arXiv:2304.01389v2 [nucl-th] 6 Sep 2023

$A = 3$ 原子核的磁矩与手征有效场论算符

Soham Pal[1], * Shiplu Sarker[1] Patrick J. Fasano[2], † Pieter Maris[1]James P. Vary[1] Mark A. Caprio[2] 和 Robert A. M. Basili[3]

[1]美国爱荷华州艾姆斯市爱荷华州立大学物理与天文学系，邮编 *50011-3160*[2]美国印第安纳州圣母镇圣母大学物理与天文学系，邮编 *46556-5670*[3]美国爱荷华州艾姆斯市爱荷华州立大学电气与计算机工程系，邮编 *50011-3160*（日期：2023年9月7日）

手征有效场论（χEFT）提供了一个框架，可从第一性原理出发，以可系统改进的方式获得核子间相互作用，同时也可据此推导一致的电弱流算符。在本研究中，我们将一致推导的相互作用和流用于计算 $A = 3$ 系统 ^{3}H和 ^{3}He的磁偶极矩。本文重点研究采用半局域坐标空间（SCS）正则化得到的LENPIC相互作用。从 LENPIC χEFT 矢量流的动量空间表示出发，我们推导了截至 N^{2}LO 的 SCS正则化磁偶极算符。随后，我们采用 χEFT 中 N^{2}LO 阶的 SCS LENPIC相互作用，对 ^{3}H和 ^{3}He系统进行无芯壳模型计算，并评估使用一致推导的单核子和双核子电磁流所得到的磁偶极矩。正如先前采用 χEFT 流的研究结果所预期的那样，截至 N^{2}LO 的流修正改善了 ^{3}H和 ^{3}He磁偶极矩与实验值的一致性，但尚未完全吻合。

I. 引言

手征有效场论（χEFT）是一种可系统改进的方法，可从第一性原理出发推导核子间相互作用及相应的电弱流算符 [1–4]。目前已发展出多种 χEFT实现方案，它们在亚核自由度、幂次计数方案及正则化器的选择上各不相同。这带来了若干种核子间相互作用，能够准确描述核子-核子散射数据和氘核束缚态。在每一种此类 χEFT实现方案下，都可以推导出相应的电弱流算符，但在确保一致性方面仍面临各种挑战 [5]。

本研究聚焦于这一过程的下一阶段：一致地推导相互作用和流算符，并将其用于计算核物理可观测量。过去，对朴素电弱算符的修正是通过介子交换理论以唯象方式获得的 [6, 7]。从 χEFT发展电弱流的研究计划，最初是在混合方法的背景下启动的；这类方法将唯象核子间相互作用与不完整的 χEFT流算符相结合 [8–12]。

新一代 χEFT 相互作用及其相应的流算符，已通过构造仅作用于核子自由度的有效算符，从 χEFT 推导得出；所用方法包括幺正变换（UT） [13, 14] 或时间序列微扰理论（TOPT） [1–3]。对于 Norfolk χEFT 势 [15, 16], , 这类势是局域的，并包含Δ 中间态；通过逆 T-矩阵方法 [17, 18]，消除了应用 TOPT 所产生的能量依赖性。对于低能核物理国际合作组（LENPIC） [19–21], 的势，这类势是非局域的，且仅包含 π 介子中间态；利用 UT 方法 [14, 22] 构造了纯粹作用于核子自由度的算符。

本文采用一致推导的相互作用和流算符，计算 $A = 3$ 系统 ^{3}H 和 ^{3}He 的磁偶极矩。此前，研究人员已使用 χEFT 流算符计算这些系统的磁偶极矩，既包括结合唯象势 [12, 23, 24],的混合方法，也包括使用 Norfolk 势和流算符 [25]的完整 χEFT 方法。本文着重研究采用半局域坐标空间（SCS）正则化得到的 LENPIC 相互作用及其配套流算符；这种正则化旨在保留长程势近似局域的性质。我们使用无芯壳模型（NCSM） [26] 计算得到的波函数来计算磁偶极矩。所用的势包括正则化的双核子（$2N$）势和双核子加三核子（$2N + 3N$）LENPIC 势，阶数最高达到次次领先阶（N^{2}LO）；同时采用一致推导的单核子（$1N$）和 $2N$ 电磁流算符。我们还考察了对势施加相似重整化群（SRG）变换 [27–29] 的影响。初步结果已在文献 [30]中报告。

我们首先从 LENPIC χEFT 矢量流的动量空间表示出发，推导经 SCS 正则化的磁偶极算符（第 II 节）。随后详细介绍用于计算 $A = 3$ 系统磁偶极矩的无芯壳模型计算方案

* 现地址：亚利桑那大学研究与发现技术部，图森，亚利桑那州 85721-0073

† 现地址：阿贡国家实验室物理部，美国伊利诺伊州阿贡 60439-4801

（第 III 节），并展示采用 LENPIC SCS 正则化相互作用和截至 N^{2}LO 的 χEFT 磁偶极算符得到的磁偶极矩结果（第 IV 节）。我们讨论纳入$3N$ 相互作用、选择 SCS 正则化参数以及相似重整化群演化所产生的影响，并与先前结果进行比较。为使内容简洁，我们将关于推导 SCS 正则化算符的大部分形式推导内容收录于附录中。

II. 来自χEFT 的磁偶极算符

磁偶极矩用于表征带电流与电磁场之间的相互作用，其经典定义为 [31]

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \mathbf{x}\times\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

其中$\mathbf{j(x)}$ 是位置$\mathbf{x}$处的带电流密度。我们还可以通过傅里叶变换，用动量空间中的电流密度表示磁偶极矩，

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{j}(\mathbf{k}), \tag{2}$$

得到

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2i}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}\times\mathbf{j}(\mathbf{k})\Big|_{\mathbf{k}=0}. \tag{3}$$

对于具有自旋的带电粒子，取非相对论电流算符 [32] 的动量空间矩阵元，可得

$$\mathbf{j}(\mathbf{p}',\mathbf{p};\mathbf{k}) = 2\mu_N\left(g_l\frac{\mathbf{p}'+\mathbf{p}}{2} - ig_s\mathbf{k}\times\mathbf{s}\right), \tag{4}$$

其与量子力学矩阵元的关系为

$$\langle\mathbf{p}'|\mathbf{j}(\mathbf{k})|\mathbf{p}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{j}(\mathbf{p}',\mathbf{p};\mathbf{k})\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\mathbf{k}) \tag{5}$$

遵循参考文献 [33], 的记号，其中 $\mu_N = e/2m_N$为核磁子，$\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}'$)分别表示初态（末态）动量，$\mathbf{s}$ 为自旋算符，g_l 和 g_s 分别为轨道和自旋因子，动量本征态的归一化方式为 $\langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$。将其与（3）式结合，并在动量空间中写出轨道角动量 $\mathbf{l} = -\mathbf{p}\times i\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}$，即可得到磁偶极矩算符的常规 [34, 35]（冲量近似）表达式[1]

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{IA}} = \mu_N\left(g_l\mathbf{l} + g_s\mathbf{s}\right), \tag{6}$$

[1] 本文考虑的磁偶极算符 $\boldsymbol{\mu}$ 经过适当归一化，可用于计算磁偶极矩；它与电磁跃迁理论中使用的磁偶极算符 $\mathbf{M}_1$ （见附录 A2）仅相差一个常规因子，即 $\boldsymbol{\mu} = (4\pi/3)^{1/2}\mathbf{M}_1$。

其中，l 和s 分别为轨道角动量算符和自旋角动量算符。算符 $\boldsymbol{\mu}^{\text{IA}}$ 是一个单体算符，对应于将核子视为具有电荷和内禀磁矩的点粒子的处理方式。

本研究采用了文献 [19, 20, 36], 中所述的 LENPIC SCS 调节势，这些势此前也用于文献 [36–38]中的低能核结构计算。 $2N$ 势在手征阶数上推导至 N^{4}LO，并通过拟合核子-核子散射数据和氘核束缚态确定；而 $3N$ 相互作用则推导至 N^{2}LO，并通过拟合核子-氘核（Nd）散射确定。

由于将$2N$ 相互作用代入 Lippmann–Schwinger 方程进行迭代会产生紫外（UV）散度 [39, 40], ，因此必须对相互作用的高动量（或等价地，短距离）行为进行调节。通常的做法是引入动量空间紫外截止 Λ。若 Λ取值较大，例如取为 ρ 介子的质量，就会产生虚假的深束缚态；而若截止值较小，则会导致更显著的有限截止伪影（更多详情见文献 [20]）。

为尝试减轻有限截止伪影，在 LENPIC SCS框架中采用了混合正则化方案。这些势中由π介子交换（不含接触相互作用）产生的项，通过乘以坐标空间函数在坐标空间中进行了正则化

$$f(r) = \left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right]^6, \tag{7}$$

其中， r 是两个核子之间的相对距离， R 表征截止分离距离。与此同时，接触项通过乘以非局域高斯调节器在动量空间中进行了正则化

$$g(p,p') = \exp\left(-\frac{p^2+p'^2}{\Lambda^2}\right), \tag{8}$$

其中， p 和 p' 分别是入射和出射相对核子动量的大小，截止值为 $\Lambda = 2R^{-1}$。这里我们有两组相互作用，一组为 $R = 0.9$fm，另一组为$R = 1.0$fm。

为与相互作用的正则化方案保持一致，我们还必须对由磁偶极矩算符的 χEFT 展开产生的算符进行正则化。电流密度算符通常在动量空间中推导并表示 [5, 32, 41]。然而，为了应用式（7）中的调节函数，我们必须将磁偶极矩算符的长程部分变换到坐标空间。对于.....的坐标空间矩阵元

n 体算符 a $\boldsymbol{\mu}^{aN}$，我们有 [34, 42]

$$\boldsymbol{\mu}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\dots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_a) = \frac{1}{2}\int d^3x\,\mathbf{x}\times\bar{\mathbf{j}}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\dots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_a;\mathbf{x}), \quad (9)$$

其中，$\mathbf{r}_i(\mathbf{r}'_i)$ 是第 i 个核子的初始（最终）位置。我们将 $\bar{\mathbf{j}}^{aN}$ 的坐标空间矩阵元定义为

$$\langle\mathbf{r}'_1\cdots\mathbf{r}'_a|\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x})|\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_a\rangle = \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}'_1,\dots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_a;\mathbf{x}). \quad (10)$$

为了将参考文献 [41] 和 [32]中推导的（动量空间）电流矩阵元与坐标空间正则化器配合使用，我们通过多维傅里叶变换进行基变换

$$\bar{\mathbf{j}}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\dots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_a;\mathbf{x}) = \int_{\{\mathbf{q}\}_1^a}\int_{\{\mathbf{Q}\}_1^a}\int_{\mathbf{k}}\prod_{i=1}^{a} e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\,e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \times\mathbf{j}^{aN}(\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_a,\mathbf{Q}_1,\dots,\mathbf{Q}_a;\mathbf{k}) \times(2\pi)^{-3a+3}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k}), \quad (11)$$

其中，$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i$、$\mathbf{Q}_i = (\mathbf{p}'_i + \mathbf{p})/2$ 是第 i 个核子的入射（$\mathbf{p}_i$）和出射（$\mathbf{p}'_i$）动量的线性组合，而$\mathbf{k}$ 是外部电磁场的动量。按照参考文献 [32, 33], 的约定，我们根据动量空间矩阵元定义函数$\mathbf{j}^{aN}(\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_a,\mathbf{Q}_1,\dots,\mathbf{Q}_a;\mathbf{k})$

$$\langle\mathbf{p}'_1\cdots\mathbf{p}'_a|\mathbf{j}(\mathbf{k})|\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_a\rangle = (2\pi)^{-3a+3}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k}) \times\mathbf{j}(\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_a,\mathbf{Q}_1,\dots,\mathbf{Q}_a;\mathbf{k}), \quad (12)$$

其中，我们采用态的非相对论归一化 $\langle\mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$。我们还使用记号 $\int_{\{\mathbf{q}\}_1^a} = \int_{\mathbf{q}_1}\cdots\int_{\mathbf{q}_a}$，其中 $\int_{\mathbf{q}} = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}}$，以及$\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i$。由方程（9）和（11）可得

$$\boldsymbol{\mu}^{aN}(\dots) = \frac{(2\pi)^3}{2i}\left[\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}\times\int_{\{\mathbf{q}\}_1^a}\int_{\{\mathbf{Q}\}_1^a}\prod_{i=1}^{a} e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\,e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\,\mathbf{j}^{aN}(\dots) \times\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k})\right]_{\mathbf{k}=0}, \quad (13)$$

为简洁起见，我们省略了 $\boldsymbol{\mu}^{aN}$和 $\mathbf{j}^{aN}$ 的自变量。

我们利用这些关系，从相应的动量空间电磁流推导磁偶极算符。虽然接下来我们将重点讨论特定的$1N$ 和 $2N$ 流，但我们强调，这一关系适用于由 χEFT 推导出的任何电磁流。电多极算符和磁多极算符的一般推导见附录 A。

A. 单核子磁偶极算符

对于单核子流，对$\mathbf{q}_1$ 积分并展开旋度后，公式（13）化简为

$$\boldsymbol{\mu}^{1N} = \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{2}(\mathbf{r}'_1+\mathbf{r}_1)\times\int_{\mathbf{Q}_1} e^{i\mathbf{Q}_1\cdot\Delta\mathbf{r}_1}\,\mathbf{j}^{1N}(\mathbf{q}_1=\mathbf{k},\mathbf{Q}_1) + \int_{\mathbf{Q}_1} e^{i\mathbf{Q}_1\cdot\Delta\mathbf{r}_1}\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}\times\mathbf{j}^{1N}(\mathbf{q}_1=\mathbf{k},\mathbf{Q}_1)\right]_{\mathbf{k}=0}. \quad (14)$$

如果电流与$\mathbf{Q}_1$ 无关，那么对$\mathbf{Q}_1$ 积分会产生额外的狄拉克δ函数，$\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{r}_1)$。根据 [32], 中确立的幂次计数方案, 至 N^{2}LO 阶有两个单核子流：一个处于次领头阶（NLO），另一个处于 N^{2}LO 阶。次领头阶的单核子流为

$$\mathbf{j}^{1N}_{\rm NLO} = \frac{e}{4m_N}\Big[-i\mathbf{q}_1\times\boldsymbol{\sigma}_1(g_s+g_v\tau_1^3)+2\mathbf{Q}_1(1+\tau_1^3)\Big], \quad (15)$$

其中，m_N 为核子平均质量，$g_s = \frac{1}{2}(g_{s,p}+g_{s,n})$ 和 $g_v = \frac{1}{2}(g_{s,p}-g_{s,n})$ 分别为核子的同位旋标量和同位旋矢量 g因子，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为自旋和同位旋空间中的泡利矩阵。将该流算符代入方程（14），得到

$$\boldsymbol{\mu}^{1N}_{\rm NLO} = \frac{\mu_N}{2}\Big[(g_s+g_v\tau_1^3)\boldsymbol{\sigma}_1+(1+\tau_1^3)\mathbf{l}_1\Big]\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{r}_1), \quad (16)$$

其中 $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1$。该表达式等价于方程（6）中的 $\boldsymbol{\mu}^{\rm IA}$。由 $1N$ 形状因子的手征展开产生的 N^{2}LO 阶 $1N$ 流算符为

$$\mathbf{j}^{1N}_{\rm N^2LO} = -\frac{ieg_A^2}{32\pi F_\pi^2}\tau_1^3\Big[m_\pi-(4m_\pi^2+q_1^2)A(|\mathbf{q}_1|)\Big](\mathbf{q}_1\times\boldsymbol{\sigma}_1), \quad (17)$$

其中 $A(q) = \frac{1}{2q}\tan^{-1}(\frac{q}{m_\pi})$，$g_A$ 是轴耦合常数，m_π 是平均π介子质量，F_π 是π介子衰变常数。$1N$形因子的手征展开收敛较慢，因此本文采用 $1N$ 形因子的物理值；在$\mathbf{k}=0$处，它们就是公式（15）中的同位旋标量和同位旋矢量磁矩。将$\mathbf{j}^{1N}_{\rm N2LO}$ 代入公式（13）可得零，由此可见，该电流对磁偶极矩算符没有贡献。

B. 双核子磁矩算符

我们定义 a $2N$ 系统的初始相对坐标和质心坐标:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R}_{12} = (\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2. \quad (18)$$

最终相对坐标和质心坐标的定义类似，分别为$\mathbf{r}'_1$ 和$\mathbf{r}'_2$。对于 $2N$ 流算符，在进行

$$\boldsymbol{\mu}^{2N} = \frac{1}{2i}\Bigg[\frac{i}{2}(\mathbf{R}'_{12}+\mathbf{R}_{12}) \times \int_{\mathbf{q}}\int_{\{\mathbf{Q}\}_1^2} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}'_{12}+\mathbf{r}_{12})/2} e^{i(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2)\cdot\Delta\mathbf{R}_{12}} e^{i(\mathbf{Q}_1-\mathbf{Q}_2)\cdot\Delta\mathbf{r}_{12}/4} \mathbf{j}^{2N}(\tfrac{1}{2}\mathbf{k}+\mathbf{q}, \tfrac{1}{2}\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) + \int_{\mathbf{q}}\int_{\{\mathbf{Q}\}_1^2} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}'_{12}+\mathbf{r}_{12})/2} e^{i(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2)\cdot\Delta\mathbf{R}_{12}} e^{i(\mathbf{Q}_1-\mathbf{Q}_2)\cdot\Delta\mathbf{r}_{12}/4} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{j}^{2N}(\tfrac{1}{2}\mathbf{k}+\mathbf{q}, \tfrac{1}{2}\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)\Bigg]_{\mathbf{k}=0}, \quad (19)$$

其中，我们在电流$\mathbf{j}^{2N}$的自变量中将$\mathbf{q}_1 \to \frac{1}{2}\mathbf{k}+\mathbf{q}$和$\mathbf{q}_2 \to \frac{1}{2}\mathbf{k}-\mathbf{q}$替换为 $\Delta\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}'_{12}-\mathbf{r}_{12}$以及 $\Delta\mathbf{R}_{12}=\mathbf{R}'_{12}-\mathbf{R}_{12}$。如果电流与$\mathbf{Q}_1$ 和$\mathbf{Q}_2$ 无关，那么我们会得到额外的狄拉克δ函数，$\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{R}_{12})\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{r}_{12})$。

在 N^{2}LO 阶及以下，有一个 $2N$ 电流，它源自次领头阶的伴生项图和飞行中的π介子图 [41]:

$$\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO} = \frac{ieg_A^2}{4F_\pi^2}[\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2]^3 \frac{\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{q}_2}{q_2^2+m_\pi^2}\left(\mathbf{q}_1\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{q}_1}{q_1^2+m_\pi^2}-\boldsymbol{\sigma}_1\right) + 1 \leftrightharpoons 2 \quad (20)$$

利用（19）式，我们得到相应的磁偶极算符

$$\boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO} = g_\pi[\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2]^3\Big[\boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO,cm\text{-}dep}(\mathbf{R}_{12},\mathbf{r}_{12}) + \boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO,cm\text{-}indep}(\mathbf{r}_{12})\Big]\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{R}_{12})\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{r}_{12}), \quad (21)$$

其中，依赖质心的部分为

$$\boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO,cm\text{-}dep}(\mathbf{R}_{12},\mathbf{r}_{12}) = \hat{\mathbf{R}}_{12}\times\hat{\mathbf{r}}_{12}(m_\pi R_{12})Y_0(z) \times [Y_2(z)\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12}\,\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12} - Y_1(z)\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2], \quad (22)$$

与质心无关的部分为

$$\boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO,cm\text{-}indep}(\mathbf{r}_{12}) = [(1+z)(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12}\hat{\mathbf{r}}_{12} - z(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2)]Y_0(z), \quad (23)$$

符号上的帽号表示单位矢量，$g_\pi = -\frac{2m_N}{e}\frac{eg_A^2 m_\pi}{32\pi F_\pi^2}$, $Y_2(z) = z + \frac{3}{z} + 3$, $Y_1(z) = 1+\frac{1}{z}$, $Y_0(z) = \frac{e^{-z}}{z}$，以及 $z = m_\pi r_{12}$。

最后，给定这些坐标空间中的磁偶极矩算符表达式后，我们可以应用与相互作用一致的调节方案。由于这些流算符中没有接触项，我们只需将核子坐标用这些新坐标表示，对$\mathbf{q}_2$, 积分并展开旋度后，公式（13）化为

将这些坐标空间表达式乘以式（7）中的调节函数 $f(r_{12}/R)$。在附录 B 中，我们证明了 SCS正则化电流的一致性。

请注意，这些算符由基本矢量算符$\hat{}\mathbf{r}_{12}$、 $\boldsymbol{\sigma}_1$和 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 的乘积构成。为了计算这些算符的二体矩阵元，最好对这些乘积进行角动量重耦合，将算符分解为具有确定总轨道角动量 L 和确定总自旋角动量 S的球张量分量。我们已在附录C中给出了此类张量分解。

III. 三核子系统的无芯壳模型计算

$A=3$ 基态波函数（本文据此推导磁偶极矩）由采用LENPIC相互作用的从头算无芯壳模型（NCSM） [26, 43] 计算获得。在无芯壳模型方法中，我们从如下形式的 A体哈密顿量开始:

$$H = \frac{1}{2m_N A}\sum_{i<j}^{A}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)^2 + \sum_{i<j}^{A} V_{2\mathrm{N},ij} + \sum_{i<j<k}^{A} V_{3\mathrm{N},ijk} + \cdots, \quad (24)$$

其中，右侧各项依次为相对动能、 $2N$ 相互作用和 $3N$ 相互作用。多体核波函数 $|\Psi\rangle$是该哈密顿量的本征态，通过求解 A体薛定谔方程获得:

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (25)$$

其中， E 是与状态 $|\Psi\rangle$对应的能量本征值。

波函数在完备的正交归一基 $\{|\Phi\rangle\}$中展开，其中基态 $|\Phi\rangle$ 是由系统中核子占据的单粒子态 $|\phi\rangle$构成的斯莱特行列式，具有确定的宇称和确定的总角动量投影。也就是说，

$$|\Phi\rangle = \mathcal{A}\left[\prod_{i=1}^{A}|\phi_{\alpha_i}\rangle\right], \tag{26}$$

其中，标签 α_i 表示核子 i的量子数，$\mathcal{A}$ 是反对称化算符。三维谐振子（HO）基由能量参数 $\hbar\omega$表征，是单粒子基的常规选择，本文采用这种基。

原则上，所得的多体基 $\{|\Phi\rangle\}$ 是无限的，但在实际计算中必须对其进行截断。在通常的 $N_{\max}$ 截断方案中，通过限制核子间共享的谐振子量子数总数不超过 $N_{\max}$ 来筛选组态；这里的基准是泡利原理所要求的最小量子数。尤其是，这种截断方案可确保质心波函数具有良好的性质（例如，参见文献 [44]）。

用多体基表示时，A体薛定谔方程（25）变为有限维矩阵本征值问题，其中哈密顿量的矩阵元定义为 $\langle\Phi_\nu|H|\Phi_\mu\rangle$，$\mu$和 ν 分别标记多体基态。完整、未经截断的多体问题所对应的精确结果，可在极限 $N_{\max}\to\infty$ 下恢复。此外，当 $N_{\max}$ 足够大时，在这些基中计算得到的可观测量期望值将趋于不再依赖于 $\hbar\omega$。我们使用 MFDn 核子多费米子动力学程序包 [45, 46]求解这一矩阵本征值问题，并获得 $3N$ 系统的基态能量及相应的多体波函数。随后，我们使用上文第二节讨论的磁偶极矩算符 $\boldsymbol{\mu}$，计算这些多体态波函数的磁偶极矩 μ（J）。[2]

对于 $A=3$ 原子核，采用 LENPIC $2N$势进行计算，可轻易将计算推进到足够高的 $N_{\max}$，从而以实际上无限的数值精度得到磁偶极矩。然而，本研究的计算也旨在探索将 χEFT流算符与无芯壳模型结合使用，以期未来应用于无芯壳模型可处理的整个原子核范围。一般而言，可达到的 $N_{\max}$预计会严重限制磁偶极可观测量所能达到的精度。

尽管 N^{2}LO 阶的 χEFT相互作用包含 $3N$贡献，但将这些 $3N$ 纳入无芯壳模型计算会损害无芯壳模型基底中多体哈密顿矩阵的稀疏性，通常会使计算需求增加一个数量级 [48]。因此，计算所得磁观测量对 $3N$ 相互作用的敏感性不仅具有物理意义，也具有计算方面的意义。我们计算了由 N^{2}LO 阶 LENPIC相互作用得到的 $A=3$ 波函数对应的磁偶极矩，其中相互作用仅包含 $2N$ 贡献（LENPIC $2N$），或同时包含 $3N$ 贡献（LENPIC $2N+3N$）。

此外，在除最轻的原子核之外的所有计算中，为了使可达到的 $N_{\max}$值具有合理的收敛性，通常必须将“裸”LENPIC相互作用软化。这是通过施加相似重整化群（SRG）变换 [27–29, 36, 49–52]来实现的。在SRG方法中，适当表示（例如，此处的动量表示）下的哈密顿量通过连续的幺正变换 $H(\alpha)=U(\alpha)H(\alpha=0)U^\dagger(\alpha)$演化为带对角结构，其中 $H(\alpha=0)$是初始哈密顿量，α 是表征该变换的流参数。将此变换应用于含有 $2N$ 相互作用的哈密顿量会诱导出 $3N$ 及更高阶的多体相互作用，尽管诱导出的相互作用通常会截断在$3N$ 层级。SRG变换对无芯壳模型计算中所得到的偶极矩的影响，即使在 $A=3$情况下实际上并不需要进行这种相似重整化群演化，也因此值得关注。

对哈密顿量应用幺正变换，就必须对可观测量的算符应用相同的变换。对 a$2N$ 核子电流流算符进行相似重整化群演化，预计也会在流算符中诱导出 $3N$（以及更高多体）贡献。这里，我们仅考察对哈密顿量应用典型的相似重整化群变换（$\alpha\lesssim 0.1\text{fm}^4$）所引入的误差，不考虑磁偶极算符的诱导修正。我们分别对 LENPIC$2N$ 和 LENPIC $2N+3N$ 相互作用进行相似重整化群演化，两种情况下均保留至 $3N$的诱导相互作用。

在从所得波函数中提取磁偶极矩之前，我们必须指定电流算符中出现的质量和低能常数的取值 [见（16）、（22）和（23）]。对于同时出现在势 [19, 20] 和磁偶极算符表达式中的质量和低能常数（LECs），我们采用此前用于势的取值：$m_N=938.919$兆电子伏，$m_\pi=138.03$兆电子伏，$F_\pi=$92.4 兆电子伏以及 $g_A=1.29$。对于核子的同位旋标量和同位旋矢量g 因子，我们采用了 $g_s=0.880$ 和$g_v=4.706$。

[2] 用该算符表示，角动量为 J 的多体态的磁偶极矩 $\mu(J)$ [35]定义为拉伸（$M=J$）子态中 z 分量的期望值 $\mu(J)_{\text{定义}}=\langle JJ|\mu_z|JJ\rangle$。等价地，用

[47] $\boldsymbol{\mu}$ μ J $=$ $2J+$ 的约

1 $^{-1/2}$
化矩阵元表示为（） （）（$JJ10|JJ$）$\langle J\|\boldsymbol{\mu}\|J\rangle$，其中（$j_1m_1j_2m_2|JM$）是克莱布什–戈登系数。

IV. 结果与讨论

首先考虑未经 SRG 演化的裸 LENPIC$2N$ 相互作用。图 1 展示了计算得到的基态能量（左）、磁偶极矩（中）以及 $2N$ 介子交换流（MEC）修正（右）的收敛模式，结果分别对应 ^{3}H（上）和^{3}He（下）。具体而言，这些计算采用的 SCS 调节器参数为 $R = 1.0$飞米。对于 $2N$ 相互作用，我们使用无芯壳模型进行计算，计算至$N_{\max} = 18$，其中 $\hbar\omega$ 从 20 兆电子伏到 40 兆电子伏，步长为 4 兆电子伏。请注意，计算能量的变分极小值 [见图 1（左）] 位于这一范围内。

计算得到的偶极矩如 [图 1（中）], 所示，分别是在仅采用 $1N$ 冲量近似（IA）偶极算符（$\mu^{\rm IA}$）以及同时纳入 $2N$ χ有效场论修正（$\mu^{\rm IA+MEC}$）的情况下得到的。这两种对磁矩的贡献都来自次领头阶（NLO）流算符中的项。需要回顾的是（见第 II 节），在 N^{2}LO 阶对电流的 $1N$ 贡献并不影响磁偶极矩。因此，这些曲线之间的差异代表截至 N^{2}LO 阶的总介子交换流修正 [（图 1 右）]。

计算得到的偶极矩数值列于表 I，其中分别给出了在 $N_{\max}$最高处以及在 $\hbar\omega$ 处的结果；后者对应于我们从 14兆电子伏开始的 $\hbar\omega$ 网格上基态能量变分极小值的大致位置。这些计算得到的偶极矩数值也以图形形式汇总于图 2，便于阅读下文讨论时进行比较。

计算所得偶极矩的数值收敛趋势见图 1（中），随着连续的 $N_{\max}$ 曲线彼此逐渐靠拢，且对于较高 $N_{\max}$ 的曲线， $\hbar\omega$ 依赖性趋于减弱。以 ^{3}H [图 1（上）]为例，在变分能量最低点（$\hbar\omega \approx$32 兆电子伏）， [图 1（b）] 中的 IA 磁矩对于 $N_{\max} = 14$ 和$N_{\max} = 16$ 相差 $0.002\,\mu_{\rm N}$，而对于 $N_{\max} = 16$和 $N_{\max} = 18$ 则仅相差 $0.0009\,\mu_{\rm N}$。在 $N_{\max} = 18$时，IA 磁矩随 $\hbar\omega$ 的变化，在以该值为中心、向两侧各延伸 4 兆电子伏（28 兆电子伏 $\leq \hbar\omega \leq$36 兆电子伏）的区间内为 $0.0019\,\mu_{\rm N}$。介子交换流修正的基组依赖性 [图 1（c）] 在绝对尺度上也类似（例如， $N_{\max} = 16$ 和 $N_{\max} = 18$对应的计算修正相差 $0.0009\,\mu_{\rm N}$；而在 $N_{\max} = 18$ 时，介子交换流修正几乎不依赖于 $\hbar\omega$），因此，IA 和介子交换流贡献对计算所得总（IA+MEC）磁矩的基组依赖性 [图 1（b）] 的贡献相近。然而，IA 和介子交换流修正的基组依赖性彼此抵消，使合并结果 $\mu^{\rm IA+MEC}$在图 1（中）所示的 20 兆电子伏区间内呈现出微弱但似乎持续存在的 $\hbar\omega$ 依赖性，尽管该结果看起来确实会随 $N_{\max}$而收敛。因此，我们无法为所计算的磁矩给出可靠的数值不确定性。

镜像核素的计算所得介子交换流贡献 clides ^{3}H [图 1 (c)]和 ^{3}He [图 1 (f)] 的大小近似相等（$0.15\,\mu_{\rm N}$），但符号相反。鉴于次领头阶的唯一介子交换流贡献可从式 (21) 中的同位旋因子看出明显具有同位旋矢量性质，这一结果符合预期，是同位旋对称性的必然结果。为便于比较镜像核素间介子交换流贡献的规律（大小近似相等但符号相反），请注意图 2 (b) 中的磁偶极矩坐标轴方向相反。对于 ^{3}H，介子交换流贡献使 IA 磁矩修正 $\approx 6\%$；对于 ^{3}He，修正幅度为 $\approx 8\%$。在这两种情况下，修正都使磁矩的绝对值增大：正的 ^{3}H 磁矩得到正修正，而负的 ^{3}He 磁矩得到负修正。

作为比较，实验观测到的偶极矩分别为： $2.979\,\mu_{\rm N}$ 对于 ^{3}H，以及 $-2.128\,\mu_{\rm N}$ 对于 ^{3}He [53]。在每种情况下，冲量近似计算都低估了偶极矩的大小，因此 MEC 贡献的符号正好能够解决这一差异，但修正幅度仅约为实现与实验一致所需幅度的一半（见表 I 和图 2）。

在这里，我们可以将结果与此前针对 $A = 3$系统的研究结果进行比较。混合计算，即采用由唯象势获得的波函数，但使用 χEFT 流算符提取偶极矩，曾在文献 [23] 中使用 INOY $2N$ 势进行，其中波函数通过求解 Faddeev方程获得；文献 [24] 则使用 AV18+IL 7 $2N + 3N$ 势 [55, 56], ，并采用格林函数蒙特卡罗（GFMC）多体方法 [57]。随后，在文献 [25],中，在超球谐基中进行了完全 χEFT 计算，使用了Norfolk势和流算符。

这些研究将流算符扩展至 N^{3}LO，因此纳入了比本研究所考虑的更高阶贡献。不过，它们也详细分解了所计算磁矩中的各项贡献，这些贡献源自 χEFT 电流算符在不同阶出现的项。表 I 和图 2 总结了仅保留介子交换流贡献中截至次领头阶各项的结果；这些结果包含与本研究介子交换流结果相同的图，因此可以直接比较。在 INOY 计算中 [23],，IA 磁矩与本文所得结果基本相同（差异在 $\lesssim 0.02\,\mu_{\rm N}$ 以内），而介子交换流修正（在次领头阶）与本文所得结果的大小相近（采用不同调节器截断 Λ 得到的 INOY 结果分别位于本文结果两侧）。在 AV18+IL7 和 Norfolk 计算中，IA 磁矩的绝对值略小于本文的计算结果（小$\lesssim 0.1\,\mu_{\rm N}$）。然而，次领头阶修正相应地大于本文的计算结果，因此在次领头阶得到的 IA+介子交换流结果与本文结果十分接近。

在 χEFT 电流中，直到 N^{3}LO 阶出现的额外介子交换流贡献引入了新的低能常数；在此前的计算中 [23–25], , 这些低能常数经过拟合，以重现实验中 $A = 3$原子核的矩。

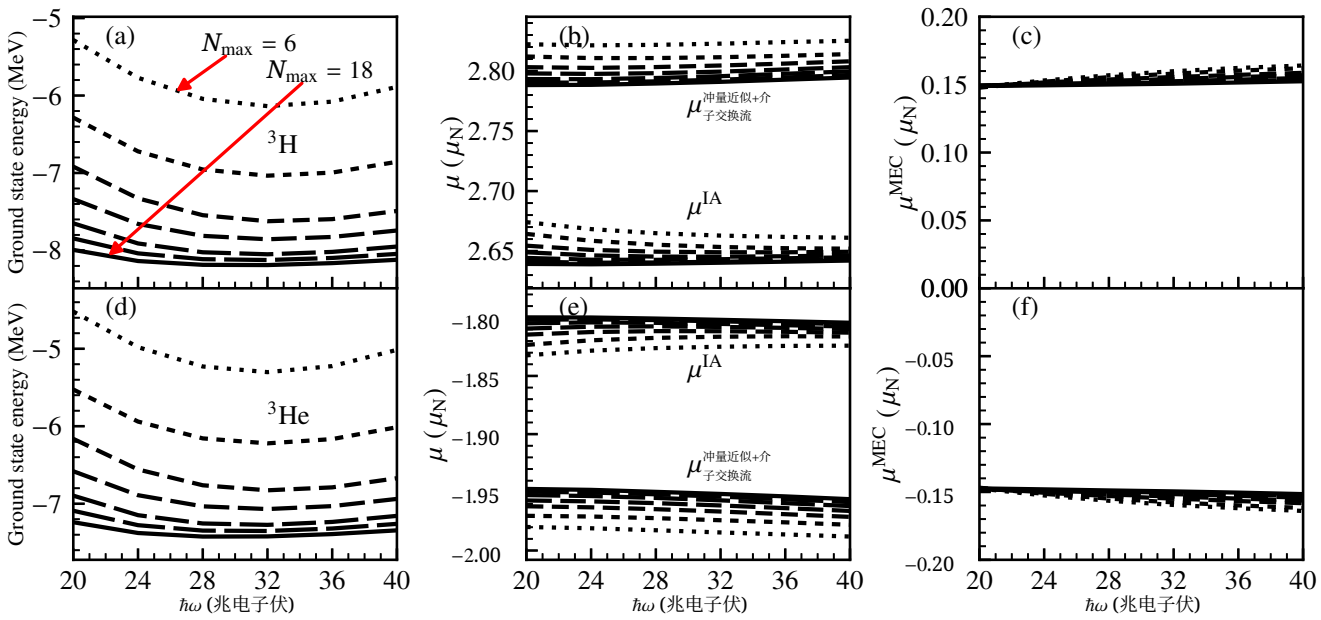

图 1. 对于 ^{3}H（上）和 ^{3}He（下），计算得到的基态能量（左）、磁偶极矩（中）和 $2N$介子交换流修正（右），展示了它们随基组参数 $N_{\max}$（连续曲线）和 $\hbar\omega$的收敛情况。对于磁偶极矩，μ^{IA} 表示方程（16）中 $1N$冲量近似（IA）算符 $\boldsymbol{\mu}^{1N}$的贡献，μ^{MEC}表示方程（21）中 $2N$MEC 算符 $\boldsymbol{\mu}^{2N}$的贡献，$\mu^{\mathrm{IA+MEC}} = \mu^{\mathrm{IA}} + \mu^{\mathrm{MEC}}$。波函数由 $2N$LENPIC SCS 势得到，其中 $R = 1.0$ fm，且势未经过相似重整化群变换。

表 I. 使用 LENPIC 势与流算符并采用一致的低能常数，在 N^{2}LO 阶计算得到的 $A = 3$ 核素磁矩（因此，流算符的最后一个非零贡献出现在 NLO 阶）。对于 $N_{\max} = 18$，展示了未经 SRG 演化的 LENPIC $2N$ 计算结果；其他 LENPIC 计算结果则展示于 $N_{\max} = 14$，其中 $\hbar\omega$ 基于变分能量极小值。基组截断导致的估计不确定性将在正文中讨论。还列出了此前使用 INOY（$\Lambda = 500$ 兆电子伏和 900 兆电子伏） [23], AV18+IL7 [24], 和 Norfolk（NV2+3-IIb*） [25] 势，并将 χEFT 电流计算至 NLO 阶所获得的结果，以供比较；实验值 [53]也一并列出。SRG 参数 α 的单位为 fm^4，$\hbar\omega$ 的单位为兆电子伏，磁矩的单位为 μ_{N}。

			^{3}H				^{3}He			
势	R (fm)	α	$\hbar\omega$	μ^{IA}	μ^{MEC}	$\mu^{\text{冲量近似+介子交换流}}$	$\hbar\omega$	μ^{IA}	μ^{MEC}	$\mu^{\text{冲量近似+介子交换流}}$
LENPIC $2N$	0.9	0.00	36	2.629	0.173	2.802	36	-1.796	-0.172	-1.968
	1.0	0.00	32	2.640	0.151	2.791	28	-1.801	-0.149	-1.950
LENPIC $2N$	1.0	0.04	20	2.677	0.143	2.820	16	-1.822	-0.141	-1.963
+诱导的 $3N$	1.0	0.08	14	2.692	0.139	2.831	14	-1.831	-0.138	-1.969
LENPIC $2N$+$3N$	1.0	0.04	20	2.667	0.147	2.814	20	-1.817	-0.145	-1.962
	1.0	0.08	14	2.683	0.142	2.825	14	-1.827	-0.141	-1.968
INOY（次领头阶；500 兆电子伏）[a]				2.657	0.103	2.760		-1.810	-0.103	-1.913
INOY（次领头阶；900 兆电子伏）[a]				2.657	0.172	2.829		-1.810	-0.170	-1.980
AV18+IL7（次领头阶）[a]				2.556	0.253	2.809		-1.743	-0.248	-1.991
Norfolk（次领头阶）[a]				2.588	0.227	2.815		-1.770	-0.224	-1.994
实验						2.979				-2.128

[a] 先前计算的表列数值是采用达到次领头阶的 χEFT 电流计算得到的部分结果，因此涉及的图与用于计算当前 LENPIC 结果的流算符中所包含的图相同。

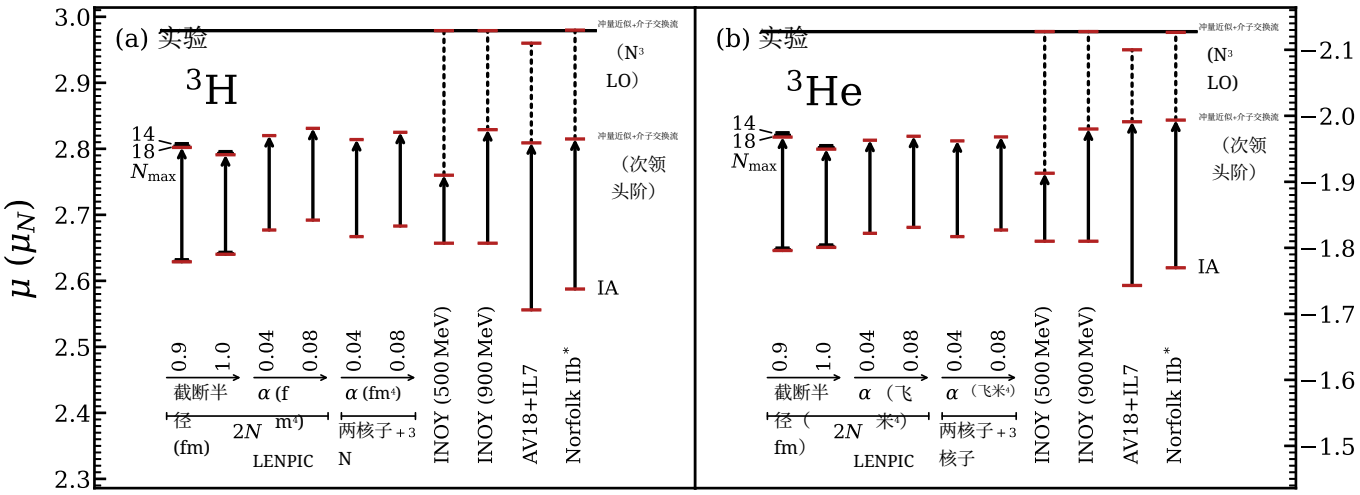

图 2. 使用 LENPIC 势与流算符计算的 $A = 3$ 核素（a） ^{3}H 和（b） ^{3}He 的磁矩，以及先前计算的结果 [23–25]（这些计算的详情见表 I 图注）。图中给出了冲量近似和冲量近似+介子交换流的结果（以箭头连接）；其中， χEFT 电流包含截至次领头阶各项的贡献。对于先前的计算，也展示了包含截至 N^{3}LO 各阶贡献的结果（以虚线连接）；不过，这些结果涉及新的低能常数，其取值旨在复现（至少近似复现）实验磁矩 $A = 3$，因此并非本身就是预测（见正文）。图中还展示了未经相似重整化群演化的 LENPIC $2N$结果，分别对应 $N_{\max} = 14$、16 和 18（符号尺寸依次增大），以此作为收敛性的指标。未经相似重整化群演化的 LENPIC $2N$结果分别采用 $R = 0.9\,\text{fm}$ 和 $R = 1.0\text{fm}$ 的截断半径，而其他 LENPIC 结果均采用 $R = 1.0\,\text{fm}$。实验值 [53] 供参考（水平线段）。请注意， ^{3}He（右图）的磁偶极矩坐标轴方向相反，以便比较镜像核素中介子交换流贡献的规律（如正文所述，其大小近似相等、符号相反）。

因此，这些计算得出的磁矩 [图 2（点线）] 并非严格意义上的预测；事实上，它们按构造就与实验结果相符[3]（AV18+IL7 结果与实验结果之间的微小偏差，源于这些格林函数蒙特卡罗计算所用哈密顿量与实际用于拟合低能常数的少体计算所用哈密顿量存在差异，以及其他一些近似处理不同 [24]）。

讨论了结果的定性特征后，现在让我们定量考察计算所得磁矩对所作选择的敏感性：首先考察χEFT 调节方案（第 II 节），随后考察计算过程（第 III 节）。将调节截断长度尺度为 $R = 0.9$fm 的计算与此前讨论的、长度尺度为 $R = 1.0$fm 的计算进行比较，会使 IA 磁矩发生 $\lesssim 0.006\,\mu_{\rm N}$ 的偏移，并使 MEC 贡献改变 $\lesssim 0.011\,\mu_{\rm N}$（见表 I 和图 2）。不难理解，MEC 贡献对调节尺度更为敏感，因为波函数和 MEC 算符都依赖于调节器，而 IA 算符则不依赖于调节器。

同时对相互作用和矩算符进行 SRG 演化，并保留所有诱导的多体贡献（在该 $A = 3$ 系统中，只有至 $3N$ 的算符才相关），对于这一问题，在完整、未截断的空间中会使结果严格不变。我们考虑 SRG 流参数取值为 $\alpha = 0.4$fm^4 和 0.8 fm^4 的计算。诱导相互作用保留至 $3N$，但仅使用未演化的矩算符。也就是说，在这些计算中，只有计算得到的波函数有所不同，而可观测量的算符没有相应变化。这为计算方案对 SRG 演化的敏感性提供了一项极端检验。表 I 列出了所计算的最高 $N_{\rm max}$ 对应的数值，本例中为 $N_{\rm max} = 14$；对于每种采用的相互作用，计算均使用 $\hbar\omega$，其值取自我们 $\hbar\omega$ 网格上基态能量变分极小值的大致位置。作为 SRG 流参数函数，计算所得 IA 磁矩的变化为 $\lesssim 0.05\,\mu_{\rm N}$，MEC 贡献的变化为$\lesssim 0.012\,\mu_{\rm N}$。请注意，这些变化与图 1 所示未重整化磁矩的基组依赖性处于同一量级，甚至更大。

最后，通常可以预期，将 $3N$ 贡献纳入相互作用中，会对结构和计算得到的可观测量 [36]产生显著影响。我们使用完整的 LENPIC $2N + 3N$ 相互作用，重新计算 $A = 3$ 波函数，所用的相似重整化群流参数分别为 $\alpha = 0.4$fm^4 和 0.8 fm^4（见表 I）。然而，我们发现，纳入 $3N$ 相互作用对这些波函数得到的矩 $3N$ 影响甚微；不过应谨记，矩算符并未经过相似重整化群演化，因此我们无法排除这样的可能性：使用经过一致的相似重整化群演化的算符时， $3N$ 相互作用的影响会更大。

[3] 在较新的辅助场扩散蒙特卡罗（AFDMC）计算中， [58], 采用这种方法得到的结果则与将低能常数拟合到若干磁矩的全局拟合结果进行比较

V. 总结

在本研究中，我们在无芯壳模型的框架下，利用经过手征改进的磁偶极算符，计算了 ^{3}H 和 ^{3}He 的磁偶极矩。从 LENPIC χEFT 矢量流的动量空间表示出发，我们推导了截至 N^{2}LO 手征阶数的 SCS 正则化磁偶极算符（本文介绍的方法可推广至更高的手征阶数和多极阶数）。随后，我们采用半局域坐标空间正则化的 LENPIC $2N$ 和 LENPIC $2N+3N$ 势，对这些原子核的磁偶极矩进行了自洽计算。这里所说的“自洽计算”，是指在计算中采用相同手征阶数的流算符和核势。

本研究是我们在无芯壳模型框架下，使用χEFT 流和 LENPIC 相互作用开展电磁可观测量自洽计算的第一步。我们的结果与先前的理论计算 [23–25], 相近；采用相应的次领头阶流算符时， ^{3}H 和 ^{3}He 的磁偶极矩仍比实验值低 6%–8%。纳入高阶流对于在无芯壳模型框架下更全面地描述核系统（超越 $A = 3$）至关重要。

致谢

我们谨向 H. Krebs、J. Golak、R. Skib- inski、G. B. King 和 S. Pastore 致谢，感谢他们进行了有益的讨论，并分享了其研究的数值结果。本研究基于美国能源部科学办公室通过以下奖项提供支持的工作：DE-FG02-87ER40371、DE-FG02- 95ER40934、DE-SC0018223 (SciDAC-4/NUCLEI)、DE- SC0023495 (SciDAC-5/NUCLEI) 和 DE- SC0023692。本研究使用了国家能源研究科学计算中心 (NERSC) 的资源。该中心是美国能源部科学办公室下属的用户设施，位于劳伦斯伯克利国家实验室，并依据合同编号 DE-AC02-05CH11231 运营；本研究使用的 NERSC 资助编号为 NP-ERCAP0020944。

这些磁矩对应一组选定的轻核。[4] 对于经相似重整化群演化的 LENPIC $2N$ 和 $2N + 3N$ 相互作用，我们将无芯壳模型计算进行到 $N_{\rm max} = 14$，其中$\hbar\omega = 14$，16，20，24，28 兆电子伏。

附录 A：电磁多极算符

本文提出一种通用方法，可从任何由 χEFT 推导出的 a 核子（aN）电荷或电流中推导出所有电磁多极算符。这是对第 II 节所述步骤的推广。电多极算符由电荷推导而得，磁多极算符则由电流推导而得。

1. 电多极算符

为从 aN 电荷算符推导电多极算符，我们采用以下定义 [34, 42]:

$$\mathbf{E}_{l,}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_a) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\mathbf{x}\, x^l \mathbf{Y}_l(\hat{\mathbf{x}})\bar{\rho}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_a,\mathbf{x}), \tag{A1}$$

其中，$\bar{\rho}^{aN}$ 是电荷的坐标空间表示，l 是多极算符的阶数。请注意，在本附录及接下来的附录 B 中，我们对动量空间矩阵元的表达式采用文献 [41, 59]中的另一种归一化约定，此时式 (12) 变为

$$\langle \mathbf{p}'_1\cdots\mathbf{p}'_a|\mathbf{j}(\mathbf{k})|\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_a\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k})\mathbf{j}(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_a,\mathbf{Q}_1,\ldots,\mathbf{Q}_a;\mathbf{k}), \tag{A2}$$

此时，联系动量空间与坐标空间矩阵元表达式的傅里叶变换 (11) 变为

$$\bar{\mathbf{j}}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_a;\mathbf{x}) = \int\limits_{\{\mathbf{q}\}_1^a}\int\limits_{\{\mathbf{Q}\}_1^a}\int\limits_{\mathbf{k}}\prod_{i=1}^{a} e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\, e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \times \mathbf{j}^{aN}(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_a,\mathbf{Q}_1,\ldots,\mathbf{Q}_a;\mathbf{k}) \times \bar{\delta}^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k}), \tag{A3}$$

其中同样有 $\int_{\{\mathbf{q}\}_1^a} = \int_{\mathbf{q}_1}\cdots\int_{\mathbf{q}_a}$，但现在 $\int_{\mathbf{q}} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$，和 $\bar{\delta}^{(3)}(\cdots) = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\cdots)$。那么，$\bar{\rho}^{aN}$与动量空间表示 ρ^{aN}（在 [32, 41] 中推导）的关系，与上文式 (A3) 中$\mathbf{j}^{aN}$和$\bar{\mathbf{j}}^{aN}$之间的关系相同。

我们使用以下恒等式 [47] 简化方程 (A1):

$$x^l\mathbf{Y}_l(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}}\big[\ldots\big[\mathbf{x}\mathbf{x}\big]_2\mathbf{x}\big]_3\ldots\mathbf{x}\big]_l. \tag{A4}$$

利用这个恒等式，方程 (A1) 可写为

$$\mathbf{E}_l^{aN} = (-i)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}}\Bigg[\big[\ldots\big[\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_2\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_3\ldots\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_l \int\limits_{\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_a}\int\limits_{\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_a}\prod_{i=1}^{a} e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\, e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\,\rho^{aN}\bar{\delta}^{(3)}(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_a-\mathbf{k})\Bigg]_{\mathbf{k}=0}, \tag{A5}$$

其中我们使用了 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = i\mathbf{x}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$。张量积的理解方式是：先将 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}$s 作用于积分，再从结果中提取所需的不可约张量分量。通过一个例子可以更好地理解这一点。忽略常规因子后，电四极算符为

$$\mathbf{E}_2^{aN} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\Bigg[\big[\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_2\int\limits_{\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_a}\int\limits_{\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_a}\prod_{i=1}^{a} e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\, e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\,\rho^{aN}\bar{\delta}^{(3)}(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{k})\Bigg]_{\mathbf{k}=0}. \tag{A6}$$

领先阶（LO） $1N$电荷为 $\rho^{1N}_{\mathrm{LO}}(\mathbf{q}_1,\mathbf{Q}_1,\mathbf{k}) = (e/2)(1+\tau_1^3)(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k})$。将其代入上式，得到

$$\mathbf{E}^{1N}_{2,\mathrm{LO}}(\mathbf{r}'_1,\mathbf{r}_1) = \left(-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\big[\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\Big|_{\mathbf{k}=0}\right)\frac{e}{2}(1+\tau_1^3)\delta^{(3)}(\mathbf{r}'_1-\mathbf{r}_1). \tag{A7}$$

作用于 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}$ 的每个 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}$ 都会带来一个 $i\mathbf{r}_1$。从所得张量中提取秩二不可约张量，可得 $\sqrt{15/8\pi}\big[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\big]_2$；根据公式（A4），这就是 $r_1^2\mathbf{Y}_2(\hat{\mathbf{r}}_1)$。因此，领先阶（LO） $1N$ 电四极算符为

$$\mathbf{E}^{1N}_{2,\mathrm{LO}}(\mathbf{r}'_1,\mathbf{r}_1)=\frac{e}{2}(1+\tau_1^3)r_1^2\mathbf{Y}_2(\hat{\mathbf{r}}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}'_1-\mathbf{r}_1), \tag{A8}$$

这与核物理教科书中电四极矩算符的冲量近似定义等价 [34, 35]。

2. 磁多极算符

推广公式（9） 我们将秩为 l 的磁多极算符的第 m个球分量定义为

$$M^{aN}_{lm,}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_a,\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}_a)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{l+1}\int d^3\mathbf{x}[\mathbf{x}\times\bar{\mathbf{j}}^{aN}(\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_a,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_a,\mathbf{x})]\cdot\boldsymbol{\nabla}[x^lY_{lm}(\mathrm{x})], \tag{A9}$$

其中 $\bar{\mathbf{j}}^{aN}_{\mathcal{O}}$ 已在（11）中定义， Y_{lm}(r) 是$\mathbf{Y}_l$(r) 的第 m个球分量。我们使用以下恒等式来简化此公式 [47]:

$$\boldsymbol{\nabla}[x^lY_{lm}(\mathrm{x})]=\sqrt{l(2l+1)}x^{l-1}\mathbf{Y}^{l-1}_{lm}(\mathrm{x}), \tag{A10}$$

其中$\mathbf{Y}^n_{lm}$ 是矢量球谐函数，其第 ν个球分量为

$$(\mathbf{Y}^n_{lm})_\nu=(-1)^\nu C^{lm}_{n\,m+\nu\,1\,\nu}Y_{n-1\,m-\nu}. \tag{A11}$$

利用这个 恒等式，公式（A4）和张量积的定义公式（A9）可写为 s

$$M^{aN}_{lm,}=\frac{\sqrt{l(2l+1)}}{l+1}\sqrt{\frac{(2l-1)!!}{4\pi(l-1)!}}\int d^3\mathbf{x}\big[\big[\cdots\big[\mathbf{x}\mathbf{x}\big]_2\mathbf{x}\big]_3\cdots\mathbf{x}\big]_{l-1}\big[\mathbf{x}\times\bar{\mathbf{j}}^{aN}\big]\big]_{lm}, \tag{A12}$$

为简洁起见，我们省略了电流的自变量。由于该公式对所有投影 m 均成立，因此可以省略投影指标，并将上述公式写成张量方程。再次利用 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=i\mathbf{x}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ ，可得到磁多极算符的最终形式:

$$\mathbf{M}^{aN}_{l,}=(-i)^l\frac{\sqrt{l(2l+1)}}{l+1}\sqrt{\frac{(2l-1)!!}{4\pi(l-1)!}}\Bigg[\big[\big[\big[\cdots\big[\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_2\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_3\cdots\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\big]_{l-1}$$
$$\big[\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}\times\int\limits_{\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_a}\int\limits_{\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_a}\prod_{i=1}^{a}e^{i\mathbf{q}_i\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{r}_i)/2}\,e^{i\mathbf{Q}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i}\,\mathbf{j}^{aN}\big]\big]_l\Bigg]_{\mathbf{k}=0}. \tag{A13}$$

$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}$ 的张量积的解释与电多极算符的情况类似。我们先将 $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{k}$ 作用于积分，再从结果中提取所需的不可约张量。对于 $l=1$，乘以约定因子 $\sqrt{4\pi/3}$ 后，上述公式化简为公式（13）。

附录 B：半局域坐标空间正则化电流的一致性

The 电流的一致性取决于它是否满足连续性方程 :

$$\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{j}}=\big[\hat{H},\hat{\rho}\big], \tag{B1}$$

在动量空间中，或等价地

$$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{j}}=-i\big[\hat{H},\hat{\rho}\big], \tag{B2}$$

在坐标空间中。（在本附录中，符号上方的帽子表示算符。）这里 $\hat{}\ j^\mu=\{\hat{}\rho,\ \hat{}\mathbf{j}\}$ 是四流算符， $H=T+V$是核哈密顿量的强相互作用部分，其中 T 表示动能，且

ˆ ˆ ˆ$V = V_{\rm LO} + V_{NLO} + \cdots$表示势能，而散度是相对于外部电磁源的位置而言的。如 [32, 60, 61], 中所述，单核子流与动能满足连续性方程，而次领头阶的第一个双核子流与领头阶未正则化势能满足连续性方程。我们不对动能进行正则化。我们只需检验双核子流是否满足连续性方程。

四流算符的动量空间表示（与附录 A 一样，我们遵循文献 [41, 59]中的归一化约定）为 [41]:

$$\langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \hat{j}^{2N,\mu}(\mathbf{k}) | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}) j^{2N,\mu}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; \mathbf{k}). \tag{B3}$$

如果 $j^{aN,\,\mu}$ 不依赖于$\mathbf{Q}_i$ （当前讨论的电流正是如此），那么坐标空间表示的形式为

$$\bar{j}^{2N,\mu}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{x}) = \langle \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2' | \hat{j}^{2N,\mu}(\mathbf{x}) | \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_2) \bar{j}^{2N,\mu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{x}), \tag{B4}$$

其中，$j^{2N,\,\mu}$ 与 $\bar{j}^{2N,\,\mu}$ 之间的关系与方程 (A3) 中三流的关系相同。我们将使用动量表示来检验次领阶二核子流的连续性方程。方程 (B1) 左侧的动量表示为

$$\langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}), \tag{B5}$$

其中$\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}$ 已在方程 (20) 中定义。计算点积，并将$\mathbf{k}$ 替换为$\mathbf{q}_1$ +$\mathbf{q}_2$，，得到

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO} = i \frac{e g_A^2}{4F_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)_z \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}_1}{q_1^2 + m_\pi^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2 + m_\pi^2} \right). \tag{B6}$$

为了计算右侧 的 (B1)，我们需要未正则化的领先阶势的动量表示 ：

$$\langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \hat{V}_{\rm LO} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = V_{\rm LO}(\tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \tag{B7}$$

其中 $V_{\rm LO}$(q) 由下式给出

$$V_{\rm LO}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 W_{1\pi}(\mathbf{q}) = -\frac{g_A^2}{4F_\pi^2} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q} \, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}}{q^2 + m_\pi^2}. \tag{B8}$$

ˆ 现在我们可以求出 $V_{\rm LO}$ˆ$\rho_{\rm LO}$ 的动量空间表示:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \hat{V}_{\rm LO} \hat{\rho}_{\rm LO} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle &= \int d^3\mathbf{p}_1'' d^3\mathbf{p}_2'' \, \langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \hat{V}_{\rm LO} | \mathbf{p}_1'' \mathbf{p}_2'' \rangle \, \langle \mathbf{p}_1'' \mathbf{p}_2'' | \hat{\rho}_{\rm LO} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \\ &= \int d^3\mathbf{p}_1'' d^3\mathbf{p}_2'' \, V_{\rm LO}(\tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1'' + \mathbf{p}_2'')) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1'' - \mathbf{p}_2'') \\ &\quad [\rho_{{\rm LO},1} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1'' + \mathbf{p}_2'' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2'' - \mathbf{p}_2) + (1 \leftrightarrow 2)]. \end{aligned} \tag{B9}$$

完成对 $\mathbf{p}_1''$ 和 $\mathbf{p}_2''$ 的积分后，得到

$$\langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \hat{V}_{\rm LO} \hat{\rho}_{\rm LO} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = [V_{\rm LO}(\mathbf{q}_1) \rho_{{\rm LO},1} + (1 \leftrightarrow 2)] \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}), \tag{B10}$$

其中 $\rho_{{\rm LO},\,i} = e(1 + \tau_i^3)/2$。我们也可以类似地计算 ˆ$\rho_{\rm LO}$ˆ$V_{\rm LO}$。利用对易关系 $\left[\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2, \tau_1^3\right] = 2i(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)^3$，我们看到

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | \left[\hat{V}_{\rm LO}, \hat{\rho}_{\rm LO}\right] | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \\ &= \Big(\left[V_{\rm LO}(\mathbf{q}_1), \rho_{{\rm LO},1}\right] + (1 \leftrightarrow 2) \Big) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}) \\ &= i \frac{e g_A^2}{4F_\pi^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)^3 \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}_1}{q_1^2 + m_\pi^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}_2}{q_2^2 + m_\pi^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}). \end{aligned} \tag{B11}$$

因此 $\langle \mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2'|\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{j}}^{2N}$次领阶二核子流$|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle = \langle \mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2'|\big[\hat{V}_{\rm LO},\hat{\rho}_{\rm LO}\big]|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$，即次领阶二核子流满足与未正则化的领先阶势 [32, 60, 61] 相容的连续性方程。对该方程两边进行傅里叶变换，得到电流在坐标空间中满足的连续性方程： $\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{j}}^{2N}$次领阶二核子流$|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = -i\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\big[\hat{V}_{\rm LO},\hat{\rho}_{\rm LO}\big]|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle$，其中

$$\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\bar{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2) \tag{B12}$$

$$\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{V}_{\rm LO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2\bar{W}_{1\pi}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2), \tag{B13}$$

$$\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{\rho}_{\rm LO}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = e\bigg(\frac{1+\tau_{1z}}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{x})+(1\leftrightarrow 2)\bigg)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2), \tag{B14}$$

其中， $\bar{j}^{2N}_{\rm NLO}$ 和 $\bar{W}_{1\pi}$ 分别是$\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}$和 $W_{1\pi}$的傅里叶变换。采用这种坐标空间表示形式，我们可以看到

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\bar{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x}) = e(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)_z\bar{W}_{1\pi}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\big[\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{x})-\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2-\mathbf{x})\big]. \tag{B15}$$

引入一个离散完备基，例如谐振子基，我们可以将这个连续性方程写成矩阵方程$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}$，其矩阵元为:

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{\alpha\beta} = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2\,\phi_\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\cdot\bar{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})\phi_\beta(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), \tag{B16}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}_{\alpha\beta} = e(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)_z\int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2\,\big[\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{x})-\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2-\mathbf{x})\big]\phi_\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{W}_{1\pi}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\phi_\beta(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), \tag{B17}$$

其中， $\{|\alpha\rangle = |\alpha_1,\alpha_2\rangle\}$ 是基，而 $\langle \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2|\alpha\rangle = \phi_\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$。现在我们引入两个新算符 f和 g，使得$\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{f}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2)$，且 $\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{g}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2)$。这里， f和g 是核子坐标的函数，不具有同位旋结构。容易验证，$\hat{\mathbf{j}}^{2N}$ 次领头阶与 $\hat{g}$对易，且 $\hat{V}_{\rm LO}$与 $\hat{f}$对易。我们希望了解，在要求 $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\big(\hat{\mathbf{j}}^{2N}$次领头阶$\hat{g}\big) = -i\big[\hat{V}_{\rm LO}\hat{f},\hat{\rho}_{\rm LO}\big]$的条件下，$\hat{f}$和 $\hat{g}$之间有何关系。我们将使用上文推导出的坐标空间关系。在坐标空间表示中，该方程左侧可写为

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}\hat{g}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle &= \int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2\,\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{j}}^{2N}_{\rm NLO}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\rangle\,\langle \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'|\hat{g}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle \\ &= \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2).\end{aligned} \tag{B18}$$

为计算该方程右侧，在坐标空间表示中，我们首先需要计算 $\hat{}\,\hat{}\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|V_{\rm LO}\hat{f}\hat{\rho}_{\rm LO}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle$。

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{V}_{\rm LO}\hat{f}\hat{\rho}_{\rm LO}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle \\ &\quad= \int d^3\mathbf{x}_1' d^3\mathbf{x}_2' d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2\,\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{V}_{\rm LO}|\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'\rangle\,\langle \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'|\hat{f}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\rangle\,\langle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|\hat{\rho}_{\rm LO}|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle \\ &\quad= V_{\rm LO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\rho_{\rm LO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2),\end{aligned} \tag{B19}$$

其中， $V_{\rm LO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ 和 $\rho_{\rm LO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})$ 分别是方程 (B13) 和 (B14) 右侧的表达式，忽略其中涉及 $\mathbf{r}_i'$ 的狄拉克δ函数。类似地，我们可以计算 $\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\hat{}\rho_{\rm LO}V_{\rm LO}f|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle$:

$$\langle \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'|\big[\hat{}V_{\rm LO}\hat{}f,\hat{}\rho_{\rm LO}\big]|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\rangle = e(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)_z\bar{W}_{1\pi}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\big[\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{x})-\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2-\mathbf{x})\big]f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2) \tag{B20}$$

因此，按照我们的要求，

$$\begin{aligned}&\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2) \\ &\quad= e(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)_z\bar{W}_{1\pi}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\big[\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{x})-\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2-\mathbf{x})\big]f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_2).\end{aligned} \tag{B21}$$

因此，由公式 (B15) 可得 $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{x})(g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)) = 0$，这意味着如果 $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{j}^{2N}_{\rm NLO}$不为零，那么 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$。对于前文引入的离散完备基，这可表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{B22}$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \phi_\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\phi_\beta(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\alpha\beta} = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \phi_\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\phi_\beta(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2), \tag{B23}$$

ˆ分别是在离散完备基中与 f 和ˆg对应的矩阵。由于$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}$，若$\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ 非奇异，则$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}$，即两个正则化器的矩阵元必须相同。尽管这里推导的是次领头阶双核子流的这一结果，但显然，只要式（B15）对某一特定的电流与未正则化势组合成立，就会得到相同的结论。

附录C：双核子算符的张量分解

我们将两个分别具有 j_1 和 j_2秩的不可约张量$\mathbf{T}^{j_1}$ 和$\mathbf{T}^{j_2}$ 的秩为 j 的张量积定义为

$$\big[\mathbf{T}^{j_1}\mathbf{T}^{j_2}\big]^m_j = \sum_{m_1,m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} T^{m_1}_{j_1} T^{m_2}_{j_2}, \tag{C1}$$

其中， m、 m_1和 m_2 是投影指标， $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ 是克莱布施-戈尔丹系数。张量积本身是一个不可约张量。由上述定义以及克莱布施-戈尔丹系数的性质可知，对易张量 [47]满足以下重耦合恒等式：

$$\big[\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b\big]_c = (-1)^{a+b-c}\big[\mathbf{T}_b\mathbf{T}_a\big]_c, \tag{C2}$$

$$\big[\big[\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b\big]_c\mathbf{T}_d\big]_e = (-1)^{a+b+d+e}\sum_f \Pi_{cf}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{Bmatrix}\big[\mathbf{T}_a\big[\mathbf{T}_b\mathbf{T}_d\big]_f\big]_e, \tag{C3}$$

$$\big[\big[\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b\big]_c\big[\mathbf{T}_d\mathbf{T}_e\big]_f\big]_i = \sum_{hi}\Pi_{cfgh}\begin{Bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{Bmatrix}\big[\big[\mathbf{T}_a\mathbf{T}_d\big]_g\big[\mathbf{T}_b\mathbf{T}_e\big]_h\big]_i, \tag{C4}$$

其中 $\Pi_{ab\cdots\lambda} = \sqrt{(2a+1)(2b+1)\cdots(2\lambda+1)}$，并且方程（C3）和（C4）大括号中的量分别是 Wigner $6j$ 和 $9j$ 符号。这些恒等式对于张量积的任意投影均成立，因此我们省略了任何显式的投影指标。利用$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = -\sqrt{3}\big[\mathbf{T}_1\mathbf{S}_1\big]_0$ 和 $\mathbf{T}\times\mathbf{S} = -i\sqrt{2}\big[\mathbf{T}_1\mathbf{S}_1\big]_1$，以及上述恒等式，我们得到

$$(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12}\hat{\mathbf{r}}_{12} = i\frac{\sqrt{2}}{3}\Big\{\boldsymbol{\Sigma}_1 + \sqrt{10}\big[\mathbf{C}^2_{2,0}\boldsymbol{\Sigma}_1\big]_1\Big\}, \tag{C5}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{12}\times\hat{\mathbf{r}}_{12}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 = -i\sqrt{6}\big[\mathbf{C}^1_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_0\big]_1, \tag{C6}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{12}\times\hat{\mathbf{r}}_{12}(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12}\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\mathbf{r}}_{12}) = i\frac{\sqrt{2}}{3}\Bigg\{-\sqrt{3}\big[\mathbf{C}^1_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_0\big]_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\big[\mathbf{C}^1_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_1\big]_1 + \sqrt{\frac{9}{5}}\big[\mathbf{C}^2_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1 + \sqrt{\frac{14}{5}}\big[\mathbf{C}^2_{3,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1 + \sqrt{\frac{24}{5}}\big[\mathbf{C}^3_{3,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1\Bigg\}, \tag{C7}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_l = \big[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\big]_l$ 以及 $\mathbf{C}^c_{a,\,b} = \big[\mathbf{C}_a(\mathbf{r}_{12})\mathbf{C}_b(\mathbf{R}_{12})\big]_c$。$\mathbf{C}_l(\mathbf{r}) = \sqrt{4\pi/(2l+1)}\mathbf{Y}_l(\mathbf{r})$ 是秩为 l 的重整化球谐函数。我们提醒读者，与泡利矩阵和单位矢量相关联的数值下标表示核子指标，而非张量秩。综合以上内容，方程 (21) 可写为

$$\boldsymbol{\mu}^{2N}_{\rm NLO} = \frac{2}{3}g_\pi\big[\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2\big]_1\Big[\boldsymbol{\mu}'^{2N}_{\rm NLO,cm-dep}(\mathbf{R}_{12},\mathbf{r}_{12}) + \boldsymbol{\mu}'^{2N}_{\rm NLO,cm-indep}(\mathbf{r}_{12})\Big]\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{R}_{12})\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{r}_{12}), \tag{C8}$$

其中

$$\boldsymbol{\mu}'^{2N}_{\mathrm{NLO,cm-dep}}(\mathbf{R}_{12},\mathbf{r}_{12}) = (m_\pi R_{12})\Bigg[-\sqrt{3}z\big[\mathbf{C}^1_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_0\big]_1 + Y_2(z)\Bigg(+\sqrt{\frac{3}{5}}\big[\mathbf{C}^1_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_1\big]_1 + \sqrt{\frac{9}{5}}\big[\mathbf{C}^2_{1,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1 + \sqrt{\frac{14}{5}}\big[\mathbf{C}^2_{3,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1 + \sqrt{\frac{24}{5}}\big[\mathbf{C}^3_{3,1}\boldsymbol{\Sigma}_2\big]_1\Bigg)\Bigg]Y_0(z), \quad \text{(C9)}$$

and

$$\boldsymbol{\mu}'^{2N}_{\mathrm{NLO,cm-indep}}(\mathbf{r}_{12}) = \sqrt{10}(1+z)\big[\mathbf{C}^2_{2,0}\boldsymbol{\Sigma}_1\big]_1 + (-1+2z)\boldsymbol{\Sigma}_1. \quad \text{(C10)}$$

[1] S. Weinberg, 《物理快报B》251，10.1016/0370-2693(90)90938-3（1990年）。[2] S. Weinberg, 《核物理B》363，3（1991年）。[3] C. Ordóñez 和 U. van Kolck, 《物理快报B》291，459（1992年）。[4] C. Ordóñez、L. Ray 和 U. van Kolck, 《物理评论快报》72，1982（1994年）。[5] H. Krebs, 《欧洲物理杂志A》56，234（2020年）。[6] J. L. Friar, 《物理年鉴（纽约）》104，380（1977年）。[7] J. L. Friar, 《物理评论C》22，796（1980年）。[8] T.-S. Park、D.-P. Min 和 M. Rho, 《物理报告》233，341 1993( )。[9] T.-S. Park、D.-P. Min 和 M. Rho, 《核物理A》596，515（1996年）。[10] T.-S. Park、K. Kubodeera、D.-P. Min 和 M. Rho, 《核物理A》684，101（2001年），物理学中的少体问题。[11] T.-S. Park、L. E. Marcucci、R. Schiavilla、M. Viviani、A. Kievsky、S. Rosati、K. Kubodera、D.-P. Min 和 M. Rho, 《物理评论C》67，055206（2003年）。[12] Y.-H. Song、R. Lazauskas、T.-S. Park 和 D.-P. Min, 《物理快报B》656，174（2007年）。[13] J. A. Eden 和 M. F. Gari, 《物理评论C》53，1510（1996年）。[14] E. Epelbaum、W. Gloeckle 和 U.-G. Meißner, 《核物理A》637，107（1998年）。[15] M. Piarulli、L. Girlanda、R. Schiavilla、R. Navarro Pérez、J. E. Amaro 和 E. Ruiz Arriola, 《物理评论C》91，024003 2015( )。[16] M. Piarulli、L. Girlanda、R. Schiavilla、A. Kievsky、A. Lo- vato、L. E. Marcucci、S. C. Pieper、M. Viviani 和 R. B. Wiringa, 《物理评论C》94，054007（2016年）。[17] S. Pastore、L. Girlanda、R. Schiavilla 和 M. Viviani, 《物理评论C》84，024001（2011年）。[18] M. Piarulli、L. Girlanda、L. E. Marcucci、S. Pastore、R. Schiavilla 和 M. Viviani, 《物理评论C》87，014006（2013年）。[19] E. Epelbaum、H. Krebs 和 U.-G. Meißner, 《物理评论快报》115，122301（2015年）。[20] E. Epelbaum、H. Krebs 和 U.-G. Meißner, 《欧洲物理杂志A》51，10.1140/epja/i2015-15053-8（2015年）。[21] P. Reinert、H. Krebs 和 E. Epelbaum, 《物理评论快报》126，092501（2021年），arXiv:2006.15360 [核物理理论]。[22] E. Epelbaum、W. Gloeckle 和 U.-G. Meißner, 《核物理A》671，295（2000年）。[23] Y.-H. Song、R. Lazauskas 和 T.-S. Park, 《物理评论C》**79**，064002（2009年）。[24] S. Pastore、S. C. Pieper、R. Schiavilla 和 R. B. Wiringa, 《物理评论C》**87**，10.1103/PhysRevC.87.035503（2013年）。[25] R. Schiavilla、A. Baroni、S. Pastore、M. Piarulli、L. Girlanda、A. Kievsky、A. Lovato、L. Marcucci、S. C. Pieper、M. Viviani 和 R. B. Wiringa, 《物理评论C》**99**，10.1103/PhysRevC.99.034005（2019年）。[26] B. R. Barrett、P. Navrátil 和 J. P. Vary, 《粒子与核物理进展》**69**，131（2013年）。[27] S. D. Głazek 和 K. G. Wilson, 《物理评论D》**48**，5863（1993年）。[28] S. D. Głazek 和 K. G. Wilson, 《物理评论D》**49**，4214（1994年）。[29] F. Wegner, 《物理学年鉴（莱比锡）》**506**，77（1994年）。[30] S. Pal，手征有效场论中的电弱多极算符，博士论文，爱荷华州立大学（2022年）。[31] J. D. Jackson, 《经典电动力学》，第3版（Wiley，新泽西州霍博肯，1999年）。[32] H. Krebs、E. Epelbaum 和 U.-G. Meißner, 《Few-Body Syst.》**60**，31（2019年）。[33] H. Krebs、E. Epelbaum 和 U.-G. Meißner, 《物理年鉴（纽约）》**378**，317（2017年）。[34] A. Bohr 和 B. R. Mottelson, 《核结构》（世界科学出版公司，新加坡，1998年）。[35] J. Suhonen, 《从核子到原子核：微观核理论概念》，《理论与数学物理》（Springer，德国柏林，2007年）。[36] E. Epelbaum、J. Golak、K. Hebeler、T. Hüther、H. Kamada、H. Krebs、P. Maris、U.-G. Meißner、A. Nogga、R. Roth、R. Skibiński、K. Topolnicki、J. P. Vary、K. Vobig 和 H. Witała, 《物理评论C》**99**，024313（2019年）。[37] S. Binder、A. Calci、E. Epelbaum、R. J. Furnstahl、J. Golak、K. Hebeler、H. Kamada、H. Krebs、J. Langhammer、S. Liebig、P. Maris、U.-G. Meißner、D. Minossi、A. Nogga、H. Potter、R. Roth、R. Skibiński、K. Topolnicki、J. P. Vary 和 H. Witała, 《物理评论C》**93**，044002 2016年( )。[38] S. Binder、A. Calci、E. Epelbaum、R. J. Furnstahl、J. Golak、K. Hebeler、T. Hüther、H. Kamada、H. Krebs、P. Maris、U.-G. Meißner、A. Nogga、R. Roth、R. Skibiński、K. Topolnicki、J. P. Vary、K. Vobig 和 H. Witala, 《物理评论C》**98**，014002（2018年）。

[39] E. Epelbaum 和 J. Gegelia，《欧洲物理杂志A》41，341（2009年）。[40] R. Machleidt 和 D. R. Entem，《Phys. Rep.》503，1（2011年）。[41] S. Kölling、E. Epelbaum、H. Krebs 和 U.-G. Meißner，《物理评论C》84，054008（2011年）。[42] J. Carlson 和 R. Schiavilla，《Reviews of Modern Physics》70，743（1998年）。[43] J. P. Vary、R. Basili、W. Du、M. Lockner、P. Maris、S. Pal 和 S. Sarker，《物理评论C》98，065502（2018年）。[44] M. A. Caprio、A. E. McCoy 和 P. J. Fasano，《J. Phys. G》47，122001（2020年）。[45] P. Maris、M. Sosonkina、J. P. Vary、E. Ng 和 C. Yang，《Procedia Computer Science》1，97（2010年），iCCS 2010。[46] M. Shao、H. M. Aktulga、C. Yang、E. G. Ng、P. Maris 和 J. P. Vary，《Computer Physics Communications》222，1 2018年( )。[47] D. A. Varshalovich、A. N. Moskalev 和 V. K. Khersonskii，《角动量量子理论》（世界科学出版公司，1988年）。[48] P. Maris、H. M. Aktulga、S. Binder、A. Calci、Ü. V. Çatalyürek、J. Langhammer、E. Ng、E. Saule、R. Roth、J. P. Vary 和 C. Yang，《J. Phys. Conf. Ser.》454，012063（2013年）。[49] S. K. Bogner、R. J. Furnstahl 和 R. J. Perry，《物理评论C》75，061001（2007年）。[50] S. Bogner、R. Furnstahl、P. Maris、R. Perry、A. Schwenk 和 J. Vary，《核物理A》801，21（2008年）。[51] E. D. Jurgenson、P. Navrátil 和 R. J. Furnstahl，《物理评论C》83，034301（2011年）。[52] E. D. Jurgenson、P. Maris、R. J. Furnstahl、P. Navrátil、W. E. Ormand 和 J. P. Vary，《物理评论C》87，054312（2013年）。[53] J. E. Purcell 和 C. G. Sheu，《Nucl. Data Sheets》130，1（2015年）。[54] P. Doleschall、I. Borbély、Z. Papp 和 W. Plessas，《物理评论C》67，064005（2003年）。[55] R. B. Wiringa、V. G. J. Stoks 和 R. Sc hiavilla，《物理评论C》51，38（1995年）。[56] S. C. Pieper、V. R. Pandharipande、R. B. Wiringa 和 J. Carlson，《物理评论C》64，014001（2001年）。[57] J. Carlson、S. Gandolfi、F. Pederiva、S. C. Pieper、R. Schiavilla、K. E. Schmidt 和 R. B. Wiringa，《Rev. Mod. Phys.》87，1067（2015年）。[58] J. D. Martin、S. J. Novario、D. Lonardoni、J. Carlson、S. Gandolfi 和 I. Tews，采用手征有效场论相互作用计算轻核磁矩的辅助场扩散蒙特卡罗计算（ 2023 2301 08349 ），[ ] arXiv：. nucl-th .[59] S. Kölling、E. Epelbaum、H. Krebs 和 U. G. Meißner，《物理评论C》80，045502（2009年）。[60] D. O. Riska，《粒子与核物理进展》11，199 1984年( )。[61] S. Pastore、R. Schiavilla 和 J. L. Goity，《物理评论C》78，064002（2008年）。