfrak{g}$ 在 i 分次下的次数 $-k$ 部分，$\mathfrak{n} = \bigoplus_{k\geq 1} \mathfrak{n}_k$，以及 $R = \mathsf{Sym}\ \mathfrak{n}^*$。考虑映射 $\phi\colon R \to R' \coloneqq \mathsf{Sym}\ \mathfrak{n}_1^*$，它将所有变量 $\mathfrak{n}^*_{\geq 2}$ 映为零。长度三（分别为四）的复形 $\mathbb{F}_i \otimes R'$，对于 $T = E_6, E_7, E_8$（分别为 $T = E_7, E_8$），是 R' 中由一个（$T \setminus \{i\}$）不变量 Δ 及其若干偏导数生成的理想的自由分解。

我们简要介绍这一命题的计算机辅助证明。概念性的证明固然更理想，但我们指出，命题 6.1 并非理解自由分解结构理论这一更广泛目标的必要条件。这些线性截面因其描述特别简单而颇具吸引力，但我们并不认为它们会是猜想 2.6 和 2.8 意义下的泛型对象。

证明。按照定理 5.1 证明中的记号，我们将针对 E_8 格式 (1, 7, 8, 2) 证明该命题。我们用 $(-)'$ 表示 $- \otimes R'$ 或 $\phi(-)$。$\mathbb{F}_2$ 中的微分是利用 $\mathfrak{n}$ 的指数作用构造的，因此，将 $\mathfrak{n}$ 替换为 $\mathfrak{n}_1$ 即可得到 $\mathbb{F}_2'$ 中的微分。

特别地，微分 d_1' 来自 $\mathfrak{n}_1$ 对 $V(\omega_2)$ 的指数作用。这个表示在二重分次中有一个一维顶分量 $\mathbb{C}$。由于它是自对偶的，底分量也为 $\mathbb{C}$。

设 $L' \in \mathfrak{n}_1 \otimes R'$ 表示 $\mathfrak{n}_1$的一般元。d_1' 的矩阵元 p_1' 来自 $\exp L'$ 的这一部分：它将 $V(\omega_2)$ 的顶分量映射到底分量。这是一个 $\mathfrak{sl}(F_2)$- 等变映射 $\mathbb{C} \to R'_{16}$，因此，如果 p_1' 非零，那么它就是$\mathfrak{n}_1 = \bigwedge^3 F_2^*$上的一个 $\mathfrak{sl}(F_2)$-不变量，次数为 16。

暂且假设 $\Delta \coloneqq p_1' \neq 0$。它关于 R' 中的变量的偏导数将张成 R'_{15}中的一个表示 $\bigwedge^3 F_2^*$的副本。另一方面，$\exp L'$ 中从 $V(\omega_2)$的次高分量映射到底分量的部分，也将张成这样一个表示。计算机[2] 可以验证，表示 $\bigwedge^3 F_2^*$在 $S_{15}(\bigwedge^3 F_2)$中恰好出现一次，因此二者必然重合。通过匹配权，我们可以明确地写出

$$p_{\mathrm{bot}}(\exp L')(\epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_k) = \frac{\partial \Delta}{\partial x_{ijk}}$$

[2]我们感谢 Witek Kra´skiewicz 完成这项计算。

对于 $\bigwedge^3 F_2^* \subset V(\omega_2)$的次高分量中的 $\epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_k$，以及对应的变量 $x_{ijk} \in R_1' = \bigwedge^3 F_2^*$。这里，$p_{\mathrm{bot}}$ 是将 $V(\omega_2)$投影到底分量上的投影。

对于 (1, 7, 8, 2)，若 $e_1, \ldots, e_8$ 是 F_2 的一个标准基（参见定义 3.1），那么 $\mathbb{F}_2'$ 的微分 d_1' 因此为

$$\begin{bmatrix} \Delta & \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_{178}} & \cdots & \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_{678}} \end{bmatrix}.$$

顺便一提，也可以通过分别对 x_{678}、x_{578}、x_{568}、x_{567} 求偏导数来得到 (1, 5, 8, 4) 的 d_1'。注意，$p_1' = \Delta$、$p_{s_2}' = \partial\Delta/\partial x_{678}$ 和 $p_{s_4s_2}' = \partial\Delta/\partial x_{567}$ 是共有的。

剩下要验证 $p_1' \neq 0$，并且 $\mathbb{F}_2'$ 是无挠上同调。这两点都可由以下事实推出：p_1'、p_{s_2}'、$p_{s_4s_2}'$ 在 R' 中构成一个正则序列。令 $X \subset \mathrm{Spec} R'$ 为由这些函数切出的子概形。若 H 是一个经过原点的任意线性子空间，那么 H 与 X 的每个分支都相交，因为 X 是锥形的。由于 $\mathrm{codim}(X \cap H, H) \leq \mathrm{codim}(X, \mathrm{Spec} R')$，只需验证：将 R' 中的每个变量替换为 $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ 中的随机线性形式（即取 H 为一个三维平面）后，p_1'、p_{s_2}'、$p_{s_4s_2}'$ 构成一个正则序列。这一点已由计算机验证[3]。□

对于长度为四的情形，取 $V(\omega_1)$ 而非 $V(\omega_2)$，且 $\mathfrak{n}_1$ 是 $\mathfrak{so}(H \oplus H^*)$ 的一个半旋量表示，但其余思路相同。这也解释了为什么命题 6.1 中省略了 E_6：在这种情况下，表示 $V(\omega_1)$ 不是自对偶的。

我们总结一下这一过程中出现的不变量。[11]对它们作了详尽的说明。

- 对于由 E_6/P_2构造的 (1, 5, 6, 2) 分解，Δ 是 $\bigwedge^3 \mathbb{C}^6$上的一个 4 次 $\mathfrak{sl}_6$-不变量。这被列为 [11, §7] 中第一个表的第 (5) 项。
- 对于由 E_7/P_2构造的 (1, 6, 7, 2) 和 (1, 5, 7, 3) 分解，相应的不变量是 $\bigwedge^3 \mathbb{C}^7$上的一个 7 次 $\mathfrak{sl}_7$-不变量，即第 (6) 项。
- 对于 E_8/P_2 中的 (1, 7, 8, 2) 和 (1, 5, 8, 4)，这是 $\bigwedge^3 \mathbb{C}^8$ 上一个次数为 16 的 $\mathfrak{sl}_8$-不变量，第 (7) 项。
- 对于 E_7/P_1 中的 (1,7,12,7,1)，这是半自旋表示上的一个次数为 4 的 $\mathfrak{so}_{12}$-不变量，第 (23) 项。
- 对于 E_8/P_1 中的 (1,8,14,8,1)，这是半自旋表示上的一个次数为 8 的 $\mathfrak{so}_{14}$-不变量，第 (24) 项。

7. Acknowledgments

第二作者获得以下资助：MAESTRO NCN - UMO-2019/34/A/ST1/00263 - 交换代数与表示论研究、NAWA POWROTY - PPN/PPO/2018/1/00013/U/00001 - 李代数在交换代数中的应用，以及波兰国家科学中心 OPUS 项目资助 UMO-2018/29/BST1/01290。作者谨向 Ela Celikbas、Lars Christensen、David Eisenbud、Sara Angela Filippini、Lorenzo Guerrieri、Witek Kra´skiewicz、Jai Laxmi、Steven Sam、Jacinta Torres 和 Oana Veliche 致谢，感谢他们就本文内容及相关主题进行的有益讨论。

[3]对于 E_8，表示 $V(\omega_2)$ 过于庞大，无法用计算机处理，但可以改用伴随表示 $V(\omega_8)$ 来计算 p_1'、p_{s_2}'、$p_{s_4s_2}'$ 在 S 中的像。具体而言，令 $L'' = L' \otimes S$，则 $p_1'^3$、$p_{s_2}'^3$、$p_{s_4s_2}'^3$ 在 S 中的像表现为 $\exp L''$ 在 $V(\omega_8)$ 上的 8×8 个子式。

References

[1] Brown, A. 一类三阶完美理想的结构定理，《代数杂志》105 (1987年), 308–327.[2] Buchsbaum, D., Eisenbud, D. 什么使一个复形正合，《代数杂志》25 (1973年) 259-268[3] Buchsbaum, D., Eisenbud, D. 有限自由分解的代数结构及余维三理想的一些结构定理，《美国数学杂志》99, no. 3 (1977年) 447-485 [4] Christensen, L.W., Veliche, O., Weyman, J. 关于三阶近完全交理想的三种观点，交换代数。Springer, Cham. (2021年) 219-281[5] Guerrieri, L., Weyman, J. 长度三的映射自由分解 I，预印本，arXiv:2012.08358, (2020年)[6] Herzog, J., Miller, M. 偏差数二的戈伦斯坦理想，《代数通讯》13 (1985年) 1977-1990[7] Kunz, E., 近完全交的余正规模，《美国数学会会刊》 73 (1979 年) 15-21[8] Lee K., Weyman J. Kac-Moody李代数的若干分支公式，《韩国数学会通讯》34(2019年), No. 4, pp. 1079-1098[9] Lakshmibai V., Raghavan K.N. 标准单项式理论，《数学科学百科全书》，Vol. 137, Springer-Verlag, 柏林, 海德堡, 2008年[10] Vasconcelos, W.V., Villarreal, R. 关于余维四的戈伦斯坦理想，《美国数学会会刊》98, no. 2 (1986年) 205-210[11] Kimura T., Sato M. 不可约预齐性向量空间及其相对不变量的分类，《名古屋数学杂志》，《名古屋数学杂志》65, 1-155, (1977年)[12] Sam, S., Weyman, J. 舒伯特簇与长度三的有限自由分解，《美国数学会会刊》Volume 149, Number 5, Pages 1943–1955 (2021年)[13] Watanabe, J. 关于嵌入余维三的戈伦斯坦环的一则注记，《名古屋数学杂志》50 (1973年), 227–232. MR0319985[14] Weyman, J. 关于长度三的分解的结构，《代数杂志》126 No. 1 (1989年) 1-33[15] Weyman, J. 自由分解与根系，《傅里叶研究所年刊》68 (3) (2018年) 1241-1296[16] Weyman, J. 有限自由分解与根系，https://icerm.brown.edu/topical_workshops/t

w-20-frrt/2020

[17] Weyman, J. 关于四余维 Gorenstein 理想的高阶结构定理，正在准备中

Department of Mathematics, UC Berkeley, CA 94720电子邮箱：xlni@berkeley.edu

Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Poland电子邮箱：jerzy.weyman@uj.edu.pl