arXiv:2304.01383v1 [math.AG] 3 Apr 2023

K3 曲面上的椭圆纤维化与对合

Alice Garbagnati 和 CEC´ILIA SALGADO

Abstract. 我们综述了关于具有非辛对合的 K3 曲面上椭圆纤维化分类的研究成果。我们将这些成果置于更一般的框架下，研究不对不动点集或对辛 2-形式的作用作任何假设的带对合 K3 曲面。我们重新探讨了具有 2-初等 N´eron–Severi 格的 K3 曲面上椭圆纤维化的完整分类，并给出了作为有理椭圆曲面的二次覆盖的 K3 曲面上极值椭圆纤维化的完整分类。

1. Introduction

K3 曲面在代数曲面的分类中占据重要地位，处于 Enriques 分类的中间位置。其丰富的几何性质吸引了不同领域数学家的关注，涉及数论、代数微分学、辛几何、微分方程和动力系统。丰富几何性质的一个结果是，只有 K3 曲面可能具有多个非乘积型且带有截面的椭圆纤维化。Sterk 在 [Ste] 中证明，模去自同构群后，K3 曲面上的椭圆纤维化只有有限多个。因此，当这类纤维化存在时，对它们进行分类便是顺理成章的研究方向。

这篇综述旨在回顾我们近期对这一问题的研究成果。

1.1. 历史背景。Oguiso 是最早研究这一分类问题的学者之一。在 [O]，中，他对两条非同源椭圆曲线之积的 Kummer 曲面上的所有椭圆纤维化进行了分类，分类是按照自同构等价而言的。特别地，他证明，在一般性条件下，这类曲面具有 11 种椭圆纤维化，并通过给出它们的 Mordell-Weil 群和奇异纤维类型（亦称框架格）对其加以描述。此外，他还证明，按照自同构等价，这些纤维化共有 59 种不同类型。Oguiso 的方法是几何性的，并依赖于 X 上一个自同构的存在；他以此作为分类的起点。

几年后，Nishiyama 采用代数方法，对作为椭圆曲线乘积的循环商的 K3 曲面上所有可能的框架格进行了分类。这些曲面是 Kummer 曲面或奇异 K3 曲面。他的方法基于格理论，并可广泛应用于其他 K3 曲面。

Oguiso 的方法由 Kloosterman 在 [Klo] 中进一步研究，具体针对的是一种 K3 曲面：它是以一般位置的六条直线为分歧曲线的射影平面的双覆盖。这类曲面的 Picard 数为 16，而且覆盖对合在 N´éron–Severi 群上作用平凡。这个对合的存在使他能够应用 Oguiso 的方法。

后来，Kumar 也通过对一般雅可比 Kummer 曲面上的全部 25 个椭圆纤维化按自同构分类，着手解决这一问题，见 [Kum]。Kumar 的方法是代数的。具体而言，他在该 K3 曲面的 N´éron–Severi 群中，找出椭圆纤维化的除子类候选，并按曲面的自同构群取等价类。由于已知该曲面的完整自同构群，这一做法才得以实现。

Comparin 和 Garbagnati 推广了 Kloosterman 的结果，在 [CG]，中扩展了对 K3 曲面的一种分类：这类曲面是以有理曲线的并为分支曲线的平面双覆盖。在这些曲面上，会出现更多的纤维类型和更高的秩，但覆盖对合在 N´eron-Severi 群上的作用仍然平凡。作为其分类的推论，他们对这类曲面上的 van Geemen-Sarti 对合进行了分类。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14J26、14J27、14J28。*Key words and phrases.* 椭圆纤维化、有理椭圆曲面、K3 曲面、K3 曲面上的对合。

多位作者运用 Nishiyama方法，得到了 K3 曲面上椭圆纤维化所有可能框架格的列表。例如， [BL], 研究了与模群 $\Gamma_1(8)$ 相关的 K3 曲面；而 [BGHLMSW] 描述了具有超越格 $\langle 2\rangle \oplus \langle 6\rangle$ 的奇异K3曲面，该曲面也可解释为模曲面。

Shimada 从不同角度探讨了这个问题，在 [Shi] 中对具有有限 Mordell–Weil 群的 K3 曲面上的椭圆纤维化的所有框架格进行了分类。

正如上文讨论的 Oguiso 的结果所示，椭圆纤维化可能的框架分类通常比按曲面自同构分类更粗略。 [BKW] 描述了 K3 曲面上椭圆纤维化的不同分类类型。作者还讨论了某些分类何时会重合。最近， [FV], 中的 Festi 和 Veniani 提出了一种方法：在已知框架格的情况下，统计 K3 曲面上按自同构分类的椭圆纤维化。

1.2. 我们的贡献。对可实现为有理椭圆曲面双覆盖的 K3 曲面的研究，以及 K3 曲面上的椭圆纤维化与有理曲面上的线性系之间的相互作用，是我们一系列论文 [GS19] 和 [GS20], 以及 Women in Numbers Europe 2 和 3 研究项目 [BDGMSV] 和 [CGSTW] 的起点。

我们的第一项贡献受 Oguiso 的工作启发（见 [O] 和注 3.9），根据覆盖对合在椭圆纤维化上的作用，将椭圆纤维化分为三类。这三类分别对应于有理商上的三种线性系。在 [GS19], 中，我们描述了这类线性系（它们不一定是完备线性系），并对一些具体 K3 曲面上的所有椭圆纤维化进行了分类。特别地，我们证明，在某些假设下，K3 曲面上的椭圆纤维化会在有理椭圆曲面上诱导出亏格 0 或 1 曲线的纤维化（参见 [GS19，定理 4.2]）。我们还描述了上述有理曲面上纤维化的奇异纤维与 K3 曲面上的椭圆纤维化之间的关系（参见 [GS19，定理 5.3 和 5.5]）。

论文 [GS20] 将我们的分类方案付诸实践，对具有非辛对合且其不动点集包含一条正亏格曲线的一般 K3 曲面作了完整研究；而不动点集仅由有理曲线构成的情形，已在 [O], [Klo], [CG]中分析过。我们首先关注下一个情形，即亏格为 1 的曲线；这一情形与有理椭圆曲面有着自然联系。事实上，非辛对合的不动点集中存在一条亏格 1 曲线，保证了由该曲线在 K3 曲面上确定的椭圆纤维化会延拓到有理商上。我们的方法的一项特点是，它往往能自然地给出椭圆纤维化的 Weierstrass 方程。这通常并不显然；据我们所知，大多数关于椭圆纤维化分类的论文都没有提供清晰的解决路径。如果所选非辛对合的不动点集包含一条亏格至少为 2 的曲线，那么 K3 曲面上的纤维化与有理商上的纤维化之间的关系就不那么显然。因此，当非辛对合固定一条亏格至少为 2 的曲线时，我们采用 Nishiyama方法，列出 K3 曲面上椭圆纤维化所有可能的框架格。

在 [BDGMSV] 中，我们进一步推进了在 [GS19] 中提出的分类计划，对某些具有非辛对合、但并非一般情形的 K3 曲面上的椭圆纤维化进行分类（因此它们的 N´eron–Severi 格并非 2-初等）。更准确地说，我们列出了 5 级模椭圆曲面的覆盖上的椭圆纤维化的所有框架格。我们还描述了一种算法，用于确定其中许多椭圆纤维化的 Weierstrass方程（见 [BDGMSV，第 5.2 和 6.1 节。2]）。

在 [CGSTW] 中，我们的工作转向算术方向，利用分类结果确定某些 K3 曲面上的椭圆纤维化及其 Mordell-Weil 群的定义域。更准确地说，我们研究极值有理椭圆曲面的二次基变换所得的 K3 曲面，这些曲面或者只有一个可约纤维，或者具有 (III^*, I_2) 或 (III^*, III) 这样的纤维构型，且分支于光滑纤维。我们证明，纤维化及其 Mordell–Weil 群的定义域次数与椭圆纤维化的类型相关，而该类型由 [GS19] 中提出的分类给出。

1.3. 应用及相关工作。我们的工作已应用于不同领域。在 [Dem], 中， [GS19] 所提供的关于 K3 曲面上两个不同椭圆纤维化的知识，被用于证明某些类的 K3 曲面具有希尔伯特性质。在 [KW], 中， [GS20] 给出的椭圆纤维化列表被用于构造一个与 Borcea-Voisin 轨形双有理的四维簇，该四维簇带有一个平坦椭圆纤维化态射。我们的工作与 F 理论及弦理论之间的关联在 [CM22]中显而易见。在 [CM20], 中，作者研究了某些具有 2-初等 N´eron-Severi 格的 K3 曲面。对于这些曲面，他们给出了方程

用于描述射影模型，并利用 [GS20] 中所述的椭圆纤维化；他们还应用 [FV]的结果表明， [GS20] 中给出的椭圆纤维化框架格分类，实际上是模自同构的全部椭圆纤维化分类。在 [CM21] 中，作者重新考察了 [CG] 和 [GS20], 给出的椭圆纤维化分类，并进一步给出了所研究的 K3 曲面族的一般成员在自同构群作用下的分类。

1.4. 本文概要。

第 2 节介绍有理曲面和 K3 曲面上纤维化所需的背景知识。

第 3 节聚焦于带有对合的 K3 曲面，不对对合作任何额外假设，并采用更一般的方法研究椭圆纤维化的分类问题。我们概述了这一一般情形下依据给定对合的作用对椭圆纤维化进行的分类；当非辛对合的不动点集非空时，该分类可归结为 [GS19] 中提出的分类。此外，我们还确定了商曲面上相应的线性系；在这一一般情形下，商曲面可为 K3 曲面、Enriques曲面或有理曲面，具体取决于对合的类型及其不动点集。我们还讨论了 K3 曲面上的椭圆纤维化中的奇异纤维与其相对于给定对合的类型之间的相互关系。我们进一步详细讨论由对合保持不变的椭圆纤维化：第 3.1 小节研究对合在基底上作用的情形，第 3.2 小节研究对合仅在纤维上作用的情形。第 3.3 小节将讨论范围限定于具有 2-初等 N´eron–Severi 格的 K3 曲面，并回顾 [GS20] 的结果。

在第4节中，我们将第3节的结果限定于作为有理椭圆曲面双覆盖的 K3 曲面，正如我们先前的工作 [GS19], [GS20], [BDGMSV] 和 [CGSTW]一样。在这一情形下，如果对合仅作用于纤维上，那么商纤维化是圆锥丛（见第4.1小节）；如果对合作用于纤维化的基底上，那么商纤维化的亏格为1（见第4.2小节）。在第4.3小节中，我们证明，给定的椭圆纤维化相对于不同的对合可以属于不同类型。事实上，我们给出了这样的椭圆纤维化实例：它们同时实现任意一对类型。

第5节讨论极端椭圆曲面。更确切地说，我们列出了由极值有理椭圆曲面经过二次基变换得到的极端椭圆 K3 曲面；这些极值有理椭圆曲面的完整分类见 [MP]。

在第6节中，我们重新讨论 [BDGMSV 第5节的工作2]。更确切地说，我们提出一种算法，用于确定某些 K3 曲面上的椭圆纤维化的 Weierstrass方程；这些 K3 曲面是有理椭圆曲面的双覆盖。具体做法是，将这类 K3 曲面另行描述为具有特殊分歧轨迹的极小有理曲面的双覆盖。

致谢。我们的合作始于 Women in Numbers Europe 的第一届研讨会。我们很高兴感谢该届以及其他所有届 Women in Numbers Europe 的组织者。参与这些合作研讨会是一段非常愉快的经历。

2. Preliminaries

除非另有说明，本文始终在特征为零的代数闭域上进行研究。

定义 2.1。给定一个光滑射影代数曲面 S，若三元组 (S, π, σ) 满足$\pi\colon\ S \to \mathbb{P}^1$ 是一个至少有一个奇异纤维的相对极小椭圆纤维化，且有一个截面 $\sigma\colon\ \mathbb{P}^1 \to S$，则称其为椭圆曲面。

假设 π 是相对极小的，即纤维分支中不存在例外曲线，这意味着 S 是极小的，除非 S 是有理曲面。在这种情况下，纤维化 π 是 S 上唯一的椭圆纤维化，而 S 的负曲线要么是(-1)曲线，要么是(-2)曲线。前者是截面，后者是可约纤维的分支。下文将有理椭圆曲面简称为 RES。特别地，我们可能会将 S 称为有理椭圆曲面，而不明确写出态射 π 和 σ 。如果S 是 K3 曲面，则它可能存在多个相对极小椭圆纤维化。在这种情况下，我们会明确指出所指的是哪一个纤维化。

读者可在 [Mir] 中找到更多细节，包括示例、基本构造以及所有可能的奇异纤维表。

注 2.2. 给定两个没有公共分支的平面三次曲线 F, G 。假设 F 光滑。沿可能非约化的概形 $F \cap G$ 对 $\mathbb{P}^2$ 进行爆破，得到一个有理椭圆曲面。反之，在代数闭域上，任意有理椭圆曲面都同构于将射影平面在一条三次曲线铅笔的 9 个基点（不必互异）处爆破所得的曲面。参见 [Mir, 引理 IV.1.2]。

记号：本文中，字母 R 专用于表示有理椭圆曲面， X 专用于表示 K3 曲面。

尽管有理曲面不允许存在不同的相对极小椭圆纤维化，但显然，只有在有理曲面上，椭圆纤维化和以有理曲线为纤维的纤维化才可能共存。下文将介绍特殊有理纤维化的定义，即符合我们研究目的的圆锥丛。

定义 2.3. 设 R 为有理曲面。在 R 上的圆锥丛是一个占优态射 $f\colon R \to \mathbb{P}^1$，其一般纤维是亏格为 0 的光滑曲线。

若 R 是有理椭圆曲面，且 D 是圆锥丛的一条纤维，则由伴随公式可得 $D \cdot (-K_R) = 2$ 。因此，等价地，由 Riemann–Roch 定理可知，圆锥丛由一个有效除子类 D 确定，满足$D^2 = 0$ 且 $D \cdot (-K_R) = 2$。我们称 NS(R) 中此类 D 的类为圆锥类，并以 D 交替表示该除子或其类。

例 2.4. 有理椭圆曲面上的圆锥丛。椭圆曲面与圆锥丛的理论在有理椭圆曲面这一形式下交汇。设 (R, π, σ) 是一个有理椭圆曲面。若 π 的 Mordell–Weil 秩为正，则任意两条在一点横截相交的截面 C_1, C_2 都给出一个圆锥类 $D = C_1 + C_2$。事实上，

$$D^2 = C_1^2 + 2C_1 \cdot C_2 + C_2^2 = -1 + 2 - 1 = 0 \ and \ -K_R \cdot D = -K_R \cdot (C_1 + C_2) = 1 + 1 = 2.$$

对于 Mordell–Weil 秩为零的椭圆曲面，圆锥类由纤维分支与截面的和给出。或者，以注记 (2.2) 中的描述为出发点，经过一个被吹起点的所有直线构成的任意铅笔，都会在 R 中给出一个圆锥丛。

在 [GS19，图 1] 和 [DC]中可以找到圆锥类的描述，这些圆锥类是负曲线的和 .

3. K3 曲面上的对合

下文中，我们将考察带有对合的 K3 曲面。我们根据对合对 K3 曲面纤维作用的不同，对其上的椭圆纤维化进行分类，并研究商曲面上相应的线性系。

设 X 为 K3 曲面，且 $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ 为一个对合。设 $q\colon X \to X/\iota$ 为商映射。那么以下情况之一成立：

i) 若 ι 为辛的，则 X/ι 双有理等价于一个 K3 曲面；ii) 若 ι 为非辛的，且 Fix(ι) $= \emptyset$，则 X/ι 是一张 Enriques曲面。iii) 若 ι 为非辛的，且 Fix(ι) $\neq \emptyset$，则 X/ι 是一张有理曲面。

当且仅当 X/ι 奇异时，对合 ι 才是辛的，参见上文情形 i)。此时，我们用 Y 表示其极小模型。为简便起见，即使这个商是光滑的，我们也用字母 Y 表示 X/ι。

设 $F \subset X$ 是一条光滑亏格1曲线。由黎曼-罗赫定理， F 张成 X 上一个无基点的一维线性系 $|F|$。换言之，我们有一个亏格 1 纤维化 $\varphi_{|F|}\colon X \to \mathbb{P}^1$。L et F b$^{\text{e 作为 a}}$ bove. Th$^{\text{en 一个 o}}$ f the following holds:

a) $\iota(F) = F$; b) $\iota(F) = G$，其中某条亏格 1 曲线 $G \neq F$满足 $F \cdot G = m \geq 0$。

设 $D = q(F)$，则 D 是亏格 0 或 1 的曲线。下面的命题给出了情形 $g(D)$=0 的刻画。

命题 3.1. 设 X 是一个 K3 曲面， $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ 是一个对合， F、 D 和 q 如上所述。则以下条件等价：

a) $g(D) = 0$; b) $F \notin Fix(\iota)$, $\iota(F) = F$且$\iota_{|F}$有4个不动点；

c) 要么 ι 是非辛的，且对每个 $E \in |F|$， $\iota(E) = E$；要么 ι 是辛的，并且存在 E、 $E' \in |F|$，使得 $\iota(E) = E'$ 且 $E \neq E'$。

证明。为证明 a) 与 b) 等价，我们注意到，若 $\iota(F) = G$ where $F \neq G$，则$q(F) \simeq q(G) \simeq F$，因此 $g(D) = 1$。所以我们可以假设 ι作用于 F，即 $\iota(F) = F$，且 $D = q(F)$ 是$F/\iota_{|F}$。特别地， $g(D) = 0$ 当且仅当 $\iota_{|F}$ 不是恒等变换且不是无不动点的。由于 ι 是一个对合，这等价于 $\iota_{|F}$ 有 4 个不动点。

我们证明 a) 蕴含 c)。若 $g(D) = 0$，则 $\iota(F) = F$，因此线性系 $|F|$ 在 ι作用下保持不变。因此，线性系中的每个成员要么保持不变，要么被映到同一线性系的另一个成员。在第一种情况下，存在 $E \in |F|$ 使得 $\iota_{|E} \neq id_{|E}$ （否则 ι 在 X上将是恒等变换），并且 ι 不可能是纤维上的平移，因为 $g(D) = 0$。所以 ι 是每个纤维上的椭圆对合（可能与一个平移复合）。这意味着 $\iota_{|E}$ 不保持 E的周期，因此它也不保持 X的周期，即它是非辛的。否则，存在 E、 $E' \in |F|$使得 $\iota(E) = E'$，因此 ι 在纤维化的底空间上不是恒等变换，并且恰好保持两个纤维不变： F是其中之一。我们已经指出，$\iota_{|F}$ 是椭圆对合（可能与一个平移复合），因此 ι 是两个非辛对合的复合，其中一个作用于底空间，另一个作用于纤维。这意味着 ι 是辛的。

反过来， c）蕴含 a）。事实上，如果 ι 是非辛的，且在 $|F|$上为恒等变换，那么它在每条纤维上都是椭圆对合（可能与一个平移复合），因此 $D \simeq F/\iota_{|F}$ 是一条有理曲线。如果 ι 是辛的，且在基底上作用为非平凡对合，那么 ι 就是基底上的一个对合与纤维上的一个不保周期对合的复合。这意味着 $\iota_{|F}$ 是椭圆对合，且 $D \simeq F/\iota_F$是有理的。□

注 3.2. 我们注意到，在 ι 为辛的且 $g(D) = 0$的情形下，曲面 X/ι 有 8 个奇点，而 D 经过其中 4 个。我们考虑除子 $B = \beta^*(D)$，其中 $\beta: Y \to X/\iota$ 是极小解消。如果 $E \in |F|$ 是一条不被 ι保持的曲线，那么 $\beta^*(D) \sim \beta^*(q(E))$；又因为 $q(E)$不经过 X/ι的奇点，所以 $\beta^*(D)^2 = \beta^*(q(E))^2 = q(E)^2 = F^2 = 0$。特别地， $|B|$在 Y上定义了一个纤维化。

注记 3.3. 如果 $F \subset \mathrm{Fix}(\iota)$，即 $\iota|_F = id|_F$，那么 ι是非辛的，因为它固定了一条曲线且 $D \cong F$。

命题 3.4. 设 X 是一个 K3 曲面， $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ 是一个对合，且 $F \subset X$ 是一条光滑亏格1曲线。若 $\iota(F) = G$ 且 $m > 0$，如上文 b) 所述，那么至少存在一条曲线 $M \in \mathrm{Fix}(\iota)$。特别地， ι 是非辛的。

证明. 设 $F_t \in |F|$ 和 $G_t \in |G|$ 满足 $\iota(F_t) = G_t$。那么 $F_t \cap G_t \in \mathrm{Fix}(\iota)$，且它由 m个点组成，我们将这些点记为 $P_1^{(t)}$、 $\cdots$、 $P_{(t)m}$.设 $s \neq t$，则 $F_s \cap F_t = \emptyset$。因此，集合 $\{P_{(t)1}$、 $\cdots$、 $P_{(t)m}\}$和$\{P_1^{(s)} \cdots P_m^{(s)}\}$两两不相交。特别地，改变 $t \in \mathbb{P}^1$，可在 Fix(ι) 中得到无穷多个点。由于 Fix(ι) 是有限个真子簇的并，它包含一条曲线，我们将其称为 M。□

注记 3.5. 若 $m > 0$，则命题 3.4 中的曲线 M 是 $\varphi_{|F|}$ 和 $\varphi_{|G|}$的次数为 m 的多截面。事实上，$M \cdot F_t = m = M \cdot G_t$， $\forall F_t \in |F|$， $G_t \in |G|$。

注记 3.6. 若 ι 是 Enriques 对合，则 ι（F） $\in |F|$。特别地，若 ι（F） $= G$ ，则 $m = 0$。此外，若 ι（F） $= F$，则 $\iota|_F$ 是平移。

定义 3.7. 设 ι 是 K3 曲面 X 上的对合，且 $\varphi_{|F|}$： $X \to \mathbb{P}^1$ 如上所述。我们称 $\varphi_{|F|}$ 为

相对于 ι 的类型 1），若 ι（F_t） $= F_t$， $\forall t \in \mathbb{P}^1$，即 ι 在 F_t 中作为对合起作用；相对于 ι 的类型 2），若 ι（F_t） $= F_s$，其中 $F_s := \varphi_{|F|}^{-1}$（$s$）；相对于 ι 的类型 3），若 ι（F_t） $= G_t$，其中 G_t 是一条亏格 1 曲线，且不是 $\varphi_{|F|}$ 的纤维。

注 3.8。如果 $\varphi_{|F|}$ 相对于 ι属于类型 1 或 2，那么

i) ι保持$\varphi_{|F|}$的纤维类。如果它是类型 1，那么 ι在$\varphi_{|F|}$的基底上平凡作用。如果它是类型 2，那么它在$\varphi_{|F|}$的基底上作为一个对合作用，特别地， ι 保持$\varphi_{|F|}$的两个纤维；

ii) 如果 X/ι 是光滑的（即 ι 是非辛的），并且 $D = q(F)$，那么$\varphi_{|D|}$： $Y \to \mathbb{P}^1$ 是一个纤维化。事实上，$D^2 = 0$ 因为 q^*D 的除子类是 F的类的倍数。iii) 如果 X/ι是奇异的（即 ι 是辛的），线性系 B 在 Y的消奇化上定义一个纤维化，参见注 3.2。

注 3.9. 定义 3.7 中的分类受到 Oguiso 的工作 [O] 启发。更确切地说，Oguiso 考虑了具有非辛对合的 K3 曲面，其中该对合在 N´eron–Severi 群上作用平凡，并根据不动点集中是否存在截面来区分椭圆纤维化。不动点集上存在截面意味着该对合在椭圆纤维化的基底上作用平凡。这些就是我们在定义 3.7 中称为类型 1 的纤维化。对于 [O], 中其余的纤维化，对合会在基底上诱导一个对合。定义 3.7 中称这些为类型 2。最后，我们注意到，由于对合在 N´eron–Severi 群上的作用平凡， [O] 中不存在类似类型 3 的纤维化。

我们研究上述各情形中 Y 和 $\varphi_{|D|}$ 的性质。

推论 3.10. 若 $\varphi_{|F|}$ 相对于 ι 是类型 1，则 $\varphi_{|D|}$： $Y \to \mathbb{P}^1$ 是纤维化，且 Y 要么是 K3 曲面，要么是有理曲面。若 Y 是 K3 曲面，则 $|D|$ 是 Y上的亏格 1 纤维化。若 Y 是有理曲面，则 $|D|$ 是 Y 上的圆锥丛。

证明。由注 3.8， $\varphi_{|D|}$ 是 Y 上的纤维化，其一般纤维的亏格由命题 3.1给出。尚需证明 ι 的不动点集非空。根据注 3.8中的 i)， ι 在 $\varphi_{|F}$的基底上作用为恒等映射。若 $\iota|_{F_t}$ 在所有光滑纤维 F_t上均作为亏格 1 曲线的平移作用，则它保持这些纤维的周期，因此是辛的。否则， ι_{F_t} 在 F_t上有一些不动点。换言之， ι 是辛的，或者是非辛的且 Fix(ι) $\neq \emptyset$。□

推论 3.11. 若 $\varphi_{|F|}$ 相对于非辛对合 ι 属于类型 2，则 $\varphi_{|D|}$： $Y \to \mathbb{P}^1$ 是一个亏格 1 纤维化。若 $\varphi_{|F|}$ 相对于辛对合 ι 属于类型 2，则 $\varphi_{|B|}$： $Y \to \mathbb{P}^1$ 是一个亏格 1 纤维化（其中 B 如注 3.2 所述）。

证明。这是注 3.8 中 i) 与命题 3.1 的综合结果。我们注意到，若 ι 是辛的，则 Y是一个 K3 曲面，其上的每个纤维化必然都是亏格 1 纤维化。□

推论 3.12. 若 $\varphi_{|F|}$ 相对于 ι 属于类型 3，则 dim $|D| > 1$，且 ι是一个不动点集非空的非辛对合。特别地， Y 是一个有理曲面。

证明. 若 $\varphi_{|F|}$ 是类型 3，则 $F_t \cdot G_t = m > 0$。根据命题 3.4，存在一条曲线 $M \subset$ Fix(ι)。因此， ι 是非辛的，且其不动点集非空。关于 $|D|$的维数，注意到 $q^*(D) = F + G$ 和 $2D^2 = (q^*(F + G))^2 = 2m > 0$。因此， $D^2 = m > 0$ 和 $|D|$ 不会在 Y 上诱导纤维化。□

3.1. 类型 2 的纤维化. 根据推论 3.11，相对于 ι 的类型 2 纤维化会在 Y 上诱导亏格 1 纤维化。下面我们将仔细考察这类纤维化。令 q： $X \to Y$ 为商映射，且可能与一个双有理映射复合。记号滥用：当 X/ι 光滑时，我们用 $|D|$ 同时表示线性系 $|D|$；当 β： $Y \to X/\iota$ 是 Y 的消奇化时，则表示线性系 $|\beta^*D| = |B|$。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{q}{\underset{2:1}{- - \to}} & Y \\ {\scriptstyle \varphi_{|F|}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{|D|}} \\ \mathbb{P}^1 & \underset{2:1}{\xrightarrow{\psi}} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

其中 ψ 是 $\varphi_{|F|}$ 基底上由 q 诱导的映射。特别地， ψ 在两个点 t_0、 $t_1 \in \mathbb{P}^1$ 上分歧。设 D_{t_0} 和 D_{t_1} 是 $\varphi_{|D|}$ 位于这两点上方的纤维。那么，限制映射 $q|_{F_{ti}}$： $F_{t_i} \to D_{t_i}$ 是一一映射，当且仅当 D_{t_i} 属于 q 的分歧轨迹；等价地，当且仅当 D_{t_i} 不是 $\varphi_{|D|}$ 的重纤维。

命题 3.13. 沿用上述记号，设 $\varphi_{|F|}$ 是关于 ι 的类型 2 纤维化。则有以下结论。

i) 若 Y 是 K3 曲面，则 $\varphi_{|D|}$ 没有重纤维，并且 D_{t_0} 和 D_{t_1} 中至少有一个是带有非约化分支的可约纤维。ii) 若 Y 是 Enriques曲面，则 D_{t_0} 和 D_{t_1} 都是重纤维。iii) 若 Y 是有理曲面，则 D_{t_0} 和 D_{t_1} 中至多一个是重纤维。

证明。首先注意，Fix(ι) $\subset F_{t_0} \cup F_{t_1}$。若 Fix($\iota$) $= \emptyset$，则 ι 是 Enriques 对合，且 q 的分歧轨迹为空。因此， D_{t_0} 和 D_{t_1} 是 $\varphi_{|D|}$ 的重纤维。这是情形 ii)。假设 Fix(ι) $\neq \emptyset$。若 ι 是辛的，则 $\iota|_{F_{t_i}}$ 固定 4 个点，因为对于 $i = 0$，有 1。因此， $q(F_{t_i})$ 是一条重数为 2 的奇异曲线。消解其奇点后，我们得到一个带有非约化分支的非重纤维 D_{t_i}。若 ι 是非辛的，则 F_{t_0} 和 F_{t_1} 中至少有一个（设为 F_{t_0}）有一些分支包含在 Fix(ι) 中。因此， D_{t_0} 与 q 的分歧轨迹有一个公共分支，尤其是，它不可能是重纤维。□

在假设 $\varphi_{|D|}$ 有截面的情况下，命题 3.13 的表述会更简单。

推论 3.14. 沿用上述记号，设 $\varphi_{|F|}$ 是相对于 ι 的类型 2 纤维化。假设 $\varphi_{|D|}$ 有截面。那么

i) Y 不是 Enriques曲面；ii) D_{t_0} 和 D_{t_1} 都是 q 的分歧曲线；iii) $F_{t_i} \in \{I_{2n}, IV, I_0^*, IV^*\}$，对于 $i = 0$，1；iv) 若 Y 是有理的，则 D_{t_0} 和 D_{t_1} 是 $\varphi_{|D|}$ 的约化纤维。

证明. 截面的存在排除了重纤维，因此命题 3.13 的情形 ii) 不可能发生，且 D_{t_i} 都是分支纤维。这意味着 F_{t_i} 都是通过对椭圆纤维化中可能奇异的纤维作二次基变换得到的，这就证明了 iii)。此外，$\varphi_{|D|}$ 有截面也保证了 $\varphi_{|F|}$ 有截面。若 Y 是有理的，且 D_{t_i} 中有一个是非约化的，则通过欧拉数计算可知，欧拉示性数 $e(X) = 12$ 或为 0，因此 X 就不是 K3 曲面。□

注记 3.15. 推论 3.14 使我们能够在给定 K3 曲面上的所有椭圆纤维化中，找出相对于给定对合的类型 2 纤维化候选项。事实上，任何不属于推论 3.14 的 iii) 中所列类型的纤维类型都成对出现，单独出现的纤维类型至多有两种。

3.2. 类型 1 纤维化。设 $\iota \in$ Aut(X)。我们讨论相对于 ι 的类型 1 纤维化的性质。我们先讨论辛对合，随后讨论非辛对合。

命题 3.16. 设 X 是一个 K3 曲面，且 $\iota \in$ Aut(X) 是一个辛对合。设 $\varphi_{|F|}$ 是 X 上相对于 ι 的一个类型 1 椭圆纤维化，而 $\varphi_{|D|}$ 是 Y 上相应的椭圆纤维化。那么 $\varphi_{|F|}$ 和 $\varphi_{|D|}$ 都有一个 2-挠截面。特别地，这两个纤维化的纤维类型都不能是 II^* 或 IV^*。

证明。由于 $\varphi_{|F|}$ 相对于 ι属于类型 1，该对合在 $\varphi_{|F|}$的每个纤维上都作用为一个 2-挠点的平移。因此，它在一般纤维上作用为一个 2-挠点的平移，这显然意味着 $\varphi_{|F|}$存在一个 2-挠截面。特别地，我们可以将 $\varphi_{|F|}$ 的一个（广义）Weierstrass方程写成如下形式:

$$y^2 = x(x^2 + a(t)x + b(t)).$$

对 2-挠截面 $(x, y, t) =$ (0, 0, t) 取商，得到 $\varphi_{|D|}$ 的一个（广义）Weierstrass方程（见 [ST，命题 3.7]）：

$$y^2 = x(x^2 - 2a(t)x + (a(t)^2 - 4b(t)),$$

显然，它存在一个形式相同的 2-挠截面。关于纤维类型的论述，请注意，类型为 II^* 和 IV^* 的纤维与 2-挠截面 ([Mir，表 VII.2.6.]) 不相容。□

根据命题 3.16， ι 是由一个 2-挠截面诱导的平移，记为 T。利用证明中给出的 Weierstrass方程，可以直接确定$\varphi_{|D|}$的纤维类型。为完整起见，我们将其列于下文。我们采用纤维分支的标准记号，即 Θ_i 表示各分支，Θ_0表示中性分支，也就是与零截面相交的分支。

推论 3.17. 设 X、ι、q、Y、$\varphi_{|F|}$和$\varphi_{|D|}$如上所述。则$\varphi_{|F|}$与$\varphi_{|D|}$的纤维类型之间存在如下关系。

F_t	III^*	I_{2n+1}	$I_{2n}, T\cdot\Theta_0=1$	$I_{2n}, T\cdot\Theta_n=1$	I^*_{2n+1}	$I^*_{2n}, T\cdot\Theta_{near}=1$	$I^*_{2n}, T\cdot\Theta_{far}=1$
$D_{\psi(t)}$	III^*	I_{4n+2}	I_{4n}	I_n	I^*_{4n+2}	I^*_{4n}	I^*_n

我们接下来研究关于给定非辛对合的 1 型纤维化。与上述讨论并行，我们首先得出关于 Mordell–Weil 群结构和不允许的奇异纤维的结果。最后，我们为读者提供相关参考文献，以便了解允许的奇异纤维类型。

命题 3.18. 设 X 是一个 K3 曲面 $\iota\in$ Aut(X)，其上有一个非辛对合，并且 $\varphi_{|F|}$ 是关于 ι的 1 型纤维化。

i) 若 ι^*在 $NS(X)$ 上作用平凡，则 $MW(\varphi_{|F|})\subset(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$；ii) 若 ι 固定两条光滑亏格 1 曲线，则 $\varphi_{|F|}$ 至多有 6 个不可约奇异纤维，且不允许出现类型为 II^*、IV^*、II、III、IV、I_n 的纤维（当 n 为奇数且 $n>7$ 时），以及类型为 I^*_m 的纤维（当 m 为奇数且 $m>5$，或 m 为偶数且 $m>12$ 时）。

证明。第 1) 部分见 [GS20，命题 2.5] 及 [O，引理 2.4]。第 ii) 部分由 [GS19，注 5.6 和 5.7] 得出。□

注 3.19。读者可在 [GS19 的表 1] 中找到 $\varphi_{|F|}$ 的所有容许奇异纤维。命题 3.18(ii) 中的假设在此同样成立。

注 3.20. 读者可能会注意到，在非辛情形的表述中，对 Fix(ι) 以及 ι^* 在 NS(X) 上的作用附加了额外假设。这些假设在辛情形中并不存在，因为此时不动点集总由 8 个点组成，且 ι^* 从不在 NS(X) 上平凡作用。

3.3. 在 NS(X) 上平凡作用的非辛对合。假设 ι^* 在 NS(X) 上的作用平凡，这简化了对 X 上椭圆纤维化的研究。事实上，我们不仅可以利用前面的结果，而且不存在相对于 ι 的类型 3 纤维化。下文将总结这类特殊 K3 曲面的结果。

命题 3.21. 设 X 为 K3 曲面。当且仅当 NS(X) 是 2-初等格时，存在一个非辛对合 $\iota\in$ Aut(X)，使得ι^* 在 NS(X) 上平凡作用。在这种情况下，X 不存在相对于 ι 的类型 3 椭圆纤维化，且 X 上的所有椭圆纤维化均已分类。

证明。第一个断言是经典结果，由 Nikulin 在 [Nik] 中证明（另见 [AST，定理 0.1]）。类型 3 纤维化的不存在性可直接由其定义得出。最后，关于这类曲面上的椭圆纤维化的分类，已由不同作者在一系列论文中给出。更确切地说，可实现为 K3 曲面的 N´eron–Severi 格的 2-初等格由 3 个不变量确定，即 r（其秩）、a（其长度）以及 δ（编码判别形式的信息）。若 $(r,a,\delta)=(18,4,0)$，则该 K3 曲面是两条非同源椭圆曲线的 Kummer 曲面，其分类由 Oguiso 在 [O] 中给出。若 $(r,a,\delta)=(16,6,1)$，则该 K3 曲面是沿一般位置的 6 条直线分支的平面的双覆盖，其分类由 Kloosterman 在 [Klo] 中给出。更一般地，若 $r+a=22$，则该对合的不动点集仅由有理曲线组成，其分类见 [CG]。其余情形见 [GS20]。我们注意到，不动点集包含一条亏格为$g=\frac{22-r-a}{2}$ 的曲线。特别地，若 $r+a=22$ 或 20，则该 K3 曲面可实现为有理椭圆曲面（RES）的双覆盖，分支沿两条纤维进行；这两条纤维可能可约，也可能不可约，具体取决于 $r+a$。□

命题 3.22. 设 X 是一个 K3 曲面。假设 NS(X) 是 2-初等的。那么存在一个对合$\sigma\in$Aut(X)，使得相对于 σ，X 上不存在类型 3 的椭圆纤维化，并且每个类型 1 的椭圆纤维化都有有限的 Mordell–Weil 群。特别地，如果存在一个具有无限 Mordell–Weil 群的椭圆纤维化，那么相对于 σ，它属于类型 2。

证明。在该假设下，存在一个对合 σ，使得 σ^* 在 NS(X) 上的作用平凡（如命题 3.21 所述）。如果 ν 是带有无限阶截面 C 的类型 1 椭圆纤维化，那么 C 不会被 σ保留，这与 σ^*作用平凡相矛盾。□

4. K3s that are base change of RES

在前几节中，我们使用的输入数据是带有对合的 K3 曲面。在我们的系列论文 [GS19], [GS20], [BDGMSV] 和 [CGSTW] 中，我们采用了不同的视角，考察一对 (X, R)，其中 R 是有理椭圆曲面，而 X 是通过对 R 作双覆盖得到的 K3 曲面。这等价于固定一个带有非辛对合的 K3 曲面，其不动点集由亏格至多为 1 的曲线组成。

下文将简要介绍我们的贡献，并结合前几节的内容加以阐述。

设 $\mathcal{E}_R\colon R \to B_0 = \mathbb{P}^1$ 是一有理椭圆曲面，且 $\psi\colon B = \mathbb{P}^1 \to B_0$ 是一个 2 次态射。我们有如下交换图:

(4.1)
$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & R \times_\psi \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[2:1]{q} & R \\ & \searrow^{\mathcal{E}_X} & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}_R} \\ & & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[2:1]{\psi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

其中 X 是 $R \times_\varphi \mathbb{P}^1$ 的极小模型。若 ψ 在 $\mathcal{E}_R$ 的约化纤维上分支，则 X 是一个 K3 曲面；在这种情况下，它是 $R \times_\psi \mathbb{P}^1$ 的极小模型。从现在起，我们假设情况确实如此。

椭圆纤维化 $\mathcal{E}_R$ 自然地在 X 上诱导出一个椭圆纤维化，该纤维化在上文及下文中记作 $\mathcal{E}_X$。

注 4.1. 若 ψ 的分支纤维光滑，则 $R \times_\psi \mathbb{P}^1$ 光滑，且 X 与之重合。

次数为 2 的映射 $\psi\colon B \to B_0$ 在 B 上诱导一个对合，该对合提升为覆盖$X \to R$的甲板对合。显然，它保持 $\mathcal{E}_X$ 在 NS(X) 中的纤维类。下文将此对合记为 ι。

背景：设 X 为如上构造的 K3 曲面，ι 为甲板对合。下文将分析 X 上的椭圆纤维化，并考察它们相对于 ι的性质。

首先注意到，不动点集(ι)包含于 ψ的两个分歧点上方的纤维之并中。因此，它由一组亏格至多为 1 的曲线组成。特别地，其中的亏格 1 曲线必定是 $\mathcal{E}_X$的一个纤维。

推论4.2。椭圆纤维化 $\mathcal{E}_X$ 相对于 ι属于类型 2。此外，若不动点集(ι)包含 $\mathcal{E}_X$的至少一个光滑纤维，则 $\mathcal{E}_X$ 是唯一一个相对于 ι属于类型 2 的纤维化。

证明。设 F 是包含于不动点集中的光滑纤维。若 $\nu\colon X \to \mathbb{P}^1$ 是关于 ι 的类型 2 纤维化，则 ι 的不动点集包含在 ν 的纤维中；如果其中包含一条亏格 1 曲线，那么它就是该纤维化的一条纤维。这意味着 $\mathcal{E}_X$ 和 ν 重合，因为它们共有一条纤维。□

如果 Fix(ι) 只包含有理曲线，那么关于 ι 可能存在其他类型 2 椭圆纤维化。这给出了将 X 实现为有理椭圆曲面的基变换的其他方式。事实上，在这种情况下，$R \times_\psi \mathbb{P}^1$ 是奇异的，而 X 是 $R \times_\psi \mathbb{P}^1$ 的爆破。因此存在一个交换图

(4.2)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & R \times_\psi \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow \\ Y = X/\iota & \longrightarrow & R \end{array}$$

其中 q 是商映射，f 是双有理态射，而 Y 是满足 $K_Y^2 < 0$的有理曲面。特别地，由于曲面 Y 是 R的爆破，它可能具有多个非相对极小椭圆纤维化。在这种情况下，将 X 实现为有理椭圆曲面的双覆盖有多种方式，并且根据构造，Y 上的每个非相对极小椭圆纤维化都会在 X上诱导一个 2 型纤维化。在下文

~ ~中，我们将交换图 (4.2) 中满足 $\tilde{q} \circ f = f \circ q$的映射记为 f和 $\tilde{q}$。

4.1. 1 型纤维化。由有理椭圆曲面的双覆盖得到的 K3 曲面上总是存在 1 型纤维化。事实上，如例 2.4 所述，有理椭圆曲面允许圆锥丛，而其拉回会在 K3 曲面上诱导椭圆纤维化。以下定理是在我们所讨论的 K3 曲面背景下，对推论 3.10 的一个逆命题；这里的 K3 曲面是有理椭圆曲面的基变换。

命题 4.3. 设 Y 如上所述，且 $|D|$ 是 Y 上的一个圆锥丛。那么， $|q^{-1}(D)|$ 是 X 上的一个亏格 1 纤维化。此外，它属于类型 1。

证明. 只需注意到 $q^*(D)^2 = D^2 = 0$。由伴随公式， $q^*(D)$的亏格为 1，且其类张成 X 上的一个亏格 1 纤维化。由推论 3.11 和 3.12 可知，它属于类型 1。□

若 $D \subset Y$ 是亏格零曲线，满足 $D^2 = 0$ 且 $D \cdot (-K_Y) = 2$，则 D 是 Y 中的一个圆锥类，且 $\tilde{}$，因此它赋予 Y 一个圆锥束结构。若且唯若 D 与爆破解 f 的至少一条例外曲线相交， R 中的线性系 $|f(D)|$ 才有基点。在这种情况下， $|f(D)|$ 显然不是 R 上的圆锥丛。若后者成立，我们称 R 中的除子类 $f(D)$为 [GS19], 中的广义圆锥丛，以强调 D 仅在 Y 上是圆锥丛。我们用这一术语重新表述~~命题 4.3 及其逆命题~~。

命题 4.4. [GS19、命题 3.8 和定理 4.2] 设 X、 R 和 ι 如上所述。设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$为一个椭圆纤维化。那么，当且仅当 $|\tilde{f} \circ q(\pi^{-1}(t))|$ 是 R上的圆锥丛或广义圆锥丛时， π 相对于 ι 是类型 1。

4.2. 类型 2 纤维化。虽然 R 只容许一个椭圆纤维化，记作 π，但商曲面 Y（若不同于 R）可能容许多个带截面且非相对极小的亏格 1 纤维化。给定这样一个不同于 π的亏格 1 纤维化 $\nu\colon Y \to \mathbb{P}^1$，将 Y 下爆到一个使 ν 相对极小的曲面上，记作 R'，便得到 X 作为另一个有理椭圆曲面的双覆盖的另一种实现。与广义圆锥丛的情形类似，曲线 $\tilde{f}(\nu^{-1}(s))$张成的线性系在R 上有基点，因此尤其不是纤维化。在 [GS19] 和 [GS20] 中，我们将这类线性系称为 R上的分裂亏格 1 纤维化。

现在，我们可以用这种语言重新表述推论 3.11 及其逆命题。

命题 4.5. 设 X、 R 和 ι 如上。设 $\nu\colon X \to \mathbb{P}^1$ 为椭圆纤维化。那么， ν 关于 ι 为类型 2，当且仅当线性系 $|\tilde{f} \circ q(\nu^{-1}(s))|$ 是 R上的一个（分裂）亏格 1 纤维化。

注 4.6. 设 X 是一个 NS(X) 为 2-初等的 K3 曲面。假设存在一个椭圆纤维化 $\varepsilon\colon X \to \mathbb{P}^1$，其 Mordell–Weil 群无限。命题 3.22 推出存在一个有理椭圆曲面 $\varepsilon_R\colon R \to \mathbb{P}^1$，使得 ε 是 ε_R的二次基变换。

4.3. 关于不同对合具有不同类型的纤维化示例。

给定图 (4.1) 中的 K3 曲面 X 及其甲板对合 ι，我们注意到，任意椭圆纤维化关于 ι都属于类型 1、2 或 3。当然，纤维化的类型取决于我们所考虑的对合。因此，原则上，同一个 K3 曲面 X 上的给定椭圆纤维化，关于不同对合可以属于不同类型。一个自然的问题是：在给定的 K3 曲面上，同一个椭圆纤维化能否同时实现两种不同类型？我们从先前的论文 [CGSTW] 和 [BDGMSV] 中整理出若干示例，对这个问题给出了肯定的回答。

一种可实现为类型 2 和类型 3 的纤维化。考虑 K3 曲面 X，其超越格为 $U \oplus U(2)$。 X 上椭圆纤维化的框架格列于 [GS20], , 而 [CM21] 表明，该列表还给出了 X 上椭圆纤维化在自同构意义下的分类。在 [CGSTW] 中，曲面 X 被构造为两种不同椭圆纤维化的二次基变换： R_3，其奇异纤维为 $III^* + I_2 + I_1$；以及 R_4，其奇异纤维为 $I_4^* + 2I_1$。在这两种情况下，分支纤维都是光滑的，而 $X \to R_i$ 的甲板对合记为 ι_i，其中 $i = 3$ 为 4。

在 [CGSTW 中，表 5 和 6] 确定了 X 上每个椭圆纤维化相对于 ι_3 和 ι_4 的类型。特别地，根据 [CGSTW，表 5 和 6] 可观察到， X 具有一个奇异纤维为 $2III^* + 2I_2 + 2I_1$ 的椭圆纤维化。相对于 ι_3，它属于类型 2；相对于 ι_4，它属于类型 3。

一种实现为类型 1 和 3 的纤维化。考虑与上文相同的曲面和对合。则它还具有另一种纤维化，其奇异纤维为 I_{12}^*。相对于 ι_3，它属于类型 3；相对于 ι_4，它属于类型 1。

一种实现为类型 1 和 2 的纤维化。在 [BDGMSV 的表 6.1] 中，列出了记作 $S_{5,\ 5}$ 的曲面上的椭圆纤维化构架，并且根据 [CM21] ，这给出了椭圆纤维化在自同构意义下的分类。曲面 $S_{5,\ 5}$ 是对一个奇异纤维为 $2I_5+2I_1$ 且分支纤维为 I_5-纤维的有理椭圆曲面进行基变换得到的。记甲板对合为 $\iota_{5,\ 5}$。在 [BDGMSV 的表 6.1], 中，我们观察到，在 $S_{5,\ 5}$ 上存在一种奇异纤维为 $2I_4^*+2I_2$ 的纤维化，并且相对于 $\iota_{5,\ 5}$，它属于类型 1。曲面 $S_{5,\ 5}$ 是具有超越格 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的唯一 K3 曲面；通过将 I_1-纤维视为分支纤维，对具有可约纤维 $I_4^*+2I_1$ 的有理椭圆曲面作二次基变换所得的曲面，正是该曲面（另见表 (5.1)）。若记甲板变换为 $\iota_{1,\ 1}$，则我们观察到，具有纤维 $2I_4^*+2I_2$ 的纤维化相对于 $\iota_{1,\ 1}$ 属于类型 2。

5. Extremal elliptic fibrations

我们考虑特殊的 K3 曲面，即通过对极值有理椭圆曲面进行二次基变换得到的曲面，并研究一个类似于 [MP 第 7] 节中所处理问题的问题。

定义 5.1. 曲面 Z 上的椭圆纤维化 $\mathcal{E}_Z\colon\ Z\to\mathbb{P}^1$ 称为极端的，如果 $rk(MW(\mathcal{E}_Z))=0$，且 Picard 数达到可能的最大值，即 $rk(Pic(Z))=h^{1,\ 1}(Y)$。

特别地，如果 Mordell–Weil 群的秩为 0，则有理椭圆曲面是极端的。椭圆 K3 曲面是极端的，当且仅当 Mordell–Weil 群的秩为 0 且其 Picard 数为 20。

The 极值有理椭圆曲面已被分类（见 [MP]），并归入一个包含 16 个情形的列表 s.

极端椭圆 K3 曲面已被分类（见 [SZ]），并归入一个包含 325 个情形的列表 es.

注 5.2. 极值有理椭圆曲面只含有限条负曲线。因此可以对其上的所有圆锥丛进行分类，见 [GS19]。由于有理椭圆曲面上的圆锥丛会在经过二次基变换得到的 K3 曲面上诱导出椭圆纤维化，因此研究极值有理椭圆曲面上的二次基变换似乎尤为重要。

极端椭圆 K3 曲面可能包含无穷多条负曲线。

在 [MP 的第 7], 节中，作者确定了哪些极值有理椭圆曲面可以由另一个极值有理椭圆曲面经基变换得到。这里我们重新考察这一类似问题，即哪些极端椭圆 K3 曲面可以由极值有理椭圆曲面经二次基变换得到?

命题 5.3. 如图 (4.1) 所示，对有理椭圆曲面 $\mathcal{E}_R\colon\ R\to\mathbb{P}^1$ 进行二次基变换 $\psi\colon\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$，当且仅当满足以下条件时，所得曲面为极端 K3 曲面:

a) $\mathcal{E}_R\colon\ R\to\mathbb{P}^1$ 是一个极值有理椭圆曲面（RES）；

b) ψ 沿着 $\mathcal{E}_R$的奇异约化纤维分支。

通过对一个有理椭圆曲面进行二次基变换，得到的 K3 曲面上有 25 种不等价的极值椭圆纤维化。

证明。设 X 是一个极值椭圆 K3 曲面，它是如图（4.1）所示的有理椭圆曲面 R 的二次基变换。由于 $\mathcal{E}_R$的每个截面都会诱导出 $\mathcal{E}_X$的一个截面，且 rank$(MW(\mathcal{E}_X))=0$，因此必有 rank$(MW(\mathcal{E}_R))=0$，从而 $\mathcal{E}_R$ 必须是极值的。

如果基变换在两个光滑纤维上分支，那么 $\mathcal{E}_X$ 的可约纤维数是R的两倍。由 $\mathcal{E}_R$ 的可约纤维的非平凡分支生成的格的秩为 8（因为 $\mathcal{E}_R$是极值的，且 $\rho(R)=10$），因此，由$\mathcal{E}_R$ 的可约纤维的非平凡分支生成的格的秩为 16。于是 $\rho(X)=2+16=18$，这与 $\mathcal{E}_X$ 是极值的这一事实矛盾。同理，可以排除只有一个分支纤维是奇异的情形。回顾一下，分支纤维必定是约化的，否则 X 就不是 K3 曲面。

反之，通过逐一分析各个情形，可以直接验证：若 $\mathcal{E}_R$ 是极端有理椭圆曲面，并考虑在两个奇异约化纤维处分歧的基变换，则可得到一个椭圆 K3 曲面 $\mathcal{E}_X:X\to\mathbb{P}^1$，其平凡格的秩为 20。这意味着 $\rho(X)=20$ 且 rank$(\mathcal{E}_X)=0$。

这种逐一分析各个情形的方法得出下表，也使我们能够确定所有可由有理椭圆曲面经二次基变换得到的极端椭圆K3曲面。

第一列列出了所有至少有两个奇异约化纤维的极值有理椭圆曲面，第二列列出了分支纤维的可行选择，第三列列出了 X 的奇异纤维,

这完全确定了 X 的超越格，其结果列于第四列，并通过将这些椭圆纤维化与 [SZ] 中列出的椭圆纤维化进行比较而得出。超越格用形式为 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ 的矩阵表示，我们将其写作 (a, b, c)。

(5.1)

#	奇异纤维 $\mathcal{E}_R$	分支纤维	奇异纤维 $\mathcal{E}_X$	T_X
1	$II^* + 2I_1$	$2I_1$	$2II^* + 2I_2$	(2, 0, 2)
2	$I_4^* + 2I_1$	$2I_1$	$2I_4^* + 2I_2$	(2, 0, 2)
3	$I_9 + 3I_1$	$2I_1$	$2I_9 + 2I_2 + 2I_1$	(4, 2, 10)
4	$I_9 + 3I_1$	$I_9 + I_1$	$I_{18} + I_2 + 4I_1$	(2, 0, 2)
5	$III^* + I_2 + I_1$	$I_2 + I_1$	$2III^* + I_4 + I_2$	(2, 0, 4)
6	$I_8 + I_2 + 2I_1$	$2I_1$	$2I_8 + 4I_2$	(4, 0, 4)
7	$I_8 + I_2 + 2I_1$	$I_2 + I_1$	$2I_8 + I_4 + I_2 + 2I_1$	(2, 0, 4)
8	$I_8 + I_2 + 2I_1$	$I_8 + I_1$	$I_{16} + 3I_2 + 2I_1$	(2, 0, 4)
9	$I_8 + I_2 + 2I_1$	$I_8 + I_2$	$I_{16} + I_4 + 4I_1$	(2, 0, 2)
10	$IV^* + I_3 + I_1$	$I_3 + I_1$	$2IV^* + I_6 + I_2$	(2, 0, 6)
11	$I_2^* + 2I_2$	$2I_2$	$2I_2^* + 2I_4$	(4, 0, 4)
12	$I_1^* + I_4 + I_1$	$I_4 + I_1$	$2I_1^* + I_8 + I_2$	(2, 0, 8)
13	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_2 + I_1$	$2I_6 + I_4 + 2I_3 + I_2$	(6, 0, 12)
14	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_3 + I_1$	$3I_6 + 3I_2$	(2, 0, 6)
15	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_6 + I_1$	$I_{12} + 2I_3 + 3I_2$	(2, 0, 12)
16	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_3 + I_2$	$3I_6 + I_4 + 2I_1$	(4, 0, 6)
17	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_6 + I_2$	$I_{12} + I_4 + 2I_3 + 2I_1$	(4, 2, 4)
18	$I_6 + I_3 + I_2 + I_1$	$I_6 + I_3$	$I_{12} + I_6 + 2I_2 + 2I_1$	(2, 0, 4)
19	$2I_5 + 2I_1$	$2I_1$	$4I_5 + 2I_2$	(10, 0, 10)
20	$2I_5 + 2I_1$	$I_5 + I_1$	$I_{10} + 2I_5 + I_2 + 2I_1$	(2, 0, 10)
21	$2I_5 + 2I_1$	$2I_5$	$2I_{10} + 4I_1$	(2, 0, 2)
22	$2I_4 + 2I_2$	$2I_2$	$6I_4$	(4, 0, 4)
23	$2I_4 + 2I_2$	$I_4 + I_2$	$I_8 + 3I_4 + 2I_2$	(4, 0, 8)
24	$2I_4 + 2I_2$	$2I_4$	$2I_8 + 4I_2$	(4, 0, 4)
25	$4I_3$	$2I_3$	$2I_6 + 4I_3$	(6, 0, 6)

可以看出，情形 1、2、4、9、21 对应于同一个 K3 曲面，因为超越格唯一确定 K3 曲面。情形 5、7、8，情形 6、11、22、24，以及情形 10 和 14 也同样如此。因此，我们得到了 15 个 K3 曲面，其中一些允许不止一种极值椭圆纤维化。□

注 5.4. 同一个 K3 曲面上存在彼此不等价的椭圆纤维化（尤其是极值椭圆纤维化），且这些纤维化是通过有理椭圆曲面的基变换得到的，这一事实意味着，相对于与这些基变换之一相关的对合，存在类型 2 纤维化。更明确地说，我们可以将 K3 曲面 X 解释为某个特定有理椭圆曲面的基变换。特别地， X 配备了覆盖对合ι。在 X 上，所有其他由其他有理椭圆曲面基变换得到的彼此不等价的椭圆纤维化，相对于 ι 都是类型 2。

我们注意到，在 [BDGMSV] 中，我们考虑了前表中第 21 种情形的基变换，在 [BDGMSV] 中记作 $S_{5,\,5}$。情形 1、2、4、9、21 对应于具有 2-初等 N´eron–Severi 格的 K3 曲面。后一类曲面的椭圆纤维化已有分类（例如参见 [CG]）。

注 5.5. 在 [MP, 定理 7.3], 中，作者证明，具有奇异纤维 $I_8 + I_2 + 2I_1$ 和 $2I_4 + 2I_2$ 的极端有理椭圆曲面可通过对另一个极端有理椭圆曲面作二次基变换得到。将 [MP, 定理 7.3] 中所述的二次基变换与表 5.1 中考察的二次基变换复合，可得到一个 4 : 1 的基变换，它从一个极端有理椭圆曲面出发，生成一个极端椭圆 K3 曲面。覆盖群可以是 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 或 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，这两种情形均有出现（例如，第 6 行的 K3 曲面可以作为具有奇异纤维 $I_4^* + 2I_1$的有理椭圆曲面的 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 覆盖得到；第 9 行的曲面则是同一有理椭圆曲面的 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 覆盖）。

6. K3s as double cover of minimal rational surfaces

与前两节一样，我们考虑通过对有理椭圆曲面 $\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$作二次基变换得到的椭圆 K3 曲面。接下来，我们将从不同的角度看待这些相同的曲面：这类 K3 曲面可以自然地实现为某个极小有理曲面的双覆盖，其分歧轨迹满足某些性质。我们首先描述这些不同视角之间的关系，然后说明它们的相互作用如何使我们能够写出 X上的椭圆纤维化的显式方程，沿用[BDGMSV]的方法。

命题 6.1. 设 $\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$ 是相对极小的有理椭圆曲面。设 $\beta\colon R\to R^o$ 是将 (-1)-曲线压缩到极小曲面 R^o 的一系列压缩的复合，则 R^o 要么是 $\mathbb{P}^2$，要么是 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，要么是 $\mathbb{F}_2$。在后一种情况下，$\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$ 至少有一个可约纤维。

证明. 由于 R 上不存在自交数小于 -2 的曲线，因此 R^o 上也不可能存在自交数小于 -2 的曲线。这排除了所有满足 $n\geq 3$ 的希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_n$ 作为 R 的可能极小模型。出于同样的原因，若 $R^o\simeq\mathbb{F}_2$，则 R 含有一条 (-2)-曲线，因此它有一个可约纤维。曲面 $\mathbb{F}_0$ 是 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，而曲面 $\mathbb{F}_1$ 不是极小的。□

命题 6.2. 设 X 是通过有理椭圆曲面 $\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$ 的二次基变换得到的，如图 (4.1) 所示。设 $\beta\colon R\to R^o$ 是命题 6.1 中描述的双有理态射。则 X 是 R^o 的一个双覆盖的极小解消，该双覆盖以至少含有两个不可约分支的可约曲线为分支曲线。

证明。由图 (4.1)，我们得到一个一般为 2 : 1 的映射 $q_X\colon X\to R$，其分支沿着 R的两个纤维。双有理态射 $\beta\colon R\to R^o$ 是通过吹起铅笔 $\mathcal{P}$ 中亏格 1 曲线的基点，从而得到的 R^o；因此，β 将 $\mathcal{E}_R$ 的两个纤维映到该铅笔中的两条曲线。于是，$\beta\circ q_X\colon X\to R^o$ 是一个一般为 2 : 1 的映射，分支沿着铅笔 $\mathcal{P}$中的两条曲线。□

我们考虑命题 6.1 的一个逆命题，它允许将某些极小有理曲面的双覆盖解释为有理椭圆曲面的基变换。为陈述该结果，记：H为 $\mathbb{P}^2$中一条直线的类；h_1、h_2 为 Pic($\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$) 的生成元，使得 $h_1^2=h_2^2=0$ 和 $h_1\cdot h_2=1$；Γ、Φ 为 Pic($\mathbb{F}_n$ 的生成元，使得 $\Phi^2=0$、$\Gamma^2=-n$、$\Phi\Gamma=1$。

推论 6.3. 设 X 是一个 K3 曲面，$X\to W$ 是一个以两个（可能可约的）曲线 C_1 和 C_2的并为分支的极小有理曲面 W的双覆盖。若 $W=\mathbb{P}^2$（分别为 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$、$\mathbb{F}_2$）且$C_1\sim C_2\in|3H|$（分别为 $|2h_1+2h_2|$、$|2\Gamma+4\Phi|$），则 X 可由对吹起 W 上点 $C_1\cap C_2$所得的有理椭圆曲面进行二次基变换得到。

证明。根据 [Hart，第 V 章推论 2，18],线性系 $|2\Gamma+4\Phi|$ 包含光滑曲线。我们注意到，陈述中的所有线性系都是相应曲面上的反典范线性系，因此一般成员的亏格为 1。因此，只需考虑这类线性系中的两条光滑曲线，即可在极小曲面 W上找到所需的铅笔。□

注 6.4。我们注意到：

i）在 $\mathbb{P}^2$ 或 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$（分别为 $\mathbb{F}_2$）中，在线性系内选取一般的 C_1 和 C_2，可以得到一个不含可约纤维（分别恰含一个可约纤维）的一般有理椭圆曲面。随后，通过特化 C_1 和 C_2，可以得到奇异纤维的其他构型。ii）将有理椭圆曲面压缩到不同极小模型的显式例子见 [CGSTW，图 1 和 3]。

下面的例子讨论了一个众所周知的情形，并说明了推论 6.3 的重要性。

例 6.5. 设 X 是 $\mathbb{P}^2$ 沿一般位置的六条直线 $\ell_1,\dots,\ell_6$ 分支的双覆盖。Kloosterman，[Klo] 对 X 上的椭圆纤维化进行了分类。为证明这些椭圆纤维化的存在性，他考察了 $\mathbb{P}^2$ 上的曲线铅笔，其拉回到 X 后给出亏格 1 曲线的铅笔。以下是一种略有不同的观点：考虑曲线 $C_1=\ell_1\cup\ell_2\cup\ell_3$ 和 $C_2=\ell_4\cup\ell_5\cup\ell_6$。由 C_1 和 C_2 生成的铅笔是一个亏格 1 曲线铅笔，在其基点处对 $\mathbb{P}^2$ 进行爆破，得到一个有理椭圆曲面 $\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$，它有两个 I_3 型纤维（分别对应曲线 C_1 和 C_2）。根据推论 6.3，X 是 $\mathcal{E}_R\colon R\to\mathbb{P}^1$ 沿两个 I_3 纤维分支的基变换，因此 X 自然带有一个椭圆纤维化，其有两个纤维 I_6（它们是 R 沿两个 I_3 纤维分支的基变换所得）。

X 上的其他椭圆纤维化要么由广义圆锥丛诱导（分类见 [Klo，第 9] 节），要么由分裂的亏格 1 铅笔诱导（分类见 [Klo，第 8] 节）。

所述观点，即考虑作为极小有理曲面的双覆盖的 K3 曲面，以及由平面曲线线性系诱导的椭圆纤维化，是 [Klo] 和 [CG]所采用的观点。在这两篇论文中，曲面 R^o 与 $\mathbb{P}^2$同构。在 [CGSTW], 中，我们还考虑了与将 X 表示为 $R^o \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 和 $R^o \simeq \mathbb{F}_2$ 的双覆盖的模型相关的椭圆纤维化（例如，见 [CGSTW，图 1 和3]）。特别地，在 [CGSTW] 中，作者考虑了定义域不一定代数闭的椭圆纤维化；在这种情况下， R 可能无法在定义域上收缩到 $\mathbb{P}^2$，但可以收缩到某个其他有理曲面的极小模型。

6.1. 确定 Weierstrass 方程的算法。

在 [BDGMSV], 中，作者考虑了通过对一个有理椭圆曲面进行二次基变换得到的某些 K3 曲面，对圆锥丛 $|B|$进行分类，并在该有理椭圆曲面上构造广义圆锥丛。他们将这些圆锥丛推前到 R^o，从而在 $\mathbb{P}^2$中得到曲线铅笔，进而将这两种观点联系起来。我们注意到，对 $R^o = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{F}_2$也可以进行同样的处理。这种观点的优点是圆锥丛的分类相当容易，尤其是在能够充分掌握 R上的负曲线时，例如在极端有理椭圆纤维化的情形下。另一方面，人们能够明确写出具有某些预设基点性质的平面曲线（或 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中的曲线）铅笔的方程。这使作者得以应用一种算法，求出 X上一些已分类椭圆纤维化的 Weierstrass方程。

根据推论 6.3，我们知道 X 是以两条三次曲线的并为分支的 $\mathbb{P}^2$ 双覆盖，因此其方程的形式为

$$w^2 = f_3(x_0 : x_1 : x_2)g_3(x_0 : x_1 : x_2). \tag{6.1}$$

设 B 是 R上的一个圆锥丛，即一个无基点的有理曲线线性系，给出 $R \to \mathbb{P}^1_\tau$。推前到 $\mathbb{P}^2$后， B 由一支平面有理曲线铅笔给出，其方程为 $h(x_0\colon x_1\colon x_2, \tau) = 0$。多项式 $h(x_0\colon x_1\colon x_2, \tau)$ 关于 x_0, x_1, x_2是齐次的，设其次数为 $e \geq 1$，且关于 τ是线性的。

对于一般的 τ，我们必须找到曲线 $h(x_0\colon x_1\colon x_2, \tau) = 0$与 $\mathbb{P}^1$之间的一个同构，并求出它与 $f_3g_3 = 0$的四个交点的像。

当 $e \leq 3$时，从曲线上的一个 $e-1$ 阶点投影可得与 $\mathbb{P}^1$ 的一个同构（例如，当 $e = 1$时取 $\mathbb{P}^2$ 中的任意点，当 $e = 2$时取圆锥上的一点，当 $e = 3$时取三次曲线的一个重合点）。这样的点必然存在（在 $e = 3$ 的情形下，奇点必定是铅笔的基点），而且也必定是给出 $\mathcal{E}_R$的原三次曲线铅笔的基点。经过 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ 作用后，我们可以假设该点为 $(0 : 1 : 0)$。

当 $e \leq 3$ 时的算法。

(1) 计算多项式 $f_3(x_0\colon x_1\colon x_2)g_3(x_0\colon x_1\colon x_2)$ 与 $h(x_0\colon x_1\colon x_2, \tau)$ 关于变量 x_1 的结式。结果是多项式 $r(x_0\colon x_2, \tau)$，它关于 x_0 和 x_2 齐次，对应于从 $(0 : 1 : 0)$ 投影后所有交点 $\{f_3g_3 = 0\} \cap \{h_\tau = 0\}$ 的像。(2) 由于 B 是圆锥丛， $r(x_0\colon x_2, \tau)$ 将具有如下形式： $a(x_0\colon x_2, \tau)^2 b(x_0\colon x_2, \tau)c(\tau)$，其中 a 和 b 关于 x_0 和 x_2 齐次， a 的次数取决于 e，而 b 关于 x_0 和 x_2 的次数为 4。(3) V 的方程现在由 $w^2 = r(x_0\colon x_2, \tau)$ 给出，它与.....双有理等价

$$w^2 = c(\tau)b(x_0 : x_2, \tau), \tag{6.2}$$

通过坐标变换 $w \mapsto wa(x_0\colon\ x_2,\ \tau)$。由于对于几乎所有的 τ，方程 (6.2) 都是一个 $2:1$ 覆盖 $\mathbb{P}^1_{(x_0:x_2)}$ 且在 4 个点处分歧，因此 (6.2) 是 K3 曲面 V 上由圆锥丛 $|B|$ 诱导的亏格 1 纤维化的方程。(4) 如果纤维化 (6.2) 存在截面，则可以通过标准变换得到魏尔斯特拉斯形式。

注 6.6. 该算法并不局限于圆锥丛，也可以完全相同地应用于广义圆锥丛。

当 $e \geq 4$ 时，从一点作投影可能就足够了，例如，若所有曲线都有一个次数为$e-1$的基点。然而，有若干圆锥丛的一般成员无法用直线参数化，在这种情况下，就必须考虑圆锥曲线。在 [BDGMSV, 第5节2], 中，也针对这种情况给出了一种算法。此外，对于由分裂的亏格 1 铅笔诱导的椭圆纤维化，也存在类似的算法，参见 [BDGMSV, 第6.1节2]。

References

[AST] M. Artebani, A. Sarti, S. Taki, *K3 surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order*,《数学杂志》268 (2011), 507–533. [BL] M.J. Bertin, O. Lecacheux, *Elliptic fibrations on the modular surface associated to* $\Gamma_1(8)$, 收录于《K3 曲面的算术与几何及 Calabi–Yau 三维簇》，Fields 研究所通讯丛书 67，Springer，纽约，(2013) 153–199. [BDGMSV] *Elliptic fibrations on covers of the elliptic modular surface of level 5* A. 11, 2018 Balestrieri, J. Desjardins, A. Garbagnati, C. Maistret, C. Salgado,I. Vogt, Women in Numbers Europe II，女性数学家协会丛书，Springer，Cham，( )，159–197.[BGHLMSW] *Classifications of elliptic fibrations of a singular K3 surface* M.J. 2, Bertin, A. Garbagnati, R. Hortsch, O. Lecacheux, M. Mase, C. Salgado, U. Whitcher, Women in Numbers Europe，女性数学家协会丛书，Springer，Cham，(2015)，17–49. [BKW] *On the classification of elliptic fibrations modulo iso- morphism on K3 surfaces with large Picard number* A. P. 1312 4421 1, 2013 Braun, Y. Kimura, and T. Watari, , 预印本，arXiv: . v ( ). [CGSTW] V. Cantoral-Farf´an, A. Garbagnati, C. Salgado, A. Trbovi´c, R. Winter, *Fields of definition of elliptic fibrations oncovers of certain extremal rational elliptic surfaces* Women in Numbers Europe III，《数论研究方向》，女性数学家协会丛书，24，Springer，Cham，(2021)，171–205. [CM20] A. Clingher, A. Malmendier, *On K3 surfaces of Picard rank 14*，预印本，arXiv:2009.09635，(2020). [CM21] A. Clingher, A. Malmendier, *On Neron-Severi lattices of Jacobian elliptic K3 surfaces*，预印本，arXiv:2109.01929，(2021). [CM22] A. Clingher, A. Malmendier, *On the duality of F-theory and the CHL string in seven dimensions*《数学物理通讯》393 (2022), 631–667. [CG] P. Comparin, A. Garbagnati, *Van Geemen-Sarti involutions and elliptic fibrations on K3 surfaces double cover of* $\mathbb{P}^2$. 日本数学会杂志 66 (2014), 479–522. [Dem] J. L. Demeio, *Elliptic fibrations and the Hilbert property*, IMRN, 2021, 13, (2021), 10260–10277. [DC] R. Dias Costa, *Classification of conic bundles on a rational elliptic surface in any characteristic*，预印本，arXiv:2206.03549 (2022). [KW] K. Kanno, T. Watari, *W = 0 Complex Structure Moduli Stabilization on CM-type K3 x K3 Orbifolds*《数学物理通讯》398, 6 (2023), 703–756. [FV] D. Festi, D.C. Veniani, *Counting elliptic fibrations on K3 surfaces*，日本数学会杂志 (2022). [GS20] A. Garbagnati, C. Salgado, *Elliptic fibrations on K3 surfaces with a non-symplectic involution fixing rational curves and a curve of positive genus* **36**，2020 1167 1206 《伊比利亚美洲数学杂志》( ). – . [GS19] A. Garbagnati, C. Salgado, *Linear systems on rational elliptic surfaces and elliptic fibrations on K3 surfaces*《纯粹与应用代数杂志》223, (2019) 277–300. [Hart] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*《数学研究生教材》，Springer-Verlag (1977). [Klo] R. Kloosterman, *Classification of all Jacobian elliptic fibrations on certain K3 surfaces* 日本数学会杂志 58 (2006), no. 3, 665–680. [Kum] A. Kumar, *Elliptic Fibrations on a Generic Jacobian Kummer Surface*《代数几何杂志》23 (2014), 599–667. [Mir] R. Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces*数学研究博士课程，ETS Editrice Pisa (1989). [MP] R. Miranda, U. Persson, *On extremal rational elliptic surfaces*,《数学杂志》193 (1986), 537–558. [Nik] V. V. Nikulin, *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 20-reflections* **20**，1979 1156 1158 《苏联数学文献》( ), – . [N] Nishiyama, K., *The Jacobian fibrations on some K3 surfaces and their Mordell–Weil groups*《日本数学杂志》（新辑）22 (1996), 293–347. [O] K. Oguiso, *On Jacobian fibrations on the Kummer surfaces of the product of non isogenous elliptic curves* 日本数学会杂志 41 (1989), 651–680. [Shi] I. Shimada, *On elliptic K3 surfaces*《密歇根数学杂志》47, no 3. (2000), 423–446. [ST] J. Silverman, J.T. Tate, *Rational points on elliptic curves*第二版。《数学本科教材》。Springer，Cham，2015. [SZ] I. Shimada, D.Q. Zhang, *Classification of extremal elliptic K3 surfaces and fundamental groups of open K3 surfaces*《名古屋数学杂志》161 (2001), 23–54. [Ste] H. Sterk, *Finiteness results for algebraic K3 surfaces*《数学杂志》189 no. 4 (1985), 507–513.

Dipartimento di Matematica, Univ. Statale di Milano, Milan, Italy
Email address: alice.garbagnati@unimi.it*URL*:
https://sites.google.com/site/alicegarbagnati/Bernoulli Institute,
University of Groningen, the Netherlands*Email address*:
c.salgado@rug.nl*URL*: https://www.math.rug.nl/algebra/Main/salgado