arXiv:2304.01442v1 [quant-ph] 4 Apr 2023

电路量子电动力学系统中的量子热二极管与光发射

Yu-qiang Liu[1], Yi-jia Yang[1] 和 Chang-shui Yu[1], 2*[1]*School of Physics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P.R. China and[2]DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China(日期：2023年4月5日)

在量子力学系统中精确控制热传递，对于设计量子热力学器件尤为重要。随着实验技术的发展，电路量子电动力学（电路 QED）凭借可控的光-物质相互作用以及灵活的耦合强度，已成为一种很有前景的系统。本文基于电路量子电动力学系统的双光子拉比模型设计了一种热二极管。我们发现，热二极管不仅可以在共振耦合下实现，而且还能取得更好的性能，尤其是在失谐量子比特-光子超强耦合情况下。我们还研究了光子探测率及其非互易性，发现其表现与非互易热输运相似。这为从量子光学视角理解热二极管的行为提供了可能，并有望为热力学器件相关研究带来新的见解。

I. 引言

电路量子电动力学 [1, 2], 研究并控制量子层面的光-物质相互作用，已成为量子光学、量子热力学和凝聚态物理领域令人瞩目的研究主题。例如，它逐渐成为片上量子光学的工具箱 [1–4]。特别是，电路 QED 还提供了一个重要平台，可精确控制和操纵热量，以设计量子热机 [5–10] ，并推动了量子热力学的发展 [11, 12]。近年来，围绕后者，人们投入了大量精力研究各种量子热机，以实现某些特定功能，例如制冷机和热机 [5–7, 13–18], 热开关[8], 热二极管 [9, 10], 热晶体管 [19–23],以及温度计 [24, 25] 等。对于大多数功能而言，热整流器尤为重要，它在量子信息处理过程中发挥着关键作用，例如量子比特初始化[26]。热二极管是一种双端器件，由两个独立储库之间的温度偏置驱动，能够产生非对称热流。这种整流效应也在其他系统中有所发现[9, 27–37]。尤其是，文献 [9], 中，作者采用一个耦合到两个不同频率超导谐振器的量子比特，实现了磁通可调光子热整流；文献 [27, 37],中，研究者利用伊辛相互作用的自旋，基于不同的激发实现了良好的性能；文献[38], 中，作者提出利用 Dzyaloshinskii-Moriya相互作用实现热整流。显然，在这些模型中，如果考虑共振情形且不引入其他不对称性，整流效应就会消失。通常认为，整流效应或非互易热输运源于总系统的某种不对称性，例如能级结构的不对称 [27] 或非线性相互作用 [30] 或系统-储库耦合的不对称 [9, 10] 以及相互作用的不对称 [29, 39] ，或较强的各向异性 [31] ，或有效隧穿势垒的不对称性 [40]。系统的其他某些特征是否会引发（或与之密切相关）这种非互易热输运，目前仍不明确。此外，尽管这一领域发展迅速，仍有必要探索能够基于便于实验实现的方案设计量子热器件。

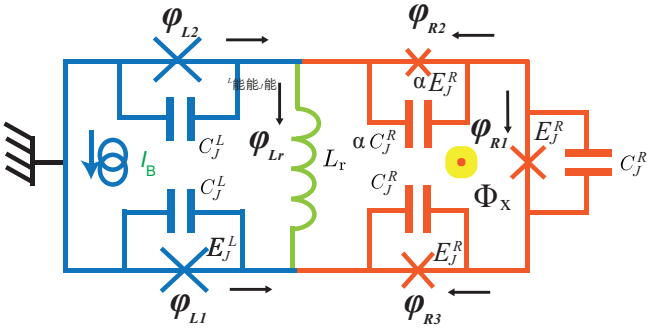


图 1. 电路量子电动力学架构由直流超导量子干涉器件（DC-SQUID）探测器的等离子体模（左侧）建模，并通过电感 L_r 耦合至磁通量子比特（中间）[41] （右侧）。直流超导量子干涉器件由包含两个大型结的外环 [42–44] 构成，外环由电流 I_B 偏置，且两个约瑟夫森结具有相同的约瑟夫森能量 E_J^L 和电容 C_J^L。一般而言，磁通量子比特是包含三个约瑟夫森结的超导环[45]（以叉号表示），由外加磁通 Φ_x控制；其中两个约瑟夫森结具有相同的约瑟夫森能量 E_J^R和电容 C_J^R，另一个约瑟夫森结的约瑟夫森能量较小αE_J^R，电容也较小 αC_J^R [46]。

近年来，电路量子电动力学系统已从弱内部耦合发展到强耦合，甚至超强耦合[47, 48] ，并且在微波频率下具有极大的设计灵活性。更重要的是，电路量子电动力学作为理想的实验平台，已

* 电子邮箱：ycs@dlut.edu.cn

被用于实现量子比特与谐振器之间的非线性超强耦合[49–51] 。此外，非线性相互作用在光压缩 [52], 、谱塌缩 [53], 和多光子共振[54]方面也有一些有趣的应用。另外，广义量子拉比模型 [54] 也是腔量子电动力学的基本形式，包含原子与腔之间的单光子和双光子相互作用，并已得到广泛研究。从这个意义上说，电路量子电动力学系统可作为一个便于实验操作的理想平台，值得进一步探索其在热整流器方面的应用。

本文将采用电路量子电动力学系统研究非互易热输运，并探索量子热二极管。我们主要研究双光子拉比模型，揭示不同耦合条件下稳态非互易热输运的行为。首先，我们在量子拉比模型中发现了完美热整流，并探寻适合实验实现热二极管的参数范围。最重要的是，我们比较研究了耗散复合系统中热整流与光子探测率之间的关系。该系统呈现出类似的非互易行为，并表明二者可能存在关联。这为理解量子热力学器件提供了量子光学视角。本文结构如下：第II节介绍所采用的物理模型和主方程。第III节研究量子热二极管的作用，并分析不同参数的影响。第IV节探讨非互易光子探测率。结论与讨论见第V节。

II. 物理模型与动力学

我们考虑双光子量子 Rabi 模型，其中磁通量子比特通过一个小电感与直流超导量子干涉器件（DC-SQUID）耦合，电路示意图如图 1 所示。关于电路模型的详细推导，请参阅参考文献 [50] 中的附录 A 及其中的参考文献。整个系统的量子化哈密顿量为 [49–51]（我们假设 $\hbar = 1$）

$$\tilde{H}_S = \omega_L a^\dagger a - \frac{1}{2}(q\sigma^z + \epsilon\sigma^x) + g\sigma^x(a^\dagger + a)^2, \qquad (1)$$

其中， a和 $a^\dagger$ 分别是超导量子干涉器件的产生算符和湮灭算符， σ^z和 σ^x 是泡利矩阵。参数 ω_L 表示超导量子干涉器件的频率， ϵ 和 q 分别表示由量子比特回路周围的外加磁通 Φ_x 诱导的“持久电流态”[46] 的隧穿劈裂和能级间隔，而 g 表示量子比特与谐振器之间的耦合强度。这里， $q = 2I_p（\Phi_x - \Phi_0/2）$ 表示超导磁通量子，$\Phi_0 = h/2e$ 表示沿量子比特回路 [45]的持久电流。

系统由于阻抗Z_ω [2, 55]而不可避免地发生耗散；阻抗作为环境，由谐振子系综 [56, 57] 描述，其自由哈密顿量为

$$H_R = \sum_{\nu=L,R} \tilde{H}_\nu = \sum_{\nu l} \omega_{\nu l} b^\dagger_{\nu l} b_{\nu l}. \qquad (2)$$

在式（2）中， $b_{\nu l}$， $b^\dagger_{\nu l}$ 表示不同储库模的湮灭与产生算符，其频率为 $\omega_{\nu l}$。由于不同类型的噪声源于性质各异的涨落，我们所考虑的储库彼此独立且不相关，即 $[b_{\nu l}, b^\dagger_{\mu j}] = \delta_{\nu\mu}\delta_{lj}$ [55]。因此，系统与储库之间的相互作用可用 Caldeira-Leggett 型[58]哈密顿量描述，形式如下

$$\tilde{H}_{SR} = \sum_{\nu l} \tilde{S}_\nu \otimes (\kappa_{\nu l} b^\dagger_{\nu l} + \kappa^*_{\nu l} b_{\nu l}), \qquad (3)$$

其中

$$\tilde{S}_L = a^\dagger + a, \ \tilde{S}_R = \sigma^- + \sigma^+, \qquad (4)$$

表示系统与电路环境耦合所产生的耗散跃迁算符 [55, 57, 59], 参数 $\kappa_{\nu l}$ 反映子系统 ν 与其相应环境之间的相互作用强度。为了更深入地理解其物理含义[55, 60], ，可以通过旋转将哈密顿量方程（1）改写到量子比特本征基中

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

as

$$H_S = \omega_L a^\dagger a - \frac{1}{2}\omega_R \sigma_z + g(a^\dagger + a)^2(\sigma_z \sin\theta + \sigma_x \cos\theta), \quad (6)$$

其中 $\tan\theta = \epsilon/q$， $\sigma_z = \cos\theta\sigma^z + \sin\theta\sigma^x$ 且， $\sigma_x = -\sin\theta\sigma^z + \cos\theta\sigma^x$。需要指出的是 $\omega_R = \sqrt{\epsilon^2 + q^2}$ 表示量子比特的跃迁频率。相应的系统-储库相互作用哈密顿量方程（3）将替换为 [55]

$$H_{SR} = \sum_{\nu l} \left(S_\nu \otimes (\kappa_{\nu l} b^\dagger_{\nu l} + \kappa^*_{\nu l} b_{\nu l}) \right), \qquad (7)$$

with

$$S_L = a^\dagger + a, \ S_R = \sin\theta\sigma_z + \cos\theta\sigma_x. \qquad (8)$$

因此，包含储库在内的整个复合系统的哈密顿量可写为

$$H = H_S + H_R + H_{SR}. \qquad (9)$$

为了得到系统的动力学方程，我们首先将哈密顿量方程 (6) 写成谱分解形式：

$$H_S = \sum_i E_i \left|E_i\right\rangle \left\langle E_i\right|, \qquad (10)$$

其中， E_i 表示本征值， $|E_i\rangle$ 是其对应的本征态。在 H_S 表象中，本征算符为

$$\mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k}) = \sum_{E_j - E_i = \omega_{\nu k}} |E_i\rangle \langle E_i| S_\nu |E_j\rangle \langle E_j|, \tag{11}$$

满足对易关系

$$[H_S,\ \mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k})] = -\nu k \mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k}). \tag{12}$$

为方便起见，我们设 $\mathcal{S}_{\nu k} = \mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k})$。利用这些本征算符，可以按照标准过程 [61–63] ，基于 Born-Markov-Secular 近似在相互作用绘景下写出主方程:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_\nu \mathcal{L}_\nu[\rho] = \sum_{\nu k} \mathcal{L}_{\nu k}(\rho), \tag{13}$$

其中 Lindblad 耗散子 $\mathcal{L}$ 可写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\nu k}[x] = \Gamma_+^{\nu k}[\mathcal{S}_{\nu k}\rho\mathcal{S}_{\nu k}^\dagger - \frac{1}{2}\{\mathcal{S}_{\nu k}^\dagger \mathcal{S}_{\nu k}, \rho\}] \\ +\Gamma_-^{\nu k}(\omega_{\nu k})[\mathcal{S}_{\nu k}\rho\mathcal{S}_{\nu k}^\dagger - \frac{1}{2}\{\mathcal{S}_{\nu k}^\dagger \mathcal{S}_{\nu k}, \rho\}],\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\Gamma_+^{\nu k} = \Gamma^{\nu k}[\bar{n}(\omega_{\nu k}) + 1]$、 $\Gamma_-^{\nu k} = \Gamma^{\nu k}\bar{n}(\omega_{\nu k})$ 分别表示激发的发射和吸收过程[64],，而 $\bar{n}(w_{\nu k}) = \frac{1}{e^{\frac{\omega_{\nu k}}{T_\nu}} - 1}$ 表示温度为 $T_\nu(k_B = 1)$ 时模式 $\omega_{\nu的k}$ 平均光子数。此外，对于欧姆谱密度，弛豫系数为 $\Gamma^{\nu k} = \gamma\omega_{\nu k}$ [55, 65]。

III. 量子热二极管

我们首先将方程（13）变换到薛定谔绘景¨中，

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_S, \rho] + \sum_\nu \mathcal{L}_\nu[\rho]. \tag{15}$$

直接展开方程（15）可知，密度矩阵的对角元与非对角元彼此解耦；特别是，在稳态下，非对角元将消失。因此，我们只讨论 ρ 的对角元 [15, 27],的演化，即

$$\dot{\rho}_{kk} = \sum_{\nu=L,R}\sum_l \Gamma_{kl}^\nu(\rho), \tag{16}$$

其中 $\Gamma_{ij}^\nu(\rho) = \left(\Gamma_+^{\nu k}\rho_{jj} - \Gamma_-^{\nu k}\rho_{ii}\right)|\langle E_i|S_v|E_j\rangle|^2$ 表示与 ν 储库相互作用所导致的从状态 $|E_j\rangle$ 到状态 $|E_i\rangle$ 的净衰减率。方程（16）的对角稳态密度矩阵 ρ_s 可通过求解 $\dot{\rho}_{kk} = 0$得到，即:

$$\sum_{\nu=L,R}\sum_l \Gamma_{kl}^\nu(\rho^s) = \mathcal{M}|\rho_s\rangle = 0, \tag{17}$$

其中 $|\rho_s\rangle$ 表示由 ρ^s 的对角元素构成的列向量，且 $\mathcal{M}$ 是由方程（17）得到的相应系数矩阵。因此，稳态 ρ_s 可通过线性算子 $\mathcal{M}$的零空间求得。

根据稳态 ρ_s，可以直接计算稳态热流，其定义为 [61],

$$\dot{\mathcal{Q}}_\nu = \mathrm{Tr}\left\{H_S\mathcal{L}_\nu[\rho^s]\right\}. \tag{18}$$

$\mathcal{Q}_\nu > 0$ 表示热量从储库流向系˙统，而 $\mathcal{Q}_\nu < 0$ 表示热量从系统流入储库。利用方程（16），热流方程（18）可明确写为

$$\dot{\mathcal{Q}}_\nu = -\sum_{kl}\Gamma_{kl}^\nu(\rho_s)E_{kl}^\nu, \tag{19}$$

其中， $E_{kl}^\nu = E_l - E_k$ 表示跃迁频率。将热流（18）代入方程（17），容易验证两个热流满足能量守恒˙ ˙关系 $\mathcal{Q}_L + \mathcal{Q}_R = 0$。由于系统维度较大，解析计算相当困难，因此我们只能像附录B中那样，在低温区域截断光子数 $N = 2$ ，对问题进行近似求解。为揭示系统中的热输运特性，我们将通过数值方法 [66] 求解主方程（15）的稳态以及稳态热流。首先，我们主要以两个耦合区域为例：一是耦合强度为 $g = 0.015\omega_0$的强耦合，二是耦合强度为 $g = 0.45\omega_0$的超强耦合。数值计算中，耗散率取为 $\gamma = 10^{-4}\omega_0$，谐振器频率取为 $\omega_L = \omega_0$。除非另有说明，相关参数见表I [5, 45, 67–70] 。

仿真参数		
符号	参数	值
$\omega_0/2\pi$	reference fr频率	20GHZ
$\omega_{\mathrm{L}}/2\pi$	腔频率	20GHz
$\omega_{\mathrm{R}}/2\pi$	量子比特频率	−GHZ
$g/2\pi$	耦合强度	−GHZ
$\gamma/2\pi$	耗散率	2MHZ
T_{R} (T_{L})	温度	960毫开尔文

表 I. 双光子量子拉比系统的参数。

˙为清晰起见，我们将 $\mathcal{Q}_{f/r}$ 定义为正向（反向）热流，因为为了展示非互易˙ ˙热输运，我们需要交换两个端口的温度。 $\mathcal{Q}_f = \mathcal{Q}_R$ 表示从R 储库流向系统的热流，其中 $T_R > T_L$；反之亦然。图 2 (a-b, d-e) 和图 3 (a-b, d-e) 分别直观展示了两个耦合区域中流经系统的热流，其中子图 (a)、(d) 中保持 $T_R = 0.5\omega_0$ ，子图 (b)、(e) 中保持 $T_L = 0.5\omega_0$ 。从图中可以看出，当两个端口的

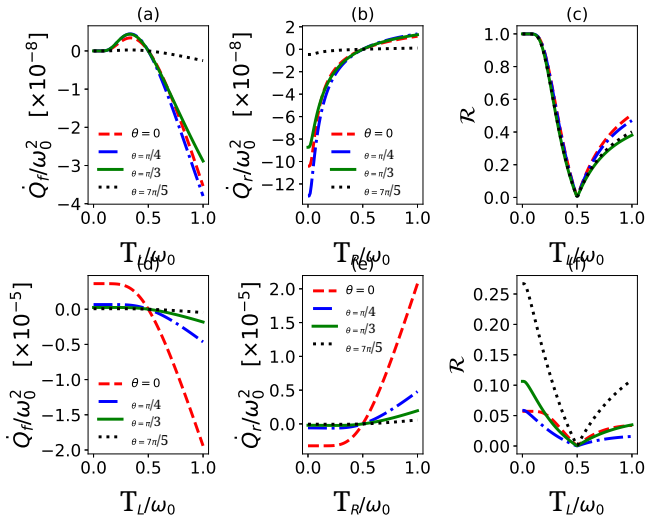


图 2. 热流（a-b、d-e）和整流系数（c、f）随储库温度及量子比特-谐振器耦合强度的变化 $g = 0.015\omega_0$。上图表示量子比特频率为 $\omega_R = 0.1\omega_0$ 的非共振情形，下图表示量子比特频率为 $\omega_R = 2\omega_0$的双光子共振情形。耗散率取为 $\gamma = 10^{-4}\omega_0$，谐振器频率为 $\omega_L = \omega_0$。需要指出的是，在正向（反向）热输运过程中，我们固定温度 $T_R(T_L) = 0.5\omega_0$，相关实际参数见表I。

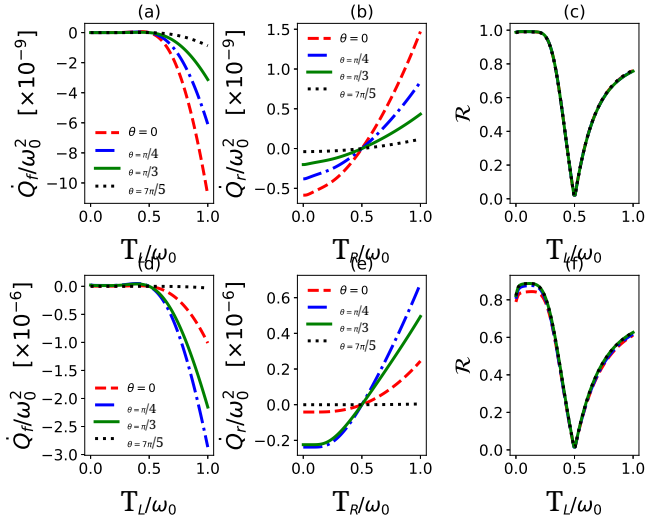


图3. 储库温度下相互作用强度为 $g = 0.45\omega_0$时的热流（a-b、d-e）和整流系数（c、f）。上图对应量子比特频率为 $\omega_R = 0.1\omega_0$ 的失谐情形，下图对应量子比特频率为 $\omega_R = 2\omega_0$ 的双光子共振情形。其他参数与图 2相同。

温度相同时 $0.5\omega_0$，热流为零，这与我们的直觉相符。特别是，这些图表明热输运具有明显的非互易性。也就是说，在固定一个端口温度的情况下，较大的热流仅能沿一个方向出现。子图（a）、（d）与对应的子图（b）、（e）相比较，意味着两个端口的温度互换。因此，通过比较图 2 和图 3中的（a）与（b）或（d）与（e）这两对子图，可以更清楚地发现共振和非共振情形下的非互易热输运。这意味着当前系统可以设计成热二极管。

表征热二极管性能的一个关键指标是整流系数，其定义为 [35]

$$\mathcal{R} = \frac{\left|\dot{\mathcal{Q}}_f + \dot{\mathcal{Q}}_r\right|}{\left|\dot{\mathcal{Q}}_f - \dot{\mathcal{Q}}_r\right|}, \tag{20}$$

其中 $\mathcal{R}$=1理想二极管时，$0 < \mathcal{R} < 1$ 良好二极管时，然而，$\mathcal{R}$=0 当 $\mathcal{Q}_r = -\mathcal{Q}_f$时没有整流效应。图 2 和 3 (c) 和 (f) 展示了整流系数随温度的变化。随着温度偏离平衡温度 $T_R = T_L = 0.5\omega_0$，整流效应逐渐增强。所有图中都显示出一定的整流效应，但双光子共振弱耦合下的整流效应较弱，而非共振强耦合（$\omega_R = 0.1\omega_0$，$g = 0.015\omega_0$）以及（共振和非共振）超强耦合（$g = 0.45\omega_0$）下则能实现良好的二极管性能。特别是，θ 会明显影响热流，但对整流系数的影响很小。就热二极管而言，可以根据实际需求通过 θ 同时调节热流，而不会显著影响整流性能。

如上所述，在共振强耦合的情况下，整流系数相对较小$g = 0.015\omega_0$。粗略而言，超强耦合或非共振耦合可能有利于提升热二极管的性能。然而，详细研究表明，对于 $g = 0.015\omega_0$，在图4(a-c)中，热流在共振耦合附近相对较大，并随着偏离共振耦合而逐渐减小，但整流系数在 $\omega_R = 0.1\omega_0$附近取值相对较大。对于$g = 0.45\omega_0$，我们发现，在图$\omega_R = 0.05\omega_0$ 4（d-f）中，热流从 $\omega_R = 5\omega_0$ 增至，但最佳整流系数出现在 $\omega_R = 0.05\omega_0$ 附近。

此外，我们还研究了耦合强度 $g = 0.015\omega_0$、$0.05\omega_0$、$0.15\omega_0$、$0.3\omega_0$、$0.45\omega_0$ 对固定 $\omega_L = \omega_0$ 条件下热二极管性能的影响，如图 5所示。结果表明，热流和整流系数都不会随耦合强度单调变化，而最佳整流系数出现在超强耦合下$g = 0.45\omega_0$。总之，对于给定的 $\omega_L = \omega_0$，适当增大的 ω_R 红失谐似乎更有利于在两种耦合区域下实现性能良好的热二极管，而超强耦合更有助于热二极管的实现。比较图 5 (a-b) 和 (d-e)，我们发现

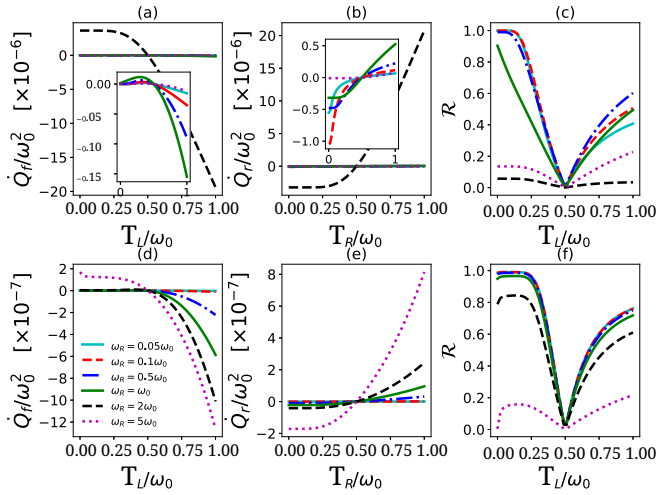


图4. 不同量子比特频率下，热流（a-b、d-e）和整流系数（c、f）随温度 $T_{L/R}$ 的变化。上方面板中，量子比特-谐振腔耦合 $g = 0.015\omega_0$ $g = 0.45\omega_0$ ；

下方面板中，。插图（a-b）显示了除量子比特频率为$\omega_R = 2\omega_0$的双光子共振情形外，热流随温度 $T_{L/R}$的变化。此处 $\theta = 0$ ，其他参数与图2中相同。

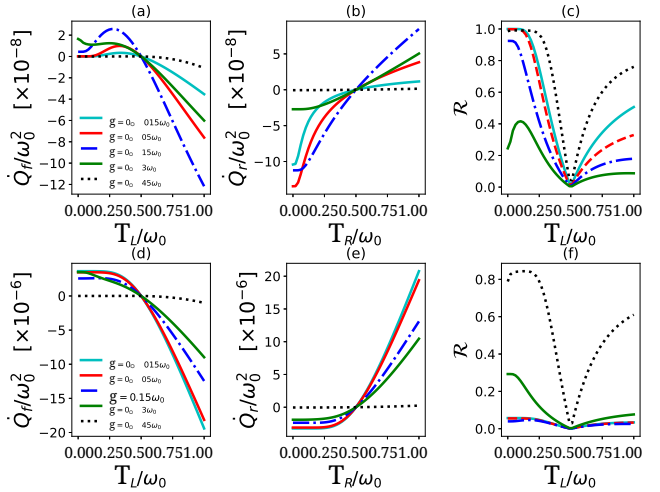


图5. 不同量子比特-谐振器耦合强度下，热流（a-b、d-e）和整流系数（c-f）随温度的变化。上图考虑量子比特频率为 $\omega_R = 0.1\omega_0$的非共振条件；下图考虑 $\omega_R = 2\omega_0$的双光子共振条件。这里 $\theta = 0$ 及其他参数均取自图2。

在 $g = 0.45\omega_0$ 共振和非共振情形下，热流都相对较小，而且该系统可以表现为性能良好的二极管。除了相互作用强度之外，耦合机制也发挥着重要作用。为了进行比较，我们还在附录 A中研究了不同耦合强度下不同耦合机制的整流效应。可以发现不同的耦合机制都能实现一定程度的热流整流，但与其他情形相比，目前的拉比模型在超强耦合区显然具有更好的整流效应。

非互易热输运可直观地归因于系统的非对称结构所引起的非对称跃迁速率。当然，对于具有许多能级的系统，要给出简洁而准确的图像可能很困难，但总能从系统与环境之间的非对称耦合中找到一个粗略的解释。在附录B中，我们绘制了允许跃迁图，并给出了相应的跃迁率。从图中很容易看出，与不同环境耦合的允许跃迁差异很大；当交换两个不同的温度时，这通常会导致跃迁率发生显著变化。跃迁率图也进一步验证了这一点。图中的跃迁率分布在 x 轴的两侧，其总和构成总热流。比较图11 (a)和(b)可知，交换温度会显著改变跃迁率的大小分布，进而决定不同的热流，即非互易热输运。作为对比，在图11 (c)和(d)所示的共振耦合情形中，交换温度后跃迁率的大小分布较为相似，这意味着非互易性较弱。对于超强耦合区 $g = 0.45\omega_0$，我们仅考虑模型中最低的四个态之间的跃迁，如图12所示。从图中可以发现，共振和非共振情形下的跃迁循环都能产生非互易热输运。这种图像也应适用于其他热二极管方案。

IV. 非互易光子探测率

热二极管是热传递非互易行为的一种表现，通常可以从系统的某些非对称特征来理解。相反，这种非对称特征可能引发不同方面的多种非互易行为，从而在不同物理现象之间架起桥梁。换言之，可以从不同角度理解热二极管。从物理上看，量子热二极管通过吸收来自一侧的净光子数并将其释放到另一侧来工作，因此最初的直觉是，热二极管可能与输出光子数的非互易性有关。正如我们所分析的，超导量子干涉器件-量子比特-储库的非对称结构导致单向热输运，也反映了光子探测率的不对称性。作为一项重要结果，我们希望研究热学和光学行为之间的潜在联系。

众所周知，在强耦合区[71] ，通常的输入-输出关系必须加以推广。这里

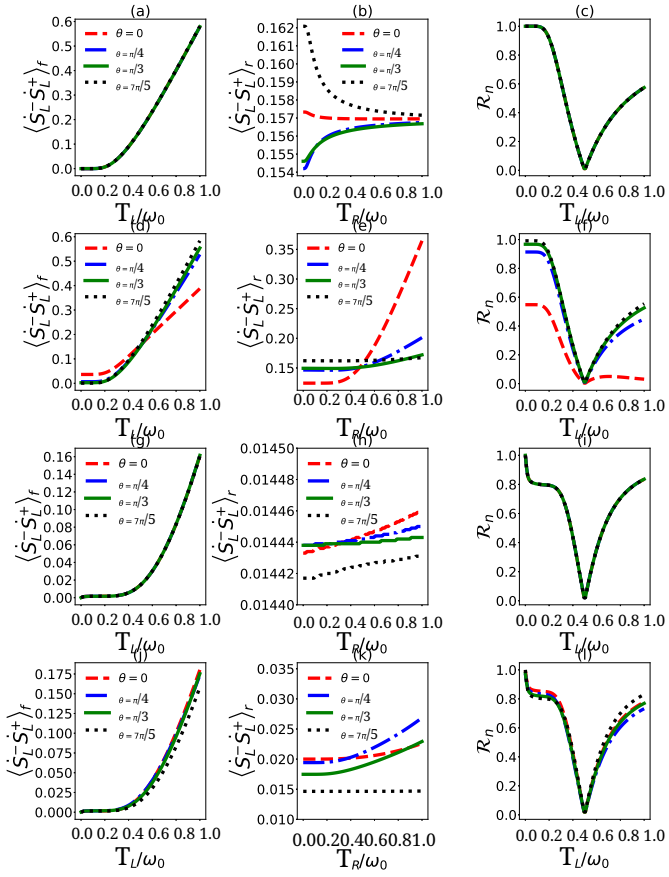


图6. 不同角度下光子通量和不对称系数随温度的变化 θ 对于非共振情形（a-c; g-i）和双光子共振情形（d-f; i-l）。（a）-（f）对应于 $g = 0.015\omega_0$，（g）-（l）对应于 $0.45\omega_0$。其他参数与图 2 。

我们直接从输入-输出关系开始 [65]

$$b_{\text{out}}(t) = b_{\text{in}}(t) + \sqrt{\gamma}\dot{S}_\nu^+, \tag{21}$$

其中 $\sqrt{\gamma} = \frac{\epsilon_c}{\sqrt{4\pi\epsilon_o v}}$，$\dot{S}_\nu^+ = -i\sum_{i,\ j>i}\omega_{\nu k}\mathcal{S}_{\nu k}$。$b_{in}$ 表示输入场算符，

$$b_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_l \sqrt{\omega_{\nu l}}e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_0)}b_{\nu l}(t_0), \tag{22}$$

而 $b_{out}(t)$ 对应于输出场算符，

$$b_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_l \sqrt{\omega_{\nu l}}e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_1)}b_{\nu l}(t_1). \tag{23}$$

此外，在文献 [65] 的设定中，ϵ_c 是腔场与环境（腔外的波导场）之间的耦合参数，ϵ_o 是描述输出波导介电特性的参数，而 v 是相速度。因此，在电路量子电动力学中，可以测量与平均输出光子数 $\left\langle b^{\dagger}{}_{\text{out}}(t)b_{\text{out}}(t)\right\rangle$ 成正比的输出交流电压。特别地，如果没有输入场，输出场与 $\dot{S}_\nu^+$ 成正比，也就是说，$\left\langle \dot{S}_L^-\dot{S}_L^+\right\rangle$ 可用于研究平均光子数。

类似地，为了描述正向和反向下平均光子数的不对称性，我们在长时间极限下将不对称系数定义为

$$\mathcal{R}_n = \frac{\left|\left\langle \dot{S}_L^-\dot{S}_L^+\right\rangle_f - \left\langle \dot{S}_L^-\dot{S}_L^+\right\rangle_r\right|}{\left|\left\langle \dot{S}_L^-\dot{S}_L^+\right\rangle_f + \left\langle \dot{S}_L^-\dot{S}_L^+\right\rangle_r\right|} \tag{24}$$

下标 f 表示正向，而r 表示反向。当系数$\mathcal{R}_n = 0$ 时，表示对称；而 $\mathcal{R}_n = 1$ 则表示最大不对称性。在图 6、7和8中，我们绘制了不同条件下的平均光子数及相应的不对称系数。所有图均表明，交换两个端口后，平均光子数会呈现非互易行为。在平衡温度 $T_L = 0.5\omega_0$下，平均光子数呈对称行为；而远离平衡温度时，尤其是在 T_L 的低温区域，会出现强烈的不对称性。特别是在强耦合区，不对称系数随温度 T_L 的变化行为与热流的不对称行为十分相似。尽管超强耦合区在低温区域的表现与热流略有不同，但总体趋势，即随着 $T_L < 0.5\omega_0$降低，不对称性增强，二者完全一致。有趣的是，与热流类似，θ 对平均光子数有很大影响，但对不对称系数的影响并不明显。此外，我们还展示了考虑不同耦合强度和频率时的非互易平均光子数，其表现出的非互易行为均与热流相似。从这个意义上说，当前模型中平均光子数的不对称性可能为理解热二极管行为带来新的启示。

V. 结论与讨论

最后，我们想强调，热二极管完全基于实验上易于实现的电路量子电动力学平台进行设计，所有数值计算均采用表 I 和参考文献 [50]，即，$\alpha = 0.8$，$E_C^L = 2\times10^{-3}E_J^L$，$L_r = 30E_J^L$，$E_J^R = 11.6E_J^L$，$E_C^R = E_J^R/80$。

总之，我们将双光子量子 Rabi 模型视为完美整流器，并讨论其光子探测率的相关性质。研究表明，超强耦合使该模型成为性能优良的热二极管。此外，在一定范围内，非共振耦合也发挥着

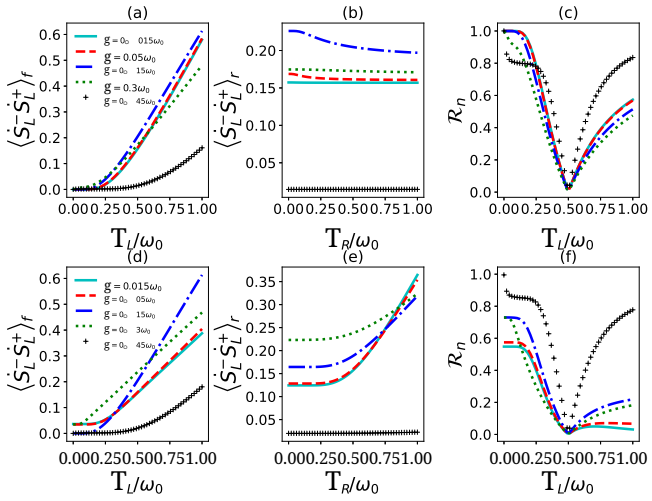


图 7. 不同耦合强度下的光子通量（a-b、d-e）和不对称系数（c、f）。上排考虑量子比特频率为 $\omega_R = 0.1\omega_0$，下排为 $\omega_R = 2\omega_0$。角度 $\theta = 0$ 及其他参数与图 2相同。

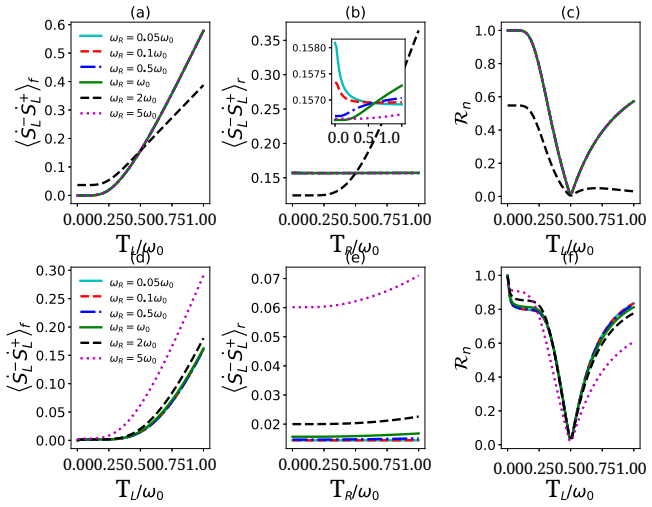


图 8. 不同量子比特频率下，光子通量（a-b、d-e）和不对称系数（c-f）随温度的变化。插图（b）显示了除双光子共振情形 T_R 以外，热流随温度的变化$\omega_R = 2\omega_0$。我们设定量子比特-谐振腔相互作用强度$g = 0.45\omega_0$，且 $\theta = 0$。其他参数与图2相同。

积极作用。通常，可以从系统的非对称结构直观地理解量子热二极管现象，因为这种结构会进一步导致非对称跃迁速率。我们还研究了稳态输出光子探测率的非互易性，其表现出的非互易行为与热流十分相似。因此，本文可为理解量子热二极管提供新的视角。同时，这也可能为未来研究热力学和光学现象铺平道路。

多量子比特双光子 Rabi 模型的现象。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金（批准号：12175029、12011530014 和 11775040）以及辽宁省重点研发计划（批准号：2020JH2/10500003）的资助。

附录 A：不同耦合机制的比较

考虑到热整流效应，人们提出了许多不同类型的耦合机制。例如，在文献[27, 37], 中，哈密顿量表示为

$$H_S = \frac{1}{2}(\omega_L \sigma_z^L + \omega_R \sigma_z^R + g\sigma_z^L \sigma_z^R), \tag{A1}$$

而文献 [28] 将相互作用取为以下形式

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_L \sigma_z^L + \frac{1}{2}\omega_R \sigma_z^R + g\sigma_z^L \sigma_x^R. \tag{A2}$$

此外，两个量子比特之间通过 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用耦合，其形式为 [38]

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_L \sigma_z^L + \frac{1}{2}\omega_R \sigma_z^R + g(\sigma_x^L \sigma_y^R - \sigma_y^L \sigma_x^R). \tag{A3}$$

上述哈密顿量中的系统-热库耦合形式可表示为

$$H_{S-R} = \sum_{\nu l} \left(X_\nu \otimes (\kappa_{\nu l} b_{\nu l}^\dagger + \kappa_{\nu l}^* b_{\nu l}) \right), \tag{A4}$$

其中 $X_\nu = \sigma_\nu^+ + \sigma_\nu^-$是系统算符，而 $\sigma_\nu^\pm$表示自旋算符。我们采用全局主方程，并在相同的参数条件下重现了文献 [27, 28, 37, 38]中共振和非共振情形的结果。在图 9中，我们展示了考虑不同耦合机制时，整流系数随耦合强度的变化。可以发现，不同耦合机制在各自特定的参数条件下各有优势。双光子拉比机制在超强耦合区能够实现良好的热整流效果，并且对频率匹配具有一定的鲁棒性。

附录 B：跃迁率

为了获得物理上的理解，需要分析能级结构和跃迁率。然而，随着系统结构日益复杂，要获得全面而精确的图像似乎很困难。因此，我们将腔截断限制为

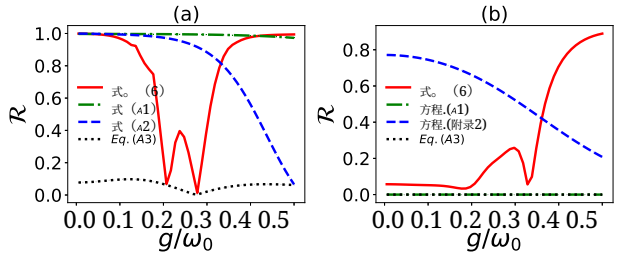
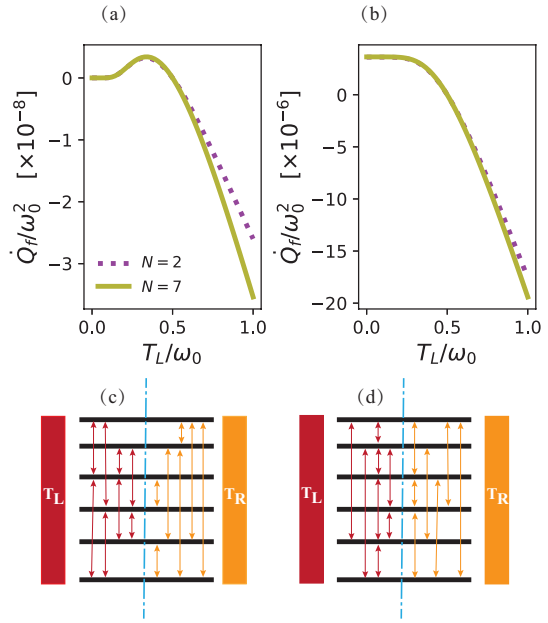


图9. 不同耦合强度下的整流系数。左侧面板中， $\omega_R = 0.1\omega_0$ 表示非共振情形；右侧面板中，双光子共振情形为 $\omega_R = 2\omega_0$，对应公式（6）；而共振情形为 $\omega_R = \omega_0$，对应公式（A1）、（A2）和（A3）。其他参数取值为 $\omega_L = \omega_0$，且$\theta = 0$ 以及 $T_L = 0.1\omega_0$ $T_R = 0.5\omega_0$ 分别对应正向过程和反向过程。

两个光子，以呈现简明的图像。示意图见图 10，这表明我们采用简化处理是合理的，同时也展示了不同环境下的允许跃迁。可以发现，左热浴和右热浴对应的允许跃迁大不相同，这正是非互易热输运的根源。它们直接导致非对称跃迁速率，后文将对此进行分析。



不同光子数截断下的热流。结果表明，对于非共振情形（a）和双光子共振情形（b），在低温下，腔的截断 $N = 2$ 近似准确。此处取值为 $g = 0.015\omega_0$。系统与左、右热浴之间的允许跃迁分别如（c）和（d）所示。左侧面板对应 $\omega_R = 0.1\omega_0$ 非共振情形，右侧面板对应 $\omega_R = 2\omega_0$双光子共振情形。其他参数与图2相同。

非共振情形下左端的热流可根据式（19）写为

$$\dot{\mathcal{Q}}_L = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{4}\left(\Gamma_{ij}^{L}E_{ij} + \Gamma_{i+2,j+2}^{L}E_{i+2,j+2}\right), \quad \text{(B1)}$$

其中 $E_{ij} = E_j - E_i$，正向热流表示为. .
$\mathcal{Q}_f = -\mathcal{Q}_L$，定义同前。

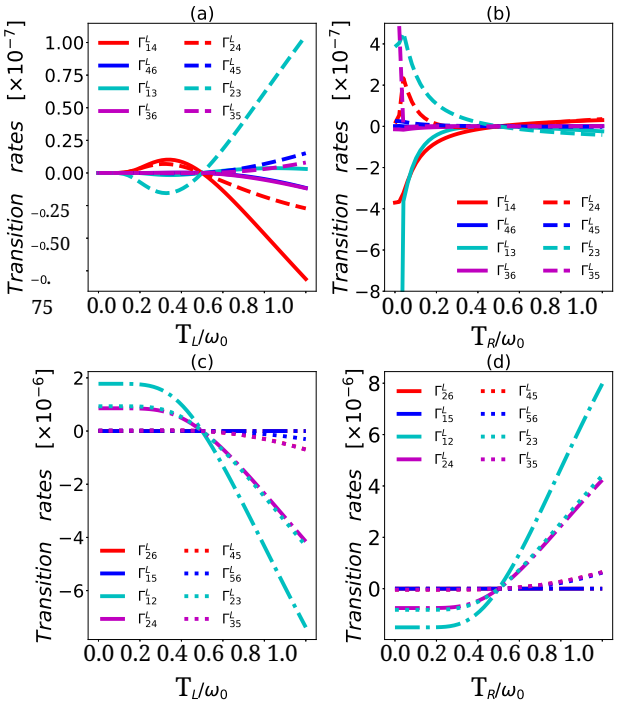


图 11. 非共振情形 (a)、(b)（$\omega_R = 0.1\omega_0$）以及共振情形 (c)、(d)（$\omega_R = 2\omega_0$）。正向过程与反向过程的跃迁率随温度的变化。腔模截断于 $N = 2$。左图对应正向过程，右图对应反向过程。这里 $g = 0.015\omega_0$ 以及其他参数与图 2

类似地，共振情形下的热流可表示为

$$\dot{\mathcal{Q}}_L = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2,5}}^{6}\left(\Gamma_{i2}^{L}E_{i2} + \Gamma_{i5}^{L}E_{i5}\right). \quad \text{(B2)}$$

根据上述表达式，我们可以绘制相应跃迁率随温度 T_L 变化的曲线，如图11所示。从图中可以看出，图10 中不同允许跃迁对应的跃迁率沿 x 轴分布在上、下两侧。两侧的贡献方向相反，与相应跃迁能量相关的所有跃迁率共同决定给定的热流。比较图11 （a）和（b）可以看出，跃迁率的大小分布存在显著差异，这是导致非互易热输运的最直接原因。

然而，比较图11（c）和（d）可以发现，跃迁率的分布较为相似（不考虑正负号），这意味着非互易性相对较弱。图2清楚地说明了这一点。

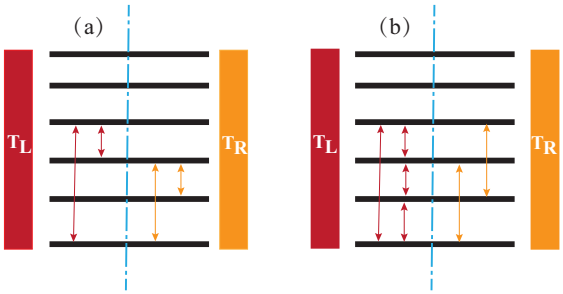


图 12. 非共振情形 (a) 和共振情形 (b) 下双光子拉比模型最低四个态的能量本征值。这里取 $g = 0.45\omega_0$ and $\omega_L = \omega_0$。系统与左、右热浴耦合时的允许跃迁以不同颜色的箭头表示。非共振情形下的量子比特频率为 $\omega_R = 0.1\omega_0$，双光子共振情形下为 $\omega_R = 2\omega_0$。

附录 C：输入输出形式体系

由公式（9），我们沿用参考文献 [65, 72, 73]中的方法，并推导出输入-输出关系。系统与储库及其相互作用的总哈密顿量可表示为

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \tag{C1}$$

$$H_{SR} = \sum_{\nu l}\left(S_\nu \otimes (\kappa_{\nu l} b_{\nu l}^\dagger + \kappa_{\nu l}^* b_{\nu l})\right), \tag{C2}$$

$$S_L = a^\dagger + a,\ S_R = \sin\theta\sigma_z + \cos\theta\sigma_x. \tag{C3}$$

鉴于系统内部相互作用很强，甚至达到超强耦合，而系统-热库耦合较弱。因此，我们可以将跳跃算符（见式（C3））表示为 H_S 表象下的形式

$$S_\nu = \sum_k [\mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k}) + \mathcal{S}_{\nu k}^\dagger(\omega_{\nu k})]. \tag{C4}$$

该方程包含系统算符 S_ν的正频和负频分量。为简化起见，我们令 $S_\nu^+ = \sum_k \mathcal{S}_{\nu k}(\omega_{\nu k})$，并令 $S_\nu^- = \sum_k \mathcal{S}_{\nu k}^\dagger(\omega_{\nu k})$。储库模的海森堡运动方程为

$$\frac{db_{\nu l}(t)}{dt} = i[H(t), b_{\nu l}(t)] = -i\omega_{\nu l} b_{\nu l}(t) - i\kappa_{\nu l} S_\nu^+. \tag{C5}$$

超导量子干涉器件和磁通量子比特的海森堡运动方程为

$$\frac{dS_\nu^+(t)}{dt} = i[H(t), S_\nu^+(t)] = i[H_S(t), \mathcal{S}_\nu^+(t)] - i\sum_l \kappa_{\nu l}^* b_{\nu l}(t). \tag{C6}$$

由于储库模 $b_{\nu l}(t)$ 的演化是线性的，因此方程（C5）可解为

$$b_{\nu l}(t) = b_{\nu l}(t_0)e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_0)} - i\kappa_{\nu l}\int_{t_0}^t dt' S_\nu^+(t')e^{-i\omega_{\nu l}(t-t')}, \tag{C7}$$

其中 $t_0 < t$ 表示过去的某个初始时刻。将方程（C7）代入方程（C6），得到以下形式

$$\begin{aligned}\frac{dS_\nu^+(t)}{dt} = i[H_S(t), S_\nu^+] &- \int_{t_0}^t dt' \sum_l |\kappa_{\nu l}|^2 e^{-i\omega_{\nu l}(t-t')} S_\nu^+(t') \\ &- \sum_l i\kappa_{\nu l}^* e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_0)} b_{\nu l}(t_0).\end{aligned} \tag{C8}$$

为求解该方程，我们采用参考文献[73] 中的方法，并作马尔可夫近似，考虑欧姆谱函数 $J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$，其中 $g_k \propto \sqrt{\omega_k}$ [62, 74]，

$$\begin{aligned}&\sum_l |\kappa_{\nu l}|^2 e^{-i\omega_{\nu l}(t-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\sum_l |\kappa_{\nu l}|^2 \delta(\omega - \omega_{\nu l})\right] e^{-i\omega_{\nu l}(t-t')} \\ &= \gamma\omega\delta(t-t').\end{aligned} \tag{C9}$$

利用 $\int_{-\infty}^{x_0}\delta(x - x_0) = \frac{1}{2}$，方程（C8）可重新求解为

$$\frac{dS_\nu^+}{dt} = i[H_S(t), S_\nu^+(t)] - \frac{\gamma\omega}{2}S_\nu^+ - \sum_{\nu l} i\kappa_{\nu l}^* e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_0)} b_{\nu l}(t_0). \tag{C10}$$

现在定义输入场为

$$b_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_l \sqrt{\omega_{\nu l}} e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_0)} b_{\nu l}(t_0). \tag{C11}$$

因此

$$\dot{S_\nu^+} = i[H_S(t), \mathcal{S}_\nu^+(t)] - \frac{\gamma\omega}{2}S_\nu^+ - i\sqrt{\gamma}b_{in}(t). \tag{C12}$$

为了分析输出场与输入场之间的关系，可以采用方程（C5）的另一种解法，其中$t_1 > t$ 针对未来时刻，

$$b_{\nu l}(t) = b_{\nu l}(t_1)e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_1)} - i\kappa_{\nu l}^*\int_t^{t_1} dt' S_\nu^+(t')e^{-i\omega_{\nu l}(t-t')}. \tag{C13}$$

将输出场定义为

$$b_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_l \sqrt{\omega_{\nu l}} e^{-i\omega_{\nu l}(t-t_1)} b_{\nu l}(t_1). \quad \text{(C14)}$$

我们按照之前相同的步骤进行，得到

$$\dot{\mathcal{S}}_\nu^+ = i[H_S(t), S_\nu^+(t)] + \frac{\gamma\omega}{2}\mathcal{S}_\nu^+ - i\sqrt{\gamma} b_{out}(t). \quad \text{(C15)}$$

结合公式（C11）和公式（C14），我们可以得到如下输入-输出关系

$$b_{out}(t) = b_{in}(t) - i\sqrt{\gamma}\omega S_\nu^+. \quad \text{(C16)}$$

因此，该关系也可以表示为

$$b_{out}(t) = b_{in}(t) + \sqrt{\gamma}\dot{S}_\nu^+. \quad \text{(C17)}$$

[1] M. Devoret、S. Girvin 和 R. Schoelkopf，《电路量子电动力学：约瑟夫森结原子与传输线谐振器之间的耦合能有多强？》，《物理年鉴》16，767（2007年）。[2] A. Blais、A. L. Grimsmo、S. M. Girvin 和 A. Wallraff，《电路量子电动力学》，《现代物理评论》93，025005（2021年）。[3] T. Niemczyk、F. Deppe、H. Huebl、E. Menzel、F. Hocke、M. Schwarz、J. Garcia-Ripoll、D. Zueco、T. H¨ummer、E. Solano、*et al.*，《超强耦合区中的电路量子电动力学》，《自然·物理》6，772（2010年）。[4] M. P. da Silva、D. Bozyigit、A. Wallraff 和 A. Blais，《利用线性探测器观测电路量子电动力学中的光子关联函数的方案》，《物理评论A》82，043804（2010年）。[5] K. Y. Tan、M. Partanen、R. E. Lake、J. Govenius、S. Ma-suda 和 M. M¨ott¨onen，《量子电路制冷机》，《自然·通讯》8，1（2017）。[6] G. Marchegiani、P. Virtanen、F. Giazotto 和 M. Camp-isi，《自激振荡约瑟夫森量子热机》，《物理评论应用》6，054014（2016年）。[7] P. P. Hofer、M. Perarnau-Llobet、J. B. Brask、R. Silva、M. Huber 和 N. Brunner，《基于约瑟夫森结的电路量子电动力学架构中的自主量子制冷机》，《物理评论 B》94，235420（2016年）。[8] B. Karimi、J. Pekola、M. Campisi 和 R. Fazio，《耦合量子比特作为量子热开关》，《量子科学与技术》2，044007（2017）。[9] J. Senior、A. Gubaydullin、B. Karimi、J. T. Peltonen、J. Ankerhold 和 J. P. Pekola，《通过超导人工原子实现热整流》，《通讯·物理》3，1（2020年）。[10] A. Iorio、E. Strambini、G. Haack、M. Campisi 和 F. Gi-azotto，《耦合量子比特系统中的光子热整流》，《物理评论应用》15，054050（2021年）。[11] S. Vinjanampathy 和 J. Anders，《量子热力学》，《当代物理学》57，545（2016年），https://doi.org/10.1080/00107514.2016.1201896。[12]G. Kurizki 和 A. G. Kofman，*Thermodynamics and Control of Open Quantum Systems*（剑桥大学出版社，2022年）。[13] A. Levy 和 R. Kosloff，《量子吸收式制冷机》，《物理评论快报》108，070604（2012年）。[14] A. Levy、R. Alicki 和 R. Kosloff，《量子制冷机与热力学第三定律》，《物理评论E》85，061126（2012年）。[15] C.-s. Yu 和 Q.-y. Zhu，《重新审视强耦合区中的自包含量子制冷机》，《物理评论E》90，052142（2014年）。[16] P. P. Hofer、J.-R. Souquet 和 A. A. Clerk，基于光子辅助库珀对隧穿的量子热机，《物理评论 B》93，041418(R)（2016年）。[17] B. Karimi 和 J. P. Pekola，基于超导量子比特的奥托制冷机：经典与量子性能，《物理评论 B》94，184503（2016年）。[18] F. Binder、L. A. Correa、C. Gogolin、J. Anders 和 G. Adesso，量子区域热力学，物理学基础理论195，1（2018年）。[19] L. Neumeier、M. Leib 和 M. J. Hartmann，电路量子电动力学中的单光子晶体管，《物理评论快报》111，063601（2013年）。[20] K. Joulain、J. Drevillon、Y. Ezzahri 和 J. Ordonez-Miranda，量子热晶体管，《物理评论快报》116，200601（2016年）。[21] B.-q. Guo、T. Liu 和 C.-s. Yu，基于量子比特-量子三能级系统耦合的量子热晶体管，《物理评论E》98，022118（2018年）。[22] Y.-Q. Liu、D.-H. Yu 和 C.-S. Yu，共同环境对量子热晶体管的影响，《熵》24，32（2021年）。[23] N. Gupt、S. Bhattacharyya、B. Das、S. Datta、V. Mukherjee 和 A. Ghosh，弗洛凯量子热晶体管，《物理评论E》106，024110（2022）。[24] L. A. Correa、M. Mehboudi、G. Adesso 和 A. Sanpera，用于最优温度测量的单个量子探针，《物理评论快报》114，220405（2015年）。[25] V. Mukherjee、A. Zwick、A. Ghosh、X. Chen 和 G. Kurizki，通过动态控制提升低温量子测温的精度界限，《通信物理》2，162（2019年）。[26] J. Tuorila、M. Partanen、T. Ala-Nissila 和 M. M¨ott¨onen，采用可调环境的高效量子比特初始化方案，《npj量子信息》3，1（2017）。[27] T. Werlang、M. A. Marchiori、M. F. Cornelio 和 D. Va- lente，超强耦合区中的最优整流，《物理评论E》89，062109（2014年）。[28] C. Kargı、M. T. Naseem、T. Opatrn`y、¨O. E. M¨ustecaplıo˘glu 和 G. Kurizki，量子光学双原子热二极管，《物理评论E》99，042121（2019年）。[29] B. Bhandari、P. A. Erdman、R. Fazio、E. Paladino 和 F. Taddei，通过非线性量子谐振器实现热整流，《物理评论 B》103，155434（2021年）。[30] T. Motz、M. Wiedmann、J. T. Stockburger 和 J. Ankerhold，非线性量子链中的热流整流：一种超越弱热接触的通用方法，《新物理学杂志》20，113020（2018年）。[31] V. Balachandran、G. Benenti、E. Pereira、G. Casati 和 D. Poletti，量子自旋链中的理想二极管，《物理

评论快报》120，200603（2018年）。[32] V. Balachandran、G. Benenti、E. Pereira、G. Casati 和 D. Poletti，分段链中的热流整流，《物理评论E》99，032136（2019年）。[33] R. S´anchez、B. Sothmann 和 A. N. Jordan，基于量子霍尔边缘态的热二极管与热机，《新物理学杂志》17，075006（2015年）。[34] M. A. Sim´on、A. Ala˜na、M. Pons、A. Ruiz-Garc´ıa 和 J. G. Muga，采用双谐振子最简模型的热整流，《物理评论E》103，012134（2021年）。[35] G. T. Landi、E. Novais、M. J. de Oliveira 和 D. Karevski，量子链中的热流整流，《物理评论E》90，042142（2014年）。[36] L. Tesser、B. Bhandari、P. A. Erdman、E. Paladino、R. Fazio 和 F. Taddei，通过单个及耦合量子点实现热整流，《新物理学杂志》24，035001（2022年）。[37] J. Ordonez-Miranda、Y. Ezzahri 和 K. Joulain，在不同激发下基于两个相互作用的类自旋系统的量子热二极管，《物理评论E》95，022128（2017）。[38] V. Upadhyay、M. T. Naseem、R. Marathe 和 O. E. M¨ustecaplıo˘glu，两个通过Dzyaloshinskii-Moriya相互作用耦合的量子比特实现热整流，《物理评论E》104，054137（2021年）。[39] Z.-X. Man、N. B. An 和 Y.-J. Xia，控制与两个二能级系统非对称耦合的三个储库之间的热流，《物理评论E》94，042135（2016年）。[40] S. Ghosh、N. Gupt 和 A. Ghosh，库仑耦合费米子热二极管的普适行为，《熵》24，1810（2022）。[41] A. J. Kerman 和 W. D. Oliver，在噪声存在下对超导量子比特实施高保真量子操作，《物理评论快报》101，070501（2008年）。[42] S. Han、J. Lapointe 和 J. E. Lukens，二维势能中的热激活，《物理评论快报》63，1712（1989年）。[43] P. Bertet、I. Chiorescu、G. Burkard、K. Semba、C. J. P. M. Harmans、D. P. DiVincenzo 和 J. E. Mooij，光子噪声引起的超导量子比特退相干，《物理评论快报》95，257002（2005年）。[44] A. Shnirman、G. Sch¨on 和 Z. Hermon，小型约瑟夫森结的量子操控，《物理评论快报》79，2371（1997年）。[45] J. Mooij、T. Orlando、L. Levitov、L. Tian、C. H. Van der Wal 和 S. Lloyd，约瑟夫森持久电流量子比特，《科学》285，1036（1999年）。[46] T. P. Orlando、J. E. Mooij、L. Tian、C. H. van der Wal、L. S. Levitov、S. Lloyd 和 J. J. Mazo，超导持久电流量子比特，《物理评论 B》60，15398（1999年）。[47] P. Forn-D´ıaz、L. Lamata、E. Rico、J. Kono 和 E. Solano，光-物质相互作用的超强耦合区间，《现代物理评论》91，025005（2019年）。[48] A. Frisk Kockum、A. Miranowicz、S. De Liberato、S. Savasta 和 F. Nori，光与物质之间的超强耦合，《自然评论：物理》1，19（2019年）。[49] P. Bertet、I. Chiorescu、C. J. P. M. Harmans 和 J. E. Mooij，与谐振子耦合的磁通量子比特的退相干（2005年）。[50] S. Felicetti、M.-J. Hwang 和 A. Le Boit´e，非偶极光-物质相互作用的超强耦合区，《物理评论A》98，053859（2018年）。

[51] S. Felicetti、D. Z. Rossatto、E. Rico、E. Solano 和 P. Forn-D´ıaz，《采用超导电路的双光子量子 Rabi 模型》，《物理评论A》97，013851（2018年）。[52] J.-s. Peng 和 G.-x. Li，《虚光子过程对双光子 Jaynes-Cummings 模型中光压缩的影响》，《物理评论A》47，3167（1993年）。[53] S. Felicetti、J. S. Pedernales、I. L. Egusquiza、G. Romero、L. Lamata、D. Braak 和 E. Solano，《囚禁离子中双声子相互作用导致的谱塌缩》，《物理评论A》92，033817（2015年）。[54] K. K. W. Ma，《广义 Rabi 模型中的多光子共振与手性输运》，《物理评论A》102，053709（2020年）。[55] G. M. Reuther、D. Zueco、F. Deppe、E. Hoffmann、E. P. Menzel、T. Weißl、M. Mariantoni、S. Kohler、A. Marx、E. Solano、R. Gross 和 P. H¨anggi，《双谐振器电路量子电动力学：耗散理论》，《物理评论 B》81，144510（2010年）。[56] B. Yurke 和 J. S. Denker，《量子网络理论》，《物理评论A》29，1419（1984年）。[57] M. Bamba 和 T. Ogawa，《适用于超强光-物质相互作用区的系统-环境耦合哈密顿量构造方法》，《物理评论A》89，023817（2014年）。[58] A. J. Leggett、S. Chakravarty、A. T. Dorsey、M. P. A. Fisher、A. Garg 和 W. Zwerger，《耗散双态系统的动力学》，《现代物理评论》59，1（1987年）。[59] T. Shitara、M. Bamba、F. Yoshihara、T. Fuse、S. Ash- hab、K. Semba 和 K. Koshino，《深强耦合区开放电路 QED 系统的非经典性》，《新物理学杂志》23，103009（2021年）。[60] J. Goetz、F. Deppe、K. G. Fedorov、P. Eder、M. Fis- cher、S. Pogorzalek、E. Xie、A. Marx 和 R. Gross，《宇称工程化光-物质相互作用》，《物理评论快报》121，060503（2018年）。[61] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，*The theory of open quantum systems*（牛津大学出版社，牛津，2002年）。[62] U. Weiss，*Quantum dissipative systems*，第13卷（世界科技出版公司，以色列，2012年）。[63] F. Beaudoin、J. M. Gambetta 和 A. Blais，《电路 QED 中的耗散与超强耦合》，《物理评论A》84，043832（2011年）。[64] J. M. Martinis、S. Nam、J. Aumentado、K. M. Lang 和 C. Urbina，《偏置噪声导致的超导量子比特退相干》，《物理评论 B》67，094510（2003年）。[65] A. Ridolfo、M. Leib、S. Savasta 和 M. J. Hartmann，《超强耦合区的光子阻塞》，《物理评论快报》109，193602（2012年）。[66] J. Johansson、P. Nation 和 F. Nori，《QuTiP 2：用于开放量子系统动力学的 Python 框架》，《计算物理通讯》184，1234（2013年）。[67] A. O. Niskanen、Y. Nakamura 和 J. P. Pekola，《信息熵超导微型制冷器》，《物理评论 B》76，174523（2007年）。[68] F. Yan、S. Gustavsson、A. Kamal、J. Birenbaum、A. P. Sears、D. Hover、T. J. Gudmundsen、D. Rosenberg、G. Samach、S. Weber、*et al.*，《重新审视磁通量子比特以提高相干性和可重复性》，《自然通讯》7，1（2016年）。[69] J. Goetz、S. Pogorzalek、F. Deppe、K. G. Fedorov、P. Eder、M. Fischer、F. Wulschner、E. Xie、A. Marx 和 R. Gross，《传播热微波的光子统计》，《物理评论快报》118，103602（2017）.

[70] F. Yoshihara、T. Fuse、S. Ashhab、K. Kakuyanagi、S. Saito 和 K. Semba，超导量子比特-振子电路超越超强耦合区，《自然·物理》**13**，44 (2017)。[71] S. De Liberato、D. Gerace、I. Carusotto 和 C. Ciuti，单量子比特产生的腔外量子真空辐射，《物理评论A》**80**，053810 (2009)。[72] A. Le Boit´e，超强耦合区中的光-物质相互作用的理论方法，《先进量子技术》**3**，1900140 (2020年)。

[73] S. M. Girvin，电路量子电动力学：与微波光子耦合的超导量子比特，载于 *Quantum Machines: Measurement and Control of Engineered Quantum Systems*（牛津大学出版社，2014年）第113–256页。[74] C. A. Gonz´alez-Guti´errez, J. Rom´an-Roche 和 D. Zueco，超强波导量子电动力学中的远距离发射体：基态性质与非马尔可夫动力学，《物理评论A》**104**，053701（2021年）。