arXiv:2304.01411v1 [quant-ph] 3 Apr 2023

腔介导的集体动量交换相互作用

Chengyi Luo、Haoqing Zhang、Vanessa P. W. Koh、John D. Wilson、Anjun Chu、
Murray J. Holland、Ana Maria Rey 和 James K. Thompson*JILA, NIST, and Department of Physics, University of Colorado, Boulder, CO, USA.(日期：2023年4月5日)

量子模拟和传感有望为我们提供对自然的新认识，从理解复杂的相互作用系统到寻找尚未发现的物理现象。通过无限程光子介导相互作用的激光冷却原子大系综，是实现这两项目标的强大平台。在此，我们首次实现了动量交换相互作用：原子通过从共同腔模中集体发射和吸收光子来交换其动量态。这种动量交换相互作用在物质波干涉仪中产生了观测到的全连接类伊辛相互作用，有助于纠缠生成。多体能隙也随之出现，将干涉仪中的物质波波包有效地束缚在一起，从而抑制多普勒退相干，其原理类似于 M¨ossbauer 光谱。可调谐的动量交换相互作用为量子相互作用增强物质波干涉提供了新能力，也为实现超导体和动力学规范场的模拟等奇异行为提供了新途径。

激光冷却原子的多体量子态可以得到极其精细的操控，使其成为量子模拟、计量学和计算的强大平台。尤其是，量子传感与计量学依赖于对如何实现原子间新型相互作用的理解，从而打造新一代超高精度量子传感器，并模拟真实材料中难以实现的复杂量子物质相和非平衡系统。

在量子多体系统中，光学腔可用于增强原子与光的相互作用，使不同原子之间的原子内禀 [1–5], 运动 [6–10],或两者的 [11, 12] 自由度发生耦合。此外，强烈的光—原子相互作用使迄今为止在任何系统中直接观测到的纠缠生成规模达到最大 [13, 14], ，并应用于利用物质波干涉仪进行量子传感 [12] 和原子钟 [14–17]。

在此，我们首次在多体系统中实现了腔介导的动量交换相互作用，如图 1A 和 B 所示，其中原子成对交换动量态。动量交换相互作用源于原子密度光栅在施加的缀饰激光上产生边带音调，这与腔光力系统中的情形类似 [18–21], 如图 1C 至 E 所示。动量交换可建模为全连接赝自旋交换相互作用，类似于内禀自旋态中的交换相互作用[2–5, 22]。此前的理论方案曾考虑在环形腔中生成这种动量交换相互作用，以及将其扩展到涉及额外自旋自由度的双模压缩 [23, 24], ；在此，我们利用下落原子的多普勒频移，在驻波腔中实验实现了动量交换相互作用。

观测到的动量交换相互作用使集体 XX-海森堡模型得以实现。这一模型是量子磁性和超导领域的标志性模型 [25–27], ，如今在纯动量基中生成，不涉及原子内部自由度；此前的研究 [2–4, 22]以及同期工作 [28]则与此不同。交换相互作用首先表现为依赖磁化强度的集体赝自旋布洛赫矢量全局自旋进动，称为单轴扭转（OAT）。其次，它会产生多体能隙，从而实现一种集体反冲机制，抑制多普勒展宽（即单粒子色散）导致的退相干。这种机制与穆斯堡尔谱学和兰姆-迪克谱学类似但又有所不同，而后两者一直是实现最先进量子计量学和寻找新物理的关键手段[29, 30]。

这项工作也为超越二能级系统的多体模拟奠定了基础：通过在更大的动量态阶梯中编码自由度[31, 32] 以及在内部态中编码自由度 [33–37]。大量合成维度与长程腔介导相互作用相结合，为实现自生成的自旋轨道耦合 [38, 39], 对产生 [2, 40–46], 长期以来备受期待却从未观测到的拓扑超流体 [47], 以及动力学规范场 [48–50]开辟了独特机遇。在每种情况下，借助用于产生这些现象的同一原子-腔相互作用，可以以非破坏性方式并以超越平均场的灵敏度探测脆弱关联和内在量子性质 [12–14]。最后，边带音调的产生或可开辟一条路径，使物质波与介观光机械系统之间的激发实现转导 [18, 19] ，或者实现如针对自旋所提出的物质波反作用规避测量 [51]。

在实验中，^{87}铷原子在双镜驻波腔内进行激光冷却。该腔垂直定向，沿着 Z，见图1A 和 [12, 52]。原子沿腔轴下落，并由

* jkt@jila.colorado.edu

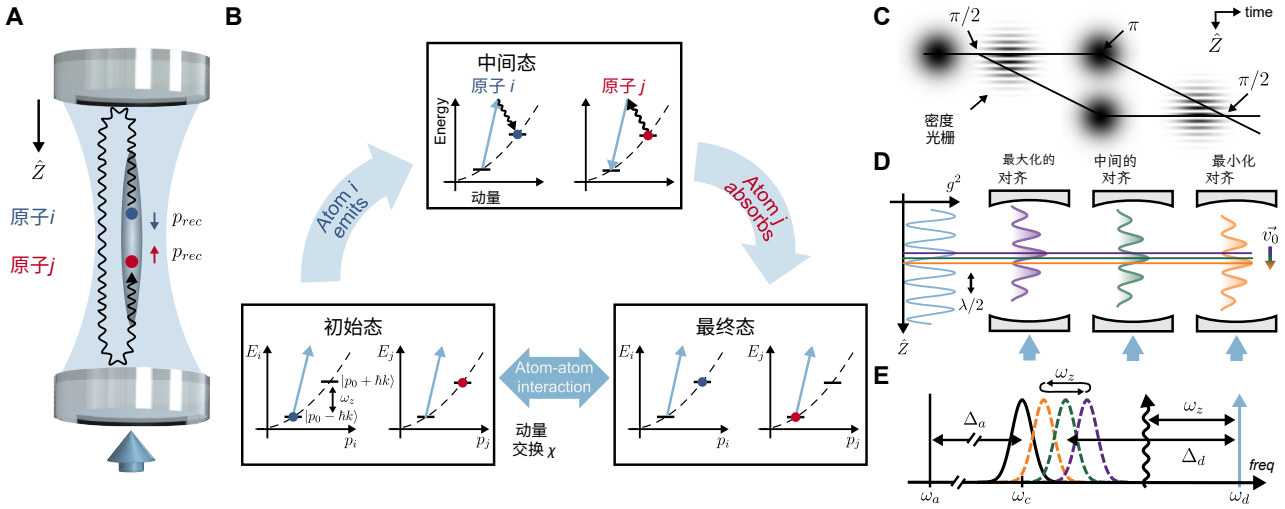

图 1。**动量交换相互作用。（A）**通过驻波光学腔中的光子交换，实现处于不同动量态（$p_0 \pm \hbar k$）$\hat{Z}$ 的原子之间的动量交换相互作用；图中以红色和蓝色表示两个特定原子。缀饰激光（浅蓝色箭头）注入腔中。**（B）**能量-动量图展示了示例中红色和蓝色原子发生动量交换的步骤。消去中间态后，得到仅涉及原子的有效动量交换哈密顿量。**（C）**物质波干涉仪的时空图。施加布拉格脉冲以操控处于动量态叠加中的原子，使波包随时间分离，后续脉冲则使波包重新重叠。波包彼此重叠时，其干涉会沿 $\hat{Z}$形成密度光栅。**（D）**随着原子密度光栅移动，它与驻波腔模（左侧浅蓝色）的空间重叠程度随之变化；右侧以紫色、绿色和橙色展示了三个不同时刻的快照。**（E）**原子光学跃迁频率 ω_a（黑色实线）、无原子的裸腔频率 ω_c（黑色实线洛伦兹线形）以及原子缀饰腔共振频率（与 (C) 中对应时刻的快照相对应的紫色、绿色和橙色虚线洛伦兹线形）的频率图。图中标出了平均缀饰激光失谐 Δ_d。腔以 ω_z进行频率调制，使缀饰激光产生位于 $\pm\omega_z$ 的边带（图中以黑色波浪线表示下边带）；这些边带与缀饰激光共同耦合动量态 $p_0 \pm \hbar k$，从而实现动量交换。

蓝失谐腔内光偶极阱引导。一对频率不同的激光束以非共振方式注入腔内，以驱动基态超精细态之间对速度敏感的双光子拉曼跃迁（用于态制备和读出），或驱动仅改变动量态的布拉格跃迁（用于操控动量态的叠加态）。

原子被制备在基态超精细态$|F = 2,\ m_F = 2\rangle$ 其动量沿腔轴方向$p_0 - \hbar k$，均方根动量展宽为 $\sigma_p < 0.1\hbar k$ 其中$\hbar$为约化普朗克常数，波数为$k = 2\pi/\lambda$，波长为 $\lambda = 780$ 纳米。如图1C 所示，随后施加布拉格激光，使原子处于两个波包的叠加态中，波包的动量中心位于 $p_0 \pm \hbar k$，平均动量为 p_0，两者相隔两个光子反冲动量 $2\hbar k$。插入额外的布拉格脉冲后，我们可以实现物质波干涉仪，使原子波包彼此分离，并在稍后的时间重新重叠。波包刚分裂之后以及即将重新重叠之前，波包的两个部分会发生干涉，从而形成空间变化的原子密度光栅，其周期为$\lambda/2$，与驻波腔模的周期相匹配。

如图1E 所示，腔模的频率相对于 D2 $\Delta_a = 2\pi \times 500$ 蓝失谐循环跃迁 $|F = 2,\ m_F = 2\rangle \to |F' = 3,\ m_{F'} = 3\rangle$。光子通量为 $|\alpha_d|^2$（单位为每秒光子数）的缀饰激光器以频率 ω_d 驱动腔，该频率通常与腔共振频率相差不到 1 MHz。腔 κ_1 的输入耦合由输入镜的透射率决定。失谐 Δ_a 远大于其他所有相关频率尺度，包括激发态衰减率 $\Gamma = 2\pi \times 6$ MHz 和腔功率衰减率 $\kappa = 2\pi \times 56(3)$ kHz。在此远失谐极限下，位于位置 Z 的原子会使腔共振频率移动 $\frac{g_0^2}{\Delta_a}\cos^2(kZ)$，其中 $g_0 = 2\pi \times 0.48$ MHz 是腔波腹处 Jaynes-Cummings 原子-腔耦合的最大值 [53]。

调制边带。 当原子密度光栅以速度沿腔轴移动时 $v_0 = p_0/m$，其中m 的质量为 ^{87}铷，密度光栅从与图中所示的腔驻波对齐逐渐变为错位，方向为从左至右。1D。这会使腔共振频率以双光子多普勒频率 $\omega_z = 2kv_0$ 发生调制，如图所示。1E。腔共振频率的调制会使腔内缀饰激光产生光学调制边带，其频率为 $\omega_d \pm \omega_z$，其中更接近共振的边带如图所示。1E（黑色波浪线），这与腔光力学系统直接类似

统 [18–20]。调制边带也可以理解为缀饰激光被运动的物质波光栅反射后发生的多普勒频移反射。

我们直接观察到，调制边带与缀饰激光结合形成布拉格耦合，驱动布居数集体转移，从 $p_0-\hbar k$ 到$p_0+\hbar k$，如图 2A 中的实心点和实线所示。将调制边带调至名义上与着装腔共振时，就会发生这一现象；具体做法是将缀饰激光相对于腔平均共振频率的失谐（见图1E）设为 $\Delta_d=\omega_z$。在此条件下，边带光可以在被原子重新吸收之前逸出腔外，因此，集体布居转移也可理解为动量态之间的超辐射衰变。为确认这种衰变的集体性质，我们在另一项实验中，使用一个初始布拉格 $\pi/2$脉冲制备初始叠加态，该脉冲相对于缀饰激光失谐 85 GHz。缀饰激光 k_d与布拉格激光 k_{Bragg} 的波数差，导致腔驻波与原子密度光栅的空间对齐出现偏移；在原子云的轴向范围内，这一相位偏移为 $2\left|k_d-k_{Bragg}\right|L_{cloud}=3.5$ 弧度，原子云轴向长度为 $L_{cloud}=1$ mm（图 2B）。在这种情况下，我们观察到图 2A 中没有发生超辐射布居转移（空心圆和虚线）。

我们现在通过调节缀饰激光，使调制边带远离腔的共振，来实现动量交换相互作用。在此极限下，边带频率处发射的光子更有可能被原子重新吸收，而不是逃逸出腔。这个发射并吸收边带光子的过程会导致动量交换，如图1A 和 B 所示。

有效哈密顿量。为描述动量交换过程，我们首先将 $\hat{\psi}^\dagger(p)$ 和 $\hat{\psi}(p)$ 定义为动量为 p 的原子的产生与湮灭场算符，它们与位置空间中的产生与湮灭算符之间的关系为 $\hat{\psi}(Z)=\int\hat{\psi}(p)e^{ipZ/\hbar}dp$。由于中心位于$p_0\pm\hbar k$ 的波包具有较窄的动量展宽 $\hbar k\gg\sigma_p$，我们定义算符 $\hat{\psi}_\uparrow(p)=\psi(p+p_0+\hbar k)$、$\hat{\psi}_\downarrow(p)=\psi(p+p_0-\hbar k)$，用于湮灭动量范围为 $p\in[-\hbar k,+\hbar k]$ 内、动量为 $p+p_0\pm\hbar k$ 的原子。这样有助于从波包和有效赝自旋语言两方面理解这一过程。

我们将两个动量态之间的差分动能 $p+p_0\pm\hbar k$ 分解为两项：均匀的或共同的动能差 $\hat{H}_z(p)=\frac{\hbar\omega_z}{2}\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)-\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]$，以及非均匀项 $H_{in}(p)=\hbar\omega_{in}(p)\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)-\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]$，其中 $\omega_{in}(p)=2kp/m$。

我们可以使用二阶微扰理论绝热消去腔场（见图 1B），在微扰极限下 $|\Delta_d\pm\omega_z|\gg\sqrt{N}\left|\frac{\alpha_d\sqrt{\kappa_1}}{\Delta_d+i\kappa/2}\right|\frac{g_0^2}{4\Delta_a}$，我们得到一个有效纯原子动量交换哈密顿量

$$\hat{H}_{mx}=\iint_{-\hbar k}^{\hbar k}\Big[\hbar\chi_+\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(q)\hat{\psi}_\uparrow(q)+\hbar\chi_-\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(q)\hat{\psi}_\downarrow(q)\Big]\,dp\,dq \tag{1}$$

总哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_{mx}+\int_{-\hbar k}^{\hbar k}\hat{H}_{in}(p)\,dp+\int_{-\hbar k}^{\hbar k}\hat{H}_z(p)\,dp$。动量交换耦合项为

$$\chi_\pm=\left(\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\right)^2\frac{|\alpha_d|^2\kappa_1}{\Delta_d^2+\kappa^2/4}\frac{\Delta_d\pm\omega_z}{(\Delta_d\pm\omega_z)^2+\kappa^2/4}\,, \tag{2}$$

其中，我们通过适当的林德布拉德算符纳入了有限的腔阻尼（见补充材料）。

为了将其映射为赝自旋模型，我们定义升降算符 $\hat{j}_+(p)=\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)$、$\hat{j}_-(p)=\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)$，以及自旋投影算符 $\hat{j}_x(p)=\frac{1}{2}\left[\hat{j}_+(p)+\hat{j}_-(p)\right]$、$\hat{j}_y(p)=\frac{1}{2i}\left[\hat{j}_+(p)-\hat{j}_-(p)\right]$ 和$\hat{j}_z(p)=\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)-\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]$。对所有动量态积分后，我们便可定义集体算符 $\hat{J}_\alpha=\int_{-\hbar k}^{\hbar k}\hat{j}_\alpha(p)\,dp$，其中 $\alpha\in[x,y,z,+,-]$。动量交换哈密顿量 H_{mx} 因而等价于有效的自旋交换哈密顿量 $H_{sx}=\hat{\chi}_+J_+J_-+\chi_-J_-J_+$。这可视为一种集体 XX 海森堡模型或理查森–高丁可积模型，其中非局域自旋–自旋耦合 χ 与非均匀轴向场相互竞争。这类模型常通过自旋安德森映射用于研究量子磁性和超导性 [25–27]。我们还指出，驻波腔模的空间强度变化 $\cos^2kZ$ 会产生额外项 J_+^2 和 J_-^2；在相同的微扰极限下，我们可以忽略这些项，因为它们不满足图 1B 所示初态与末态之间的能量守恒（见补充材料和 [54]）。

单轴扭转动力学。交换哈密顿量可改写为 $\hat{H}_{sx}\approx\chi\left(\hat{J}^2-\hat{J}_z^2\right)$ 其中$\chi=\chi_++\chi_-$，忽略单粒子项。在平均场层面，单轴扭转哈密顿量 $\chi\hat{J}_z^2\approx\hat{2}\chi\langle J_z\rangle J_z$ 会使集体布洛赫矢量绕 z 方向以恒定频率旋转，$2\chi\langle J_z\rangle$该频率取决于初始动量布居数差 $\langle\hat{J}_z\rangle$，该差值由哈密顿量 $\hat{H}_{sx}$守恒。在等效的物质波图像中，施加交换相互作用持续时间 $\Delta\phi=2\chi\langle J_z\rangle t_x$ 后累积的方位角相位 t_x表现为两个波包之间空间干涉条纹的位移，见图 2F。

为观测这一相移，我们运行一个物质波干涉仪序列（见图2C），首先施加持续 $15\,\mu$ 秒的布拉格$\pi/4$脉冲，使原子的布居数差为 $\frac{\langle J_z\rangle}{N/2}\approx-0.7$。等待一段延迟时间后

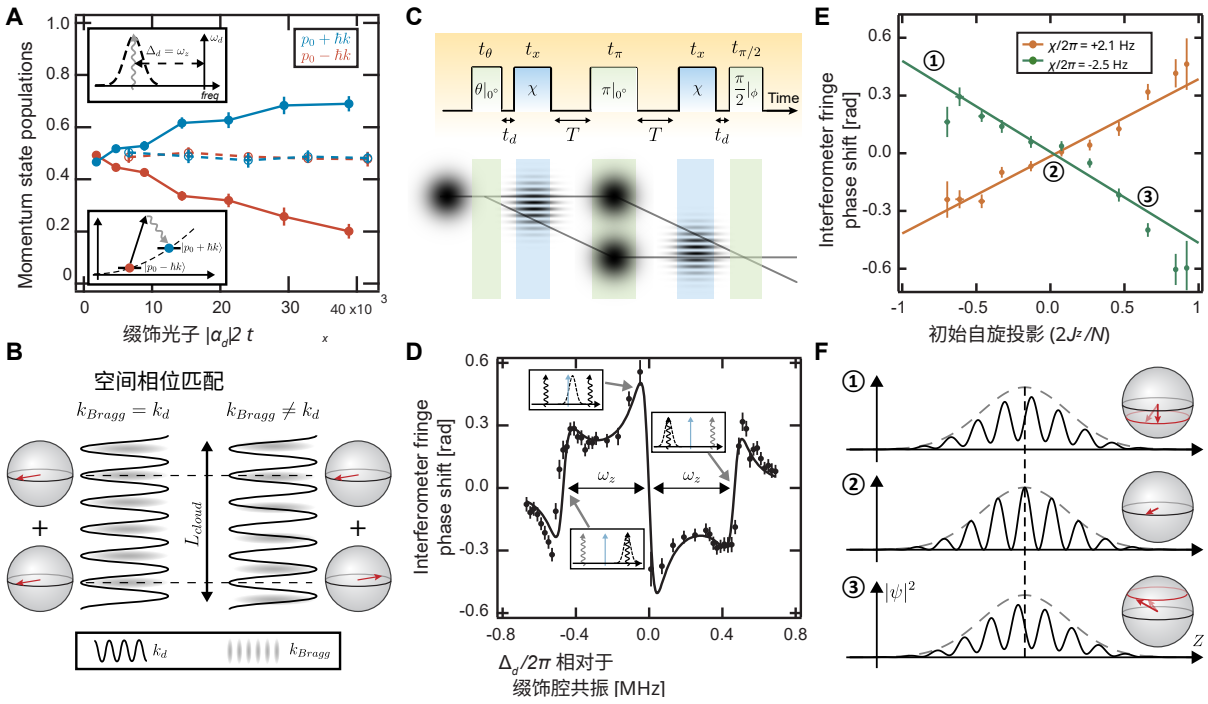

图 2. **调制边带与单轴扭转动力学。(A)**当移动的原子密度光栅产生的调制边带调谐至与腔共振（上方插图）时，光会逸出腔，并在两个动量态之间以集体方式（即超辐射方式）转移布居数（下方插图），转移速率为 $p_0 \pm \hbar k$（实心点和实线。）**(B)** 当布拉格激光（产生密度光栅）和缀饰激光（驱动动量交换相互作用）的波数彼此接近时（左图），系统具有良好的相位匹配。波数差异（$k_{Bragg} \neq k_d$）会导致空间变化的相位，从而消除超辐射（右图）。**(C)** 用于观测全连接伊辛模型或单轴扭转动力学的物质波干涉仪序列及其时空图。干涉仪条纹的振幅和相移 $\Delta\phi$ 通过扫描最终旋转的相位 ϕ进行测量。**(D)** 干涉仪条纹的观测相移 $\Delta\phi$ 随缀饰激光相对于缀饰腔共振的失谐变化，显示了公式中预测的 χ 函数形式（实线），见式 2。插图展示了三个典型失谐下调制边带与腔共振的相对位置。**(E)** 在保持 $J_z = \langle \hat{} J_z \rangle$固定时，测得的干涉仪相移与初始自旋投影 Δ_d 呈线性关系。橙色数据点及拟合直线对应 $\chi/2\pi = +2.1$ Hz，绿色对应 $\chi/2\pi = -2.5$ Hz）。**(F)** 在赝自旋图像（布洛赫球）和原子密度光栅图像中，展示（E）中三个典型点对应的相移 $\Delta\phi$。

时间 $t_d = 25\ \mu$ 秒后，我们施加缀饰激光，以产生持续 $t_x = 25\ \mu$ 秒的交换相互作用。随后，我们施加一个布拉格 π脉冲，使波包重新重叠，或等效地抵消由 H_{in} 引起的非均匀性^；然后再次施加缀饰激光，之后施加最后一个布拉格 $\pi/2$脉冲，并改变相位 ϕ。最后的 $\pi/2$脉冲将^相移 $\Delta\phi$ 映射为 $\langle J_z \rangle$的变化。我们使用速度敏感的拉曼 π脉冲和腔辅助量子非破坏测量来测量各动量态中的布居数（见 [12] 及补充材料）。我们在扫描最后一个 $\pi/2$脉冲相位的同时重复实验。随后根据观测到的条纹 $\Delta\phi$ 相对于 $\langle J_z \rangle$ 的相位ϕ确定相移^。

式（2）的动量交换耦合预言，随着缀饰激光失谐 Δ_d 变化，会出现三重色散结构。通过测量诱导相移 $\Delta\phi$ 随缀饰激光失谐 Δ_d 从缀饰后的腔共振

在图 2D 中，我们观察到了这一预言的结构。此组数据中，入射缀饰激光功率（350 光子/μs）保持不变。如插图所示，两个外侧的色散特征源于两个边带频率$\pm\omega_z$ 扫过腔共振。载波扫过腔共振时，会产生位于 $\Delta_d = 0$ 附近的色散特征。在 $\Delta_d = 0$处，交换相互作用参数为 $\chi_+ \approx -\chi_-$，使总交换相互作用（$\chi \approx 0$）相互抵消。

相移 $\Delta\phi$ 预计与 ^ 呈线性关系$\langle J_z \rangle$。我们通过将初始的 $\pi/4$-^ 脉冲替换为长度可变的脉冲来改变 $\langle J_z \rangle$，同时保持 Δ_d 不变，从而观察到这一现象。对于图 2E 中的橙色数据，相关边带的频率高于腔共振频率，因此测得$\chi/2\pi = +2.1$ Hz。对于绿色数据，我们重新调节失谐 Δ_d，使相关边带频率低于腔共振频率，因此测得 $\chi/2\pi = -2.5$ Hz。我们观察到线性相移

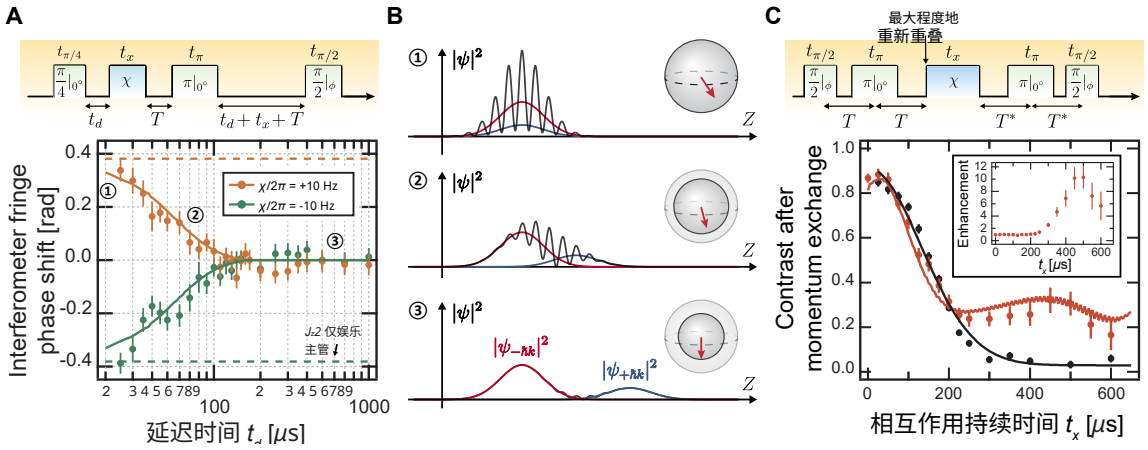

图 3. **退相干与能隙保护。(A)** 若在延迟时间 t_d 之后施加动量交换相互作用，此时原子波包已分离，则测得的单轴扭转相移趋于零；分别测量了正、负 χ，动量交换相互作用的模拟结果以实线表示。作为比较，虚线表示采用纯单轴扭转 $\hat{J}_z^2$ 哈密顿量而非完整动量交换哈密顿量进行模拟的结果。**(B)** 示意图展示了 (A) 中特征时刻的波包分离情况及赝自旋表示。随着波包分离，原子密度光栅消失，不再产生形成动量交换相互作用的调制边带。图中还显示了对应的赝自旋布洛赫球。**(C)** 采用顶部面板所示的序列，底部面板展示了在交换相互作用期间结束时测得的干涉仪条纹对比度：$\chi = 0$ （黑色），$\chi/2\pi = 6$ Hz（红色）。两者的比值（插图）显示，动量交换相互作用中的 $\hat{J}^2$ 贡献显著增强了相干性的能隙保护。模拟结果（实线）与数据吻合良好。

变化 $\Delta\phi$，对于 $\chi > 0$ 和 $\chi < 0$，斜率符号相反，符合预期。

我们观察到，相移的大小 $\Delta\phi$ 会随着波包分离时间的延长而减小 t_d，随后施加缀饰激光$t_x = 25$ μ秒，以诱导动量交换相互作用。图3A（上）展示了用于测量相移衰减的脉冲序列；下图展示了相移随时间的变化，分别对应正、负 χ （橙色和绿色数据点）。作为比较，实线表示完整动量交换哈密顿量预测的相移，虚线表示单轴扭转哈密顿量预测的相移 $-\chi\,\hat{J}_z^2$。波包分离，或者等价地说，非均匀性 H_{in} 不会影响纯单轴扭转哈密顿量，正如 [12], 中的情况；而交换相互作用会因退相干而使相移减小，这一点已在自旋系统中观察到 [3]。波包分离会导致退相干或布洛赫矢量缩短，如图3B所示。随着波包分离，相应的集体布洛赫矢量 $\langle J_z \rangle$ 会缩短，而其投影保持不变。

能隙保护：将波包束缚在一起。 动量交换哈密顿量中的额外非线性项 $\hat{J}^2$ 会在高对称性态（较大的 J）和低对称性态（较小的 J）之间产生多体能隙 [3, 22]。为探究能隙如何保护物质波相干性，我们按照图 3C（上图）所示运行马赫-曾德尔干涉仪，并在波包最大程度重新重叠的位置开始施加缀饰激光，持续时间为 t_x （其中 $T = 70$ μs）。缀饰结束时的相干性

激光器作用是通过干涉仪条纹的振幅估算的，该条纹采用适时的 π-脉冲和最终的 $\pi/2$-脉冲显示（带有 $T^* = 70$ μs。）为考虑自由空间散射以及向更高动量态的超辐射所导致的原子损失，对拟合得到的条纹振幅进行归一化，以两种动量态中的剩余布居 $p_0 \pm \hbar k$作为基准来计算对比度。由于可能低估经历自由空间散射的原子数，系统的实际相干性更高。图 3C 中，实验分别在缀饰激光关闭时（$\chi = 0$，黑点和拟合黑色曲线）和缀饰激光开启时（$\chi/2\pi = 6$ Hz，红点和理论曲线）进行；我们观察到，条纹对比度在 600 μs 时仍然显著。图 3C 的插图显示，动量交换可使对比度最多提高 10(2) 倍。

在图3C 中，相干性先略有上升，随后最终下降。若允许波包在施加动量交换相互作用之前先分离一小段时间 40 μs，再持续施加动量交换相互作用 t_x，则这一行为会更加明显。我们在不同的缀饰激光功率下测量干涉仪对比度随 t_x 的变化（见图4A），以获得不同的 χN 与均方根非均匀性之比，其中均方根非均匀性由 H_{in} 表示为频率 σ_{in}。我们观察到，当 $\chi N/\sigma_{in} = 0$从 0.9 增至 1.7 时，动力学行为发生了明显转变：对比度开始出现振荡，并且随着 χN 增大，振荡会延续到更长时间。随着 χN 增大，振荡变得更快，且在较短时间内振幅更大。这一行为与

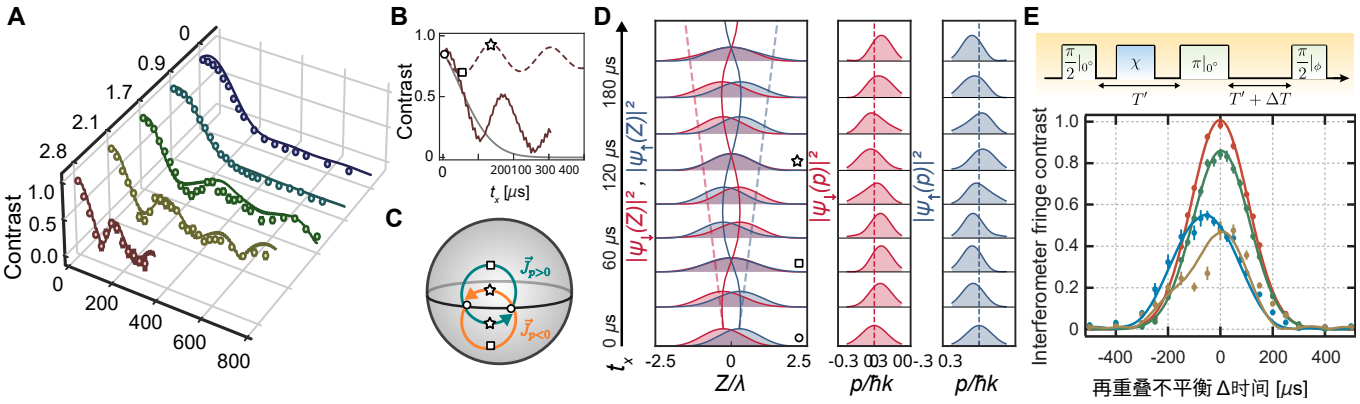

图 4. **束缚波包。** **(A)**我们执行了与图 3C 类似的序列，但在波包重叠后、施加缀饰激光前增加了 40 μs 的延迟，并在可变时间 t_x 内施加缀饰激光。我们发现，随着相互作用强度相对于均方根非均匀展宽 $\sigma_{in} = 2\pi \times 2$ kHz 增大，动力学在 $N\chi/\sigma_{in} > 0.9$处发生转变。显著的是，还出现了清晰的振荡，而这在图 3C 中仅略有显现。曲线表示理论预测。**(B)**图中展示了开启残余超辐射（实线）和关闭残余超辐射（虚线）时的理论预测，并标出了振荡中的三个示例点；灰色曲线表示无相互作用的情形。**(C)** 赝自旋布洛赫矢量的总长度 $\vec{J}$ 随时间 $\vec{}$ $\vec{}$振荡，因为各个布洛赫矢量也会振荡，如 $J_{p>0}$ 和 $J_{p<0}$ 所示，分别以绿色和橙色表示，其中 $\chi N/\sigma_{in} = 2.8$。 **(D)** (左) 在共动参考系中，波包随时间围绕其空间平均位置振荡（蓝色和红色波包及其中心的实线表示有相互作用系统，虚线表示无相互作用系统）。动量空间波包（右）也会振荡，但相对于位置空间波包存在随时间变化的 $\pi/2$ 相移，类似于谐振子的情形。 **(E)** 干涉仪对比度随波包名义上完美再重叠时的不平衡量而变化：不施加动量交换（红色数据和拟合曲线）；在首次 $\pi/2$ 时以中等功率（蓝色数据和理论曲线）及高功率（棕色数据和理论曲线）施加动量交换；以及在波包分离时施加动量交换（绿色数据和拟合曲线）。

叠加的理论模拟（图4A 中的彩色曲线）相当一致。模拟包含有限的超辐射，且仅根据数据拟合 σ_{in} ，其中 $\chi N = 0$。

相干性延续至更长时间，以及观察到的振荡，可以理解为动量交换相互作用使波包彼此束缚，从而不再自由分离。在图 4B 中，我们展示了不考虑超辐射时对比度随时间变化的模拟结果，并突出显示了三个示例点；我们利用图 4C 中的模拟轨迹对这些点进行解释。图 4C 展示了在 $p > 0$ 或 $p < 0$条件下、采用 $\vec{J}_{p>0} = \int_0^{\hbar k} \vec{j}(p)\, dp$和 $\vec{J}_{p<0} = \int_{-\hbar k}^{0} \vec{j}(p)\, dp$的集体赝自旋布洛赫矢量，其中$\vec{j}(p) = \langle \hat{} j_x(p)\hat{} x + \hat{} j_y(p)\hat{} y + \hat{} j_z(p)\hat{} z \rangle$。在图 4D 中，我们还展示了不考虑超辐射时，单个波包在动量空间和位置空间中的模拟结果。在赝自旋图像中，动量-$\vec{}$ $\vec{}$交换使图示的矢量 $J_{p>0}$ 和 $J_{p<0}$ 围绕轨道运动，在赤道面上下对称振荡，因此总布洛赫矢量的长度随时间振荡。在波包图像中，如果没有相互作用，波包中心将沿着发散的虚线运动。存在相互作用时，波包彼此相对地在位置上振荡，同时也在动量 p上振荡，仿佛波包此时由弹簧连接；其特征频率由交换相互作用强度 χN 决定，且处于 $\chi N \gg \sigma_{in}$ 的极限，并且波包较小、分离较短时.....

离。如果允许波包先彼此分离，再开启弹簧式耦合，那么波包间距（因此也包括对比度）振荡的振幅会更大，这与图 4A 中观察到的结果一致。

为进一步探究波包彼此束缚这一现象，我们按照图 4E（上图）所示的脉冲序列，运行马赫-曾德尔物质波干涉仪。若不施加交换相互作用（图 4E 中的红点及拟合曲线），则回波时间差为 $\Delta T = 0$ 时，条纹对比度达到最大，因为此时波包的重新重叠程度最高。若在第一个分束脉冲之后立即施加动量交换相互作用，我们会看到对比度最大值移至 $\Delta T = -55\ \mu$ 秒（蓝点及模拟结果）；在更高的缀饰激光功率下，曲线则变为非高斯形状（棕点及模拟结果）。为了排除也可能导致最大重新重叠时间偏移的单粒子效应，我们重复了实验，但将缀饰激光延迟至第一个分束脉冲后 1 毫秒才施加，此时波包并未重叠（绿点及拟合曲线）。延迟改变了 55 μ 秒，而非 $t_x = 25\ \mu$ 秒（若认为交换相互作用期间波包间距保持不变，可能会直觉地预期这一结果），这是因为在 25 μ 秒的 $\pi/2$ 脉冲结束与相互作用开始之间存在延迟，同时波包之间的耦合具有类似谐振子的特性。

为了凸显波包束缚现象的极端反常性，设想一个思想实验：所有原子起初都静止，一个光子被原子相干地双光子吸收，净动量转移为 $2\hbar k$，从而形成一个关于哪个原子吸收了该光子的对称化态。若不存在交换相互作用，在较长时间后，会观测到一个原子从原子云中以速度 $v_{rec} = (2\hbar k)/m$ 射出，而所有其他原子仍保持初始动量。相比之下，若存在动量交换相互作用，就绝不会观测到单个原子以速度 v_{rec} 射出。相反，整个由 N 个原子组成的原子云会集体反冲，速度为 v_{rec}/N。

这种集体反冲类似于穆斯堡尔谱学（或兰姆-迪克谱学）：在这种谱学中，嵌入晶体中的原子吸收光后，会使整个晶体发生反冲。不过，两者也有不同之处：首先，这里的效应依赖一种集体机制，我们从根本上无法知道哪个 原子吸收了光子的动量；其次，从某种意义上说，原子通过腔交换光子，持续交换它们在反冲与不反冲状态下的量子振幅。

摘要。 我们首次实现了不同动量态之间的腔介导动量交换相互作用。通过测量这种动量交换相互作用引起的相移，我们观测到集体单轴扭转动力学，为动量态之间的纠缠生成以及超越平均场物理的研究铺平了道路。我们还直接观测到系统相干时间的延长，并将其归因于集体反冲机制。集体反冲机制仍然允许进行加速度传感，因为原子仍能作为与其相互作用的光学布拉格脉冲的相位记忆 [55]。这为以下研究开辟了有趣的新途径无多普勒谱学，以及不依赖类自旋回波序列的物质波干涉仪，因此可用于测量速度而非加速度。

最后，我们指出，这里的动量交换哈密顿量等价于常用于描述BCS s波超导体的模型哈密顿量 [25, 56, 57]。从这一角度看，观测到的振荡可视为交换相互作用强度淬火后出现的希格斯振荡。这将使我们能够在合成自由度中模拟BEC-BCS跨越 [58, 59]，类似于此前在超冷费米原子中观测到的情形，但不受冷却限制或三体损失的影响；这些因素曾阻碍人们观测该系统中理论预测存在的各种激动人心的现象 [25]。除了超流性之外，未来这一系统还应能用于研究对产生和自发生成的相互作用诱导自旋轨道耦合，从而为量子模拟高能物理中的施温格效应[60, 61], 、广义相对论中的温鲁热辐射 [62], ， 以及全息对应中的热场双态开辟道路；全息对应将量子场论与高一维度的引力理论联系起来 [63, 64]。

致谢

本研究基于美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心量子系统加速器的资助开展。我们还感谢美国国家科学基金会通过资助编号 1734006（物理前沿中心）和 OMA-2016244（QLCI）提供的额外经费支持，以及 NIST 和美国国防高级研究计划局/美国陆军研究办公室资助 W911NF-19-1-0210 和 W911NF-16-1- 0576 、美国空军科学研究办公室资助 FA9550-18-1-0319 和 FA9550-19-1-0275。我们感谢 Eugene Polzik、Monika Schleier-Smith 和 Athreya Shankar 的宝贵讨论。

[1] I. D. Leroux、M. H. Schleier-Smith 和 V. Vuleti´c，《物理评论快报》104，073602（2010年）。[2] E. J. Davis、G. Bentsen、L. Homeier、T. Li 和 M. H. Schleier-Smith，《物理评论快报》122，010405（2019年）。[3] M. A. Norcia、R. J. Lewis-Swan、J. R. Cline、B. Zhu、A. M. Rey 和 J. K. Thompson，《科学》361，259（2018年）。[4] J. A. Muniz、D. Barberena、R. J. Lewis-Swan、D. J. Young、J. R. Cline、A. M. Rey 和 J. K. Thompson，《自然》580，602（2020年）。[5] N. Sauerwein、F. Orsi、P. Uhrich、S. Bandyopadhyay、F. Mattiotti、T. Cantat-Moltrecht、G. Pupillo、P. Hauke 和 J.-P. Brantut，《利用高精细度腔中的原子构建随机自旋模型》（2022年），arXiv:2208.09421。[6] A. T. Black、H. W. Chan 和 V. Vuleti´c，《物理评论快报》91，203001（2003年）。[7] K. Baumann、C. Guerlin、F. Brennecke 和 T. Esslinger，《自然》464，1301（2010年）。

[8] S. Schuster、P. Wolf、S. Ostermann、S. Slama 和 C. Zimmermann，《物理评论快报》124，143602（2020年）。[9] Y. Guo、R. M. Kroeze、B. P. Marsh、S. Gopalakrishnan、J. Keeling 和 B. L. Lev，《自然》599，211（2021年）。[10] P. Kongkhambut、J. Skulte、L. Mathey、J. G. Cosme、A. Hemmerich 和 H. Keßler，《科学》377，670（2022年）。[11] R. M. Kroeze、Y. Guo、V. D. Vaidya、J. Keeling 和 B. L. Lev，《物理评论快报》121，163601（2018年）。[12] G. P. Greve、C. Luo、B. Wu 和 J. K. Thompson，《自然》610，472（2022年）。[13] K. C. Cox、G. P. Greve、J. M. Weiner 和 J. K. Thomp- son，《物理评论快报》116，093602（2016年）。[14] O. Hosten、N. J. Engelsen、R. Krishnakumar 和 M. A. Kasevich，《自然》529，505（2016年）。[15] E. Pedrozo-Pe˜nafiel、S. Colombo、C. Shu、A. F. Adiy- atullin、Z. Li、E. Mendez、B. Braverman、A. Kawasaki，

D. Akamatsu、Y. Xiao 和 V. Vuleti´c，《自然》588，414（2020年）。[16] J. M. Robinson、M. Miklos、Y. M. Tso、C. J. Kennedy、D. Kedar、J. K. Thompson 和 J. Ye，《低于量子投影噪声极限的两台自旋压缩光钟直接比较》（2022年），arXiv:2211.08621。[17] I. D. Leroux、M. H. Schleier-Smith 和 V. Vuleti´c，《物理评论快报》104，250801（2010年）。[18] R. Delaney、M. Urmey、S. Mittal、B. Brubaker、J. Kindem、P. Burns、C. Regal 和 K. Lehnert，《自然》606，489 2022( )。[19] R. A. Thomas、M. Parniak、C. Østfeldt、C. B. Møller、C. Bærentsen、Y. Tsaturyan、A. Schliesser、J. Appel、E. Zeuthen 和 E. S. Polzik，《自然·物理》17，228（2021年）。[20] N. Spethmann、J. Kohler、S. Schreppler、L. Buchmann 和 D. M. Stamper-Kurn，《自然·物理》12，27（2016年）。[21] F. Brennecke、S. Ritter、T. Donner 和 T. Esslinger，《科学》322，235（2008年）。[22] E. J. Davis、A. Periwal、E. S. Cooper、G. Bentsen、S. J. Evered、K. Van Kirk 和 M. H. Schleier-Smith，《物理评论快报》125，060402（2020年）。[23] A. Shankar、L. Salvi、M. L. Chiofalo、N. Poli 和 M. J. Holland，《量子科学与技术》4，045010（2019年）。[24] J. D. Wilson、S. B. J¨ager、J. T. Reilly、A. Shankar、M. L. Chiofalo 和 M. J. Holland，《物理评论A》106，043711（2022年）。[25] J. Marino、M. Eckstein、M. S. Foster 和 A. M. Rey，《物理学进展报告》85，116001（2022年）。[26] R. Richardson 和 N. Sherman，《核物理》52，221（1964年）。[27] R. Richardson 和 N. Sherman，《核物理》52，253（1964年）。[28] F. Finger、R. Rosa-Medina、N. Reiter、P. Christodoulou、T. Donner 和 T. Esslinger，《由光子交换介导的自旋与动量关联原子对》（2022年），arXiv:2303.11326。[29] R. V. Pound 和 G. A. Rebka Jr，《物理评论快报》4，337（1960年）。[30] T. Bothwell、C. J. Kennedy、A. Aeppli、D. Kedar、J. M. Robinson、E. Oelker、A. Staron 和 J. Ye，《自然》602，420 2022( )。[31] F. A. An、E. J. Meier、J. Ang'ong'a 和 B. Gadway，《物理评论快报》120，040407（2018年）。[32] E. J. Meier、F. A. An、A. Dauphin、M. Maffei、P. Massignan、T. L. Hughes 和 B. Gadway，《科学》362，929（2018年）。[33] A. Celi、P. Massignan、J. Ruseckas、N. Goldman、I. B. Spielman、G. Juzeli¯unas 和 M. Lewenstein，《物理评论快报》112，043001（2014年）。[34] T. Chalopin、T. Satoor、A. Evrard、V. Makhalov、J. Dal- ibard、R. Lopes 和 S. Nascimbene，《自然·物理》16，1017 2020( )。[35] B. K. Stuhl、H. I. Lu、L. M. Aycock、D. Genkina 和 I. B. Spielman，《科学》349，1514（2015年）。[36] S. Kolkowitz、S. L. Bromley、T. Bothwell、M. L. Wall、G. E. Marti、A. P. Koller、X. Zhang、A. M. Rey 和 J. Ye，《自然》542，66（2017年）。[37] M. Mancini、G. Pagano、G. Cappellini、L. Livi、M. Rider、J. Catani、C. Sias、P. Zoller、M. Inguscio、M. Dalmonte 和 L. Fallani，《科学》349，1510（2015年）。[38] F. Mivehvar、F. Piazza、T. Donner 和 H. Ritsch，《物理学进展》70 ’ 1 (2021年)。

[39] T. Chanda, R. Kraus, G. Morigi, 和 J. Zakrzewski, Quantum 5, 501（2021年）。[40] R. Ma, M. E. Tai, P. M. Preiss, W. S. Bakr, J. Simon, 和 M. Greiner，《物理评论快报》107, 095301（2011年）。[41] F. Meinert, M. J. Mark, K. Lauber, A. J. Daley, 和 H.-C. N¨agerl，《物理评论快报》116, 205301（2016年）。[42] W. Xu, W. Morong, H.-Y. Hui, V. W. Scarola, 和 B. De- Marco，《物理评论A》98, 023623（2018年）。[43] B. L¨ucke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezz´e, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt, L. San- tos, A. Smerzi, 和 C. Klempt，《科学》334, 773（2011年）。[44] C. Gross，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》45, 103001（2012年）。[45] S. J. Masson, M. D. Barrett, 和 S. Parkins，《物理评论快报》119, 213601（2017年）。[46] A. Periwal, E. S. Cooper, P. Kunkel, J. F. Wienand, E. J. Davis, 和 M. Schleier-Smith，《自然》600, 630（2021年）。[47] C. V. Kraus, M. Dalmonte, M. A. Baranov, A. M. L¨auchli, 和 P. Zoller，《物理评论快报》111, 173004（2013年）。[48] C. Schweizer, F. Grusdt, M. Berngruber, L. Barbiero, E. Demler, N. Goldman, I. Bloch, 和 M. Aidelsburger，《自然·物理》15, 1168（2019年）。[49] F. G¨org, K. Sandholzer, J. Minguzzi, R. Desbuquois, M. Messer, 和 T. Esslinger，《自然·物理》15, 1161（2019年）。[50] L. W. Clark, B. M. Anderson, L. Feng, A. Gaj, K. Levin, 和 C. Chin，《物理评论快报》121, 030402（2018年）。[51] A. Shankar, G. P. Greve, B. Wu, J. K. Thompson, 和 M. Holland，《物理评论快报》122, 233602（2019年）。[52] K. C. Cox, G. P. Greve, B. Wu, 和 J. K. Thompson，《物理评论A》94, 061601（2016年）。[53] Z. Chen, J. G. Bohnet, J. M. Weiner, K. C. Cox, 和 J. K. Thompson，《物理评论A》89, 043837（2014年）。[54] J. Borregaard, E. Davis, G. S. Bentsen, M. H. Schleier- Smith, 和 A. S. Sørensen，《新物理学杂志》19, 093021 2017( )。[55] M. A. Norcia, J. R. K. Cline, 和 J. K. Thompson，《物理评论A》96, 042118（2017年）。[56] R. J. Lewis-Swan, D. Barberena, J. R. K. Cline, D. J. Young, J. K. Thompson, 和 A. M. Rey，《物理评论快报》126, 173601（2021年）。[57] S. Smale, P. He, B. A. Olsen, K. G. Jackson, H. Sharum, S. Trotzky, J. Marino, A. M. Rey, 和 J. H. Thywissen，《科学进展》5, eaax1568（2019年）。[58] M. M. Parish，BCS–BEC交叉，载于 *Quantum Gas Experiments* 2015 9，（世界科学出版社，）第 Chapter 章，第179–197页。[59] M. Randeria 和 E. Taylor，《凝聚态物理年度评论》5, 209（2014年）。[60] P. Hauke, D. Marcos, M. Dalmonte, 和 P. Zoller，《物理评论X》3, 041018（2013年）。[61] V. Kasper, F. Hebenstreit, M. Oberthaler, 和 J. Berges，《物理快报B》760, 742（2016年）。[62] J. Hu, L. Feng, Z. Zhang, 和 C. Chin，《自然·物理》15, 785（2019年）。[63] S. Chapman, J. Eisert, L. Hackl, M. P. Heller, R. Jef- ferson, H. Marrochio, 和 R. C. Myers，《SciPost物理》6, 034 2019( )。[64] D. Zhu, S. Johri, N. M. Linke, K. A. Landsman, C. H. Alderete, N. H. Nguyen, A. Y. Matsuura, T. H. Hsieh, 和 C. Monroe，《美国国家科学院院刊》117, 25402（2020年）。

补充材料

I. 动量交换哈密顿量的推导

A. 动量基中的原始哈密顿量

这里我们从实验室参考系中的完整原子-腔哈密顿量出发，其二次量子化形式如下：

$$H_{\rm lab} = H_{\rm atom} + H_{\rm light} + H_{\rm int}$$

$$\hat{H}_{\rm light} = \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_d t} + \alpha_d^* \hat{a} e^{i\omega_d t}\right) + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \tag{S1}$$

$$\hat{H}_{\rm atom} = \sum_{\beta=g,e} \int \hat{\psi}_\beta^\dagger(Z) \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{\psi}_\beta(Z)\, dZ + \hbar\omega_a \int \hat{\psi}_e^\dagger(Z)\hat{\psi}_e(Z)\, dZ, \tag{S2}$$

$$\hat{H}_{\rm int} = \hbar g_0 \int \cos(kZ)\left[\hat{a}\hat{\psi}_e^\dagger(Z)\hat{\psi}_g(Z) + \hat{a}^\dagger\hat{\psi}_g^\dagger(Z)\hat{\psi}_e(Z)\right] dZ. \tag{S3}$$

其中， α_d 是入射缀饰激光的复振幅，其光子通量为 $|\alpha_d|^2$ （单位为每秒光子数）； $\kappa_1 = T_1/\tau_{\rm rnd}$ 是腔的输入耦合，其中 T_1 为输入镜的功率透射系数， $\tau_{\rm rnd}$ 为腔内的光学往返时间。$\hat{\psi}_e^\dagger(Z)$ 是位于位置Z的原子处于激发态 $|e\rangle \equiv |F=3,\ m_F=3\rangle$ 和基态 $|g\rangle \equiv |F=2,\ m_F=2\rangle$时的场产生算符； ω_a 是基态与激发态之间的能级劈裂， $\delta_d = \omega_d - \omega_c$ 是缀饰激光相对于空腔的失谐， $\Delta_a = \omega_c - \omega_a$是空腔相对于原子跃迁频率的失谐。我们将哈密顿量改写到频率为 ω_d的缀饰激光旋转参考系中，用于构造相应幺正算符$\hat{U} = \exp\left(i\hat{H}_r t\right)$的哈密顿量为$\hat{H}_r = \hbar\omega_d \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_c \int \hat{\psi}_e^\dagger(Z)\hat{\psi}_e(Z)\, dZ$。在此参考系中，哈密顿量$\hat{H}_d = \hat{U}^\dagger \hat{H}_{\rm lab} \hat{U} + i\hbar \frac{\partial \hat{U}^\dagger}{\partial t}\hat{U}$的形式为：

$$\begin{aligned}\hat{H}_d = {} & \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d\hat{a}^\dagger + \alpha_d^*\hat{a}\right) - \hbar\delta_d\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hbar\Delta_a \int \hat{\psi}_e^\dagger(Z)\hat{\psi}_e(Z)\, dZ + \sum_{\tau=g,e}\int \hat{\psi}_\tau^\dagger(Z)\frac{\hat{p}^2}{2m}\hat{\psi}_\tau(Z)\, dZ \\ & + \hbar g_0 \int \cos(kZ)\left[\hat{a}\hat{\psi}_e^\dagger(Z)\hat{\psi}_g(Z) + \hat{a}^\dagger\hat{\psi}_g^\dagger(Z)\hat{\psi}_e(Z)\right] dZ.\end{aligned} \tag{S4}$$

此外，我们假设在相关时间尺度内，激发态布居和原子自发辐射均可忽略，其中 $\Delta_a \gg g_0\sqrt{\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}$ and $\Delta_a \gg \gamma$, γ 是光学激发态的自发布居衰减率。在此极限下，我们可以绝热消去激发态 $|e\rangle$，从而得到描述基态流形中的原子与腔之间色散耦合的有效哈密顿量：

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm disp} &= \int \hat{\psi}^\dagger(Z)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hbar g_0^2}{\Delta_a}\cos^2(kZ)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right]\hat{\psi}(Z)\, dZ - \hbar\delta_d\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d\hat{a}^\dagger + \alpha_d^*\hat{a}\right) \\ &= \int \hat{\psi}^\dagger(Z)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hbar g_0^2}{4\Delta_a}\left(e^{i2kZ} + e^{-i2kZ}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right]\hat{\psi}(Z)\, dZ - \hbar\Delta_d\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d\hat{a}^\dagger + \alpha_d^*\hat{a}\right),\end{aligned} \tag{S5}$$

其中 $\hat{\psi}(Z) \equiv \hat{\psi}_g(Z)$。这个色散哈密顿量表明，在腔的波腹处产生的原子（即 $\cos^2(kZ) = 1$）会使腔共振频率发生 $\frac{g_0^2}{\Delta_a}$ 的偏移，正如正文所述。对于沿腔轴均匀分布的原子，腔的缀饰共振频率平均偏移 $\frac{Ng_0^2}{2\Delta_a}$ 。因此，失谐 $\Delta_d = \delta_d - \frac{Ng_0^2}{2\Delta_a}$ 可在物理上解释为缀饰激光器相对于平均缀饰腔共振频率的失谐。

随后，我们对原子场算符 $\hat{\psi}(Z)$ 进行傅里叶变换，将其变换到动量空间，得到 $\hat{\psi}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(p)e^{ipZ/\hbar}\, dp$；这里，$\hat{\psi}(p)$ 湮灭动量为 p 的原子。由于经过速度选择后，动量分布较窄，均方根动量展宽为 $\sigma_p \ll \hbar k$，因此我们只关注范围 $[p_0 - 2\hbar k, p_0 + 2\hbar k]$ 内的动量态。我们进一步定义 $\hat{\psi}_\uparrow(p) \equiv \hat{\psi}(p + p_0 + \hbar k)$ $\hat{\psi}_\downarrow(p) \equiv \hat{\psi}(p + p_0 - \hbar k)$, 其中 $p \in [-\hbar k, \hbar k]$。算符 $\hat{\psi}_\uparrow(p)$ 湮灭动量为 $p + p_0 + \hbar k_c$ 的原子，而 $\hat{\psi}_\downarrow(p)$ 湮灭动量为 $p + p_0 - \hbar k$ 的原子。

现在，原子场算符可以表示为

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(Z) &\approx \int_{p_0-2\hbar k}^{p_0} \hat{\psi}(p)e^{ipZ/\hbar}\,dp + \int_{p_0}^{p_0+2\hbar k} \hat{\psi}(p)e^{ipZ/\hbar}\,dp \\ &= e^{ip_0Z/\hbar}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k} e^{ipZ/\hbar}\left(\hat{\psi}_\downarrow(p)e^{-ikZ} + \hat{\psi}_\uparrow(p)e^{ikZ}\right)\,dp.\end{aligned} \tag{S6}$$

将近似的傅里叶变换代入动量空间中的色散哈密顿量方程（S5），我们得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm disp} =& \int \hat{\psi}^\dagger(Z)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{g_0^2}{4\Delta_a}(e^{2ikZ}+e^{-2ikZ})\hat{a}^\dagger\hat{a}\right]\hat{\psi}(Z)\,dZ + \hat{H}_{\rm cavity} \\ \approx& \int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\left[\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\frac{(p+p_0-\hbar k)^2}{2m} + \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p)\frac{(p+p_0+\hbar k)^2}{2m}\right]dp + \hat{H}_{\rm cavity} \\ &+ \frac{g_0^2}{4\Delta_a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\int dZ\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\left[\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(q)e^{i(q-p)Z} + \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(q)e^{i(p-q)Z}\right]dp\,dq \\ =& \frac{1}{2}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p) - \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]\left(\omega_z + \frac{2\hbar kp}{m}\right)dp + \hat{H}_{\rm cavity} \\ &+ \frac{g_0^2}{4\Delta_a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\delta(p-q)\left[\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(q) + \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(q)\right]dp\,dq,\end{aligned} \tag{S7}$$

其中，上式中自然出现的狄拉克 δ 函数源于这一物理事实：双光子过程只能耦合相隔两个光子动量反冲的动量态 $2\hbar k$。

我们可以将上述色散哈密顿量分解为具有物理意义的各项：

$$\hat{H}_{\rm disp} = \hat{H}_{\rm z} + \hat{H}_{\rm in} + \hat{H}_{\rm cavity} + \hat{H}_{\rm atom-cavity}. \tag{S8}$$

两个动量态之间的平均动能差 $\hbar\omega_z = 2\hbar kp_0/m$（即与 p 无关）为

$$\hat{H}_{\rm z} = \frac{\hbar\omega_z}{2}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p) - \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]dp. \tag{S9}$$

两个动量态之间的非均匀动能差 $p_0+p\pm\hbar k$（即取决于 p）由下式表示：

$$\hat{H}_{\rm in} = \frac{\hbar k}{m}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k} p\left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p) - \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]dp. \tag{S10}$$

受驱腔可表示为

$$\hat{H}_{\rm cavity} = -\hbar\Delta_d\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d\hat{a}^\dagger + \alpha_d^*\hat{a}\right). \tag{S11}$$

剩余的原子-腔耦合描述为

$$\hat{H}_{\rm atom-cavity} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\,\frac{\hbar g_0^2}{4\Delta_a}\int_{-\hbar k}^{+\hbar k}\left[\hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p) + \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right]dp. \tag{S12}$$

下面我们将说明如何将上述哈密顿量映射为赝自旋模型，并展示如何消除腔场，从而得到有效的纯原子相互作用。

B. 从动量态到赝自旋的映射

利用施温格玻色子表示，我们可以根据 $p+p_0\pm\hbar k$ 处的两个动量态定义赝自旋算符。首先，我们定义升降算符

$$\hat{j}_+ = \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\downarrow(p), \quad \hat{j}_- = \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(p)\hat{\psi}_\uparrow(p), \tag{S13}$$

由此我们还可以构造自旋角动量算符

$$\begin{aligned}\hat{j}_x(p) &= \frac{1}{2}\left[\hat{j}_+(p) + \hat{j}_-(p)\right],\\ \hat{j}_y(p) &= \frac{1}{2i}\left[\hat{j}_+(p) - \hat{j}_-(p)\right],\\ \hat{j}_z(p) &= \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}^\dagger_\uparrow(p)\hat{\psi}_\uparrow(p) - \hat{\psi}^\dagger_\downarrow(p)\hat{\psi}_\downarrow(p)\right],\end{aligned} \tag{S14}$$

其中，算符满足对易关系 $\left[\hat{j}_x(p),\hat{j}_y(p)\right] = i\epsilon_{xyz}\hat{j}_z(p)$，以及对 x、y、z 的所有排列；$\epsilon_{xyz}$ 为列维-奇维塔符号。对所有动量态求和后，我们定义集体自旋算符

$$\hat{J}_\alpha = \int_{-\hbar k}^{\hbar k} \hat{j}(p)\, dp, \quad \alpha \in [x, y, z, +, -]. \tag{S15}$$

现在，仅使用自旋算符，我们可以在赝自旋基中表示色散哈密顿量方程（S8）

$$\hat{H}_{\text{disp}} = \hbar\omega_z\hat{J}_z + \frac{\hbar g_0^2}{4\Delta_a}\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-) - \hbar\Delta_d\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sqrt{\kappa_1}\left(\alpha_d\hat{a}^\dagger + \alpha_d^*\hat{a}\right) + \hat{H}_{\text{in}}. \tag{S16}$$

在此赝自旋基中，我们也将非均匀哈密顿量改写为

$$\hat{H}_{\text{in}} = \frac{2\hbar k}{m}\int_{-\hbar k}^{\hbar k} p\,\hat{j}_z(p)\, dp. \tag{S17}$$

在此赝自旋图像中，非均匀动能可视为一个有效非均匀磁场，它使自旋向上与自旋向下之间的能量差随 p线性变化。

描述原子-腔耦合系统的密度矩阵的时间演化由以下主方程给出：

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{\text{disp}}, \rho] + \hat{L}\rho\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \rho\}, \tag{S18}$$

其中，以 κ 为衰减速率描述腔功率衰减的跳跃算符为

$$\hat{L} = \sqrt{\kappa}\hat{a}. \tag{S19}$$

C. 二阶微扰理论得到的有效哈密顿量

为了从哈密顿量方程（S16）得到有效的原子-原子相互作用，我们使用二阶微扰理论消去腔场 $\hat{}$。首先，我们将腔算符 $\hat{a}$ 表示为一个腔算符 b ，它描述了围绕由一个与时间无关的复数所表征的平均场的腔场动力学

$$\hat{a} = \alpha_0 + \hat{b}, \tag{S20}$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_d\sqrt{\kappa_1}}{\Delta_d + i\kappa/2}, \tag{S21}$$

其中，复数 α_0 以 $\sqrt{}$光子为单位，是缀饰激死在失谐 Δ_d 时在腔内建立的场振幅。将式（S20）代回色散哈密顿量式（S16），哈密顿量和跳跃算符变为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\alpha_0} &= \hat{H}_0 + \hat{V},\\ \hat{H}_0 &= \hbar\omega_z\hat{J}_z - \hbar\Delta_d\hat{b}^\dagger\hat{b},\\ \hat{V} &= \frac{\hbar g_0^2}{4\Delta_a}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right)\left(\alpha_0\hat{b}^\dagger + \alpha_0^*\hat{b}\right),\\ \hat{L} &= \sqrt{\kappa}\hat{b}.\end{aligned} \tag{S22}$$

ˆ 重要的是，相互作用 V 可解释为作用于腔的场位移算符，但位移的幅度取决于原子的自由度 $J_+ + J_-$。项 $J_+ + J_-$ 将因 H_0 中的 $\hbar\omega_z J_z$ 项而以频率 ω_z 振荡。该项会在腔内缀饰激光光学频率 $\omega_d \pm \omega_z$ 处产生调制边带。在这一图像中，这正是正文中讨论的调制边带的来源。从概念上讲，所产生的边带代表了腔场围绕零阶响应 α_0 的一阶微扰修正。

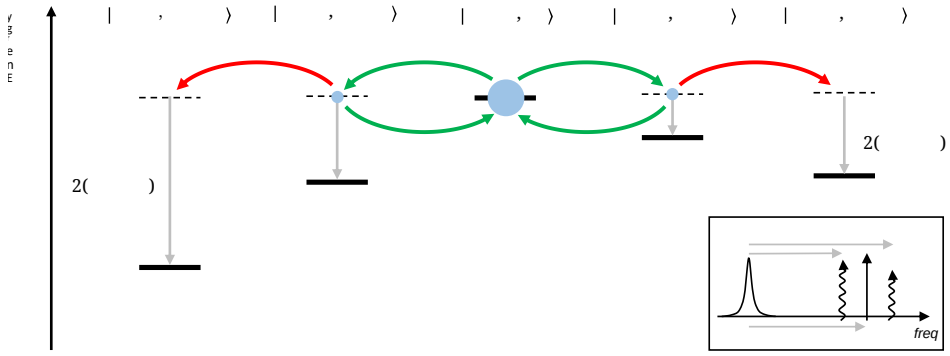

图 S1。**二阶微扰理论**。当缀饰激光以相对于着装腔的失谐 Δ_d 施加时，旋转参考系中相对能级图。在二阶微扰理论中，初态通过标记为绿色箭头的过程与单激发态耦合，并返回初态。由于存在较大的能量偏移 2（$\Delta_d \pm \omega_z$），与双激发态耦合的过程（红色箭头）在能量上是禁戒的。

为了得到纯原子哈密顿量，我们现在通过假设 $\left|\left\langle \hat{b} \right\rangle\right| \ll 1$，或等价地说，所产生边带的总振幅很小，进入微扰理论的二阶；当 $|\Delta_d \pm \omega_z| \gg \sqrt{N}|\alpha_0|g_0^2/4\Delta_a$时这一假设成立。在此极限下，我们可以将 ˆ$V$ 视为对 ˆ H_0 的微扰，并绝热消除光子激发，从而在零光子子空间中得到有效哈密顿量。我们考虑基底 $|n_b、\ m_z\rangle$，其中 n_b 是光子数，使得 $\hat{b}^\dagger\hat{b}\,|n_b、\ m_z\rangle = n_b\,|n_b、\ m_z\rangle$，而 m_z 是集体算符 ˆ J_z 的 z 投影，使得 ˆ$J_z\,|n_b、\ m_z\rangle = m_z\,|n_b、\ m_z\rangle$。考虑系统的一个初态 $|\mathrm{initial}\rangle = |n_b = 0、\ m_z\rangle$。满足 $|\langle \mathrm{intermediate}|\,\hat{V}\,|\mathrm{initial}\rangle|^2 \neq 0$ 的唯一中间态 $|\mathrm{intermediate}\rangle$ 是 $|\mathrm{intermediate}\rangle = |n_b = 1、\ m_z \pm 1\rangle$。我们将看到，这些项 ˆ ˆ ˆ 会产生交换相互作用 J_+J_- 和 J_-J_+。在相同的微扰理论阶数下，还存在形式为 $\langle n_b = 2, m_z = \pm 2|\,V\,|\mathrm{n_b} = 1、\ \mathrm{m_z} \pm 1\rangle\,\langle n_b = 1, m_z \pm 1|\,V\,|n_b = 0, m_z\rangle \neq 0$的其他非零矩阵元 ˆ ˆ。此类项会产生成对升高 ˆ J_+^2 和成对降低 ˆJ_-^2 相互作用。然而，由于初态和末态的能量相差 $2\hbar$（$\Delta_d \pm \omega_z$），这些项可以忽略。在确定中间态后，我们可以在 $|n_b、\ m_z\rangle$ 基底中将 ˆ哈密顿量 H_0 重新写为

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 = &\sum_{m_z}(\omega_z - \Delta_d)\,|1, m_z+1\rangle\,\langle 1, m_z+1| - (\omega_z + \Delta_d)\,|1, m_z-1\rangle\,\langle 1, m_z-1| \\ &+ \sum_{m_z} m_z\omega_z\left(|1, m_z+1\rangle\,\langle 1, m_z+1| + |0, m_z\rangle\,\langle 0, m_z| + |1, m_z-1\rangle\,\langle 1, m_z-1|\right),\end{aligned} \tag{S23}$$

ˆ ˆ ˆ 其中，第二行可作为常数项忽略，不纳入微扰理论。而 $V = V_- + V_+$ with

$$\hat{V}_+ = \sum_{m_z}\frac{g_0^2}{2\Delta_a}\alpha_0\left[\sqrt{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1) - m_z(m_z+1)}\,|1, m_z+1\rangle\,\langle 0, m_z| + \sqrt{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1) - m_z(m_z-1)}\,|1, m_z-1\rangle\,\langle 0, m_z|\right] \tag{S24}$$

其中 ˆ$V_- = \hat{V}_+^\dagger$。考虑阻尼的二阶微扰理论会导出一个非厄米哈密顿量

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{nh}} &= \hat{H}_0 - \frac{i}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L} \\ &= \sum_{m_z}(\omega_z - \Delta_d - i\kappa/2)\,|1, m_z+1\rangle\,\langle 1, m_z+1| - (\omega_z + \Delta_d + i\kappa/2)\,|1, m_z-1\rangle\,\langle 1, m_z-1|,\end{aligned} \tag{S25}$$

由此我们推导出有效哈密顿量

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{eff}} &= -\frac{1}{2}\hat{V}^{-}\left[\hat{H}_{\text{nh}}^{-1}+\left(\hat{H}_{\text{nh}}^{-1}\right)^{\dagger}\right]\hat{V}^{+} \\ &= \chi_{+}\hat{J}_{+}\hat{J}_{-}+\chi_{-}\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}=\underbrace{(\chi_{+}+\chi_{-})}_{\chi}(\hat{J}^{2}-\hat{J}_{z}^{2})+(\chi_{+}-\chi_{-})\hat{J}_{z},\end{aligned} \tag{S26}$$

相互作用强度为

$$\begin{aligned}\chi_{+} &= \left(\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\right)^2 \frac{|\alpha_d|^2\kappa_1}{\Delta_d^2+\kappa^2/4}\frac{\Delta_d+\omega_z}{(\Delta_d+\omega_z)^2+\kappa^2/4}, \\ \chi_{-} &= \left(\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\right)^2 \frac{|\alpha_d|^2\kappa_1}{\Delta_d^2+\kappa^2/4}\frac{\Delta_d-\omega_z}{(\Delta_d-\omega_z)^2+\kappa^2/4}.\end{aligned} \tag{S27}$$

描述耗散过程的有效跳跃算符为

$$\begin{aligned}\hat{L}_{\text{eff}} &= \hat{L}\hat{H}_{\text{nh}}^{-1}\hat{V}_{+} \\ &= \sum_{m_z}\frac{g_0^2\alpha_0\sqrt{\kappa}}{4\Delta_a}\left(\frac{\sqrt{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)-m(m+1)}}{\omega_z-\Delta_d-i\kappa/2}\left|0,m_z+1\right\rangle\left\langle 0,m_z\right| + \frac{\sqrt{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)-m(m-1)}}{-\omega_z-\Delta_d-i\kappa/2}\left|0,m_z-1\right\rangle\left\langle 0,m_z\right|\right) \\ &= \frac{g_0^2\alpha_0\sqrt{\kappa}}{4\Delta_a}\left(\frac{1}{\omega_z-\Delta_d-i\kappa/2}\hat{J}_{+}+\frac{1}{-\omega_z-\Delta_d-i\kappa/2}\hat{J}_{-}\right),\end{aligned} \tag{S28}$$

这对应于两个超辐射过程，其中缀饰激光相对于缀饰腔共振的失谐为 $\pm\omega_z$，原子改变其动量态，同时调制边带中的光子从腔中逸出。

给定上述有效哈密顿量和跳跃算符，我们可以在平均场近似下计算自旋算符的海森堡运动方程：

$$\begin{aligned}\left\langle\dot{\hat{J}}_{+}\right\rangle &= i\omega_z\hat{J}_{+}-i\left[2(\chi_{+}+\chi_{-})+i(\Gamma_{+}-\Gamma_{-})\right]\left\langle\hat{J}_{+}\right\rangle\left\langle\hat{J}_{z}\right\rangle, \\ \left\langle\dot{\hat{J}}_{-}\right\rangle &= -i\omega_z\hat{J}_{-}+i\left[2(\chi_{+}+\chi_{-})-i(\Gamma_{+}-\Gamma_{-})\right]\left\langle\hat{J}_{-}\right\rangle\left\langle\hat{J}_{z}\right\rangle, \\ \left\langle\dot{\hat{J}}_{z}\right\rangle &= -(\Gamma_{+}-\Gamma_{-})\left\langle\hat{J}_{+}\right\rangle\left\langle\hat{J}_{-}\right\rangle,\end{aligned} \tag{S29}$$

其中 $\Gamma_{\pm}=|\alpha_0|^2\left(\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\right)^2\frac{\kappa}{(\Delta_d\pm\omega_z)^2+\kappa^2/4}$。

D. 完整原子-腔系统的平均场动力学

这里我们给出一种不同但更具物理意义的方法来推导系统动力学。从完整的原子-腔哈密顿量方程（S16）出发，集体原子算符的运动方程为：

$$\begin{aligned}\left\langle\dot{\hat{J}}_{+}\right\rangle &= i\omega_z\left\langle\hat{J}_{+}\right\rangle-i\frac{g_0^2}{2\Delta_a}\left\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle\left\langle\hat{J}_{z}\right\rangle, \\ \left\langle\dot{\hat{J}}_{-}\right\rangle &= -i\omega_z\left\langle\hat{J}_{-}\right\rangle+i\frac{g_0^2}{2\Delta_a}\left\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle\left\langle\hat{J}_{z}\right\rangle, \\ \left\langle\hat{J}_{z}\right\rangle &= -i\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\left\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle\left(\left\langle\hat{J}_{+}\right\rangle-\left\langle\hat{J}_{-}\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{S30}$$

我们进一步定义 $\tilde{J}_{+}=\hat{J}_{+}e^{-i\omega_z t}$ 和 $\tilde{J}_{-}=\hat{J}_{-}e^{i\omega_z t}$，其中 $\tilde{J}_{\pm}$ 变化缓慢，因此假设在由 Δ_d 和 ω_z 设定的时间尺度内保持恒定。于是，腔场算符的平均场运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle\hat{a}\right\rangle &= i(\Delta_d+i\kappa/2)\left\langle\hat{a}\right\rangle-i\alpha_d\sqrt{\kappa_1}-i\frac{g_0^2}{4\Delta_a}\left(\left\langle\tilde{\hat{J}}_{+}\right\rangle e^{i\omega_z t}+\left\langle\tilde{\hat{J}}_{-}\right\rangle e^{-i\omega_z t}\right)\left\langle\hat{a}\right\rangle, \\ \frac{d}{dt}\left\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle &= i\left(\alpha_d^{*}\sqrt{\kappa_1}\left\langle\hat{a}\right\rangle-\alpha_d\sqrt{\kappa_1}\left\langle\hat{a}^{\dagger}\right\rangle\right)-\kappa\left\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\rangle,\end{aligned} \tag{S31}$$

~^ 其中，原子性质 $\langle J_\pm \rangle$ 会调制腔场，从而产生对交换相互作用至关重要的调制边带。腔场的形式积分为

$$\langle \hat{a} \rangle_t = -i\alpha_d \sqrt{\kappa_1} \exp\left[i \int_0^t d\tau \ \mathcal{C}(\tau) \right] \int_0^t dt' \ \exp\left[-i \int_0^{t'} d\tau \ \mathcal{C}(\tau) \right], \tag{S32}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) &= \Delta_d + i\frac{\kappa}{2} - \frac{g_0^2}{4\Delta_a} \left(\left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} + \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \right) \\ &= \Delta_d + i\frac{\kappa}{2} - \frac{g_0^2}{4\Delta_a} \left(\left\langle \tilde{\hat{J}}_x \right\rangle \cos\omega_z t - \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle \sin\omega_z t \right). \end{aligned} \tag{S33}$$

于是得到：

$$\begin{aligned} \exp\left[i \int_0^t d\tau \mathcal{C}(\tau) \right] &= e^{i(\Delta_d + i\kappa/2)t} \exp\left[i \frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle}{2\Delta_a \omega_z} \right] \exp\left[-i \frac{g_0^2}{2\Delta_a \omega_z} \left[\left\langle \tilde{\hat{J}}_x \right\rangle \sin(\omega_z t) + \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle \cos(\omega_z t) \right] \right] \\ &= e^{i(\Delta_d + i\kappa/2)t} \exp\left[i \frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle}{2\Delta_a \omega_z} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_x \right\rangle}{2\Delta_0 \omega_z} \right) e^{in\omega_z t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m J_m \left(\frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle}{\Delta_0 \omega_z} \right) e^{im\omega_z t} \\ &= e^{i(\Delta_d + i\kappa/2)t} \exp\left[i \frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle}{2\Delta_a \omega_z} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{g_0^2 \left| \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle \right|}{2\Delta_a \omega_z} \right) e^{in\theta} e^{in\omega_z t} \\ &= e^{i(\Delta_d + i\kappa/2)t} e^{i\Theta}, \end{aligned} \tag{S34}$$

其中 $\tan\theta = \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle / \left\langle \tilde{\hat{J}}_x \right\rangle$，$J_n(z)$ 是第一类贝塞尔函数。在上述推导中，我们使用了贝塞尔函数的性质：

$$e^{iz\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(z) e^{in\phi}, \quad e^{iz\sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\phi}, \tag{S35}$$

以及

$$e^{i\nu\phi} J_\nu(R) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) J_{\nu+k}(r) e^{ik\varphi}, \quad R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi}, \quad e^{2i\phi} = \frac{r - \rho e^{-i\varphi}}{r - \rho e^{i\varphi}}. \tag{S36}$$

类似地，我们有：

$$\int_0^t dt' \exp\left[-i \int_0^{t'} d\tau \mathcal{C}(\tau) \right] = i \exp\left[-i \frac{g_c^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}_y \right\rangle}{\Delta_0 \omega_z} \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{g_c^2 \left| \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle \right|}{\Delta_0 \omega_z} \right) e^{-in\theta} \frac{e^{-i(\Delta_d + i\kappa/2 + n\omega_z)t} - 1}{\Delta_d + i\kappa/2 + n\omega_z}. \tag{S37}$$

在极限 $g_c^2 N/4\Delta_0 \ll \omega_z$ 下，我们将贝塞尔函数展开至一阶，并在长时间下求解腔场，其中 $t \gg 1/\kappa$

$$\langle \hat{a} \rangle_t \approx \frac{\alpha_d \sqrt{\kappa_1}}{\Delta_d + i\kappa/2} e^{i\Theta} \left[1 + \frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}^+ \right\rangle}{4\Delta_a \omega_z} \frac{\Delta_d + i\kappa/2}{\Delta_d - \omega_z + i\kappa/2} e^{i\omega_z t} - \frac{g_0^2 \left\langle \tilde{\hat{J}}^- \right\rangle}{4\Delta_a \omega_z} \frac{\Delta_d + i\kappa/2}{\Delta_d + \omega_z + i\kappa/2} e^{-i\omega_z t} \right]. \tag{S38}$$

由方程（S31），$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 的形式积分为：

$$\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \right\rangle_t = e^{-\kappa t} \int_0^t d\tau \ ie^{\kappa\tau} \sqrt{\kappa_1} \left(\alpha_d^* \langle \hat{a} \rangle_\tau - \alpha_d \left\langle \hat{a}^\dagger \right\rangle_\tau \right). \tag{S39}$$

根据方程（S38），我们有：

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \right\rangle_t &= |\alpha_0|^2 + \frac{g_0^2 |\alpha_d|^2 \kappa_1}{4\Delta_a \omega_z} \left[\frac{1}{(\Delta_d - \omega_z + i\kappa/2)(\Delta_d - i\kappa/2)} - \frac{1}{(\Delta_d + \omega_z - i\kappa/2)(\Delta_d + i\kappa/2)} \right] \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} \\ &+ \frac{g_0^2 |\alpha_d|^2 \kappa_1}{4\Delta_a \omega_z} \left[\frac{1}{(\Delta_d - \omega_z - i\kappa/2)(\Delta_d + i\kappa/2)} - \frac{1}{(\Delta_d + \omega_z + i\kappa/2)(\Delta_d - i\kappa/2)} \right] \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \\ &\equiv |\alpha_0|^2 + A \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} + A^* \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t}.\end{aligned} \tag{S40}$$

将解 $\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \right\rangle_t$ 代入式（S30），得到仅包含原子-原子相互作用的运动方程

$$\begin{aligned}\left\langle \dot{\hat{J}}_+ \right\rangle &= i\omega_z \left\langle \hat{J}_+ \right\rangle - i\frac{g_0^2}{2\Delta_a} \left(|\alpha_0|^2 + A \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} + A^* \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \right) \left\langle \hat{J}_z \right\rangle, \\ \left\langle \dot{\hat{J}}_- \right\rangle &= -i\omega_z \left\langle \hat{J}_- \right\rangle + i\frac{g_0^2}{2\Delta_a} \left(|\alpha_0|^2 + A \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} + A^* \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \right) \left\langle \hat{J}_z \right\rangle, \\ \left\langle \dot{\hat{J}}_z \right\rangle &= -i\frac{g_0^2}{4\Delta_a} \left(|\alpha_0|^2 + A \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} + A^* \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \right) \left(\left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle e^{i\omega_z t} - \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle e^{-i\omega_z t} \right).\end{aligned} \tag{S41}$$

对于缓变变量 $\left\langle \tilde{\hat{J}}_\pm \right\rangle$，上述运动方程可进一步简化：

$$\begin{aligned}\left\langle \dot{\tilde{\hat{J}}}_+ \right\rangle &= -i\frac{g_0^2}{2\Delta_a} A \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle \left\langle \hat{J}_z \right\rangle, \\ \left\langle \dot{\tilde{\hat{J}}}_- \right\rangle &= i\frac{g_0^2}{2\Delta_a} A^* \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle \left\langle \hat{J}_z \right\rangle, \\ \left\langle \dot{\hat{J}}_z \right\rangle &= -\frac{g_0^2}{2\Delta_a} \frac{A - A^*}{2i} \left\langle \tilde{\hat{J}}_+ \right\rangle \left\langle \tilde{\hat{J}}_- \right\rangle,\end{aligned} \tag{S42}$$

忽略单粒子过程（即非共振布拉格耦合）以及频率$2\omega_z$处的快速振荡动力学。结合 $g_0^2 A/2\Delta_0 = 2(\chi_+ + \chi_-) + i(\Gamma_+ - \Gamma_-)$，上述运动方程与式（S29）一致，从而验证了有效自旋哈密顿量所预测的动力学。在无超辐射的极限下，$\left\langle \dot{\hat{J}}_z \right\rangle = 0$，因此总自旋投影守恒。

E. 交换相互作用与单轴扭转

在不存在非均匀性的情况下，交换相互作用对集体算符所预测的动力学与单轴扭转相互作用相同。为凸显二者的对比，我们现在根据图 4(C)，考虑一个由两个自旋系综组成的最简模型 $\hat{J}_1$ 和 $\hat{J}_2$，这两个系综具有差分跃迁频率 δ，其中两个自旋系综分别定义为 $p > 0$ 和 $p < 0$。

对于哈密顿量为 $\hat{H} = \hbar\chi \left(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+} \right) \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-} \right) + \frac{\hbar\delta}{2} \left(\hat{J}_{1z} - \hat{J}_{2z} \right)$ 的交换相互作用，以下是各个自旋算符的运动方程

$$\begin{aligned}\langle \dot{\hat{J}}_{1+} \rangle &= -i2\chi \left(\langle \hat{J}_{1+} \rangle + \langle \hat{J}_{2+} \rangle \right) \langle \hat{J}_{1z} \rangle + i\delta \langle \hat{J}_{1+} \rangle, \\ \langle \dot{\hat{J}}_{2+} \rangle &= -i2\chi \left(\langle \hat{J}_{1+} \rangle + \langle \hat{J}_{2+} \rangle \right) \langle \hat{J}_{2z} \rangle - i\delta \langle \hat{J}_{2+} \rangle, \\ \langle \dot{\hat{J}}_{1z} \rangle &= i\chi \left(\langle \hat{J}_{1-} \rangle \langle \hat{J}_{2+} \rangle - \langle \hat{J}_{1+} \rangle \langle \hat{J}_{2-} \rangle \right), \\ \langle \dot{\hat{J}}_{2z} \rangle &= i\chi \left(\langle \hat{J}_{1+} \rangle \langle \hat{J}_{2-} \rangle - \langle \hat{J}_{1-} \rangle \langle \hat{J}_{2+} \rangle \right),\end{aligned} \tag{S43}$$

由此可以清楚看出，如图 4(C) 所述，非均匀性项会导致相干性 $\langle \hat{J}_{1+} \rangle$ 和 $\langle \hat{J}_{2+} \rangle$ 以及布居差 $\langle J_{1z} \rangle$ 和 $\langle J_{2z} \rangle$ 发生振荡。此外，在交换相互作用下，给定 $\frac{d\langle \hat{J}_z \rangle}{dt} = \frac{d\langle \hat{J}_{1z} \rangle}{dt} + \frac{d\langle \hat{J}_{2z} \rangle}{dt} = 0$时，总自旋投影 $\langle \hat{J}_z \rangle$ 守恒，而单个自旋投影 $\langle \hat{J}_{1z} \rangle$ 和 $\langle \hat{J}_{2z} \rangle$ 则不守恒。

相比之下，含非均匀性的单轴扭转（OAT）的运动方程为 $\hat{H} = \hbar\chi\left(\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}\right)^2 + \frac{\hbar\delta}{2}\left(\hat{J}_{1z} - \hat{J}_{2z}\right)$

$$\begin{aligned}\langle\dot{\hat{J}}_{1+}\rangle &= -i2\chi\left(\langle\hat{J}_{1+}\rangle + \langle\hat{J}_{2+}\rangle\right)\langle\hat{J}_{1z}\rangle\,,\\ \langle\dot{\hat{J}}_{2+}\rangle &= -i2\chi\left(\langle\hat{J}_{1+}\rangle + \langle\hat{J}_{2+}\rangle\right)\langle\hat{J}_{2z}\rangle\,.\end{aligned} \tag{S44}$$

由于非均匀项与相互作用项对易，总自旋投影以及各个自旋投影 $\langle J_z\rangle$、$\langle J_{1z}\rangle$ 和 $\langle J_{2z}\rangle$ 均守恒。

对于正文中展示的所有模拟结果，我们通过在运动方程中为所有动量态纳入 $H_{\rm in}$，并对运动方程进行数值求解，来考虑多普勒展宽（非均匀动能差）的影响。

II. 原子探针、布拉格旋转与缀饰激光器

将单个激光器耦合至腔中，用于实现对动量态布居数的量子非破坏性（QND）测量、产生用于动量交换相互作用的缀饰激光，以及实现布拉格旋转。我们将这台激光器统称为原子探针，并按照下文所述，通过快速控制其频率和相位来实现这些不同功能。在所有情况下，相关腔共振均稳定在原子跃迁频率 ω_a 的蓝侧，失谐为 $\Delta_a \approx 2\pi \times 500$ MHz。

对于量子非破坏测量，我们测量腔共振频率随时间平均后的偏移；该偏移近似与 $|F = 2, m_F = 0\rangle$ 态中的原子数成线性关系。为此，我们在腔上产生探测音，并使其频率随时间扫过腔共振。随后，我们通过零差探测检测反射光。为实现这一点，原子探针激光器相对于腔共振名义上蓝失谐 80 MHz。零差参考光束（或本地振荡器）由一部分激光光束分出，并通过声光调制器（AOM）将其频率下移 80 MHz 产生。探测音由受 80 MHz 弱驱动的光纤相位调制器产生。较低频的相位调制边带作为实际测量腔频移的信号，其频率与零差参考激光器相同，并与之保持相位相干。强得多的载波名义上与腔共振相差 80 MHz，因此仅从腔反射，并在零差探测器中产生 80 MHz 的外差音。我们检测这一 80 MHz 信号的相位以监测光程变化，随后通过反馈调节发送至用于产生零差参考光束的声光调制器的 80 MHz 信号的相位，主动稳定零差探测正交分量。测量腔频移时，将原子探针激光器的频率在低于至高于腔共振频率的 1 MHz 范围内扫描，约用时 $200\ \mu$s，并对零差探测器观测到的色散信号进行拟合。

驱动 $|p_0 - \hbar k\rangle$ 与 $|p_0 + \hbar k\rangle$ 之间的布拉格旋转，需要在原子探测光束上使用两个不同的光学频率，两者相隔 ω_z。我们的实现方式是先用一个声光调制器将原子探测光束的频率下移 75 MHz，再用另一个由两个射频频率（RF）驱动的声光调制器将其上移回来，这两个射频频率分别为 75 MHz 和 $(75 - \omega_z/2\pi)$ MHz，然后再将光束送入光纤相位调制器。由于原子在重力作用下加速，我们将两个边带之间的频率间隔 $\omega_z/2\pi$ 以 25。11 kHz/ms 的速率线性啁啾，以补偿不断变化的多普勒频移。随后，这束光经过与上述相同的光纤相位调制器，再注入腔中。将原子探测光束的载波稳定在距腔共振 77 MHz 处后，较低频的相位调制边带便包含两个相隔 ω_z 的频率分量，且它们相对腔共振失谐 3 MHz。这些频率分量以非共振方式进入腔中，并驱动布拉格旋转。3 MHz 的失谐 $\gg \kappa$可抑制频率噪声向振幅噪声或相位噪声的转换，避免其降低布拉格旋转的保真度。在干涉仪序列中施加的所有布拉格脉冲，其拉比频率均为 8。3 kHz，因此 π-脉冲的持续时间为 $60.\ \mu$s。

为驱动动量交换相互作用，我们像进行量子非破坏测量时一样，在相位调制之前的（蓝移）声光调制器上仅施加一个频率为75MHz的射频音，并快速切换用于驱动光纤相位调制器的射频频率，使原子探测音相对于缀饰共振失谐几百kHz。

III. 初始态制备与读出

原子最初通过速度依赖的拉曼跃迁制备在极窄的动量范围内，并处于给定的超精细态$|F = 2,\ m_F = 0,\ p_0 - \hbar k\rangle$。这种特定的超精细态有利于速度选择，因为使用铷钟态可避免磁场导致跃迁展宽。然而，为了利用 $|F = 2,\ m_F = 2\rangle$ 至激发态 $|F' = 3,\ m_F = 3\rangle$ 循环跃迁中更有利的克莱布什-戈尔丹系数，

我们使用一系列微波 π脉冲，将原子转移至 $|F=2,\ m_F=2\rangle$，同时不显著改变其动量态。我们首先施加一个微波 π 脉冲，将原子转移至 $|F=1,\ mF=1,\ p_0-\hbar k\rangle$，然后用与 $|F=2\rangle \to |F'=3\rangle$ 跃迁共振的激光束吹走未转移的原子；接着施加第二个微波π脉冲，将原子转移至 $|F=2,\ m_F=2,\ p_0-\hbar k\rangle$。这一构型是我们实现布拉格干涉仪和动量交换相互作用的初始态。

为在实验序列结束时读出各个动量态中的布居数，我们首先使用微波 π脉冲，将布居数从 $|F=2,\ m_F=2\rangle$ 映射回 $|F=1,\ m_F=0\rangle$。这一过程与上述过程相反，但最后增加一个 π脉冲，将原子从 $|F=2,\ m_F=0\rangle$ 转移到 $|F=1,\ m_F=0\rangle$。然后，我们施加一个拉曼 π脉冲（双光子拉比频率为 4。2 kHz），将原子从$|F=1,\ m_F=0,\ p_0-\hbar k\rangle$ 转移到 $|F=2,\ m_F=0,\ p+\hbar k\rangle$。随后按照上述方法进行量子非破坏测量，以测量原子数或布居数。接着，我们用与原子 $|F=2\to 3'\rangle$ 跃迁共振的激光束将 $|F=2\rangle$ 原子吹走。然后，再次施加一个拉曼 π脉冲，并采用适当的双光子失谐，测量 $p_0+\hbar k$ 中的布居数，随后进行第二次量子非破坏测量。动量交换相互作用产生的残余超辐射可能会将原子转移到相邻的动量态 $p_0\pm 3\hbar k$中。我们重复上述步骤，也测量这些态中的布居数。因此，每次实验运行中，我们都会测量四个动量态 $p_0\pm\hbar k$ 和 $p_0\pm 3\hbar k$中的布居数。

IV. 作者贡献

C.L. 和 V.P.W.K. 参与了实验装置的搭建，并开展了实验和数据分析。J.K.T. 提出了实验构想并负责监督。H.Z.、J.D.W. 和 A.C. 参与了理论推导和数值模拟，相关工作由 M.J.H. 和 A.M.R. 监督。C.L. 和 J.K.T. 在 A.M.R. 的反馈下撰写了手稿。所有作者均讨论了实验实施和结果，并参与了手稿撰写。

V. 数据可用性

研究中获得的所有数据均可向通讯作者提出合理请求后获取。

VI. 利益冲突

作者声明不存在利益冲突。