arXiv:2304.01400v1 [math.FA] 3 Apr 2023

重新审视单位圆盘中的多项式均方逼近

BARTOSZ MALMAN

ABSTRACT. 对于复平面中紧支撑的正有限博雷尔测度 μ，空间 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 是勒贝格空间 $L^2(\mu)$ 中解析多项式的闭包。根据 Thomson 的著名结果，任何空间 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 都可分解为若干本质上是解析的部分与一个剩余 L^2-空间的正交和。我们研究一类博雷尔测度 μ 的这种分解结构：这些测度支撑在闭单位圆盘$\overline{\mathbb{D}}$ 上，其中位于开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的部分 $\mu_{\mathbb{D}}$ 是径向的，并且在单位圆盘边界附近至少以指数速度衰减。对于所考虑的测度类，我们给出了 Thomson 分解的精确形式。特别地，我们证实了 Kriete 和 MacCluer 于 1990年提出的一个猜想，该猜想给出了 Szeg¨o 经典定理的一个类比。

1. INTRODUCTION

Szeg¨o 的经典且影响深远的定理指出，对数积分发散是下列条件的充要条件：

$$\int_{\mathbb{T}} \log w \, dm = -\infty, \tag{1}$$

解析多项式集合 $\mathcal{P}$ 在勒贝格空间 $L^2(\mu)$ 中稠密，其中 $d\mu = w\, d\mathrm{m}$。这里，w 是单位圆 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}$ 上的非负博雷尔可测函数（权函数）：$|z| = 1\}$，m 是 $\mathbb{T}$ 上的勒贝格测度，而 $L^2(\mu)$ 是满足以下可积性条件的可测函数 f 所构成的空间

$$\|f\|^2_{L^2(\mu)} := \int_{\mathbb{T}} |f|^2 w \, dm < \infty.$$

例如，Szeg¨o 的结果在算子理论与谱理论、复分析以及随机过程理论中都有重要的推论和应用。

本文延续了一系列研究，探讨以下问题：如果将式（1）中出现的测度 $d\mu = d\mu_{\mathbb{T}} = w\, d\mathrm{m}$ 扩大，使其还包含开[1]

圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 上的 } |z| < 1\}$ 的闭包是什么？如果 $\mu = \mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}}$，且这两部分分别位于 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 上，那么我们预计，仅凭条件（1）还不够。例如，若要得出 $L^2(\mu_{\mathbb{T}})$ 中的任意函数都属于 $L^2(\mu)$ 中 $\mathcal{P}$ 的闭包这一结论。

关于这一问题已有大量文献，沿此方向的研究成果在分析学的其他领域也有有趣的应用。下文将回顾一些已有成果及其应用。本文的主要结果是下面的定理 A 。当测度 $L^2(\mu)$ 中支撑在单位圆盘内的部分，在 $\mathbb{D}$ 的边界附近衰减得足够快时，该定理刻画了 μ 中解析多项式张成的空间结构。它可以视为 Szeg¨o 定理的一个类比。

1.1. 背景与一些记号。解析多项式的集合 $\mathcal{P}$ 由形如 $p(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n z^n$ 的函数组成，其中 $z \in \mathbb{C}$ 是复变量。我们用 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 表示 $\mathcal{P}$ 在通常的勒贝格空间 $L^t(\mu)$ 中的范数闭包。这里 t 是有限正数，而 μ 是有限正博雷尔测度，其支撑集紧含于复平面中。本文主要讨论 $t = 2$ 的情形（但我们的一些结果也适用于 $t \neq 2$ 的情形），并研究支撑在闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 上、具有特定结构的测度 } \mu$。在专门讨论我们关注的情形之前，先简要回顾一般理论的若干方面。

Thomson 在 [12] 中解决了一个长期悬而未决的问题：当且仅当存在一个开集 U，其中的点都是关于 μ 的有界求值点时，$\mathcal{P}^t(\mu) \neq L^t(\mu)$，其含义是

$$|p(\lambda)|^t \leq C \int |p|^t d\mu$$

对于 $p \in \mathcal{P}$，上述结论成立，且某个 $C > 0$ 与 p 和 $\lambda \in U$ 无关。更准确地说，测度 $\mu = \sum_i \mu_i$ 存在一种分解，其中每个部分都位于 μ 的支撑集的不同子集上，使得

$$\mathcal{P}^t(\mu) = \Big(\oplus_{i \geq 1} \mathcal{P}^t(\mu_i) \Big) \oplus L^t(\mu_0) \tag{2}$$

其中，对于对应于 $i \geq 1$ 的部分，存在一个开单连通域 U_i ，它由μ_i 的有界求值点组成。这些部分也是不可约的，即不包含任何非平凡示性函数。对于博雷尔集 A,

示性函数 1_A 通常定义为

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

如果 μ_i 相对于 μ_i 几乎处处恒等于 0 或 1，那么这显然成立。在具体应用中，部分空间 $\mathcal{P}^t(\mu_i)$ 往往很容易识别为定义域 U_i 上的解析函数空间。

1.2. 所考虑的测度类。Thomson 定理是 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 空间理论的基石。然而，在具体实例中，应用时往往难以运用该定理，因为这些实例需要精确识别式 (2) 中的部分空间 μ_i 。此类应用见于傅里叶分析、柯西积分算子 ([6], [10]) 理论，以及 de Branges-Rovnyak 空间 ([8], [9]) 理论。在这些应用中，相关空间 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 分解为两部分： $\mathcal{P}^2(\mu_1)$，即 $\mathbb{D}$ 上的解析函数空间；以及完整空间 $L^2(\mu_0)$，其中 μ_0 支撑在圆周 $\mathbb{T}$ 上。我们的研究背景中也将出现这种情形。

若 F 是博雷尔集，则记 μ_F 为 μ 在F上的限制。显然，勒贝格空间 $L^t(\mu_F)$ 可视为$L^t(\mu)$ 的一个闭子空间。我们研究的测度 μ 定义在闭圆盘 $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$上，并由两部分 $\mu = \mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}}$组成。其中定义在圆周 $\mathbb{T}$上的部分 $\mu_{\mathbb{T}}$是一个一般的绝对连续测度

$$d\mu_{\mathbb{T}} = w\, dm \tag{3}$$

其中 w 是非负的博雷尔可测函数，而 dm 是 $\mathbb{T}$上的勒贝格测度（弧长测度），并按条件 m($\mathbb{T}$) = 1进行归一化。我们假设对数积分 (1) 在整体上发散，因为根据基础 Hardy 空间理论，已知 (1) 收敛意味着 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 本质上是 Hardy 空间 H^t 在某个乘法算子作用下的像。在主要结果中，我们将说明 $\log w$ 的局部可积性如何决定 (2) 的结构。

其中 $\mu_{\mathbb{D}}$ 所在的部分 $\mathbb{D}$ 将具有如下形式

$$d\mu_{\mathbb{D}}(z) = G(1 - |z|)dA(z), \tag{4}$$

其中， G 是定义在 x 介于 0 和 1 之间的递增函数，满足 $G(0) = 0$; $dA = \pi^{-1}dxdy$ 是 $\mathbb{D}$上的归一化面积测度。我们对 G 的递减速率假设一个下界，如下:

x 趋于零，并假设一个上界。具体而言，我们要求 G至少具有指数衰减，并将其表示为

$$\liminf_{x\to 0^+} x\log(1/G(x)) > 0. \tag{ExpDec}$$

上界将是一个可积性条件

$$\int_0^1 \log\log(1/G(x))\,dx < \infty. \tag{LogLogInt}$$

要使条件 (LogLogInt) 有意义，当然必须满足 $\log(1/G(x)) > 0$，换句话说，$G(x) < 1$。我们总可以通过将函数 G 重塑为 $(c, 1]$ 上的函数来假设这一点，其中 c 为某个正数。这种操作会在 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 上引入一个等价范数，并且不会影响我们的任何结果。

1.3. 主要结果。设 μ 由下式给出

$$\begin{aligned} d\mu &= d\mu_{\mathbb{D}} + d\mu_{\mathbb{T}} \\ &= G(1-|z|)dA(z) + w\,dm. \end{aligned} \tag{5}$$

全文中，测度 μ 都将具有这种形式。粗略地说，主定理指出，假设 (ExpDec) 和 (LogLogInt) 将我们限定在这样一类合适的函数 G 中：对于这类函数，$\mathcal{P}^2(\mu)$ 的结构由 $\mathbb{T}$ 上区间 I（换句话说，即弧）内 loga- rithm w 的局部可积性决定。

定义1.1。设 $E \subseteq \mathbb{T}$ 为权函数 w 的载体集：

$$E := \{x \in \mathbb{T} : w(x) > 0\} \tag{6}$$

并将 w 的剩余集定义为由那些不包含在任何（例如，开）区间 I 中的 $x \in E$ 所组成的集合，在这些区间上 $\log w$ 可积：

$$F := \Big\{x \in E : \int_I \log w\,dm = -\infty \text{ whenever } x \in I\Big\}. \tag{7}$$

不难验证，剩余集 F（除去一个 m-零测度集合）是 E 中所有 $\log w$ 可积区间的可数并的补集。

以下是我们针对所考虑的$\mathcal{P}^2$（μ）空间类的结构定理，也是本文的主要结果。

定理 A。设 μ 具有形式 (5)，其中 G是一个递增且连续可微的函数，并满足条件 (ExpDec) 和 (LogLogInt)。设 $F \subseteq \mathbb{T}$ 为由 (7) 给出的 w 的剩余集，并将 μ 分解为

$$\mu = (\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F}) + \mu_F,$$

其中 $\mu_{\mathbb{T}\setminus F}$ 和 μ_F 分别是 $\mu_{\mathbb{T}}$ 在集合 $\mathbb{T}\setminus F$ 和 F 上的限制。于是

$$\mathcal{P}^2(\mu) = \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F}) \oplus L^2(\mu_F), \tag{8}$$

其中 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F})$ 是不可约的。

定理 A 适用的函数 G 的张成空间很大，其大致从任意（包括） $c > 0$ 的 $G(x) = \exp(-c/x)$ 开始，到 $G(x) = \exp\exp(-c/x)$ 为止；后者略低于可积性假设（LogLogInt）。通过考察 Khrushchev 和 Volberg 先前的工作（下文将对此进行讨论），可以看出这一范围相当精确。由于不同研究中所需的各种正则性条件（这些条件确实会出现，且似乎不可或缺），要实现绝对精确的二分界限非常困难。不过，对 G 的可微性假设主要是为了方便而引入的。可以通过采用更具技术性的证明和估计来避免这一假设；无论如何，仍需要某种其他正则性假设。

我们指出，定理中断言包含关系 $L^2(\mu_F) \subset \mathcal{P}^2(\mu)$ 的部分对任意有限的 $t \neq 2$ 也成立（见命题 3.4）。式（8）中另一部分的不可约性证明采用了 [7] 的希尔伯特空间论证，并对此作了改编。

部分 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F})$ 可以视为 $\mathbb{D}$ 上解析函数的一个空间，其中解析多项式是稠密的。Aleman、Richter 和 Sundberg 在 [1] 中的深入研究阐明了该空间所含函数的边界行为、零点集及其他性质。

1.4. Kriete 和 MacCluer 的工作。目前的论文受到 [7], 中结果和猜想的启发。在该文中，Kriete 和 MacCluer 研究了所谓的测度分裂问题，即研究与本文所出现的测度形式相似的测度。对于形如（5）的测度 μ，如果空间 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 分解为分别存在于 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 上的正交部分，则称发生了分裂。Kriete 和 MacCluer 的方法基于对 Bergman 空间上某些复合算子的估计，与我们的方法大不相同。借助该方法，他们得以建立一些结果，从而阐明 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 可能具有的最终结构。

在其他有趣的结果中，他们指出，如果 G 满足 (LogLogInt)，那么 w 在区间上的对数可积性会阻止分裂（我们在定理 A 的证明中重用了他们论证的部分内容）；他们还发现，某种行为变化大致发生在 (ExpDec) 处。具体而言， [7] 的结果表明，$\log w$ 在

区间上的行为在满足 (ExpDec) 时至关重要；而如果这个极限为零，则更复杂的集合会发挥作用。基于这些观察，他们提出了两个猜想（见 [7] 第 9 节）。其中一个猜想是：如果对于每个区间 I，$\int_I \log w \, d\mathrm{m} = -\infty$，且 G 满足略强于 (ExpDec) 的条件，那么就会发生分裂。他们关于 $\log w$ 广泛不可积的条件，无非就是 $F = E$ 在 (7) 中的陈述。因此，我们的主要结果证实了 [7, 第 9] 节中的猜想 2。

定理 B. 假设 G 满足 (ExpDec)，并且

$$\int_I \log w \, dm = -\infty$$

对于 $\mathbb{T}$ 的每个区间 I。那么

$$\mathcal{P}^t(\mu) = \mathcal{P}^t(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^t(\mu_{\mathbb{T}}).$$

与 Szeg¨o 定理的类比显而易见。如果向测度 $\mu_{\mathbb{T}} = w d\mathrm{m}$ 中加入一部分 $\mu_{\mathbb{D}}$，那么我们需要比 (1) 更强的条件，才能得出 $L^t(\mu_{\mathbb{T}}) \subset \mathcal{P}^t(\mu)$。

请注意，即使在非希尔伯特空间情形 $t \neq 2$ 下，我们的方法也能得出这一结论（见命题 3.4）。Kriete 和 MacCluer 在 w 为特征函数且 $t = 2$（见 [7, 推论 7.1]）这一特殊情形下证明了定理 B。

Kriete 和 MacCluer 也研究了 (ExpDec) 中极限为零的情形。本文提出的方法也可应用于这种情形，并能得到 [7] 中一些结果的尖锐版本。他们在 [7, 第 9] 节提出了相应的猜想 1，探讨这种情形下分裂的条件；他们预期其行为类似于本文定理 B 中在 (ExpDec) 成立时所证明的情形，但将区间替换为更复杂的集合（更确切地说，是下文定义的 Beurling-Carleson 集）。目前尚不清楚本文的方法能否对此问题给出确切答案。这个问题，以及更广泛的 (ExpDec) 不成立的情形，计划在后续工作中研究。该猜想若得到解决，将对 de Branges-Rovnyak 空间中的逼近理论产生影响（见 [8], [9]）。

1.5. Khrushchev 和 Volberg 的定理；主要结果的锐性。定理 A 和定理 B 都接近最优，具体而言，w 在区间上的对数可积性并不能

确定自然选取的权函数 G所对应的 $\mathcal{P}^t(\mu)$的结构，而这些权函数仅仅未能满足 (ExpDec) 和 (LogLogInt)。

更准确地说，在临界值 (ExpDec) 略低处，可以找到这样的函数

$$G(x) = \exp(-c/x^{\alpha}) \tag{9}$$

适用于 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $c > 0$。对于这类 G，无法根据 $\log w$ 在区间上的可积性来确定 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 的结构。这是 Khrushchev 在 [6] 中的基本结果所带来的结论。他的理论可应用于某些形式如 (5) 的测度，其中权函数 $w = 1_E$ 是某个集合 E 的示性函数。事实上，设 E 是 $\mathbb{T}$ 的一个闭子集，具有正测度并满足 α-Beurling-Carleson 条件

$$\sum_{\ell \in L} |\ell|^{\alpha} < \infty, \tag{10}$$

其中 L 是开区间 ℓ 的族，这些区间构成了 E 在 $\mathbb{T}$ 中的补集，而 $|\ell|$ 是 ℓ 的长度。可以构造这样一个集合，使其还不包含任何区间，因此 $\log w = \log 1_E$ 在任意区间上的积分显然发散。不过，与定理 A 不同，Khrushchev 的结果可以用于推出：对于由 (9) 给出的 G，若 $d\mu = G(1-|z|)dA(z) + 1_E d\mathrm{m}$，则空间 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 是不可约的。他的结果适用于一般的权函数 G，此时 (ExpDec) 中的极限为零而非正数，但始终需要一些正则性假设。特别是，Khrushchev 的方法要求 $\log 1/G$ 可积。

论文 [6] 还隐含地展示了结构定理在复函数论中关于 $\mathcal{P}^2(\mu)$的一个典型应用。例如，假设 $G(z) = (1-|z|)^{\beta}$ 对于某个较大的 $\beta > 0$而言，$w = 1_E$ 是某个集合 E的示性函数，并且我们处于如下情形：

$$\mathcal{P}^2(\mu) \neq \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}}), \tag{11}$$

也就是说，不会发生分裂。于是必定存在一个函数

$$f = f_{\mathbb{D}} + f_{\mathbb{T}} \in \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}})$$

它与单项式 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty} = \{z_{\mathbb{D}}^n + z_{\mathbb{T}}^n\}_{n=0}^{\infty}$ in$\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}})$ 正交。这种正交性意味着，函数 $f_{\mathbb{T}}$ 的正傅里叶$\frown$系数（$f_{\mathbb{T}}$）$_n$ 等于 E 上的值

$-\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n f_{\mathbb{D}}(z)(1-|z|)^\beta dA(z)$。因此，根据柯西-施瓦茨不等式，这些系数满足如下界

$$|\widehat{(f_{\mathbb{T}})}_n| \le C\sqrt{\int_{\mathbb{D}} |z|^{2n}(1-|z|)^\beta dA(z)} \simeq \frac{1}{(1+n)^\gamma}, \quad n \ge 0 \tag{12}$$

其中 $\gamma = (1+\beta)/2$。如果 E 恰好无处稠密且不包含任何区间，那么 $f_{\mathbb{T}}$ 仅支撑在 E 上这一事实就意味着该函数非常不规则，也就是说，它远非光滑。因此， $f_{\mathbb{T}}$ 具有两种相互冲突的性质：它是不规则的，却又满足由 (12) 表示的强谱衰减条件。当然，关键在于这种谱衰减只有单侧性。Khrushchev 在 [6] 中证明，支撑此类函数的闭集 E 恰好是 Beurling-Carleson 集；他基本上是通过解决一类$\mathcal{P}^t(\mu)$-空间的分裂问题得出这一结果的。Beurling-Carleson 集是满足 (10) 的较弱版本的闭集，即

$$\sum_{\ell \in L} |\ell| \log(1/|\ell|) < \infty.$$

有关 Beurling-Carleson 集及其在分析学中的应用，参见近期文章 [5]。前文已提及 Kriete 和 MacCluer 在 [7] 提出的猜想 1；它与对本段所讨论的 Khrushchev 结果的一个确定性推广有关，该推广适用于加权情形 $w \ne 1_E$。

另一端在条件 (LogLogInt) 处的尖锐性源于 Volberg 的工作。本质上，如果 G 不满足条件 (LogLogInt)，那么对 $\log w$ 的可积性进行局部考察完全不起作用，而 $\log w$ 在整个 $\mathbb{T}$ 上的积分是发散还是收敛，才是唯一有意义的参数。具体而言，形如 (5) 的 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 若 G 不满足 (LogLogInt)，则当且仅当 (1) 成立时才可分裂，这与 Szeg¨o 的经典定理类似。通常，对 G 的正则性条件是必要的。该结论源于 Volberg 关于拟解析函数的定理；例如， [13], 和 [3] 中均以英文介绍了这一结论。Volberg 定理断言，满足非常强的单侧谱衰减估计的函数 $h \in L^2$

$$|\widehat{h}_n| \le Ce^{-M(n)}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

对于某个正数列 $\{M(n)\}_{n\ge 1}$，满足

$$\sum_{n\ge 1} \frac{M(n)}{n^2} = \infty,$$

应具有可求和的对数： $\int_{\mathbb{T}} \log |h| \, d\mathrm{m} > -\infty$。要从 Volberg 定理推导出分裂结论，可以仿照前一段中介绍 Khrushchev 定理应用时所用的正交性与谱衰减论证。更多证明细节请参见 [7] 及其中的参考文献。

1.6. 文章其余部分的结构。在初步的第2节中，我们约定一些记号，并回顾算子理论中的若干背景结果，这些结果将在证明中使用。第3节构成本文的核心，主要研究 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 中出现的最大 L^t-直和。这一部分包含本文的主要技术性构造，并以定理 B 的证明结束。在第4节中，我们主要重新采用、拓展并专门化文献中已有的一些思想和技术，这些内容主要来自 Kriete 和 MacCluer 的论文 [7], ，以证明式（8）中第一直和项的不可约性。由此完成定理 A 的证明。

1.7. 致谢。作者谨此衷心感谢 Adem Limani，就本研究的内容进行了许多富有洞见的讨论并提出了许多富有启发性的想法。

2. Preliminaries and conventions

为使论述清晰，我们在本预备部分简要讨论两个相对次要的问题，并约定两项惯例。我们还回顾圆周上 L^t-空间中对解析多项式乘法不变的子空间结构。

2.1. H^∞ 作为 $\mathcal{P}^t(\mu)$的子集。空间 H^∞ 由在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析且在其中一致有界的函数组成。众所周知，任意函数 $h \in H^\infty$ 都可以延拓到圆周 $\mathbb{T}$上。除一个m-测度为零的子集外，该延拓由径向极限定义：

$$h(z) = \lim_{r \to 1^+} h(rz), \quad z \in \mathbb{T}. \tag{13}$$

利用这一延拓，我们可以将 $h = h_{\mathbb{D}} + h_{\mathbb{T}}$ 视为 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的博雷尔可测函数，并在测度 μ 具有结构(5)时，将其视为空间 $L^t(\mu) = L^t(\mu_{\mathbb{D}}) + L^t(\mu_{\mathbb{T}})$的元素。更准确地说，我们可以选取 $\mathbb{T}$ 上的一个满测度博雷尔集，使得(13)中的径向极限在该集上存在，并在其余部分令 $h_{\mathbb{T}}$ 为零。

容易看出， h 的这一扩张属于 $\mathcal{P}^t(\mu)$。事实上，对于 $z \in \overline{\mathbb{D}}$ 和 $r \in (0,1)$，膨胀 $h_r(z) := h(rz)$在一个

邻域内全纯，因此可以用解析多项式一致逼近。因此，对于任意有限正的 t， $h_r \in \mathcal{P}^t(\mu)$。由(13)和控制收敛定理可知，当 r 趋于1时，函数 h_r 在 $L^t(\mu)$的范数下收敛到函数 $h = h_{\mathbb{D}} + h_{\mathbb{T}}$，故其属于 $\mathcal{P}^t(\mu)$。由此可见， H^∞ 在 $L^t(\mu)$中的闭包与 $\mathcal{P}$ 在 $L^t(\mu)$中的闭包相同，且这两个闭包都等于 $\mathcal{P}^t(\mu)$。在下面的证明中，我们将使用更灵活的类 H^∞ ，而不是 $\mathcal{P}$。

如果 $\mathcal{P}^t(\mu)$本身不可约，那么该空间中将存在许多元素，它们在 $\mathbb{D}$上具有相同的限制。因此，每当我们把函数 $h \in H^\infty$ 视为空间 $\mathcal{P}^t(\mu)$中的一个元素时，我们总是指 h 中位于$\mathbb{T}$ 上的部分 $h_{\mathbb{T}}$ 由 h的径向边界值定义，如上所述。

2.2. 可测函数的载体集。如果 f 是$L^t(\mu_{\mathbb{T}}) = L^t(w\, d\mathrm{m})$的一个成员，那么显然该函数仅在相差一个 m-测度为零的集合的意义下定义良好，因此集合也是如此

$$\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > 0\}. \tag{14}$$

若集合 E 是 f 的载体集，则它是一个博雷尔集，且 $|f(x)| > 0$在该集上成立，除去一个 m-测度为零的集合；并且 $f(x) = 0$ 在 E的补集上成立，同样除去一个测度为零的集合。载体集代表元的具体选择不会产生影响，因为我们在 $\mathbb{T}$ 上的所有测度都相对于m绝对连续。特别要注意，(14)中的载体集不同于测度 $f d\mathrm{m}$的通常支撑集。

2.3. 圆周上的勒贝格空间的乘法不变子空间。考虑通常的勒贝格空间 $L^t(\mathrm{m})$，例如 $t > 1$。移位算子的不变子空间格的结构：

$$f(z) \mapsto zf(z), \quad f \in L^t(m)$$

是众所周知的。若 $\mathcal{S} \subset L^t(\mathbb{T})$ 是闭的且在移位作用下不变（或等价地，在 $\mathcal{P}$ 中的解析多项式乘法作用下不变），则 $\mathcal{S}$ 要么是如下形式的空间

$$L^t(m_F) := \{f \in L^t(m) : f \equiv 0 \text{ on } \mathbb{T} \setminus F\}$$

对某个可测子集 $F \subset \mathbb{T}$，或者它等于

$$qH^t := \{qh : h \in H^t\}$$

其中， q 是定义在 $\mathbb{T}$ 上的模为一函数， H^t 是通常的 Hardy 空间，由 $L^t(m)$中傅里叶谱非负的函数组成。证明可见 [4, 第二讲和第四讲]。我们需要用到这一结论的一个简单推论。

引理 2.1. 设 $t > 1$, $w \in L^1(m)$ 是一个载体集为 E 的非负函数，且 $\mu = w d\mathrm{m}$。设 $g \in L^t(\mu)$ 是一个非零函数，使得

$$\int_{\mathbb{T}} \log(|g|^t w)\, dm = -\infty. \tag{15}$$

那么，包含 g 且在解析多项式乘法下不变的最小闭子空间 $\mathcal{S} \subset L^t(\mu)$ 等于

$$\mathcal{S} = \{f \in L^t(\mu) : f \equiv 0 \text{ on } E \setminus F\} = L^t(\mu_F),$$

其中

$$F = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$$

是 g 的载体集。

证明。映射 $U: L^t(\mu) \to L^t(\mathrm{m}_E)$ 将 $f \in L^t(\mu)$ 映射为函数 $Uf = fw^{1/t}$，是这两个空间之间的满射等距映射。该映射将 $\mathcal{S}$ 映射到 $L^t(\mathrm{m}_E)$ 的一个闭子空间 $U\mathcal{S}$，该子空间在解析多项式乘法下不变。根据上文讨论的这类不变子空间的结构定理， $U\mathcal{S}$ 要么等于形如 $L^t(m_F)$ 的空间，其中 $F \subset \mathbb{T}$ 是某个可测子集（事实上， $F \subset E$）；要么等于 qH^t。若属于第二种情况，由于 $g \in \mathcal{S}$，我们有 $qh = gw^{1/t}$，其中 $h \in H^t$ 非零。众所周知，非零 $h \in H^t$ 蕴含 $|h| = |qh|$ 有可积对数，因此立即得到与 (15) 矛盾的结论。由此可知，对于某个可测集 F， $U\mathcal{S} = L^t(\mathrm{m}_F)$。不难看出， F 必须具有上文所述的形式。□

我们还指出引理 2.1 的一个推论，记住它会很有用。

推论 2.2. 若 μ 如式 (5) 所述，且 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 包含集合 $F \subset \mathbb{T}$的示性函数，则它也包含 F的任意可测子集的示性函数。

证明。如果 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 包含 1_F，那么根据引理 2.1，它包含 $L^t(\mu_F)$，因此特别包含 F 的任意子集的示性函数。□

3. Identifying the non-analytic summand

本节的目标是证明 $L^t(\mu_F) \subset \mathcal{P}^t(\mu)$，其中 F 是式 (7) 中的剩余集。这已经可以推出定理 B。

3.1. 化归为实变量分析问题。我们首先证明，只要能构造出一列满足某些性质的实值函数，就能解决我们的问题。下面的引理 3.1 详细说明了这一化归。证明略显冗长，但相当直接，只用到前面在第2节讨论过的基础泛函分析、测度论以及 $L^t(\mathrm{m})$ 的移位不变子空间结构。

对于 $\mathbb{T}$ 上的可测实值函数 f，下文 (iv) 中出现的泊松积分P_f按通常方式定义为

$$\begin{aligned} P_f(z) &:= \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|x-z|^2} f(x)\, dm(x) \\ &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} \frac{x+z}{x-z} f(x)\, dm(x), \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

引理 3.1. 设 G 是满足条件 (ExpDec) 的函数，$w \in L^1(m)$ 是非负可测函数，且 F 是 $E = \{x \in \mathbb{T}$ 的子集：$w(x) > 0\}$，其勒贝格测度为正。假设对每个充分大的正数 N，都存在定义在 $\mathbb{T}$ 上的有界实值函数 f_N 及相应的集合$A_N \subset \mathbb{T}$，使得以下五个条件成立：

(i) $\int_{\mathbb{T}} f_N \, d\mathrm{m} = 0$，(ii) 在 $F \cap A_N$ 上 $f_N(x) \le -N$，(iii) 当 N 趋于 $+\infty$ 时，$|F \setminus A_N|$ 趋于零，(iv) 泊松积分 P_{f_N} 满足界 $P_{f_N}(z) \le \frac{C}{1-|z|}$，其中某个 $C > 0$ 与 N 无关，(v) $\int_{\mathbb{T}} \exp(f_N) w \, d\mathrm{m} \le C$，其中某个 $C > 0$ 与 N 无关。

在这种情况下，对于任意有限的 $t > 0$，都有 $L^t(\mu_F) \subset \mathcal{P}^t(\mu)$，其中 μ 如式（5）所示。

证明。令 $M = M(N)$ 为一个小于 N 的正数；当 N 趋于 $+\infty$ 时，它趋于 $+\infty$，并且当 M 和 N 趋于 $+\infty$ 时，比值 N/M 趋于 $+\infty$。用 $M^{-1} f_N$ 替换 f_N 不会影响引理陈述中的假设 (i) 或 (iii)。假设 (ii) 仅略有改变：我们有 $M^{-1} f_N \le -N/M$ 在 $F \cap A_N$ 上；当然，当 $F \cap A_N$ 上一致趋于零时，

当 N 趋于 $+\infty$ 时。不过，假设 (iv) 得到了加强：

$$P_{f_N}(z) \le \frac{C_N}{1-|z|} \tag{16}$$

对于常数 C_N $(= C/M)$，当 $N \to +\infty$ 时其趋于零；只要 N（从而 M）足够大，(v) 就改进为 $\exp(f_N) \in L^t(\mu_{\mathbb{T}})$，其中 $t > 0$ 任意，并且相应的 $L^t(\mu_{\mathbb{T}})$-范数对于任意固定的 t 都被 N 一致有界。因此，只需重新标记族 $\{f_N\}_N$ 中的下标，就能得到一个新族，使得 (i)、(ii) 和 (iii) 成立，同时 (iv) 和 (v) 的上述改进版本也得到满足。

对函数 f_N 作此修改后，我们构造外函数

$$g_N(z) = \exp\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{x+z}{x-z} f_N(x) dm(x) \Big), \quad z \in \mathbb{D} \tag{17}$$

其中每一个都是单位圆盘中的有界解析函数。这些函数包含于 $\mathcal{P}^t(\mu)$ 中，具体含义见第 2 节。此外，根据引理陈述中的第二个假设以及外函数边界行为的众所周知的性质，我们还有

$$|g_N(x)| = \exp(f_N(x)) \le \exp(-N) \tag{18}$$

对几乎处处的 $x \in F \cap A_N$。

回顾 (ExpDec) 中对 G 的假设，令

$$\inf_{x \in (0,1]} x \log(1/G(x)) = d > 0.$$

利用这一点以及不等式 (16)，我们得到关于 $z \in \mathbb{D}$ 的一致增长估计：

$$\begin{aligned} |g_N(z)| &= \exp\Big(P_{f_N}(z) \Big) \\ &\le \exp\Big(\frac{C_N}{1-|z|} \Big) \\ &\le \exp\Big(\frac{C_N}{d} \log(1/G(1-|z|)) \Big) \\ &= \Big(G(1-|z|) \Big)^{-C_N/d}. \end{aligned} \tag{19}$$

由于 C_N 最终足够小，从而可以保证不等式成立

$$\frac{tC_N}{d} \le 1,$$

由式 (19) 可得范数界

$$\sup_N \int_{\mathbb{D}} |g_N(z)|^t G(1-|z|)dA(z) < \infty. \tag{20}$$

暂且假设 $t > 1$。证明开头的说明表明，不失一般性，我们可以假设函数 $\exp(f_N)$ 在自反空间 $L^t(\mu_{\mathbb{T}})$ 的范数下有一致上界。特别地，固定一个趋于 $+\infty$ 的确定数列 N，并取一个子列后，我们可以假设函数 $\exp(f_N)$ 在空间$L^t(\mu_{\mathbb{T}})$中弱收敛于某个函数 $g \in L^t(\mu_{\mathbb{T}})$。由于这对任意的 t 都成立，我们甚至可以进一步取子列，从而得到对于某个 $t_* > t$，有 $g \in L^{t_*}(\mu_{\mathbb{T}})$。不难看出，$g$ 在 F 上几乎处处为零。事实上，若 s 是与 t 共轭的 H¨older 指数，且 r 是任意一个仅在集合 F 上取非零值的函数，属于 $L^s(\mu_{\mathbb{T}})$，那么

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} gr\, d\mu_{\mathbb{T}} &= \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} g_N r\, d\mu_{\mathbb{T}} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \int_{F\cap A_N} g_N r\, d\mu_{\mathbb{T}} + \int_{F\setminus A_N} g_N r\, d\mu_{\mathbb{T}}. \end{aligned} \tag{21}$$

对于上述极限中的第一项，我们可以利用柯西-施瓦茨不等式和（18）中的边界值等式，得到如下估计

$$\Big| \int_{F\cap A_N} g_N r\, d\mu_{\mathbb{T}} \Big| \le \exp(-N) \cdot \|r\|_{L^s(\mu_{\mathbb{T}})},$$

当 N 趋于无穷大时，该项趋于零；对于第二项，同理可得

$$\Big| \int_{F\setminus A_N} g_N r\, d\mu_{\mathbb{T}} \Big| \le \|\exp(f_N)\|_{L^t(\mu_{\mathbb{T}})} \cdot \Big(\int_{F\setminus A_N} |r|^s\, d\mu_{\mathbb{T}} \Big)^{1/s},$$

由有限测度 $|r|^s d\mu_{\mathbb{T}}$ 的绝对连续性、引理陈述中的假设（iii）以及上文讨论的（v）的改进版本可知，该项也趋于零。因此，对于任意选择的 r，（21）均趋于零，从而 $g \equiv 0$ 在 F 上成立。

由假设（i），外函数 g_N 满足 $g_N(0) = 1$，且（19）中的估计意味着

$$\limsup_{N\to+\infty} |g_N(z)| \le 1.$$

（19）中的估计还表明，函数族 $\{g_N\}_N$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致有界。由蒙泰尔定理和解析函数的最大模定理可得

我们有

$$\lim_{N\to+\infty} g_N(z) = 1,$$

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。根据（20）中的范数界，再次从 N 中取子列，我们还可以假设解析函数 g_N 在空间 $\mathcal{P}^t(\mu_{\mathbb{D}})$ 中弱收敛于常数 1。

总而言之，我们看到，可以确保函数序列 $g_N \in \mathcal{P}^t(\mu)$ 中的某个序列弱收敛，$N \to +\infty$ 收敛到函数$g \in \mathcal{P}^t(\mu)$；该函数在 $\mathbb{D}$ 中恒等于 1，并且在 $\mathbb{T}$ 上的集合 F 上几乎处处为 0。于是，函数 $\tilde{g} := g - 1 \in \mathcal{P}^t(\mu)$ 在 $\mathbb{D}$ 上为 0，并且在集合 F 上几乎处处等于常数 1。

回顾一下，我们已经确保对于某个 $t_* > t$，有 $\tilde{g} \in L^{t_*}(\mu_{\mathbb{T}})$。利用这一点，我们将其重新写为

$$\begin{aligned}\log(|\tilde{g}|^t w) &= (t/t_*)\log(|\tilde{g}|^{t_*} w^{t^*/t}) \\ &= (t/t_*)\log(|\tilde{g}|^{t_*} w) + (t/t_*)\log(w^{t_*/t-1}) \\ &= (t/t_*)\log(|\tilde{g}|^{t_*} w) + (t/t_*)(t_*/t-1)\log(w).\end{aligned}$$

在最后一行中，我们看到 $\log w$ 项的一个正系数线性组合，它满足

$$\int_{\mathbb{T}} \log w \, dm = -\infty,$$

以及项 $\log(|\tilde{g}|^{t_*} w)$，它是一个 $L^1(m)$ 函数的对数。该项可能绝对可积，也可能不可积，但显然满足

$$\int_{\mathbb{T}} \log(|\tilde{g}|^{t_*} w)\, dm < +\infty$$

这是 $|\tilde{g}|^{t_*} w$ 可积性的结果。因此

$$\int_{\mathbb{T}} \log(|\tilde{g}|^t w)\, dm = -\infty. \tag{22}$$

由于 $\tilde{g}$ 在 $\mathbb{D}$ 上消失，$\mathcal{S}(\mathcal{P}^t)$ 中包含 $\tilde{g}$ 且关于解析多项式乘法保持不变的最小子空间实际上是 $L^t(\mu_{\mathbb{T}})$ 的子空间。于是，引理 2.1 适用，从而确定 $\tilde{\mathcal{S}}$ 为 $L^t(\mu_F)$，其中 F 是 $\tilde{g}$ 的载体。由于 $\tilde{g} \equiv 1$ 在 F 上成立，在 $t > 1$ 的情形下证明完成。

一个初等论证可将结论从有限 $t > 1$推广到 $t > 0$。在 $t \in$ 的情形下，$0, 1]$, 令 $h \in L^\infty(m)$仅在集合F上取值。于是 $h \in L^2(\mu_{\mathbb{T}})$，因此根据已经证明的结果，存在

一列解析多项式 $\{p_n\}_n$ ，它在 $\mathcal{P}^2(\mu)$的范数意义下收敛于 h ，并且也在 μ-几乎处处逐点收敛。令

$$A_n := \{x \in \overline{\mathbb{D}} : |p_n(x) - h(x)| > 1\}$$

注意到序列 $|p_n - h|^t 1_{\overline{\mathbb{D}}\setminus A_n}$ 逐点受 1 控制，并且在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上几乎处处 μ 收敛于零，因此有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\overline{\mathbb{D}}}|p_n-h|^t d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|p_n-h|^t d\mu + \int_{\overline{\mathbb{D}}\setminus A_n}|p_n-h|^t d\mu \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\int_{A_n}|p_n-h|^2 d\mu + \int_{\overline{\mathbb{D}}}|p_n-h|^t 1_{\overline{\mathbb{D}}\setminus A_n} d\mu \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中最后一步在第二个积分上使用了控制收敛定理。这表明 $h \in \mathcal{P}^t(\mu)$。仅定义在 F 上的 $h \in L^\infty(m)$ 的集合显然是 $L^t(\mu_F)$ 的稠密子集，因此取闭包可得 $L^t(\mu_F) \subset \mathcal{P}^t(\mu)$ 同样适用于 $t \in (0,1]$。□

3.2. 泊松积分估计。为了确保引理 3.1 中的关键性质（iv），我们的主要工具将是以下关于泊松积分的估计。

引理 3.2. 设 $\{I_j\}_j$ 是 $\mathbb{T}$ 上互不相交的区间的有限族，并设 $f = \sum_j f_j$ 是一个实值函数，使得

(i) f_j 在区间 I_j上的支撑集为该区间，(ii) $\int_{I_j} f_j \, d\mathrm{m} = 0$，(iii) $\int_{I_j} |f_j| \, d\mathrm{m} \le C$，其中 C 是一个与 j无关的正数。

于是我们得到泊松积分增长估计

$$P_f(z) \le \frac{4C}{1-|z|},$$

其中 C 是上文 (iii) 中的常数。

为证明该引理，我们引入一个记号。给定实值函数 g 和区间 I ，我们将 g 在 I 上的变差定义为非负数

$$\operatorname{var}(g, I) := \sup_{x\in I} g(x) - \inf_{x\in I} g(x).$$

证明。由对称性，只需证明

$$P_f(r) = \int_{\mathbb{T}} P_r \, dm \le \frac{4C}{1-r},$$

其中 $P_r = P_r(x) = \frac{1-r^2}{|x-r|^2}$ 是泊松核。令

$$f_j^+(x) = \max[f_j(x), 0]$$

and

$$f_j^-(x) = -\min[f_j(x), 0].$$

这当然成立：

$$\int_{I_j} P_r f_j^+ \, dm \le \sup_{x \in I_j} P_r(x) \cdot \int_{I_j} f_j^+ \, dm$$

and

$$\inf_{x \in I_j} P_r(x) \cdot \int_{I_j} f_j^- \, dm \le \int_{I_j} P_r f_j^- \, dm,$$

由此，利用引理陈述中的性质（ii），我们可得

$$\begin{aligned} \int_{I_j} P_r f_j \, dm &\le \sup_{x \in I_j} P_r(x) \cdot \int_{I_j} f_j^+ \, dm - \inf_{x \in I_j} P_r(x) \cdot \int_{I_j} f_j^- \, dm \\ &= \operatorname{var}(P_r, I_j) \int_{I_j} f_j^+ \, dm. \end{aligned}$$

现在由（i）和（iii）可知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} P_r f \, dm &\le \sum_j \operatorname{var}(P_r, I_j) \int_{I_j} f_j^+ \\ &\le C \sum_j \operatorname{var}(P_r, I_j). \end{aligned}$$

但由于族 $\{I_j\}_j$ 中的区间互不相交，且泊松核是单峰的，事实上我们可以推出如下估计：

$$\sum_j \operatorname{var}(P_r, I_j) \le \frac{2(1+r)}{1-r} \le \frac{4}{1-r}, \tag{23}$$

这一不等式的直观证明见图 1。这就建立了所需的增长估计。□

3.3. Kriete-MacCluer 猜想的主要构造与证明。我们关于识别 L^t-求和项的任务，现已归结为构造 f_N 上的实值函数 $\mathbb{T}$，使其满足引理 3.1 中列出的五个假设。

在进入主要构造之前，我们还需要一个工具。回顾一下，开区间族 $\mathcal{C} = \{I\}$ 是集合 $F \subset \mathbb{T}$ 的维塔利覆盖，如果对每个 $x \in F$，都存在一个包含 x 且长度任意短的区间 $I \in \mathcal{C}$。下面的表述

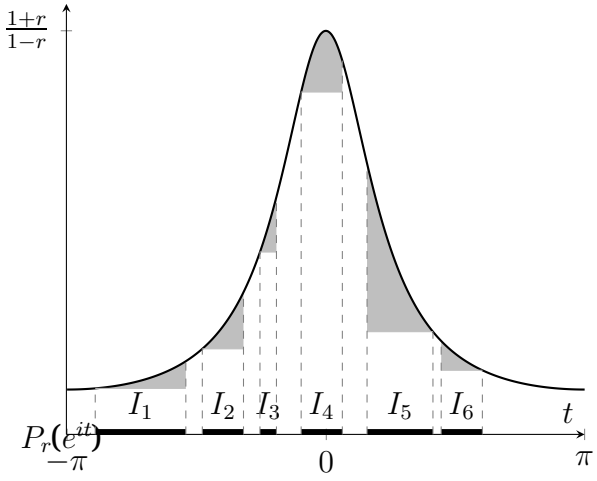


FIGURE 1. 每个灰色区域的高度等于 $\mathrm{var}(P_r, I_j)$

维塔利著名定理将在我们的构造中用到。例如，证明可见 [11, 第 128-129] 页。

引理 3.3。（维塔利覆盖定理）设 F 是 $\mathbb{T}$的一个子集，且具有正的勒贝格测度；设 $\mathcal{C} = \{I\}$ 是 F的一个维塔利覆盖。给定任意 $\delta > 0$，存在一个有限集合 $\{I_j\}_{i=j}^{n} \subset \mathcal{C}$，其中包含两两互不相交的区间，使得

$$|F \setminus \cup_{i=j}^{n} I_j| < \delta.$$

本节的主要结果如下。

命题 3.4. 设 G 是满足条件 (ExpDec) 的函数， $w \in L^1(m)$ 是非负可测函数，且 E和 F 分别是 w的载体和剩余集，如 (6) 和 (7) 中所定义。假设 F 具有正的 m测度。若 $d\mu = G(1 - |z|)dA(z) + w\, d\mathrm{m}$，则对任意有限 $t > 0$，有 $L^t(\mu_F) \subset P^t(\mu)$。

证明。首先，注意到集合 F 除去一个勒贝格测度为零的集合后，等于可数并

$$\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} F \cap \{x \in E : w(x) > 1/n\}.$$

因此，只需证明对于每个 n ，都有包含关系$L^t(\mu_{F_n}) \subset P^t(\mu)$。因此，不妨假设集合 F 包含于

$$\{x \in E : w(x) > c\} \tag{24}$$

对于某个任意数 $c > 0$。

设 $N > 0$ 为某个较大的数。根据 F 的定义，对于每个点 $x \in F$，都存在长度任意小且包含 x 的区间 I，并且满足 $\int_I \log w \, d\mathrm{m} = -\infty.$。此外，很容易看出，所有这类区间构成的族 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_N$，还满足以下条件

$$N|I| \leq 1 \tag{25}$$

构成集合 F 的维塔利覆盖。从 $\mathcal{C}$ 中提取一个由 $\{I_j\}_j$ 个两两互不相交的区间组成的有限集合，使得

$$|F \setminus \cup_j I_j| < 1/N. \tag{26}$$

下面说明如何定义

$$f_N = \sum_j f_{N,j} \tag{27}$$

其中 $_j$ 仅定义在区间 I_j 上，因此引理 3.1 的全部五个假设都将得到满足。固定集合 I_j 中的一个，并回顾式（24）中 c 的定义。我们将 w 在 I_j 上的对数积分分解为三部分：

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{I_j} \log(1/w)\, dm \\ &= \int_{I_J \setminus E} \log(1/w)\, dm + \int_{\{w>c\}\cap I_j} \log(1/w)\, dm \\ &+ \lim_{d\to 0^+} \int_{\{d\leq w\leq c\}\cap I_j} \log(1/w)\, dm. \end{aligned}$$

第二部分满足

$$-\infty < \int_{\{w>c\}\cap I_j} \log(1/w)\, dm < +\infty.$$

事实上，上界由不等式 $\log(1/w) < \log(1/c)$ 得出，该不等式在集合 $\{w > c\}$ 上成立；下界则是 w 的可积性的直接推论。由此可见，剩余两部分中至少有一部分必须等于 $+\infty$。因此，我们可以推断以下情况中至少有一种必然发生：或者有

$$I_j \setminus E \text{ has positive Lebesgue measure} \tag{C1}$$

或者我们有这样的集合族

$$E_d := \{x \in E : d \leq w(x) \leq c\}$$

满足

$$\lim_{d\to 0^+}\int_{I_j\cap E_d}\log(1/w)\,dm=\infty. \tag{C2}$$

当然，这两种情况也可能同时发生。

第一种情况（C1）较为简单。在这种情况下，我们可以令

$$f_{N,j}=N\frac{|I_j\cap F|}{|1_{I_j\setminus E}|}1_{I_j\setminus E}-N1_{I_j\cap F}. \tag{28}$$

如果属于情况（C2），那么存在一个正数 d，以及 $I_j\cap E_d$ 的某个可测子集 I_j^+，使得

$$N|I_j|\le\int_{I_j^+}\log(1/w)\,dm\le 2N|I_j|\le 2. \tag{29}$$

事实上，由（C2）可知，存在一个足够小的 d，使得 $|N|I_j\le\int_{I_j\cap E_d}\log(1/w)\,d\mathrm{m}$；再由有限测度 $\log(1/w)1_{I_j\cap E_d}d\mathrm{m}$ 的绝对连续性，我们可以选取一个子集 I_j^+，使得（29）成立。令

$$\alpha_j:=\int_{I_j^+}\log(1/w)\,dm\simeq N|I_j| \tag{30}$$

and

$$I_j^-:=I_j\setminus I_j^+$$

如果（C2）成立，那么我们可以令

$$f_{N,j}=\log(1/w)1_{I_j^+}-\frac{\alpha_j}{|I_j^-|}1_{I_j^-}. \tag{31}$$

如果 (C1) 和 (C2) 均成立，那么我们可以自由地用任一种方式构造 $f_{N,\ j}$。

现在我们验证，这种构造 $f_{N,\ j}$ 的方式意味着，(27) 中的函数 f_N 满足引理 3.1 的全部五个条件。$f_{N,\ j}$ 的两种备选定义都确保

$$\int_{I_j}f_{N,j}\,dm=0,$$

这当然意味着

$$\int_{\mathbb{T}}f_N\,dm=\sum_j\int_{I_j}f_{N,j}\,dm=0.$$

因此，引理 3.1 的 (i) 成立。令 $A_N:=\cup_j I_j$，由 (26) 可知，引理 3.1 的假设 (iii) 也成立。接下来，我们验证 (ii)。如果

$f_{N,\,j}$是按照 (31) 构造的，并且 $x \in I_j \cap F$，那么 $w(x) > c$，因此 $x \notin I_j^+$ 。于是，由 (30) 可推出，在第二种情况下

$$-f_{N,j}(x) = \frac{\alpha_j}{|I_j^-|} \geq \frac{\alpha_j}{|I_j|} \geq N,$$

显然，$-f_{N,\,j}(x) = N$若 $x \in I_j \cap F$且我们根据（28）构造了 $f_{N,\,j}$。因此，我们已验证引理 3.1 的条件（ii）得到满足。根据引理 3.2 和（25），假设（iv）也得到满足，因为由 $\int_{I_j} f_{N,\,j}\, d\mathrm{m} = 0$ 我们可推出

$$\int_{I_j} |f_{N,j}|\, dm = 2 \int_{I_j} \max[f_{N,j}, 0]\, dm$$

在第一种情况下，可估计为

$$2 \int_{I_j} \max[f_{N,j}, 0]\, dm = 2N|I_j \cap F| \leq 2N|I_j| \leq 2,$$

类似地，在第二种情况下，可估计为

$$2 \int_{I_j} \max[f_{N,j}, 0] \leq 2\alpha_j \leq 4N|I_j| \leq 4.$$

最后，引理 3.1 的第五个假设得到满足，因为在任意$x \in \mathbb{T}$ 处，函数 $\exp(f_N)$ 将取到一个小于或等于 1 的值，或者取到 $\exp(f_{N,\,j}(x))$，其中指标 j 唯一。若 $f_{N,\,j}$是根据第一种情况构造的，因而由（28）给出，那么

$$\exp(f_{N,j}(x))w(x) = 0$$

在任意满足 $f_{N,\,j}(x) > 0$ 的点 x 处；若它是根据（31）中的第二种情况构造的，那么

$$\exp(f_{N,j}(x))w(x) = 1$$

每当 $f_{N,\,j}(x) > 0$。因此，无论如何，

$$\int_{\mathbb{T}} \exp(f_N) w\, dm \leq \int_{\mathbb{T}} (1 + w)\, dm = 1 + \|w\|_{L^1(m)}.$$

由于 $N > 0$ 是任意的，我们现在已经验证了应用引理 3.1 所需的五个条件，因此证明完成。□

作为直接推论，我们看到，我们已经以比原猜想更强的形式证明了 [7, Section 9]，中 Kriete 和 MacCluer 的猜想。

定理 B 的证明。假设 $\log w$ 在任何区间上都不可积，这显然意味着命题 3.4 中的集合 F 与权函数 w 的载体集 E 一致，该载体集定义见式 (6)。因此，结论可直接由命题 3.4 得出。□

4. Identifying the analytic summand

现在我们专门讨论希尔伯特空间情形 $t = 2$，并证明：如果 I 是权函数 w 对数可积的任一区间，那么该区间与包含于 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 中、形如 (5) 的任何 L^2-求和项的交集都是平凡的。Kriete 和 MacCluer 的工作已大致预示了这一结果，[7, 定理 D]。不过，我们需要的陈述比其中的结果更为专门。因此，下面证明中使用的一些技巧只是对他们工作中所用方法的略微调整。

4.1. 局部不可约性的判据。

下面的引理是证明某个空间不可约性的关键。

引理 4.1. 假设存在一个函数

$$f = f_{\mathbb{D}} + f_{\mathbb{T}} \in \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}})$$

该函数与 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 正交。设 C 是 f 在 $\mathbb{T}$ 上那部分的载体集：

$$C := \{x \in \mathbb{T} : |f_{\mathbb{T}}(x)| > 0\}.$$

那么，$\mathcal{P}^2(\mu)$ 不包含 C 中任何具有正勒贝格测度的可测子集的示性函数。

证明。为导出矛盾，假设集合 $B \subset C$ 的示性函数 1_B 属于 $\mathcal{P}^2(\mu)$，且 $|B| > 0$。我们将证明 B 上的 $f \equiv 0$，这与 C 是 $f_{\mathbb{T}}$ 的载体相矛盾。

由引理 2.1（或推论 2.2）可知，$1_B \in \mathcal{P}^2(\mu)$ 蕴含 $L^2(\mu_B)$ 包含于 $\mathcal{P}^2(\mu)$。由于函数 f 与 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 正交，因此有

$$\int_B f_{\mathbb{T}} \overline{g} w \, dm = 0$$

对于任意函数 $g \in L^2(\mu_B)$。这意味着

$$fw \equiv 0 \text{ on } B.$$

由于 $f_{\mathbb{T}}$ 的载体集 C 必须包含于（至多相差一个勒贝格测度为零的子集）w 的载体集 E，这意味着在 B 上几乎处处有 $f = 0$。这就是所需的矛盾。□

4.2. Beurling-Malliavin 主控函数。现在，我们希望构造一大类可应用引理 4.1 的函数 f。为此，我们将用到 Beurling-Malliavin 乘子定理这一著名且证明难度大得多的一般形式的一个简单特例。

引理 4.2。设 P 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的正函数，在 $x \geq 0$ 上为偶函数且单调递减。如果

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log P(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty,$$

那么对于任意 $a > 0$，存在一个 C^∞ 函数 g，其支撑集位于区间 $(-a,\ a)$ 内，且 $g(0) \neq 0$，其傅里叶变换

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} g(t) dt$$

满足不等式

$$|\hat{g}(x)| \leq P(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

引理 4.2 的证明见 [3, 第 276-277] 页。[3] 中也收录了 Beurling-Malliavin 乘子定理的一般表述及证明。

4.3. G 的矩的估计。对于每个解析多项式 $p(z) = \sum_n p_n z^n$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}} |p|^2 d\mu_{\mathbb{D}} = \int_{\mathbb{D}} |p(z)|^2 G(1-|z|)\, dA(z) = \sum_n |p_n|^2 \alpha_n$$

其中

$$\alpha_n = 2\int_0^1 r^{2n+1} G(1-r) dr \tag{32}$$

是函数 $G(1-r)$ 的矩。$G(1-|z|)$ 在圆盘边界附近的衰减速率与矩 α_n 的衰减速率通过以下引理相联系。

引理 4.3. 若 G 在 (0,1) 上连续可微并满足 (LogLogInt)，则函数

$$P(x) := \int_0^1 r^{|x|} G(1-r) dr, \quad x \in \mathbb{R}$$

满足

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log P(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty. \tag{33}$$

注意，在上述陈述中， P 是关于 $x \geq 0$ 的偶函数且单调递减。我们还有

$$P(2n+1) = \alpha_n/2.$$

该引理由结合 [2] 和[3]中的两种论证得出。

证明。沿用 [2],中 Beurling 的做法，我们令

$$m(x) := \log(1/G(x)), \quad x \in (0,1]$$

and

$$k(x) := \inf_{y\in(0,1]} m(y) + yx, \quad x > 0. \tag{34}$$

于是， m 在 (0, 1) 上单调递减、非负且可微，而k 为正。Beurling 证明了（见 [2, 引理 1]），我们关于 G 的假设 (LogLogInt) 蕴含

$$\int_0^\infty \frac{k(x)}{1+x^2}dx < \infty. \tag{35}$$

现在，我们沿用 [3, 第 229] 页的做法。该文献中的背景略有不同，并且对 m 还作了一些额外假设，但这些假设对我们的目的并非必要。对于所有充分大的正 x，我们现在将用 $k(x)$给出 $P(x)$的下界。我们有

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^1 r^x G(1-r)\,dr \\ &= \int_0^1 \exp\Big(x\log r - m(1-r)\Big)dr \\ &\geq \int_0^1 \exp\Big(2x(r-1) - m(1-r)\Big)dr \\ &= \int_0^1 \exp\Big(-2xt - m(t)\Big)dt. \end{aligned} \tag{36}$$

由于 $\lim_{y\to 0^+} m(y) = +\infty$ ，(34) 右侧的下确界至少在一点 $y \in (0,1]$ 处取得。比较 (34) 中表达式在 $y = 1/2$ 和 $y = 1$ 处的值可知，当 x 充分大时，下确界实际上会在区间 (0, 1) 内取得。在任意这样的点 y 处，根据基本微积分知识，必有等式 $m'(y) = -x$。但 $m'(y) = -G'(y)/G(y)$，由此可知， $m'(y)$ 在每个形如

$[\delta, 1], \delta > 0$ 的区间上是一致有界的。因此

$$\lim_{x \to +\infty} \sup_{m'(y) = -x} y = 0,$$

因此，当 x 足够大时，总存在一点 $\zeta = \zeta_x$ 满足 $\zeta_x < 1/2$，且 $k(x) = m(\zeta_x) + \zeta_x x$。回到 (36)，利用 m 是递减的这一事实来估计

$$\begin{aligned} P(x) &\geq \int_{\zeta_{2x}}^{1} \exp\Big(-2xt - m(t)\Big) dt \\ &\geq \exp\big(-m(\zeta_{2x})\big) \int_{\zeta_{2x}}^{1} \exp(-2xt) dt \\ &= \exp\Big(-m(\zeta_{2x})\Big) \frac{\exp(-2x\zeta_{2x}) - \exp(-2x)}{2x} \\ &= \frac{\exp\big(-k(2x)\big)}{2x} \Big(1 - \exp(-2x + 2x\zeta_{2x})\Big) \\ &\geq \frac{\exp\big(-k(2x)\big)}{4x}. \end{aligned}$$

在最后一步中，我们利用了当 x 足够大时 $\zeta_{2x} < 1/2$ 这一事实，因此当 x 足够大时，$1 - \exp(-2x + 2x\zeta_{2x})$ 大于 $1/2$。现在，由 (35) 和我们最后的估计即可轻易推出 (33)。□

4.4. 完成不可约性证明。回顾 (7) 中剩余集 F 的定义，它是 (6) 中定义的 w 的载体 E 的子集。集合 $E \setminus F$ 具有这样的性质：对于该集合中几乎每个 x，都存在一个包含 x 的区间 I，在其上 w 是对数可积的。现在我们将证明，空间 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F})$ 不含任何示性函数，即它是不可约的。结合命题 3.4 的结果，这将基本完成定理 A 的证明。

在下一个引理的证明中，我们采用 Kriete 和 MacCluer 在其对 [7, 定理 D]的证明中使用的相同核心思路。

引理 4.4. 假设 G 与引理 4.3 中的情形相同，并且 w 的载体集除去一个勒贝格测度为零的集合后，是若干区间 I 的并，在这些区间上我们有

$$\int_I \log w \, dm > -\infty.$$

若 μ 由式 (5) 给出，则 $\mathcal{P}^2(\mu)$是不可约的。

证明。设 I 是 $\log w$ 可积的任一区间，并设 x 是 I内部的任意一点。我们将构造一个元组 $f_{\mathbb{D}} + f_{\mathbb{T}} \in \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}})$，使其与 $\mathcal{P}^2(\mu)$正交，且 $f_{\mathbb{T}}$ 的载体集 C 包含一个以 x为中心的区间 $J \subset I$。由引理 4.1 可知，$\mathcal{P}^2(\mu)$不包含 J子集的任何示性函数。由于 x 是任意的，通过将区间 I 与子区间 J拼接起来，再应用推论 2.2，可得 $\mathcal{P}^2(\mu)$不包含 I 子集的任何示性函数。最后，由于除去一个零测集，w 的整个载体都可由区间 I 覆盖，且 $\log w$ 在这些区间上可积，因此 $\mathcal{P}^2(\mu)$是不可约的。

我们接下来构造这样一个元组。不失一般性，可以假设 $x = 1$，且 I 是一个以 1 为中心的区间。设 P 如引理 4.3 所述，并令

$$\tilde{P}(x) = 2\frac{P(2|x| + 1)}{1 + |x|}.$$

˜于是，不难看出 P 满足引理 4.2 的假设，因此存在一个支撑于 $\mathbb{R}$ 中区间（$-a, a$）上的光滑函数 g，满足 $g(0) \neq 0$，且其傅里叶变换满足估计

$$|\hat{g}(x)| \leq \tilde{P}(x).$$

若 h 在圆周上由下式定义

$$h(e^{it}) = g(t), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

则 h 在 $1 \in \mathbb{T}$ 处不为零，支撑于 1 附近的区间 J 内；我们可以设该区间包含于 I（因为可以将 g 的支撑集选得任意短），并且其傅里叶级数 $h = \sum_n h_n e^{itn}$ 满足

$$|h_n| = |\hat{g}(n)| \leq \tilde{P}(n) = \frac{\alpha_n}{1 + n}, \tag{37}$$

其中 α_n 是式 (32) 中定义的 G 的第 n 个矩。令 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$，其中

$$F_n = -\frac{h_n}{\alpha_n}.$$

那么，系数 F_n 满足 $|F_n| \leq \frac{1}{1+n}$，因此 F 是 $\mathbb{D}$中的解析函数。计算

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |F(z)|^2 G(1-|z|)dA(z) &= \sum_{n\geq 0} |F_n|^2 \alpha_n \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha_n|}{(1+n)^2} < \infty\end{aligned}$$

这表明 f 是 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}})$ 的一个成员，因为矩 α_n 显然有界。 F 的泰勒系数经过特意选择，使得

$$\int_{\mathbb{D}} F(z)\overline{z}^n G(1-|z|)dA(z) = F_n\alpha_n = -h_n = -\int_{\mathbb{T}} h\overline{z}^n dm$$

对于非负整数 n。这恰好意味着，单项式 $\{z^n\}_{n\geq 0} = \{z_{\mathbb{D}}^n + z_{\mathbb{T}}^n\}_{n\geq 0}$ 与 $F+h$ 正交，其中 $F+h$ 被视为 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mathrm{m})$ 的一个元素。因此，这些单项式的闭线性张成（当然就是 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}+\mathrm{m})$）与 $F+h$ 正交。假设 $\int_I \log w \, d\mathrm{m} > -\infty$，则意味着我们可以构造一个函数 $u \in H^\infty \subset \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}+\mathrm{m})$，使其在区间 I 上满足 $|u| = \min(w, 1)$。于是， $z^n u$ 在 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mathrm{m})$ 中与 $F+h$ 正交。由 u 的有界性可知， $F\overline{u}$ 属于 $L^2(\mu_{\mathbb{D}})$，并且可以将其正交投影到 $f_{\mathbb{D}} \in \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}})$ 上。接着我们计算

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{D}} F\overline{uz}^n G(1-|z|)dA + \int_{\mathbb{T}} h\overline{uz}^n dm \\ &= \int_{\mathbb{D}} f_{\mathbb{D}}\overline{z}^n G(1-|z|)dA + \int_I h\frac{\overline{u}}{w}\overline{z}^n w dm.\end{aligned}$$

这意味着，如果我们令 $f_{\mathbb{T}} := h\frac{\overline{u}}{w}1_I$，那么 $f_{\mathbb{T}}$ 是一个有界可测函数，并且元组 $f_{\mathbb{D}} + f_{\mathbb{T}} \in \mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}}) \oplus L^2(\mu_{\mathbb{T}})$ 与 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 正交。此外， $f_{\mathbb{T}}$ 在 J 上几乎处处非零。根据证明第一段中的说明，证明完成。

□

定理 A 的证明。由命题 3.4，空间 $L^2(\mu_F)$ 包含于 $\mathcal{P}^2(\mu)$。该空间在 $\mathcal{P}^2(\mu)$ 中的正交补显然是 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F})$。由引理 4.4，空间 $\mathcal{P}^2(\mu_{\mathbb{D}} + \mu_{\mathbb{T}\setminus F})$ 是不可约的。

□

References

[1] A. Aleman、S. Richter 和 C. Sundberg。《$\mathcal{P}^t(\mu)$ 空间中的非切向极限与不变子空间的指标》。《数学年刊》，第 449–490 页，2009年。

[2] A. Beurling。《线性边界上的解析延拓》。《Acta Mathematica》，128(1)：153–182，1972年。[3] V. P. Havin 和 B. J¨oricke。《调和分析中的不确定性原理》，《数学科学百科全书》第 72 卷。Springer，柏林，1995年。[4] H. Helson。《不变子空间讲义》。Academic Press，纽约—伦敦，1964年。[5] O. Ivrii 和 A. Nicolau。《Beurling-Carleson 集、内函数与一个半线性方程》。arXiv 预印本 arXiv:2210.01270，2022年。[6] S. V. Khrushchev。《同时逼近问题及柯西型积分奇点消去问题》。《以 V. A. Steklov 命名的数学研究所论文集》，130：124–195，1978年。[7] T. L. Kriete 和 B. D. MacCluer。《单位圆盘上多项式的均方逼近》。《美国数学会会刊》，322(1)：1–34，1990年。[8] A. Limani 和 B. Malman。《若干光滑柯西变换族的构造》。即将发表于《加拿大数学杂志》，2022年。[9] A. Limani 和 B. Malman。《关于 $\mathcal{H}(b)$ 中的光滑逼近问题及其与次正规算子的联系》。即将发表于《泛函分析杂志》，2022年。[10] B. Malman。《圆盘中测度的 Thomson 分解》。arXiv 预印本 arXiv:2208.08810，2022年。[11] E. M. Stein 和 R. Shakarchi。《实分析：测度论、积分与希尔伯特空间》。普林斯顿大学出版社，2009年。[12] J. E. Thomson。《多项式的平均逼近》。《数学年刊》，133(3)：477–507，1991年。.[13] A. L Vol'berg 和 B. Erikke。《几乎解析函数的对数可和性及 Levinson-Cartwright 定理的推广》。《苏联数学文集》，58(2)：337，1987年。

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västerås,Sweden电子邮件地址：bartosz.malman@mdu.se