arXiv:2304.01394v1 [math.CO] 3 Apr 2023

仿射根系麦克唐纳恒等式的组合解释

DAVID WAHICHE

Abstract. 我们探讨整数向量与视为双无限字的整数分拆之间的一些联系。这种方法使我们能够用辛 Schur 函数和特殊正交 Schur 函数，对七个无限族仿射根系的麦克唐纳恒等式作出组合解释。根据这些结果，我们能够推导出与各个族相关的 q-Nekrasov–Okounkov 公式。不过，我们只给出类型 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{C}^{\vee}$的结果，并概述类型 $\tilde{C}$的证明。

关键词：整数分拆、钩长、仿射根系的麦克唐纳恒等式、Littlewood 分解、 q-Nekrasov–Okounkov 公式。

1. 引言与记号

组合学和表示论中有许多涉及钩长的公式。从 2006 年到 2008 年，若干作者运用表示论 [19], 规范理论 [12] 和组合学 [5], 中的多种方法，证明了所谓的 Nekrasov–Okounkov 公式，其表述如下：

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} T^{|\lambda|} \prod_{h\in\mathcal{H}(\lambda)} \left(1-\frac{z}{h^2}\right) = \prod_{k\geq 1} \left(1-T^k\right)^{z-1}. \tag{1.1}$$

Here T 是一个形式变量， $z\in\mathbb{C}$, $\mathcal{P}$ 是整数分拆的集合，而 $\mathcal{H}(\lambda)$是分拆T 的多重 et of h重数。

这个公式不仅涵盖了在（1.1）中令 z =为 0 所得到的 $\mathcal{P}$ 生成级数，实际上还给出了 Dedekind η 函数的幂与整数分拆之间的联系。文献中可以找到（1.1）的若干推广，其中 Rains–Warnaar [14], 利用 Macdonald 多项式的精细斜柯西型恒等式证明了一个（q,t）-推广。Carlsson–Rodriguez- Villegas [1] 也独立地通过顶点算子和多重对称指数得到了这一结果。如[14], 所述，特殊情形 $q=t$ 是对 Dehaye–Han [2] 和 Iqbal– Nazir–Raza–Sale m [7] 的一个结果的改写，具体如下：

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} T^{|\lambda|} \prod_{h\in\mathcal{H}(\lambda)} \frac{(1-uq^h)(1-u^{-1}q^h)}{(1-q^h)^2} = \prod_{k,r\geq 1} \frac{(1-uq^rT^k)^r(1-u^{-1}q^rT^k)^r}{(1-q^{r-1}T^k)^r(1-q^{r+1}T^k)^r}. \tag{1.2}$$

这里， T 和 q 是形式变量，且 $u\in\mathbb{C}$。注意，在（1.2）中取 $u=q^z$ 并令 $q\to 1$ ，即可得到（1.1），尽管对于乘积一侧而言，这一点并非显而易见。

Han 证明 (1.1) 的方法与 Dehaye–Han 证明 (1.2) 的方法，都从仿射根系的麦克唐纳公式在类型 A 下的一个特殊-˜化开始。然而，要得到 (1.2)，其中一种方法需要使用类型 A 的未特化麦克唐纳恒等式。这类恒等式可见于 [15], ，例如 Rosengren 和 Schlosser 在其中给出了七个无限仿射根系的麦克唐纳恒等式的证明，并采用了椭圆行列式求值（另见 Stanton 在 [16] 中的改写）。在 [2] 中证明 (1.2) 的下一步使用了新的组合概念



(a) $\lambda = (5, 3, 3, 1, 1) \in \mathcal{SC}$ (b) $\lambda = (6, 4, 4, 1, 1) \in \mathcal{DD}$

FIGURE 1. 用 ε 填充的自共轭分拆与双倍互异分拆

例如爆炸杨表，以及一种改编自 Garvan–Kim–Stanton 的 V_t-编码 [4]。这些技巧与本文介绍的方法相近。然而，将其推广到其他类型似乎较为复杂。

正整数 λ 的一个分拆 n 是一个非递增的正整数序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$，满足 $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell = n$。$\lambda_i$ 是 λ 的各部分，部分的个数 ℓ 即为 λ 的长度，记作 $\ell(\lambda)$。每个分拆都可以用其费雷尔图表示，它由有限个方格组成，这些方格排列成左对齐的行，且各行长度按非递增顺序排列。λ 的杜尔菲方块是能够置于费雷尔图中的最大正方形。其对角线 Δ 称为 λ 的主对角线。其大小为 $d = d_\lambda := \max(s | \lambda_s \geq s)$。现在引入一个带符号统计量 ε，它已见于 [13]。对于坐标为 (i, j) 的 λ 中的一个方格 s，若 s 严格位于费雷尔图主对角线下方，则 ε_s 定义为 -1；否则定义为 1，如图1所示。分拆 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{\lambda_1})$ 是 λ 的共轭分拆，其中 λ'_j 表示第 j 列中的方格数。

回忆一下，s的钩长记为 h_s，它等于满足以下条件之一的方格数：v 或者$s = v$；或者 v 位于 s 的同一列（分别是同一行）中，且严格在其下方（分别是右侧）。对于任意 $t \in \mathbb{N}^*$，所有模 t同余于 0 的钩长构成的多重集记为 $\mathcal{H}_t(\lambda)$。注意，$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_1(\lambda)$。若分拆 ω 满足 $\mathcal{H}_t(\omega) = \varnothing$，则称其为 t-核。对于任意$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$，令 $\mathcal{A}_{(t)}$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有属于 t-核的元素构成的子集。例如，唯一的 2-核是任意 $k \in \mathbb{N}^*$对应的“阶梯形”分拆 $(k, k-1, \ldots, 1)$。

若整数分拆 λ 的费雷尔图关于主对角线对称，则称其为自共轭分拆。令 $\mathcal{SC}$ 为自共轭分拆的集合。双倍互异分拆的集合记为 $\mathcal{DD}$，它由所有杜尔菲方块大小为 d_λ 且满足 $\lambda_i = \lambda'_i + 1$（对所有 $i \in \{1, \ldots, d\}$）的分拆 λ 组成。例如，在图1a中，$\lambda = (5, 3, 3, 1, 1) \in \mathcal{SC}$的主对角线$\Delta$ 以绿色阴影标出；图1b中，$\lambda = (6, 4, 4, 1, 1) \in \mathcal{DD}$ 的主对角线也以绿色阴影标出。黄色阴影部分对应于添加到自共轭分拆中、从而得到一个 $\mathcal{DD}$ 分拆的方格。这些分拆子集出现在表示类型 B、C 和 D [11, p.79] 的 Weyl 分母公式时，并且在 P´etr´eolle [13] 的研究中尤为重要；他在其中推导出了两个关于$\mathcal{SC}$ 和 $\mathcal{DD}$ 的 Nekrasov–Okounkov 型公式。例如，他证明了以下 Nekrasov–Okounkov 型公式。该公式来自对类型C的 Macdonald 恒等式作基本特化；它表明，对于形式变量 T 和任意复数 z：

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{DD}} (-1)^{d_\lambda} T^{|\lambda|} \prod_{\substack{s \in \lambda \\ h_s \in \mathcal{H}(\lambda)}} \left(1 - \frac{2z+2}{h_s \varepsilon_s}\right) = \prod_{k \geq 1} \left(1 - T^k\right)^{2z^2 + z}. \tag{1.3}$$

设 a 和 T 为形式变量。回顾一下，T-Pochhammer 符号定义如下：

$$(a;T)_0 = 1, \quad (a;T)_\infty = \prod_{j \geq 0} (1 - aT^j), \quad \text{and} \quad (a_1, \ldots, a_n)_\infty = (a_1;T)_\infty \ldots (a_n;T)_\infty.$$

我们用 sp（分别用 so）表示经典辛（分别为奇正交）Schur 函数（例如参见 [3]）。设 t 为严格正整数，令 $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_t)$，并引入：

$$K_T(t, \mathbf{x}) = \prod_{1 \le i < j \le t} \left(Tx_ix_j, Tx_i^{-1}x_j^{-1}, Tx_ix_j^{-1}, Tx_jx_i^{-1}; T\right)_\infty .$$

这篇扩展摘要旨在从组合角度考察所有麦克唐纳恒等式与 Nekrasov–Okounkov 公式之间的联系。根据 [15]（另见 [10, 16]）中的推论~6.2，类型 C_t 的 Macdonald 恒等式如下：

$$\Delta_C(\mathbf{x})\,(T;T)_\infty^t \prod_{i=1}^{t} \left(Tx_i^2, Tx_i^{-2}; T\right)_\infty K_T(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^t} \sum_{\sigma \in S_t} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{t} x_i^{(2t+2)m_i} \times T^{2(t+1)\binom{m_i}{2} + (t+1)m_i} \left((x_iT^{m_i})^{\sigma(i)-t-1} - (x_iT^{m_i})^{t+1-\sigma(i)}\right), \tag{1.4}$$

其中 $\Delta_C(\mathbf{x}) = \prod_{1 \le i \le t} x_i^{-t}(1 - x_i^2) \prod_{1 \le i < j \le t}(x_j - x_i)(1 - x_ix_j)$。本文将重点讨论类型 $\tilde{C}_t$（在 [9]中记作 $\tilde{C}_t^{(1)}$）和 $\tilde{C}_t^\vee$（在 [9]中记作 $\tilde{D}_{t+1}^{(2)}$），但该方法同样适用于其他类型。通过将 Littlewood 分解计算为视作由“0”和“1”组成的双无限序列的分拆（精确定义及性质见第 2 节），可以依据 Garvan–Kim–Stanton [4]的思路，将式 (1.4) 中作为 T 指数的二次型解释为一个加倍的互异（$2t + 2$）核分拆的权重的一半。引入 $V_{g,t}$-编码的概念（见定义 5），即双无限序列中“0”的最后若干个指标（模 g），并且 $H_+ := \{h_s < g, \varepsilon_s = 1\}$，即可将式 (1.4) 的右端重新解释如下：

T ~定理 1。设 $t \in \mathbb{N}^*$。类型 C_t 的 Macdonald 恒等式可改写如下 *s:*

$$\sum_{\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}} (-1)^{d_\omega + |H_+|} T^{|\omega|/2} \mathrm{sp}_\mu(\mathbf{x}) = (T)_\infty^t \, K_T(t, \mathbf{x}) \prod_{i=1}^{t} \left(Tx_i^2, Tx_i^{-2}; T\right)_\infty , \tag{1.5}$$

其中，v 是与 ω 对应的$V_{g,t}$−编码（见定义 5），且 $\mu \in \mathcal{P}$ 满足$\mu_i := v_i + i - 2t - 2$ 对所有 $1 \le i \le t$ 均成立。

类似地，我们得到如下结果：

~定理 2。设 $t \in \mathbb{N}^*$。类型 $C_t^\vee$的 Macdonald 恒等式可改写如下：

$$\sum_{\omega \in \mathcal{SC}_{(2t)}} (-1)^{|H_+| + |H_+ \cap \Delta| + d_\omega} T^{|\omega|/2} \, \mathrm{so}_\mu(\mathbf{x}) = \left(T^{1/2}; T^{1/2}\right)_\infty (T;T)_\infty^{t-1} \, K_T(t, \mathbf{x}) \prod_{i=1}^{t} \left(T^{1/2}x_i, T^{1/2}x_i^{-1}; T^{1/2}\right)_\infty$$

其中，v 是与 ω 对应的$V_{g,t}$−编码（见定义 5），且 $\mu \in \mathcal{P}$ 满足$\mu_i := v_i + i - 2t$ 对所有 $1 \le i \le t$均成立。

作为我们研究结果的推论，我们可以证明以下 Nekrasov– Okounkov 型恒等式的 q-类比。

定理 3. 对于形式变量 T、 q 以及任意复数 u，有：

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{DD}}(-u)^{d_\lambda}T^{|\lambda|/2}\prod_{s\in\lambda}\frac{1-u^{-2\varepsilon_s}q^{h_s}}{1-q^{h_s}}\prod_{s\in\Delta}\frac{1+uq^{h_s/2}}{1+u^{-1}q^{h_s/2}} = \prod_{m,r\geq 1}\frac{1+uq^{r-1}T^m}{1+u^{-1}q^rT^m}\frac{\left(1-u^{-2}q^{r+2}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}\left(1-u^2q^{r-1}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}}{\left(1-q^rT^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}\left(1-q^{r+1}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}} \tag{1.6}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{SC}}(-1)^{d_\lambda}T^{|\lambda|/2}\prod_{s\in\lambda}\frac{1-u^{-2\varepsilon_s}q^{2h_s}}{1-q^{2h_s}}\prod_{s\in\Delta}\frac{1-uq^{h_s}}{1-u^{-1}q^{h_s}} = \prod_{m,r\geq 1}\frac{\left(1-T^{m/2}\right)}{\left(1-T^m\right)}\frac{1-u^{-1}q^{2r-1}T^{m/2}}{1-uq^{2r-1}T^{m/2}}\frac{\left(1-u^{-2}q^{2(r+1)}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}\left(1-u^2q^{2r}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}}{\left(1-q^{2r}T^m\right)^{r+1-\lfloor (r+1)/2\rfloor}\left(1-q^{2(r+1)}T^m\right)^{r-\lfloor r/2\rfloor}}. \tag{1.7}$$

注意，在（1.6）中取 $u=q^z$ 并令 $q\to 1$，即可得到（1.3）；而在（1.7）中，这将导出一个新的 Nekrasov–Okounkov 型公式。事实上，附录 [10] 中的所有麦克唐纳恒等式，都可以通过对定理 1 和定理 2 及其其他类型的类似定理进行特化和取极限而导出。在第 2 节中，我们介绍一种用单词计算 Littlewood 分解的方法，从而明确建立 t-核与整数向量之间的联系。在第 3 节中，我们利用对 Littlewood 分解的这一描述，刻画 t-核子集（如 $\mathcal{DD}_{(2t+2)}$）的钩长乘积。我们推导出定理 6，但只给出证明所需的引理。最后一节中，我们概述定理 1 和定理 $3\tilde{}$ 的证明，但仅针对类型 C。

2. Combinatorial properties of the Littlewood decomposition on certain subsets of partitions

本节采用 Han–Ji [6] 的形式体系。令 $\partial\lambda$ 为 λ 的费雷尔图的边界。按图 2 所示，将沿边界从西南向东北的行走编码：垂直步记为“0”，水平步记为“1”。由此得到一个 $0/1$ 序列，记作 $s(\lambda)$。这个由 $\{0,1\}$ 字母表构成的词在开头有无穷多个“0”（相应地，末尾有无穷多个“1”），以 $\mathbb{Z}$ 为指标，并写作 $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$。

这种将其写成序列的方式并不唯一（因为对于任意 k 序列，$(c_{k+i})_{i\in\mathbb{Z}}$ 定义同一个分拆），因此必须唯一确定指标 0（以确保这种编码是双射）。为解决这个问题，我们将指标 0 设在这样的位置：该指标右侧“0”的数量等于其左侧“1”的数量。换言之，$(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 中负指标“1”所对应的沿 $\partial\lambda$ 水平步数，必须等于 $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 中非负指标“0”所对应的沿$\partial\lambda$垂直步数。指标为 -1 的字母与指标为 0 的字母之间的分界称为该词的中位线，并以 $|$ 符号标记。杜尔菲方块的大小等于负指标“1”的数量。因此，映射 s 将一个分拆与该词双射对应：

$$s(\lambda)=(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(\ldots c_{-2}c_{-1}|c_0c_1c_2\ldots),$$

其中 $c_i\in\{0,1\}$ 对任意 $i\in\mathbb{Z}$，并且满足

$$\#\{i\leq -1, c_i=1\}=\#\{i\geq 0, c_i=0\}<\infty.$$

引理 1。此应用将费雷尔图 λ 中钩长为 h_s 的一个方格 s 双射到 $s(\lambda)$ 的一对指标 $(i_s,j_s)\in\mathbb{Z}^2$，使得 $i_s<j_s$, $c_{i_s}=1$ 和 $c_{j_s}=0$, $j_s-i_s=h_s$。

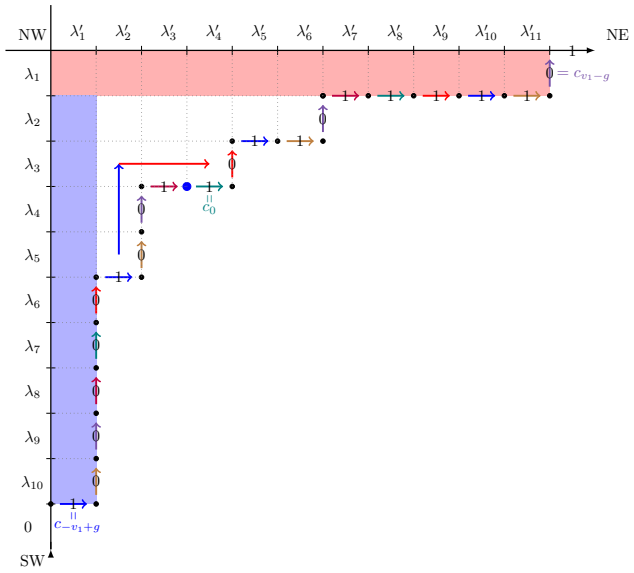

FIGURE 2. $\omega = (11, 6, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathcal{DD}_{(6)}$ 及其二进制对应

下面的引理 2 可用于确定一个方格的位置。

引理 2. ([17, 引理 2.1]) 设 $\lambda \in \mathcal{P}$ 和 $s(\lambda)$ 是其对应的词。设 s 是 λ 的费雷尔图中的一个方格。令 $(i_s, j_s) \in \mathbb{Z}^2$ 为与 s 相关联的 $s(\lambda)$ 中的指标。当且仅当 $|i_s| \leq |j_s|$ 时，s 是 λ 的费雷尔图中严格位于主对角线上方的一个方格。

下面的映射通常称为 Littlewood 分解（例如参见 [4, 6] ）。

定义 4. 设 $t \geq 2$ 为一个整数，并考虑:

$$\Phi_t : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P}_{(t)} \times \mathcal{P}^t \\ \lambda & \mapsto & (\omega, \nu^{(0)}, \ldots, \nu^{(t-1)}), \end{array} \right.$$

其中，若 $s(\lambda) = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，则对所有 $k \in \{0, \ldots, t-1\}$，有 $\nu^{(k)} := s^{-1}\left((c_{ti+k})_{i\in\mathbb{Z}}\right)$。元组 $\underline{\nu} = \left(\nu^{(0)}, \ldots, \nu^{(t-1)}\right)$ 是 t 的商，记作 $quot_t(\lambda)$；而 ω 是 λ 的核，记作 $core_t(\lambda)$。

从 $s(\lambda) = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 得到 t-商很简单：我们只需查看指标模 t 后余数相同的子词。将这些子词中的 10 依次替换为 01，直到子词都变成无限个“0”后接无限个“1”的序列（实际上，这相当于移除 λ 中长度模 t 为 0 的所有边钩）。然后，ω 就是与如下词对应的分拆：其子词（模 t）是在移除 10 序列后得到的。

例如，如果取 $\lambda = (4, 4, 3, 2)$ 和 $t = 3$，那么 $s(\lambda) = \ldots 001101|010011 \ldots$

$$\begin{array}{l} s\left(\nu^{(0)}\right) = \ldots 001|001 \ldots \\ s\left(\nu^{(1)}\right) = \ldots 000|111 \ldots \\ s\left(\nu^{(2)}\right) = \ldots 011|011 \ldots \end{array} \longmapsto \left| \begin{array}{l} s(w_0) = \ldots 000|011 \ldots, \\ s(w_1) = \ldots 000|111 \ldots, \\ s(w_2) = \ldots 001|111 \ldots. \end{array} \right.$$

因此 $s(\omega) = \ldots 00000|01111\ldots$，并且

$$quot_3(\lambda) = \left(\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}\right) = ((1,1), \varnothing, (2)), \ core_3(\lambda) = \omega = (1)$$

因此，可以将 t-核分拆看作 Littlewood 分解中 t-商为空的分拆。设 ω 为一个分拆，当且仅当 $quot_t(\omega) = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$ 时，它是一个 t-核。这等价于说，所有（模 t）子词都具有 $\ldots 0011 \ldots$ 的形式，也就是说，先是无限个 “0”，然后是无限个 “1”。对于任意 $i \in \{0, \ldots, t-1\}$，定义 $n_i := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid c_{i+kt} = 1\}$。每个 n_i 对应于 $s(\omega)$ 中指标与 i（模 t）同余的子词里第一个“1”的指标。回忆一下，单词 $s(\omega)$ 中负指标“1”的数量与正指标“0”的数量相同。这等价于要求 $\sum_{i=0}^{t-1} n_i = 0$，因此 $\omega \in \mathcal{P}_{(t)}$ 与 $(n_i)_{i\in\{0,\ldots,t-1\}} \in \mathbb{Z}^t$之间存在一个自然的双射，使得 $\sum_{i=0}^{t-1} n_i = 0$。

例如，若取 $\omega = (4, 2)$ 和 $t = 3$，则

$$s(\omega) = \ldots 00001\,1|01101\,1111\ldots \longmapsto \left| \begin{array}{ll} s(w_0) = \ldots 000 & |\underbrace{001}_{n_0=2}1\ldots, \\ s(w_1) = \ldots 00\underbrace{1}_{n_1=-1} & |111\ldots, \\ s(w_2) = \ldots 00\underbrace{1}_{n_2=-1} & |111\ldots. \end{array} \right.$$

在 [8], 中，Johnson 使用分拆的费米子视角（与上文所述相同）证明，这一双射实际上就是 Garvan–Kim–Stanton 在 [4]中使用的双射。这里我们用词的指标重新表述 [8, 第 2] 节λ 中的内容：设 t 为一个分拆， t为一个严格正整数。算盘恰好对应于具有固定剩余类（模 t）的 $s(\lambda)$ 的 n_i子词，而 Bijection 2 中定义的 [4] 中的各个 i则对应于算盘上第 i 个跑道的电荷。因此，特别地，若 ω 是一个 t-核分拆，其对应词为 $s(\omega) = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，并且设 $\phi(\omega) := (n_0, \ldots, n_{t-1})$，则$n_i = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid c_{kt+i} = 1\}$。此外，我们有：

$$|\omega| = \frac{t}{2}\sum_{i=0}^{t-1} n_i^2 + \sum_{i=0}^{t-1} i n_i. \tag{2.1}$$

3. Hook length product of t-core partitions

本节旨在介绍证明定理 6 所需的材料。定理 6 是关于钩长乘积的一个计数结果。该结果对于得到定理 3 至关重要，正如引言中所述（更多详情另见第 4 节）。本扩展摘要仅关注针对 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{C}^\vee$ 的结果，这些结果以独立形式陈述，以避免使用特征函数（因为特征函数会使陈述变得复杂）。不过请注意，七个无限族都有类似的陈述。至于用于证明定理 6 的技术结果，则仅针对 $\mathcal{DD}_{(2t+2)}$情形陈述，同样是为了避免特征函数及其带来的技术复杂性。 $\mathcal{SC}_{(2t)}$、$\mathcal{SC}_{(2t+1)}$ 和 $\mathcal{DD}_{(2t+1)}$ 的情形也以相同方式得到；统一的表述和证明见 [18]。定理 6 涉及V_g, t-编码：这是一种特殊的整数向量（见定义 5），可与任意一个 $\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 相关联（见命题 7）。

令 $t \in \mathbb{N}^*$。第 2 节末尾为任意 t-核 ω关联一个整数向量 $\phi(\omega)$。按照 [1], , 可将此向量按“自然”顺序排列（即该顺序继承自

剩余类（模 t）的顺序）：

$$n_k := \left\lfloor \frac{\lambda_i - i}{t} \right\rfloor + 1, \quad i = \min\{\nu \mid \lambda_\nu \equiv k \pmod t\}. \tag{3.1}$$

Littlewood 分解限制到 $\mathcal{DD}$时，也具有一些有趣的性质，可表述如下（例如，[4, 13] ）：

$$\lambda \in \mathcal{DD} \mapsto \begin{cases} (\omega, \tilde{\underline{\nu}}) \in \mathcal{DD}_{(t)} \times \mathcal{DD} \times \mathcal{P}^{(t-1)/2} & \text{if } t \text{ is odd}, \\ (\omega, \tilde{\underline{\nu}}, \mu) \in \mathcal{DD}_{(t)} \times \mathcal{DD} \times \mathcal{P}^{(t-2)/2} \times \mathcal{SC} & \text{if } t \text{ is odd}. \end{cases} \tag{3.2}$$

$\mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 分拆的这种对称性为相关的整数向量带来了一些额外条件。Garvan–Kim–Stanton [4] 已经研究过这些条件，不过这里的表述略有不同。设 $\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 和 $\phi(\omega) = (n_0, n_1, \ldots, n_{2t+1})$ 如上所述。$\mathcal{DD}$ 的对称性确保了 $n_0 = 0$，并且对所有 $i \in \{1, \ldots, 2t+1\}$，都有 $n_i = -n_{2t+2-i}$，这尤其意味着 $n_t = 0$。由 (2.1)，于是有：

$$|\omega| = (t+1)\sum_{i=0}^{2t+1} n_i^2 + \sum_{i=0}^{2t+1} i n_i = 2\left((t+1)\sum_{i=0}^{t-1} n_i^2 + \sum_{i=0}^{t-1}(i-t-1)n_i\right) \tag{3.3}$$

因此，利用这一形式体系，可以结合 Littlewood 分解和词分解，恢复 [4] 中给出的整数向量。在按 T 的幂展开 (1.4) 时，先前二次型的一半出现在指数中。

例 1. 上面的图 2 展示了当 $t = 6$ 时一个 $\mathcal{DD}$ 的情形。箭头分为六种不同的颜色，每种颜色对应于 ω 中相应词的指标模 6 的一个固定剩余类。对应于 ω 的词如下：

$$s(\omega) = \cdots 0000001000001001|10110111110111111111\cdots.$$

提取模 6 的固定剩余类所对应的子词后，我们得到：

$$s(w_0) = \cdots 000|111\cdots, \quad s(w_1) = \cdots 000|011\cdots \quad s(w_2) = \cdots 011|111\cdots$$
$$s(w_3) = \cdots 000|111\cdots, \quad s(w_4) = \cdots 000|001\cdots, \quad s(w_5) = \cdots 001|111\cdots$$

使得 $(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (0, 1, -2, 0, 2, -1) \in \mathbb{Z}^6$.

任意 $\mathcal{DD}$ 分拆关于其主对角线的对称性给出了以下限制，正如 [4] 中所述：

$$\omega \in \mathcal{DD}_{(6)} \longleftrightarrow (1, -2) \in \mathbb{Z}^2.$$

类似地，$\mathcal{SC}_{(2t)}$ 分拆的对称性会对相应的整数向量施加额外条件：设 $\omega \in \mathcal{SC}_{(2t)}$ 和 $\phi(\omega) = (n_0, n_1, \ldots, n_{2t-1})$，则对所有 $i \in \{0, \ldots, 2t-1\}$，都有 $n_i = -n_{2t-1-i}$，特别是 $n_t = 0$。由 (2.1)，我们有：

$$|\omega| = (2t)/2\sum_{i=0}^{2t-1} n_i^2 + \sum_{i=0}^{2t-1} i n_i = \sum_{i=0}^{t-1}((2t)n_i^2 + (2(i-t)-1)n_i). \tag{3.4}$$

有序整数向量 $\phi(\omega)$仍缺少一些性质，尚不足以成为证明定理 1、3 和 6 所需的组合工具。这些性质正是称为 $V_{g,t}$-编码（定义见 [18]）的整数向量所具备的。本文旨在为任意 $\phi(\omega)$赋予一个 $V_{g,t}$-编码。在进一步讨论之前，我们先通过以下观察说明定义 5 的动机：Stanton 利用 q-级数的性质以及韦伊群在仿射根系上的作用，为麦克唐纳恒等式 [16]给出了新的证明。这些恒等式中的求和涉及整数向量，因此，ϕ（一个在分拆与整数向量之间建立双射的映射）的存在促使我们重新表述 Stanton 的工作。从˜这一角度出发，[16, 针对类型 C_t 的命题 3.7] 说明了为何只需考虑分拆

˜在 $\mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 中应考虑类型 C_t：事实上，只有这些分拆所对应的整数向量会以非平凡的方式对类型 C_t的麦克唐纳恒等式˜中的和作出贡献。

˜ ˜由于本扩展摘要仅关注类型 C_t 和 $C_t^\vee$的结果，以下定义 5 限定于这些类型。（ [18]的）一般定义和定义 5 都涉及由 $M = g\Lambda$ 在 [10, p.134]中的等式定义的仿射根系参数 g 。特别是，˜如果所考虑的仿射代数属于类型 C_t，则有 $g = 2t + 2$；如果属于类型˜ $C_t^\vee$，则有 $g = 2t$。

定义 5. 设 $t \in \mathbb{N}^*$ 和 $g \in \mathbb{N}^*$ 满足 $t \le g$，则令 $\lambda \in \mathcal{P}$，并令 $s(\lambda) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 为其对应的二进制词。对于 $i \in \{0, \dots, g-1\}$，定义 $\beta_i := \max\{(k+1)g+i \mid c_{kg+i} = 0\}$。令 $\sigma\colon \{1, \dots, g\} \to \{0, \dots, g-1\}$ 为满足 $\beta_{\sigma(1)} > \cdots > \beta_{\sigma(g)}$的唯一排列。向量 $\mathbf{v} := (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(t)})$称为与 λ对应的 $V_{g,t}$-编码。

注意，Dehaye–Han 在 [2] 中引入了一种 V_t-编码，用于联系 Macdonald˜恒等式与类型 A_{t-1} 和 t-核分拆；这种编码对应于 $V_{t,\ t}$-编码。现在我们可以陈述定理 6，并给出证明它所需的关键技术结果。

定理 6。设 t 为一个正整数，且 $g = 2t + 2$。令 $\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^t$ 为其对应的 $V_{g,\ t}$-编码，并对任意 $i \in \{1, \dots, t\}$设 $r_i = v_i - t - 1$。则有

$$|\omega| = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{t} r_i^2 - \frac{(g/2-1)(g-1)}{12},$$

并令 $\alpha_i(\omega) := \#\{u \in \omega, h_u = g - i, \varepsilon_u = 1\}$；对于任意函数 $\tau\colon \mathbb{Z} \to F^\times$，其中$F$ 是一个域，也有

$$\prod_{s\in\omega} \frac{\tau(h_s - \varepsilon_s g)}{\tau(h_s)} = \prod_{i=1}^{g-1} \left(\frac{\tau(-i)}{\tau(i)}\right)^{\alpha_i(\omega)} \prod_{i=1}^{t} \frac{\tau(r_i)}{\tau(i)} \prod_{1\le i<j\le t} \frac{\tau(r_i - r_j)}{\tau(j-i)} \frac{\tau(r_i + r_j)}{\tau(g-i-j)}.$$

要证明定理 6，需要将一个整数向量双射地对应到任意分拆。出于技术和概念上的原因（分别是便于归纳证明，以及将行列式解释为舒尔函数），相关向量需要经过排序。迄今引入的 $V_{g,\ t}$-编码是自然的候选，但仍需证明它们与分拆之间存在双射。这正是命题 7 要解决的问题。

命题 7. 设 t 为正整数。集合 $\mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 和 $\mathcal{SC}_{(2t)}$ 中的任意 λ 都与其 $V_{g,t}$-编码一一对应，其中 g 是相应集合的指标。

设 $s(\omega)$ 是通过词分解与 ω 对应的词。根据命题 7，与 ω 相关联的 $V_{g,t}$-编码，可以在从右向左读取 $s(\omega)$ 时直接得到：例如， v_1 是子词（mod g）中第一个“1”的指标，而该子词是 $s(\omega)$ 中包含最后一个“0”的子词。引理3通过对分拆的杜尔菲方块边长进行归纳，证明定理 6。与引理1和引理2采用相同思路，它利用各方格的一对指标，对最大钩子中的方格进行计数。最终，如图 2 中红色和蓝色阴影区域所示，设 s 是第一个钩子中 λ 的一个方格。那么，$\varepsilon_s = 1$分别推出 $j_s = v_1 - g$，而 $\varepsilon_s = -1$分别推出 $i_s = -v_1 + g$ 和 $j_s < v_1 - g$。

我们将 g-区间定义为 $\mathrm{I}_m^{g\ +}{}_{,\ M} := \{k \in \mathbb{Z} \mid m \le k < M, k \equiv m \pmod g\}$ 和 $\mathrm{I}^{g,}{}_{\bar{m}\ ,\ M} := \{l \in \mathbb{Z} \mid m < l \le M, l \equiv M \pmod g\}$。自从我们开始尝试枚举具有固定剩余类 (mod g) 的钩长以来，这一概念对我们的情况尤其重要。定理 6 的证明中的关键要素是， g-区间使我们能够将涉及一般函数 τ 的乘积转化为望远镜因子。

引理3. 设 $\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 使得 $g = 2t+2$，并令 $(v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$ 为其对应的$V_{g,\ t}$-编码。那么， ω的最大钩子（记作 H_1）对应于方格集合$\mathcal{H}_{1,\ +} \cup \mathcal{H}_{1,\ -}$ 其中 $\mathcal{H}_{1,\ +}$ 是第一个钩子中满足以下条件的方格 s 的指标： $\varepsilon_s = 1$:

$$\mathcal{H}_{1,+} = \mathrm{I}^{g,+}_{-v_1+g,v_1-g} \cup \mathrm{I}^{g,+}_{0,v_1-g} \cup \mathrm{I}^{g,+}_{g/2,v_1-g} \bigcup_{i=2}^{t} \left(\mathrm{I}^{g,+}_{v_i,v_1-g} \cup \mathrm{I}^{g,+}_{-v_i+g,v_1-g} \right),$$

并且 $\mathcal{H}_{1,\ -}$ 是第一个钩子中方格 s 的指标集合，使得 $\varepsilon_s = -1$:

$$\mathcal{H}_{1,-} = \mathrm{I}^{g,-}_{-v_1+g,v_1-2g} \cup \mathrm{I}^{g,-}_{-v_1+g,-g} \cup \mathrm{I}^{g,-}_{-v_1+g,-g/2} \bigcup_{i=2}^{t} \left(\mathrm{I}^{g,-}_{-v_1+g,v_i-g} \cup \mathrm{I}^{g,-}_{v_1-g,-v_i} \right).$$

最后，我们还需要以下引理，以便将定理 6 应用于麦克唐纳恒等式的特化。

引理 4. 设 $\omega \in \mathcal{DD}_{(2t+2)}$ 和 $s(\omega) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$。设 $u_i = (2t+2)n_i + i$ 为子词 $(c_{i+(2t+2)k})_{k\in\mathbb{Z}}$中第一个字母“1”的指标，其中 $(n_i) = \phi^{-1}(\omega)$。设 $(v_i)_{i\in\{1,\dots t\}}$ 为一个$V_{g,\ t}$-编码。则 σ：命题 5 的 $\{1,\dots,t\} \to \{0,\dots 2t+1\}$ 满足 $v_i = u_{\sigma(i)}$，其中 $i \in \{1,\dots t\}$。我们有：

$$|H_+| = \#\{s \in \omega, h_s < 2t+2, \varepsilon_s = 1\} \equiv d_\omega + \mathrm{sign}(\sigma) \pmod 2.$$

4. Sketch of proof of Theorems 1 and 3

我们首先展开 (1.4) 的右端，并提取其中关于 T 的项。T 的幂对应于 (3.3)。通过变量替换和引理 4，我们可以取 $\omega = \phi^{-1}(\mathrm{m})$，并推出定理 1。

现在我们为 $\mathcal{DD}$ 推导定理 3。为此，我们先证明等式：对任意严格正整数 t，在等式两边令 $u = q^t$。通过对乘积进行技术性变形，(1.6) 的右端恰好等于定理 1 的右端（当 $x_i = q^i$ 时），这就完成了证明的第一步。

在定理 6 中令 $\tau(x) = 1 - q^x$，再将所得表达式乘以主对角线上钩长的乘积 Δ，即可得到 (1.6) 的左端。我们证明：

$$\mathrm{sp}_\mu(q, q^2, \dots, q^t) = (-1)^{|H+|} q^{(t+1)d_\lambda} \prod_{s\in\lambda} \frac{1-q^{h_s-(2t+2)\varepsilon_s}}{1-q^{h_s}} \prod_{s\in\Delta} \frac{1+q^{t+1+h_s/2}}{1+q^{-t-1+h_s/2}}. \tag{4.1}$$

上述等式的证明通过对 $r_1 = \max_{1\le i\le t}(r_i)$ 进行归纳法完成，其中该量按定理 6 中的定义。首先注意，(4.1) 右端对 Δ 中元素所作的乘积是一个望远镜乘积，等于 $\prod_{i=1}^{t}(1+q^{r_i})/(1+q^i)$。对于 (4.1) 的左端，行列式之商 $\det(q^{ir_j} - q^{-ir_j})/\det(q^{i(t+1-j)} - q^{-i(t+1-j)})$ 可通过注意到它等于 $\det((q^{r_j})^i - (q^{r_j})^{-i})/\det((q^{t+1-j})^i - (q^{t+1-j})^{-i})$ 来计算。最后，我们通过验证等式两边具有相同的初始值和相同的归纳性质，得出结论。

证明的最后一步是验证（1.6）两边都是关于变量 u 的 Laurent多项式。再利用多项式性论证，说明（1.6）对任意 u 均成立，便可得出结论。

致谢。作者谨向 FP-SAC 委员会的匿名评审致谢，感谢他们提出富有启发性的意见，显著提升了这篇扩展摘要的质量与可读性。作者还要感谢 Benjamin Dupont、Marion Jeannin、Philippe Nadeau 和 Nicolas Ressayre 的帮助，以及与他们进行的富有成效的交流。如有任何批评意见，请专门向本文作者提出。

References

[1] Erik Carlsson 和 Fernando Rodriguez Villegas。顶点算子与特征簇。 *Adv. Math.*, 330 2018年, .[2] Paul-Olivier Dehaye 和 Guo-Niu Han。多重集钩长公式及其若干应用。 *Discrete Math.* 311 23 24 2011 , (-), .[3] William Fulton 和 Joe Harris。 *Representation theory*，第 129 卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1991年。《入门课程》，《数学读本》。[4] F. Garvan、D. Kim 和 D. Stanton。Crank 统计量与 t-核。 *Invent. Math.*, 101(1), 1990年。[5] G.-N. Han。Nekrasov–Okounkov 钩长公式：细化、初等证明、推广及应用。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(1), 2010年。[6] G.-N. Han 和 K. Q. Ji。通过 Littlewood 分解，将钩长公式与分拆的 BG-秩相结合。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(2), 2011年。[7] A. Iqbal、S. Nazir、Z. Raza 和 Z. Saleem。Nekrasov–Okounkov 恒等式的推广。 *Ann. Comb.*, 16 4 2012年( ), .[8] P. Johnson。格点与同时核分拆。 *Electron. J. Combin.* 25 3 3 47, , ( ):论文编号 . . 2018 [9] Victor G. Kac。 *Infinite-dimensional Lie algebras*。剑桥大学出版社，第三版，1990年。[10] I. G. Macdonald。仿射根系与 Dedekind 的 η函数。 *Invent. Math.*, 15, 1972年。[11] I. G. Macdonald。 *Symmetric functions and Hall polynomials*。《牛津数学专著》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第二版，1995年。A. Zelevinsky 参与编写，《牛津科学出版物》。[12] N. A. Nekrasov 和 A. Okounkov。Seiberg–Witten 理论与随机分拆。载于 *The unity of mathematics* 244 ¨ 2006 , *Progr. Math.* 第 卷，Birkhauser Boston，马萨诸塞州波士顿，.[13] M. P ´ ´ *Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers* 2015 etreolle。. 论文，里昂第一大学，11月。[14] Eric M. Rains 和 S. Ole Warnaar。Macdonald 多项式的 Nekrasov–Okounkov 公式。 *Algebraic Combin.* 48 1 2018 , ( ), .[15] Hjalmar Rosengren 和 Michael Schlosser。椭圆行列式求值与仿射根系的麦克唐纳恒等式。 *Compos. Math.*, 142(4), 2006年。[16] Dennis Stanton。麦克唐纳恒等式的初等方法。载于 *q-series and partitions (Minneapolis, MN, 1988)* 18 *IMA Vol. Math. Appl.* 1989 , Springer 第 卷，纽约，.[17] David Wahiche。自共轭分拆的乘法定理。 *Comb. Theory* 2 2 13, , ( ):论文编号 . 2022 [18] David Wahiche。仿射根系的麦克唐纳恒等式的组合版本及其应用，进行中的工作。[19] B. W. Westbury。由麦克唐纳恒等式得到的普适特征。 *Adv. Math.*, 202(1), 2006年。

Univ. Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, UMR 5208, Institut Camille Jordan, France
Email address: wahiche@math.univ-lyon1.fr