arXiv:2304.01465v1 [math.CV] 4 Apr 2023

等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理及其应用

SHAOLIN CHEN 和 HIDETAKA HAMADA

摘要。本文旨在提出若干方法，用于研究解析函数与复值调和函数的 Lipschitz 型空间上的等价范数及 Hardy-Littlewood 型定理。首先，我们将给出解析函数与复值调和函数的 Lipschitz 型空间上等价范数的若干刻画。特别地，我们回答了 Dyakonov 在 (Math. Z. 249(2005), 597–611) 中提出的一个开放问题。此外，我们还建立了若干关于复值调和函数的 Hardy-Littlewood 型定理。所得结果改进并推广了 (Acta Math. 178(1997), 143–167) 中的主要结果。另外，我们运用等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理研究 Lipschitz 型空间之间的复合算子。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识与主要结果 3 2.1. Lipschitz 型空间上的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理 4 2.2. 等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理的应用 9 3. Lipschitz 型空间上的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理 10 3.1. 定理 2.2 的证明 10 3.2. 定理 2.3 的证明 13 3.3. 定理 2.5 的证明 20 3.4. 定理 2.7 的证明 22 3.5. 定理 2.10 的证明 24 4. 等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理的应用 25 4.1. 定理 2.11 的证明 29 声明 34 利益冲突 34 数据可用性 34

2010 年数学主题分类。主要分类：31A05、30H05、47B33；次要分类：30C62、46E15。关键词：Lipschitz 空间、等价范数、调和函数、复合算子

5. 致谢 参考文献 34
34

1. 引言

设 $\mathbb{C}$ 为复平面。对于 $a \in \mathbb{C}$ 和 $\rho > 0$，令 $\mathbb{D}(a,\rho) = \{z : |z-a| < \rho\}$。特别地，我们用 $\mathbb{D}_\rho$ 表示圆盘 $\mathbb{D}(0,\rho)$，用$\mathbb{D}$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}_1$。此外，令 $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ 为单位圆。若二次可微复值函数 $f = u + iv$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中为调和函数，则实值函数 u 和 v 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = \Delta v = 0$，其中

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

关于复值调和函数的更多细节，请参见 [14]。众所周知，在单连通区域 Ω 中定义的每个复值调和函数 f 都可分解为 $f = h + \overline{g}$，其中 h 和g 在 Ω 中解析。该分解除相差一个加性常数外是唯一的。回顾一下，函数 $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$的泊松积分 $P[\varphi]$定义为

$$P[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau})\mathbf{P}(z,e^{i\tau})d\tau$$

or

$$P[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\tau})\mathbf{P}(z,e^{i\tau})d\tau,$$

其中 $\mathbf{P}(z,e^{i\tau}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\tau}-z|^2}$是泊松核。下文中，我们用$\mathscr{H}(\mathbb{D})$表示从 $\mathbb{D}$ 到$\mathbb{C}$的所有复值调和函数的集合。

对于 $z = x+iy \in \mathbb{C}$，复形式微分算子定义为 $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$和 $\partial/\partial\overline{z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$，其中$x$、 $y \in \mathbb{R}$。对于定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$上的可微函数 f，令

$$\mathscr{M}_f(z) := |f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|, \quad z \in \Omega.$$

对于 $\theta \in [0, 2\pi]$，复值调和函数 f 在 $z \in \mathbb{D}$ 处的方向导数定义为

$$\partial_\theta f(z) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(z+\rho e^{i\theta}) - f(z)}{\rho} = f_z(z)e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(z)e^{-i\theta},$$

其中 $f_z := \partial f/\partial z$， $f_{\overline{z}} := \partial f/\partial\overline{z}$，且 ρ是满足$z + \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D}$的正实数。则

$$\mathscr{M}_f(z) = \max\{|\partial_\theta f(z)| : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

映射 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 在区域Ω中称为沿线绝对连续，ACL 简写为，若对于Ω中每个边平行于坐标轴的闭矩形 $R \subset$ ， x 以及 y， f 在几乎处处的水平线和

几乎处处的垂直线 R上沿线绝对连续。当然，这样的映射在Ω中几乎处处具有偏导数 f_x 和 f_y。此外，若$f \in ACL^2$，且其偏导数在Ω中局部 L^2 可积，我们称 $f \in ACL$。将 $\mathbb{D}$ 映入 $\mathbb{C}$ 的保向连续映射 f 称为K-拟正则映射，若

(1) f 在 $\mathbb{D}$ 中几乎处处为 ACL^2，且 $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ 是 f的雅可比行列式；(2) 存在一个常数 $K \geq 1$ 使得

$$\mathscr{M}_f^2 \leq K J_f \text{ a.e. in } \mathbb{D}.$$

本文中，我们用符号 M 表示各种正数常量，其取值可能在不同位置有所变化。

2. 预备知识与主要结果

若连续递增函数 $\omega: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足 $\omega(0) = 0$，且对于 $t \in (0,\infty)$，$\omega(t)/t$ 单调不增（见 [15, 16,30]），则称其为主控函数。对于 $\delta_0 > 0$ 和 $0 < \delta < \delta_0$，我们考虑主控函数 ω满足的以下条件：

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leq M\omega(\delta) \tag{2.1}$$

and

$$\delta \int_\delta^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \leq M\omega(\delta), \tag{2.2}$$

其中 M 表示一个正数常量。若满足条件 (2.1)（分别为 (2.2)），则主控函数 ω 称为快（分别为慢）主控函数。特别地，若主控函数 ω 满足条件 (2.1) 和 (2.2)，则称其为正则的（见 [15, 16]）。

给定主控函数 ω 以及 $\mathbb{C}$ 的一个子集 Ω，若函数 f 从 Ω 映射到 $\mathbb{C}$，且存在正数常量 M使得，则称其属于 Lipschitz 空间 $\Lambda_\omega(\Omega)$。

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M\omega\left(|z_1 - z_2|\right), \quad z_1, z_2 \in \Omega. \tag{2.3}$$

此外，令

$$\|f\|_{\Lambda_\omega(\Omega),s} := \sup_{z_1,z_2\in\Omega, z_1\neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\omega(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

注意，若 Ω 是 $\mathbb{C}$ and $f \in \Lambda_\omega(\Omega)$ 的真子区域，则 f 在 Ω 上连续，并且对于 $z, w \in \Omega$，(2.3) 成立（见 [16]）。此外，我们用$\Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{D})$ 表示从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{C}$ 的所有 Borel 函数 f 所构成的类，其中 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,

$$\mathcal{L}_p[f](z_1, z_2) \leq M\omega(|z_1 - z_2|),$$

其中 M 是一个正数常量，并且

$$\mathcal{L}_p[f](z_1,z_2)=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(e^{i\eta}z_1)-f(e^{i\eta}z_2)|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p\in(0,\infty),\\ |f(z_1)-f(z_2)| & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

$f\in\Lambda_{\omega的p}(\mathbb{D})$ 的 Lipschitz 常数定义如下

$$\|f\|_{\Lambda_{\omega,p}(\Omega),s}:=\sup_{z_1,z_2\in\Omega,z_1\neq z_2}\frac{\mathcal{L}_p[f](z_1,z_2)}{\omega(|z_1-z_2|)}<\infty.$$

显然，$\|f\|_{\Lambda_{\omega的\infty}(\mathbb{D})\,s}=\|f\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{D})\,s}$和 $\Lambda_{\omega的\infty}(\mathbb{D})=\Lambda_\omega(\mathbb{D})$。此外，我们定义由满足以下条件的 $f\in L^p(\mathbb{T})$ 所组成的空间 $\Lambda_{\omega的p}(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{L}_p[f](\xi_1,\xi_2)\leq M\omega(|\xi_1-\xi_2|),\ \xi_1,\ \xi_2\in\mathbb{T},$$

其中 $M>0$ 是一个常数，并且

$$\mathcal{L}_p[f](\xi_1,\xi_2)=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(e^{i\eta}\xi_1)-f(e^{i\eta}\xi_2)|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p\in(0,\infty),\\ |f(\xi_1)-f(\xi_2)| & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

特别地，如果函数 f 满足条件 (2.3)，且每当 $z\in\Omega$ 和 $|z-w|<\frac{1}{2}d_\Omega(z)$ 时，该条件中的固定正数常量为 M（参见 [16, 21, 27]），我们就称 f 属于局部 Lipschitz 空间 $\mathrm{loc}\Lambda_\omega(\Omega)$。其中，$d_\Omega(z)$ 是 z 与 Ω 的边界之间的欧几里得距离。此外，若 $\Lambda_\omega(\Omega)=\mathrm{loc}\Lambda_\omega(\Omega)$，则称 Ω 为 Λ_ω-扩张区域。关于 Λ_ω-扩张区域的几何刻画，参见 [21]。在 [27], 中，Lappalainen 推广了 [21], 的刻画，并证明 Ω 是 Λ_ω-扩张区域，当且仅当每一对点 z_1、$z_2\in\Omega$ 都可由一条位于 Ω 内的可求长曲线$\gamma\subset$ 连接，该曲线满足

$$\int_\gamma\frac{\omega(d_\Omega(\zeta))}{d_\Omega(\zeta)}\,ds(\zeta)\leq M\omega(|z_1-z_2|)$$

其中 M 是某个固定的正数常量，ds 表示 γ 上的弧长测度。此外，Lappalainen [27, 定理 4.12]证明，只有当快速主函数 ω 满足条件时，Λ_ω-延拓区域才存在。特别地，对于快速主函数 ω，$\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个Λ_ω-延拓区域（见 [16]）。

2.1. Lipschitz 型空间上的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理。设 $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ 表示圆盘代数，即在 $\mathbb{D}$ 中解析且连续至边界的函数类。在 [15], Dyakonov 给出了函数 $f\in\mathscr{A}(\mathbb{D})\cap\Lambda_{\omega,\infty}(\mathbb{D})$ 的若干刻画，这些刻画通过其等价范数（或其模）来表述。下面回顾 [15] 的主要结果。

定理 A。（参见 [15, 定理 2]；另见 [17, 第 598]页或 [30, 定理 A]）设 ω 为一个快速主函数。那么，当且仅当 $f\in\mathscr{A}(\mathbb{D})\cap\Lambda_{\omega,\,\infty}(\overline{\mathbb{D}})$，如果 $|f|\in\mathscr{A}(\mathbb{D})\cap\Lambda_{\omega,\,\infty}(\overline{\mathbb{D}})$。

特别地，如果我们在定理 A 中取 $\omega = \omega_\alpha$，其中 $\alpha \in (0, 1]$ 为一个常数且 $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ 对于 $t \geq 0$，那么我们有

$$|f| \in \Lambda_{\omega_\alpha,\infty}(\mathbb{D}) \Leftrightarrow f \in \Lambda_{\omega_\alpha,\infty}(\mathbb{D}). \tag{2.4}$$

此外，Dyakonov 在 [17], 中提出了一个关于扩展（2.4）的开放问题。我们将其重述如下。

问题 2.1. 我们不知道如何将（2.4）扩展到整个 $\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}$(𝔻)-尺度，其中 $\alpha \in (0, \infty)$（高阶 $\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}$(𝔻)-空间是用高阶导数定义的）；如何找到（2.4）的“恰当”扩展仍是一个令我们困惑的开放问题（见 [17, 第 606 页及第 5-7] 行）。

我们对问题 2.1 的回答如下。

定理 2.2. 除非解析函数 f 是常数，否则不可能将（2.4）扩展到整个 $\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}$(𝔻)-尺度，其中 $\alpha \in (0, \infty)$。

在 [17], Dyakonov 还证明，以下原始 Hardy-Littlewood 定理可由 (2.4) 推出。

推论 A.（Hardy-Littlewood 定理）设 u 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的实值调和函数，且 $u \in \Lambda_{\omega_\alpha,\infty}$(𝔻)，其中 $\alpha \in (0, 1]$ 且 $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ 对 $t \geq 0$成立。设 v 是 u 的调和共轭函数，且 $v(0) = 0$。则 $v \in \Lambda_{\omega_\alpha,\infty}$(𝔻)。

以下结果给出了边界函数及其调和延拓的 Lipschitz 刻画。

定理 B.（参见 [15, 推论 1 (ii)] 或 [30, 定理 B]）设 ω 是一个正则主函数，$f \in \mathscr{A}$(𝔻)，且 $|f|$ 的边界函数属于 $\Lambda_{\omega,\infty}$(𝕋)。那么 f 属于 $\Lambda_{\omega,\infty}$(𝔻) 当且仅当

$$P[|f|](z) - |f(z)| \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z))$$

对于某个正数常量 M。

定理 C.（[15, 定理 1]）如果 $f \in \mathscr{A}$(𝔻)，且 ω 和 ω^2 均为正则主函数，那么存在一个正数常量 M，使得

$$\frac{1}{M}\|f\|_{\Lambda_\omega(\overline{\mathbb{D}}),s} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{ \frac{(P[|f|^2](z) - |f(z)|^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)} \right\} \leq M\|f\|_{\Lambda_\omega(\overline{\mathbb{D}}),s}. \tag{2.5}$$

我们注意到，不等式(2.5)中间出现的范数可以视为所谓的加西亚范数在空间BMO 上的一种类似形式（参见 [15] 或 [19, 第六章]）。

近年来，Lipschitz 型空间上的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理受到许多作者的广泛关注（见[2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 30, 31, 37]）。本文的首要目的是结合 Dyakonov [15] 和 Pavlović [30], 的一些方法，运用若干新技术，研究 $f \in \mathscr{H}$(𝔻) $\cap\, \Lambda_{\omega,\,p}$(𝔻) 和 $f \in \mathscr{A}$(𝔻) $\cap \Lambda_{\omega,\,p}$(𝔻) 的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理，其中 $p \in [1, \infty]$。下文将证明定理 A 等价于推论 A。表述如下。

定理 2.3. 假设 $p \in [1,\infty]$ 是一个常数， ω 是一个快速主函数，且 $f = u + iv = h + \overline{g} \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ 在边界 $\mathbb{T}$ 处连续，其中 h， $g \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$ 和 u， v 是 $\mathbb{D}$中的实值函数。那么以下陈述等价。

($\mathscr{A}_1$) 存在一个正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left(\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p \in [1,\infty), \\ \mathscr{M}_f(z) \leq M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p = \infty; \end{cases}$$

($\mathscr{A}_2$) $f \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_3$) $h,\ g \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_4$) $|h|,\ |g| \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;

此外，假设 f 在 $\mathbb{D}$ 中也是 K-拟正则的，其中 $K \in [1,\infty)$ 是一个常数。那么，条件 ($\mathscr{A}_1$)∼($\mathscr{A}_4$) 等价于条件 ($\mathscr{A}_5$)∼($\mathscr{A}_{11}$)。

($\mathscr{A}_5$) $|f| \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_6$) $u \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_7$) $|u| \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_8$) $v \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_9$) $|v| \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$;
($\mathscr{A}_{10}$)存在一个正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{Y}_{u,q,p}(z) \leq M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)},$$

其中 $p \vee q := \{p, q\colon\ 0 < q \leq p < \infty\}$ 或 $p \wedge q := \{p, q\colon\ 0 < q < p = \infty\}$,

$$\mathscr{Y}_{u,q,p}(z) = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\int_{\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)} \left(\mathscr{M}_u(\xi e^{i\eta})\right)^q dA(\xi)}{|\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)|}\right)^{\frac{p}{q}} d\eta\right)^{\frac{1}{p}}, & p \vee q, \\ \left(\frac{1}{|\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)|}\int_{\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)} \left(\mathscr{M}_u(\xi)\right)^q dA(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}, & p \wedge q, \end{cases}$$

$\left|\mathbb{D}\left(z, d_{\mathbb{D}}(z)/2\right)\right|$ 表示 $\mathbb{D}\left(z\right.$ 的面积， $d_{\mathbb{D}}(z)/2\big)$，而 dA 表示 $\mathbb{D}$ 上的勒贝格面积测度;
($\mathscr{A}_{11}$) 存在一个正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{Y}_{v,q,p}(z) \leq M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)},$$

其中 $0 < q \leq p < \infty$ 或 $0 < q < p = \infty$。

我们指出，($\mathscr{A}_1$) 等价于 $f \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{D})$，无需满足定理 2.3 中“$f$ 在 $\mathbb{T}$上连续”的假设。以下结果可由定理 2.3 轻易推出。

推论 2.4。设 $p \in [1,\infty]$ 为常数，ω 为快速主函数，且 $f = u + iv \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$，其中 u 和 v 是 $\mathbb{D}$ 中的实值函数，并且在 $\mathbb{T}$ 上连续到边界。则以下陈述等价。

($\mathscr{B}_1$) 存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$，

$$\begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f'(ze^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \le M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p \in [1,\infty) \\ |f'(z)| \le M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p = \infty; \end{cases}$$

($\mathscr{B}_2$) $f \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{B}_3$) $|f| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{B}_4$) $u \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{B}_5$) $|u| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{B}_6$) $v \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{B}_7$) $|v| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$;

($\mathscr{B}_8$) 存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$，

$$\mathscr{Y}_{u,q,p}(z) \le M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)},$$

其中 $0 < q \le p < \infty$或 $0 < q < p = \infty$;

($\mathscr{B}_9$) 存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$，

$$\mathscr{Y}_{v,q,p}(z) \le M\frac{\omega\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{d_{\mathbb{D}}(z)},$$

其中 $0 < q \le p < \infty$或 $0 < q < p = \infty$。

我们指出，推论 2.4 是对定理 A 和推论 A 的改进与拓展。

为了拓展定理 B 和定理 C，我们需要为复值调和函数建立另一种 Hardy-Littlewood 型定理。介绍我们的结果之前，先回顾复值调和函数的经典 Hardy-Littlewood 定理如下（参见 [22, 23, 33, 36]）。

定理 D。（Hardy-Littlewood 定理）若 $\varphi \in \Lambda_{\omega_\beta,\ \infty}(\mathbb{T})$，则 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega_\beta,\ \infty}(\overline{\mathbb{D}})$，其中 $\beta \in (0,1)$，且 $\omega_\beta(t) = t^\beta$ 对 $t \ge 0$成立。

Nolder 和 Oberlin 推广了定理 D，并建立了一个适用于可微主函数的 Hardy-Littlewood 定理（见 [29, 定理 1.5]）。随后，Dyakonov [15] 将定理 D 推广到复值调和函数。关于一些相关研究，详情请参阅 [2, 5,9, 16, 17, 20, 29, 30, 31, 32] 。

定理 E。（[15, 引理 4]）设 ω 为一个正则主函数。若 $\varphi \in \Lambda_{\omega,\infty}(\mathbb{T})$，则 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,\infty}(\overline{\mathbb{D}})$。

用较弱的正则主函数替换正则主函数后，我们采用一些新技术，将定理 E 改进并推广为以下形式。

定理 2.5. 设 ω 是一个主控函数，且 $p \in [1,\infty]$ 是一个常数。

($\mathscr{C}_1$) 若 $\varphi \in \Lambda_{\omega,p}(\mathbb{T})$，且 φ 在 $\mathbb{T}$ 上连续，则 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{C}_2$) 存在一个正数常量 M，使得对所有 $\delta \in [0,\pi]$,

$$\delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq M\omega(\delta).$$

那么，对于 $p \in [1,\infty]$, ($\mathscr{C}_2$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{C}_1$)，且对于 $p=\infty$, ($\mathscr{C}_1$) $\Leftrightarrow$ ($\mathscr{C}_2$)。

特别地，若 ω 是慢主控函数，则可由定理 2.5 轻易得到以下结果。

推论 2.6。设 ω 是慢主控函数，$p \in [1,\infty]$ 是常数。若 $\varphi \in \Lambda_{\omega,p}(\mathbb{T})$，且 φ 在 $\mathbb{T}$ 上连续，则 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$。

利用定理 2.5，我们将定理 B 改进并推广为以下形式。

定理 2.7. 假设 $p \in [1,\infty]$ 是常数，ω 是正则主控函数，且 $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$在 $\mathbb{D}$的边界 $\mathbb{T}$ 上连续。若$|f| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$和 f 的边界函数在 $\mathbb{D}$中是 K-拟正则的，其中$K \in [1,\infty)$是常数，则以下陈述等价。

($\mathscr{D}_1$) $f \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{D})$; ($\mathscr{D}_2$) 存在正数常量 M 使得

$$\begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left(P[|f|](ze^{i\eta}) - |f(ze^{i\eta})|\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p \in [1,\infty), \\ P[|f|](z) - |f(z)| \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p = \infty. \end{cases}$$

注 2.8. 我们指出，$|f|^\lambda$ 是次调和的，因此，$|f|^\lambda$的边界函数的泊松积分 $P[|f|^\lambda]$等于 $\mathbb{D}$中 $|f|^\lambda$ 的最小调和主控函数，其中 $K \in [1,\infty)$、$\lambda \in [1-1/K^2,\infty)$，且 $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$是一个 K-拟正则映射（参见 [26]）。特别地，$\mathbb{D}$中的$P[|f|^\lambda] - |f|^\lambda \geq 0$，这意味着定理 2.7 中 $\mathbb{D}$ 里的 $P[|f|] - |f| \geq 0$成立。

由定理 2.7，我们得到以下结果。

推论 2.9。假设 $p \in [1,\infty]$ 是一个常数，ω 是一个正则主函数，且 $f \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$。如果$|f| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$ 的边界函数，那么以下陈述等价。

($\mathscr{E}_1$) $f \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{D})$; ($\mathscr{E}_2$) 存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left(P[|f|](ze^{i\eta}) - |f(ze^{i\eta})|\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p \in [1,\infty), \\ P[|f|](z) - |f(z)| \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p = \infty. \end{cases}$$

此外，若在推论 2.9 的（$\mathscr{E}_2$）中用 $|f|^2$ 替换 $|f|$，则可得到以下结果，这是定理 C 的推广。

定理 2.10. 若 $f \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$，且 ω 和 ω^2 均为正则主函数，则 $f \in \Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$ 当且仅当存在正数常量 M 使得

$$\begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left(P[|f|^2](ze^{i\eta}) - |f(ze^{i\eta})|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \le M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p \in [2,\infty), \\ \left(P[|f|^2](z) - |f(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p = \infty. \end{cases}$$

我们指出，若取 $p = \infty$，则定理 2.10 与定理 C 相同。

2.2. 等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理的应用。设 ϕ 是从 $\mathbb{D}$ 到其自身的一个解析函数。我们在 $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ 上定义复合算子 C_ϕ：对于 $z \in \mathbb{D}$，$C_\phi(f)(z) = f(\phi(z))$。对于两个集合 X、$Y \subset \mathscr{H}(\mathbb{D})$，所有满足 $C_\phi(X) \subset Y$ 的 ϕ 所构成的集合记为 $\mathscr{F}(X,Y)$。在 [38], 中，Shapiro 给出了一些关于若干解析函数空间上的紧复合算子的完整刻画。近年来，许多数学家对全纯函数和调和函数上的复合算子研究表现出浓厚兴趣（见[6, 8, 10, 32, 33, 34, 35, 38, 39]）。

本文的第二个目的是利用定理 2.3 和定理 2.5 研究 Lipschitz 型空间之间的复合算子。下文中，对于 $x \in \mathbb{R}$，令

$$\{x\}_+ = \max\{x, 0\}.$$

利用定理 2.3 和定理 2.5，我们得到以下结果。

定理 2.11. 假设 $p \in [1,\infty)$ 是一个常数，且 ω_1 和 ω_2 是快速主函数。令 ϕ 为一个从 $\mathbb{D}$ 映射到其自身的解析函数。则以下条件等价。

$(\mathscr{F}_1)$ $\phi \in \mathscr{F}\big(\Lambda_{\omega_1,\infty}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D}), \Lambda_{\omega_2,p}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})\big)$;

$(\mathscr{F}_2)$ 存在一个正常数 M，使得，或对 $\forall z \in \mathbb{D}$

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(|\phi'(ze^{i\theta})| \frac{\omega_1\big(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))\big)}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le M \frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)};$$

此外，假设 ϕ 在 $\overline{\mathbb{D}}$中连续，$\omega_1 \in \mathscr{S}$ 且 ω_2 是正则的，其中 $\mathscr{S}$ 表示由满足以下条件的那些主控函数 ω_1 组成的集合：ω_1 在 $(0,1]$ 上可微，并且 ω_1' 在 $(0,1]$ 上也是非递增的，且 $\sup_{t\in(0,1]} {}^{\omega_1(t)}\, {}_{t\omega_1'(t)} < \infty$。

那么，条件（$\mathscr{F}_1$）和（$\mathscr{F}_2$）等价于条件（$\mathscr{F}_3$）$\sim$（$\mathscr{F}_5$）。

$(\mathscr{F}_3)$ $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,p}(\overline{\mathbb{D}})$;

$(\mathscr{F}_4)$ $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,p}(\mathbb{T})$ *and there is a positive constant* M *such that, for* $r \in (0,1)$,

$$\left(\int_0^{2\pi} \left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(e^{i\theta})))\right\}_+^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(r));$$

（$\mathscr{F}_5$） ω_1（$d_{\mathbb{D}}$（ϕ））$\in \Lambda_{\omega_2,\ p}$（$\mathbb{T}$），并且存在正数常量 M，使得对于 $r \in$（0,1），

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(r)).$$

注 2.12. 我们指出

$$\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta}) \geq 0$$

在定理 2.11 中成立，因为 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))$ 在 $\mathbb{D}$ 中是超调和的（见引理 4.4）。特别地，定理 2.11 对于 $p = \infty$ 也成立。用于证明定理 2.11 对于 $p \in [1, \infty)$ 的证明方法，对 $p = \infty$ 仍然有效。

对于 $t \geq 0$，设 $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ 且 $\omega_\beta(t) = t^\beta$，其中 α、$\beta \in (0, 1]$ 是常数。特别地，若在定理 2.11 中取 $\omega_1 = \omega_\alpha$ 和 $\omega_2 = \omega_\beta$，则得到以下结果。

推论 2.13. 假设 $p \in [1, \infty)$ 是一个常数，且 ϕ 是从 $\mathbb{D}$ 到其自身的解析函数。那么以下条件等价。

($\mathscr{G}_1$) $\phi \in \mathscr{F}\left(\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D}), \Lambda_{\omega_\beta,p}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})\right)$;

($\mathscr{G}_2$) 存在一个正常数，使得，或 $M \in$,h h f $\mathbb{D}$

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(|\phi'(ze^{i\theta})|\left(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))\right)^{\alpha-1}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)^{\beta-1};$$

此外，假设 ϕ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 和 $\beta \neq 1$ 中是连续的。那么，条件 ($\mathscr{G}_1$) 和 ($\mathscr{G}_2$) 等价于条件 ($\mathscr{G}_3$)∼($\mathscr{G}_5$)。

($\mathscr{G}_3$) $\left(d_{\mathbb{D}}(\phi)\right)^\alpha \in \Lambda_{\omega_\beta,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$; ($\mathscr{G}_4$) $\left(d_{\mathbb{D}}(\phi)\right)^\alpha \in \Lambda_{\omega_\beta,\ p}(\mathbb{T})$，并且存在一个正数常量 M，使得对于 $r \in$ (0, 1),

$$\left(\int_0^{2\pi} \left\{(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta})))^\alpha - (d_{\mathbb{D}}(\phi(e^{i\theta})))^\alpha\right\}_+^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M(d_{\mathbb{D}}(r))^\beta;$$

($\mathscr{G}_5$) $(d_{\mathbb{D}}(\phi))^\alpha \in \Lambda_{\omega_\beta,p}(\mathbb{T})$，并且存在一个正数常量 M，使得对于 $r \in$ (0, 1),

$$\left(\int_0^{2\pi} \left((d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta})))^\alpha - P[(d_{\mathbb{D}}(\phi))^\alpha](re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M(d_{\mathbb{D}}(r))^\beta.$$

定理 2.2、2.3、2.5、2.7 和 2.10 的证明将在第 3 节中给出，而定理 2.11 的证明将在第 4 节中给出。

3. Lipschitz 型空间上的等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理

3.1. 定理 2.2 的证明。设 f 在 $\mathbb{D}$中解析。我们将证明，若 $|f| \in \Lambda_{\omega_\alpha,\ \infty}$ ($\mathbb{D}$) 对 $\alpha > 1$成立，则 f 是常数函数，且 $f \in$

$\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}(\mathbb{D})$。由假设可知，对所有 $z,w\in\mathbb{D}$，存在一个正数常量 M 使得

$$\big||f(z)|-|f(w)|\big|\le M|z-w|^\alpha. \tag{3.1}$$

设 $E=\{\varsigma\in\mathbb{D}:f(\varsigma)=0\}$。不妨设 $\mathbb{D}\setminus E\neq\emptyset$。对于$z\in\mathbb{D}\setminus E$，令 $w=z+re^{i\theta}\in\mathbb{D}$，其中 $r\in(0,d_{\mathbb{D}}(z))$ 且 $\theta\in[0,2\pi]$。于是，由 (3.1) 可得

$$0\le\lim_{r\to0^+}\frac{\big||f(z)|-|f(z+re^{i\theta})|\big|}{r}\le M\lim_{r\to0^+}r^{\alpha-1}=0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\theta\in[0,2\pi]}\lim_{r\to0^+}\frac{\big||f(z)|-|f(z+re^{i\theta})|\big|}{r}\\
&= \max_{\theta\in[0,2\pi]}\big||f(z)|_x\cos\theta+|f(z)|_y\sin\theta\big|\\
&= \max_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{1}{2}\big|\big(|f(z)|_x+i|f(z)|_y\big)e^{-i\theta}+\big(|f(z)|_x-i|f(z)|_y\big)e^{i\theta}\big|\\
&= \big||f(z)|_z\big|+\big||f(z)|_{\overline{z}}\big|\\
&= |f'(z)|.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $z\in\mathbb{D}\setminus E$，$f'(z)\equiv0$。由于 $\mathbb{D}\setminus E$是 $\mathbb{D}$的非空开子集，对于所有 $z\in\mathbb{D}$，$f'(z)\equiv0$。因此，f是 $\mathbb{D}$中的常数函数，且$f\in\Lambda_{\omega_\alpha,\infty}(\mathbb{D})$。该定理的证明完毕。□

引理 F.（[40, p.19]）对于 $\nu\ge1$，无穷形式的闵可夫斯基不等式为

$$\left(\int_{A_1}\left|\int_{B_1}\mathscr{X}(\zeta,\xi)d\mu_\xi\right|^\nu d\mu_\zeta\right)^{\frac{1}{\nu}}\le\int_{B_1}\left(\int_{A_1}|\mathscr{X}(\zeta,\xi)|^\nu\,d\mu_\zeta\right)^{\frac{1}{\nu}}d\mu_\xi,$$

其中，A_1 和 B_1 是可测集，其测度分别为 $d\mu_\zeta$ 和 $d\mu_\xi$，且 $\mathscr{X}$在 $A_1\times B_1$上可积。

由 Lewy 定理可知，$f\in\mathscr{H}(\mathbb{D})$在 $\mathbb{D}$ 中局部单叶且保向，当且仅当 $J_f>0$ 在 $\mathbb{D}$中；这意味着 $f_z\neq0$在 $\mathbb{D}$ 中，且第二复伸缩 $\mu_f=\overline{f_{\overline{z}}}/f_z$ 具有如下性质：$|\mu_f(z)|<1$ 在 $\mathbb{D}$ 中（见 [28]）。根据 K-拟正则映射的定义，我们知道，$f\in\mathscr{H}(\mathbb{D})$是调和 K-拟正则映射，当且仅当 $J_f(z)>0$且 $\mathscr{M}_f^2(z)\le KJ_f(z)$对所有 $z\in\mathbb{D}$均成立。采用与 [25, 命题3.1], 几乎相同的证明方法，可得以下结果。

引理 3.1。对于 $K\ge1$，设 f 是一个将 $\mathbb{D}$ 映射到自身的调和 K-拟正则映射。那么，对于 $z\in\mathbb{D}$,

$$\mathscr{M}_f(z)\le K\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

利用引理 3.1，我们得到以下引理。

引理 3.2。对于 $K \geq 1$，设 f 是一个将 $\mathbb{D}$ 映射到 $\mathbb{C}$ 的调和 K-拟正则映射。那么，对于 $z \in \mathbb{D}$ 和 $0 < \delta < d_{\mathbb{D}}(z)$，

$$\mathscr{M}_f(z) \leq \frac{2K\left(M_{z,\delta} - |f(z)|\right)}{\delta}, \tag{3.2}$$

其中 $M_{z,\,\delta} = \sup\{|f(w)|: \quad |w - z| < \delta\}$。

证明。我们可以假设 f 不是常数。对于固定点 $z \in \mathbb{D}$，令

$$F(\zeta) = \frac{f(z + \delta\zeta)}{M_{z,\delta}},\ \zeta \in \mathbb{D}.$$

初等计算得出

$$F(0) = \frac{f(z)}{M_{z,\delta}} \text{ and } \mathscr{M}_F(0) = \frac{\delta}{M_{z,\delta}}\mathscr{M}_f(z). \tag{3.3}$$

由于 F 是一个从 $\mathbb{D}$ 到自身的调和 K-拟正则映射，根据 (3.3) 和引理 3.1，我们可知

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{M_{z,\delta}}\mathscr{M}_f(z) &= \mathscr{M}_F(0) \leq K\left(1 - |F(0)|^2\right) \leq 2K(1 - |F(0)|)\\ &= 2K\left(1 - \frac{|f(z)|}{M_{z,\delta}}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\delta\mathscr{M}_f(z) \leq 2K\left(M_{z,\delta} - |f(z)|\right),$$

这意味着 (3.2)。 □

引理 3.3. 假设 $p \in [1, \infty)$ 和 $0 < \varepsilon < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$。对于$K \geq 1$, 设 f 是从 $\mathbb{D}$ 映入 $\mathbb{C}$的调和 K-拟正则映射。那么，对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{M}_f^p(z) \leq \frac{M}{\varepsilon^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \{|f(w)| - |f(z)|\}_+^p dm(w),$$

其中，M 是一个正常数，仅依赖于 p 和 K，且 $dm = dA/\pi$ （见定理 2.3）。

证明. 固定满足 $0 < \varepsilon < 1 - |z|$的 $z \in \mathbb{D}$。函数 $\{|f(w)| - |f(z)|\}_+$, $w \in \mathbb{D}$ 在 $\mathbb{D}$中是次调和的。对 $\delta = \varepsilon/2$应用引理 3.2，可得

$$\mathscr{M}_f(z) \leq \frac{4K\left(M_{z,\varepsilon/2} - |f(z)|\right)}{\varepsilon} = \frac{4K}{\varepsilon} \sup_{w \in \mathbb{D}(z,\varepsilon/2)} \{|f(w)| - |f(z)|\}_+ \tag{3.4}$$

由于 $\{|f(w)| - |f(z)|\}_+^p$ 在 $\mathbb{D}$ 上是次调和的，对于 $w \in \mathbb{D}(z, \delta)$，我们有

$$\{|f(w)| - |f(z)|\}_+^p \leq \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \{|f(\eta)| - |f(z)|\}_+^p dm(\eta),$$

结合 (3.4) 可得

$$\mathscr{M}_f^p(z) \leq \frac{4^{p+1}K^p}{\varepsilon^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \{|f(\eta)| - |f(z)|\}_+^p dm(\eta).$$

证明至此完成。 □

由 [24, 定理 1.8], 可得以下结果。

引理 3.4. 设 f 是一个从 $\mathbb{D}$ 到$(-1, 1)$的实调和映射。那么，存在一个常数 $M > 0$，它与 f 无关，使得对于$z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{M}_f(z) \leq M\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

利用引理 3.4，并采用与引理 3.2 证明中类似的论证，可得以下引理

引理 3.5. 设 f 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{R}$的实调和映射。那么，存在一个常数 $M > 0$，它与 f 无关，使得对于 $z \in \mathbb{D}$ 和$0 < \delta < d_{\mathbb{D}}(z)$,

$$\mathscr{M}_f(z) \leq \frac{2M\left(M_{z,\delta} - |f(z)|\right)}{\delta},$$

其中 $M_{z,\delta} =$ 上确界$\{|f(w)| : \ |w-z| < \delta\}$。

引理 3.6. 假设 $p \in [1, \infty)$ 且 $0 < \varepsilon < 1 - |z|$, $z \in \mathbb{D}$。设 f是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{R}$的实调和映射。那么，对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{M}_f^p(z) \leq \frac{M}{\varepsilon^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \{|f(w)| - |f(z)|\}_+^p dm(w),$$

其中 M 是一个正常数，仅依赖于 p，且 $dm = dA/\pi$（见定理 2.3）。

3.2. 定理 2.3 的证明。情形 1. 首先，我们给出情形 $p \in [1, \infty)$ 下的证明。我们将此情形的证明分为十二个步骤。步骤 1. “$(\mathscr{A}_2) \Rightarrow (\mathscr{A}_1)$”。

对于任意固定的 $z \in \mathbb{D}$，令 $r = 2d_{\mathbb{D}}(z)/3$。根据假设，我们可知存在一个正的常数 M 使得

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}z) - f(e^{i\theta}\xi)|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega(|z-\xi|) \leq M\omega(r) \tag{3.5}$$

对于 $\xi \in \overline{\mathbb{D}(z,r)}$。对于 $\theta \in [0, 2\pi]$ 和 $e^{i\theta}\xi \in \mathbb{D}(e^{i\theta}z, r)$，我们有

$$f(e^{i\theta}\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\xi, e^{i\eta}) f(ze^{i\theta} + e^{i\theta}re^{i\eta}) d\eta,$$

其中

$$P_r(\xi, e^{i\eta}) = \frac{r^2 - |\xi - z|^2}{|re^{i\eta} - (\xi - z)|^2}.$$

初等计算得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}P_r(\xi,e^{i\eta}) &= \frac{\overline{z}-\overline{\xi}}{|re^{i\eta}-(\xi-z)|^2}\\ &\quad+\frac{(r^2-|\xi-z|^2)(re^{-i\eta}-(\overline{\xi}-\overline{z}))}{|re^{i\eta}-(\xi-z)|^4}.\end{aligned}$$

那么，对于 $e^{i\theta}\xi\in\mathbb{D}(e^{i\theta}z,3r/4)$，我们有

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}P_r(\xi,e^{i\eta})\right|\leq\frac{40}{r}. \tag{3.6}$$

通过类似的证明过程，我们得到以下不等式

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}P_r(\xi,e^{i\eta})\right|\leq\frac{40}{r}. \tag{3.7}$$

由 (3.6)、(3.7) 以及 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{M}_f(e^{i\theta}\xi)\right)^p &\leq \int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{P_r}(\xi,e^{i\eta})\right)^p|\mathscr{P}_f(\theta,\eta)|^p\,\frac{d\eta}{2\pi}\\ &\leq \frac{80^p}{r^p}\int_0^{2\pi}|\mathscr{P}_f(\theta,\eta)|^p\,\frac{d\eta}{2\pi},\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $\mathscr{P}_f(\theta,\eta)=f(ze^{i\theta}+e^{i\theta}re^{i\eta})-f(ze^{i\theta})$。在 (3.8) 中取 $\xi=z$，并将不等式 (3.8) 两边关于 θ 从 0 到 2π 积分，由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(ze^{i\theta})\right)^p d\theta &\leq \frac{(80)^p}{r^p}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\mathscr{P}_f(\theta,\eta)\right|^p\frac{d\eta}{2\pi}\right)d\theta\\ &= \frac{(80)^p}{r^p}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\mathscr{P}_f(\theta,\eta)\right|^p d\theta\right)\frac{d\eta}{2\pi}\\ &\leq (80M)^p\left(\frac{\omega\left(\frac{2}{3}d_{\mathbb{D}}(z)\right)}{\frac{2}{3}d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p\\ &\leq (120M)^p\left(\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p.\end{aligned}$$

步骤 2. “$(\mathscr{A}_1)\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”。

由于 $\mathbb{D}$ 是一个 Λ_ω-延拓区域，我们可知，对于每一对点z_1和 $z_2\in\mathbb{D}$，存在一条连接 z_1 与 z_2 的可求长曲线 $\gamma\subset\mathbb{D}$，使得

$$\int_\gamma\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}ds(z)\leq M\omega(|z_1-z_2|), \tag{3.9}$$

其中 M 是一个正数常量。由引理 F，得

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\gamma\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})ds(z)\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\leq\int_\gamma\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}ds(z),$$

结合假设和式 (3.9)，可知存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p[f](z_1,z_2) &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\gamma \mathscr{M}_f(ze^{i\eta})ds(z)\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \int_\gamma\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} ds(z)\\ &\leq M\int_\gamma \frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}ds(z)\\ &\leq M^2\omega(|z_1-z_2|).\end{aligned}$$

由于 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续，上述不等式意味着 $f\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$。步骤 3。“$(\mathscr{A}_2)\Rightarrow(\mathscr{A}_3)$”。

设 $f=h+\overline{g}=u+iv$，其中 $h=u_1+iv_1$ 且 $g=u_2+iv_2$。那么 $f\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$ 当且仅当 $u,\,v\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$。设 $F=h+g$ 和 $\widetilde{v}=\mathrm{Im}(F)$，其中“Im”表示复数的虚部。由于 $\mathrm{Im}(iF)=\mathrm{Im}(if)=u$，我们得到

$$\mathscr{M}_{\mathrm{Re}(iF)}=\mathscr{M}_{\widetilde{v}}=\mathscr{M}_u, \tag{3.10}$$

其中“Re”表示复数的实部。由 (3.10) 和步骤 2，得 $\widetilde{v}\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$，这意味着

$$v_1=\frac{v+\widetilde{v}}{2}\in\Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}) \tag{3.11}$$

and

$$v_2=\frac{\widetilde{v}-v}{2}\in\Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}). \tag{3.12}$$

由 $\mathscr{M}_{u_1}=\mathscr{M}_{v_1},\mathscr{M}_{u_2}=\mathscr{M}_{v_2}$ 和步骤 2 可得

$$u_1\in\Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}) \tag{3.13}$$

and

$$u_2\in\Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}). \tag{3.14}$$

因此，$h\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$ 可由 (3.11) 和 (3.13) 得出，而 $g\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$ 可由 (3.12) 和 (3.14) 得出。第 4 步。“$(\mathscr{A}_2)\Rightarrow(\mathscr{A}_6)$”、“$(\mathscr{A}_2)\Rightarrow(\mathscr{A}_8)$”、“$(\mathscr{A}_3)\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”、“$(\mathscr{A}_3)\Rightarrow(\mathscr{A}_4)$”、“$(\mathscr{A}_2)\Rightarrow(\mathscr{A}_5)$”、“$(\mathscr{A}_6)\Rightarrow(\mathscr{A}_7)$”和“$(\mathscr{A}_8)\Rightarrow(\mathscr{A}_9)$”显然成立。步骤 5。“$(\mathscr{A}_5)\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”。

设 f 是 $\mathbb{D}$ 中的调和 K-拟正则映射，且 $|f|\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$。则存在一个正数常量 M 使得

$$\left(\int_0^{2\pi}||f(e^{i\eta}z_1)|-|f(e^{i\eta}z_2)||^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\leq M\omega(|z_1-z_2|), \tag{3.15}$$

对于 z_1、$z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$。设 $z \in \mathbb{D}$ 固定，并令 $\varepsilon_0 = d_{\mathbb{D}}(z)/2$。置

$$\mathscr{N}_p = \int_0^{2\pi} \big(\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})\big)^p \, d\eta.$$

那么，根据引理 3.3，存在一个正数常量 M^*，使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_p &\leq \int_0^{2\pi} \frac{M^*}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(ze^{i\eta},\varepsilon_0)} \{|f(w)| - |f(ze^{i\eta})|\}_+^p dm(w) d\eta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{M^*}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} \{|f(we^{i\eta})| - |f(ze^{i\eta})|\}_+^p dm(w) d\eta \\
&= \frac{M^*}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} \int_0^{2\pi} \{|f(we^{i\eta})| - |f(ze^{i\eta})|\}_+^p d\eta dm(w),
\end{aligned}$$

结合式 (3.15)，可知存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_p &\leq \frac{M^* M^p}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} \omega(|w-z|)^p dm(w) \\
&\leq \frac{M^* M^p}{\varepsilon_0^{p}} \big(\omega(\varepsilon_0)\big)^p \\
&\leq 2^p M^* M^p \frac{\big(\omega(d_{\mathbb{D}}(z))\big)^p}{\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)^p}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

结合式 (3.16) 和步骤 2，得到 $f \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$。步骤 6。“$(\mathscr{A}_6) \Rightarrow (\mathscr{A}_2)$”。

由于 $u \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$，通过采用与“$(\mathscr{A}_2) \Rightarrow (\mathscr{A}_1)$”证明中类似的推理，我们可知存在一个正数常量 M，使得对于$z \in \mathbb{D}$,

$$\left(\int_0^{2\pi} \big(\mathscr{M}_u(ze^{i\theta})\big)^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M \frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}. \tag{3.17}$$

注意，$u = (h + g + \overline{h+g})/2$，由此可得 $\mathscr{M}_u = |h' + g'|$。由于$f$是 $\mathbb{D}$ 中的调和 K-拟正则映射，我们可知

$$\frac{1}{K}\mathscr{M}_f \leq |h'| - |g'| \leq |h' + g'| = \mathscr{M}_u. \tag{3.18}$$

因此，$(\mathscr{A}_2)$ 由 (3.17)、(3.18) 和步骤 2 得出。
步骤 7。“$(\mathscr{A}_8) \Rightarrow (\mathscr{A}_2)$”。

由于 $v \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}})$，通过采用与“$(\mathscr{A}_2) \Rightarrow (\mathscr{A}_1)$”的证明类似的推理，我们可知存在一个正常数 M，使得对于$z \in \mathbb{D}$,

$$\left(\int_0^{2\pi} \big(\mathscr{M}_v(ze^{i\theta})\big)^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M \frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}. \tag{3.19}$$

不难得知 $v=(h-g-(h-g))/(2i)$，由此可得$\mathscr{M}_v=|h'-g'|$。由于 f 是 $\mathbb{D}$中的调和 K-拟正则映射，我们可知

$$\frac{1}{K}\mathscr{M}_f\le|h'|-|g'|\le|h'-g'|=\mathscr{M}_v. \tag{3.20}$$

因此，$(\mathscr{A}_2)$ 由 (3.19)、(3.20) 和步骤 2 得出。步骤 8。“$(\mathscr{A}_4)\Rightarrow(\mathscr{A}_3)$”由“$(\mathscr{A}_5)\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”得出。步骤 9。“$(\mathscr{A}_7)\Rightarrow(\mathscr{A}_6)$”和“$(\mathscr{A}_9)\Rightarrow(\mathscr{A}_8)$”由引理 3.6 以及“$(\mathscr{A}_5)\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”中的论证得出。步骤 10。“$(\mathscr{A}_2)\Rightarrow(\mathscr{A}_{10})$”。

通过采用与 (3.8) 的证明中类似的推理，我们看到，对于$e^{i\eta}\xi\in\mathbb{D}(e^{i\eta}z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)$，存在一个正数常量 M 使得

$$\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(e^{i\eta}\xi)\right)^p d\eta\le M^p\left(\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p.$$

然后，根据引理 F，我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y}_{u,q,p}(z) &\le \mathscr{Y}_{f,q,p}(z)\\
&= V_q(z)\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)}\left(\mathscr{M}_f(\xi e^{i\eta})\right)^q dA(\xi)\right)^{\frac{p}{q}}d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le V_q(z)\left(\int_{\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)}\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(\xi e^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{q}{p}}dA(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le V_q(z)\left(\int_{\mathbb{D}(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2)}\left(M^p\left(\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p\right)^{\frac{q}{p}}dA(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= M\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)},
\end{aligned}$$

其中 $V_q(z)=1/\left|\mathbb{D}\left(z,d_{\mathbb{D}}(z)/2\right)\right|^{\frac{1}{q}}$以及 $q\le p<\infty$。
步骤 11。“$(\mathscr{A}_{10})\Rightarrow(\mathscr{A}_2)$”。

由于 $\mathscr{M}_u=|h'+g'|$，我们看到 $\mathscr{M}_u^q$ 在 $\mathbb{D}$ 中对 $q\in(0,\infty)$ 是次调和的。因此有

$$\left(\mathscr{M}_u(ze^{i\eta})\right)^q\le\frac{1}{\left|\mathbb{D}\left(ze^{i\eta},\frac{d_{\mathbb{D}}(z)}{2}\right)\right|}\int_{\mathbb{D}\left(ze^{i\eta},\frac{d_{\mathbb{D}}(z)}{2}\right)}\left(\mathscr{M}_u(\xi)\right)^q dA(\xi),$$

这与 (3.18) 和 ($\mathscr{A}_{10}$) 一起意味着存在一个正常数 M，使得

$$\begin{aligned}(3.21)\ \frac{1}{K}\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(ze^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_u(ze^{i\eta})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \mathscr{Y}_{u,q,p}(z)\\ &\leq M\frac{\omega\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)},\end{aligned}$$

其中 $0<q\leq p<\infty$。由 (3.21) 和 ($\mathscr{A}_1$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{A}_2$) 可得$f\in\Lambda_{\omega,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$。

步骤 1$\mathscr{A}_{11}$。($\Leftrightarrow$) $\mathscr{A}_2$($\mathscr{A}_{10}$) 的证明与 ($\Leftrightarrow$) $\mathscr{A}_2$() 类似。

情形 2. $p=\infty$。用于证明情形 1 的技术路线对于情形 2 仍然适用。我们只需将 $p\in[1,\infty)$ 时的某些公式替换为 $p=\infty$ 时的相应公式即可完成证明。因此，此处不再赘述。该定理的证明至此完成。□

引理 3.7。设 ω 是一个主控函数，使得对于所有 $\delta\in[0,\pi]$,

$$(3.22)\qquad \delta\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2}dt\leq M\omega(\delta),$$

其中 M 是一个正数常量。对于 $p\in[1,\infty]$，若 $\varphi\in\Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$，则存在一个正数常量 M，它仅依赖于 $\|\varphi\|_{\Lambda_{\omega,\ p(\mathbb{T})}}\ s$，使得

$$\begin{cases}\left(\int_0^{2\pi}|\varphi\left(\widetilde{z}e^{i\eta}\right)-P[\varphi](ze^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p\in[1,\infty),\\ |\varphi\left(\widetilde{z}\right)-P[\varphi](z)|\leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), & p=\infty.\end{cases}$$

其中 $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ 和 $\widetilde{z}=z/|z|$。

证明。不失一般性，假设 $p\in[1,\infty)$。对于 $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$，令

$$J(z)=\left(\int_0^{2\pi}|\varphi\left(\widetilde{z}e^{i\eta}\right)-P[\varphi](ze^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们将该引理的证明分为两种情况。
情形 1. 令 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$，其中 $r\in(0,1/4)$。于是

$$(3.23)\qquad \mathbf{P}(z,e^{i\tau})\leq\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\leq\frac{5}{3}.$$

由 $\varphi \in \Lambda_{\omega,\ p(\mathbb{T})}$、(3.23) 和引理 F 可知，存在一个正数常量 M，它仅取决于 $\|\varphi\|_{\Lambda_{\omega,\ p(\mathbb{T})}}$，使得

$$\begin{aligned} J(z) &= \left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\varphi(e^{i(\theta+\eta)})-\varphi(e^{i(\tau+\eta)})\right)\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{5}{3}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta+\eta)})-\varphi(e^{i(\tau+\eta)})\right|\frac{d\tau}{2\pi}\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta+\eta)})-\varphi(e^{i(\tau+\eta)})\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\frac{d\tau}{2\pi} \\ &\le \frac{5}{3}M\omega(2), \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{J(z)}{\omega(d_{\mathbb{D}}(z))} \le \frac{\frac{5}{3}M\omega(2)}{\omega\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

情形 2。设 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ with $r \ge 1/4$。

根据引理 F 以及假设 $\varphi \in \Lambda_{\omega,\ p(\mathbb{T})}$，存在一个正数常量 M，它仅依赖于 $\|\varphi\|_{\Lambda_{\omega,\ p(\mathbb{T})}}$，使得

$$\begin{aligned} J(z) &\le \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta+\eta)})-\varphi(e^{i(\tau+\eta)})\right|\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\varphi(e^{i(\theta+\eta)})-\varphi(e^{i(\tau+\eta)})\right|^p\left(\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\right)^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\frac{d\tau}{2\pi} \\ &\le MJ_1(z), \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\omega(|e^{i\tau}-e^{i\theta}|)d\tau.$$

接下来，我们估计 J_1。令 $E_1(\theta) = \{\tau \in [-\pi+\theta, \pi+\theta]: |\tau-\theta| \le 1-r\}$且 $E_2(\theta) = [-\pi+\theta, \pi+\theta]\backslash E_1(\theta)$。由于当 $x \in [0, \pi/2]$时，$\sin x \ge 2x/\pi$，我们得到

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\left(\sin\frac{\theta-\tau}{2}\right)^2}\omega(|e^{i\tau}-e^{i\theta}|)d\tau \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{E_1(\theta)\cup E_2(\theta)}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+\frac{4}{\pi^2}r(\theta-\tau)^2}\omega(|\tau-\theta|)d\tau \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{E_1(\theta)}\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\omega(1-r)d\tau + \frac{\pi}{2}\int_{E_2(\theta)}\frac{1-r^2}{(\theta-\tau)^2}\omega(|\tau-\theta|)d\tau \\ &\le \frac{2}{\pi}\omega(1-r) + 2\pi(1-r)\int_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt, \end{aligned}$$

结合 (3.22) 和 (3.24)，可得

$$J(z) \leq M\left(2\pi + \frac{2}{\pi}\right)\omega(d_{\mathbb{D}}(z)).$$

结合情形 1 和情形 2，即可得到所需结果。 □

3.3. 定理 2.5 的证明。我们将该定理的证明分为两个步骤。

步骤 1。我们首先证明对于 $p \in [1,\infty]$，有“$(\mathscr{C}_2) \Rightarrow (\mathscr{C}_1)$”。

不失一般性，我们假设 $p \in [1,\infty)$。此外，只需证明 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,p}(\mathbb{D})$。对于 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$，令

$$\mathscr{J} = \left(\int_0^{2\pi} \left|P[\varphi](z_1e^{i\eta}) - P[\varphi](z_2e^{i\eta})\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们将此步骤的证明分为两种情形。

情形 1. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ 满足 $\max\{|z_1|, |z_2|\} \leq 1/2$。

由于

$$\mathbf{P}(z, e^{i\tau}) = \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\tau}|^2} = \frac{e^{i\tau}}{e^{i\tau}-z} + \frac{\overline{z}}{e^{-i\tau}-\overline{z}},$$

我们看到，对于满足 $|z| \leq 1/2$ 的 $z \in \mathbb{D}$，

$$\mathscr{M}_{\mathbf{P}}(z) = \frac{1}{|e^{i\tau}-z|^2} + \frac{1}{|e^{-i\tau}-\overline{z}|^2} \leq 8.$$

因此，

$$|\varpi_\tau(z_1,z_2)| \leq \max_{|z|\leq 1/2}\{\mathscr{M}_{\mathbf{P}}(z)\}|z_1-z_2| \leq \frac{16}{\omega(2)}\omega(|z_1-z_2|), \tag{3.25}$$

其中 $\varpi_\tau(z_1,z_2) = \mathbf{P}(z_1,e^{i\tau}) - \mathbf{P}(z_2,e^{i\tau})$。

由 (3.25)、$\varphi \in \Lambda_{\omega,p}(\mathbb{T})$ 和引理 F 可知，存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{J} &= \left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\varphi(e^{i(\tau+\eta)})-\varphi(e^{i\eta})\right)(\varpi_\tau(z_1,z_2))\frac{d\tau}{2\pi}\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i(\tau+\eta)})-\varphi(e^{i\eta})|^p\,|\varpi_\tau(z_1,z_2)|^p\,d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\frac{d\tau}{2\pi} \\
&\leq \frac{16}{\omega(2)}\omega(|z_1-z_2|)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i(\tau+\eta)})-\varphi(e^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\frac{d\tau}{2\pi} \\
&\leq 16M\omega(|z_1-z_2|).
\end{aligned}$$

情形 2. 令 z_1、$z_2 \in \mathbb{D}$，其中 $\max\{|z_1|, |z_2|\} > 1/2$。在此情形下，我们将 $j \in \{1,2\}$ 记为 $z_j = r_je^{i\theta_j}$，其中 $r_j = |z_j|$。不失一般性，假设 $r_2 \leq r_1$。对于任意固定的 $r \in (0,1)$，令

$$F_r(z) = P[\varphi](rz),\ z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

此外，对于 ξ_1、 $\xi_2 \in \mathbb{T}$，令

$$\mathscr{J}_1 = \left(\int_0^{2\pi} |F_r(e^{i\eta}\xi_1) - F_r(e^{i\eta}\xi_2)|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

然后，由 $\varphi \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$ 和引理 F 可知，存在一个与 r 无关的正数常量 M，使得

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_1 &\leq \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(r, e^{i\tau}) \left(\int_0^{2\pi} \left| \varphi(e^{i(\tau+\eta)}\xi_1) - \varphi(e^{i(\tau+\eta)}\xi_2) \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \frac{d\tau}{2\pi} \\ &\leq M\omega(|\xi_1 - \xi_2|), \end{aligned} \tag{3.26}$$

这意味着 $F_r|_{\mathbb{T}} \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$ 和 $\|F_r|_{\mathbb{T}}\|_{\Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})\ s}$ 与 $r \in (0,1)$ 无关。

由闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned} \mathscr{J} &= \left(\int_0^{2\pi} \left| F_{r_1}(e^{i(\theta_1+\eta)}) - F_{r_1}(e^{i(\theta_2+\eta)}) \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. + F_{r_1}(e^{i(\theta_2+\eta)}) - F_{r_2}(e^{i(\theta_2+\eta)}) \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \mathscr{J}_2 + \mathscr{J}_3, \end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{J}_2 = \left(\int_0^{2\pi} \left| F_{r_1}(e^{i(\theta_1+\eta)}) - F_{r_1}(e^{i(\theta_2+\eta)}) \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\mathscr{J}_3 = \left(\int_0^{2\pi} \left| F_{r_1}(e^{i(\theta_2+\eta)}) - F_{r_2}(e^{i(\theta_2+\eta)}) \right|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

由 (3.26) 可知，存在一个正数常量 M，使得

$$\mathscr{J}_2 \leq M\omega(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|). \tag{3.27}$$

由于对于任意固定的 $\eta \in [0, 2\pi]$,

$$F_{r_2}(e^{i(\theta_2+\eta)}) = F_{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2+\eta)} \right) = P[F_{r_1}|_{\mathbb{T}}]\left(\frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2+\eta)} \right),$$

由 $F_{r_1}|_{\mathbb{T}} \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$, $\|F_{r_1}|_{\mathbb{T}}\|_{\Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})\ s}$ 与 $r_1 \in (0, 1)$ 无关，并由引理 3.7 可知，存在正常数 M 使得

$$\mathscr{J}_3 \leq M\omega\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right). \tag{3.28}$$

由 $r_1 > 1/2$，我们得到

$$|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leq 4|z_1 - z_2| \text{ and } 1 - \frac{r_2}{r_1} \leq 2|z_1 - z_2|,$$

这与 (3.27) 和 (3.28) 一起表明，存在正常数 M 使得

$$\mathscr{J} \leq M\omega(|z_1 - z_2|).$$

因此，($\mathscr{C}_1$) 可由情形 1 和情形 2 得出，其中 $p \in [1, \infty)$ 。

步骤 2. 对于 $p=\infty$，“$(\mathscr{C}_1) \Rightarrow (\mathscr{C}_2)$”。

Let

$$\varphi(e^{i\tau}) = \begin{cases} \omega(\tau), & \tau \in [0,\pi], \\ \omega(2\pi-\tau), & \tau \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \tag{3.29}$$

由于

$$\omega(t_1+t_2) \leq \omega(t_1)+\omega(t_2) \tag{3.30}$$

对于 $t_1, t_2 \in [0,\infty)$，我们看到 $\varphi \in \Lambda_{\omega,\infty}(\mathbb{T})$。然后，根据（$\mathscr{C}_1$），我们有$P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,\infty}(\overline{\mathbb{D}})$。接下来，我们将这一步剩余证明分为两种情况。

情形 3。设 $\delta \in [0, 1/2]$。

在这种情况下，设 $r = 1-\delta$。由于

$$P[\varphi](1) = \varphi(1) = \omega(0) = 0,$$

由 $P[\varphi] \in \Lambda_{\omega,\infty}(\overline{\mathbb{D}})$，我们看到存在一个正数常量 M，使得

$$|P[\varphi](r)| = |P[\varphi](r) - P[\varphi](1)| \leq M\omega(1-r),$$

由此可得

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_4 &\leq 2\int_{1-r}^{\pi} \frac{(1-r)\omega(t)}{(1-r)^2+t^2}dt \leq 2\int_{1-r}^{\pi} \frac{(1-r^2)\omega(t)dt}{(1-r)^2+4r\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &\leq 2\left|\int_0^{\pi} \mathbf{P}(r,e^{i\tau})\omega(\tau)d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} \mathbf{P}(r,e^{i\tau})\omega(2\pi-\tau)d\tau\right| \\ &= 4\pi\,|P[\varphi](r)| \\ &\leq 4\pi M\omega(1-r), \end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{J}_4 = (1-r)\int_{1-r}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}dt.$$

情形 4。令 $\delta \in [1/2, \pi]$。

对于这种情形，我们有

$$\delta\int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq \pi\int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t}dt \leq 2\pi^2\frac{\omega\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \leq 4\pi^2\omega(\delta).$$

结合情形 3 和情形 4，可得 $(\mathscr{C}_2)$。该定理的证明至此完成。

□

3.4. 定理 2.7 的证明。情形 1。我们先证明情形 $p \in [1,\infty)$。我们将此情形的证明分为两个步骤。步骤 1。“$(\mathscr{D}_1) \Rightarrow (\mathscr{D}_2)$”。

由于 f 连续至边界，$f \in \Lambda_{\omega,\,p}(\mathbb{D})$ 意味着

$$|f| \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}). \tag{3.31}$$

由于$|f| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$，且 ω 是正则主函数，根据定理 2.5（或推论 2.6），可知

$$P[|f|] \in \Lambda_{\omega,p}(\overline{\mathbb{D}}). \tag{3.32}$$

Let

$$\mathscr{J}_5 = \left(\int_0^{2\pi} \left(P[|f|](ze^{i\theta}) - |f(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

于是，由 (3.31)、(3.32) 和闵可夫斯基不等式可知，存在一个正的常数 M 使得

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_5 &\leq \left(\int_0^{2\pi} \left|P[|f|](ze^{i\theta}) - |f(\widetilde{z}e^{i\theta})|\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^{2\pi} \left||f(\widetilde{z}e^{i\theta})| - |f(ze^{i\theta})|\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)),\end{aligned}$$

其中 $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ 和 $\widetilde{z} = z/|z|$。因此，($\mathscr{D}_2$) 成立。

步骤 2。“($\mathscr{D}_2$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{D}_1$)”。

对于固定点 $z \in \mathbb{D}$ 和固定点 $\theta \in [0, 2\pi]$，有

$$\begin{aligned}\{|f(we^{i\theta})| - |f(ze^{i\theta})|\}_+ &\leq \{P[|f|](we^{i\theta}) - |f(ze^{i\theta})|\}_+ \\ &\leq \{P[|f|](we^{i\theta}) - P[|f|](ze^{i\theta})\}_+ \\ &\quad + \{P[|f|](ze^{i\theta}) - |f(ze^{i\theta})|\}_+,\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $w \in \{\varsigma:\ |\varsigma - z| \leq d_{\mathbb{D}}(z)\}$.

由 ($\mathscr{D}_2$)，我们知道存在一个正数常量 M，使得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(P[|f|](ze^{i\theta}) - |f(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)). \tag{3.34}$$

由于$|f| \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{T})$，且 ω 是一个正则主函数，根据定理 2.5（或推论 2.6），我们知道存在一个正数常量 M，使得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|P[|f|](we^{i\theta}) - P[|f|](ze^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)), \tag{3.35}$$

对于 $w \in \{\varsigma:\ \ |\varsigma - z| \leq d_{\mathbb{D}}(z)\}$. 结合 (3.33)、(3.34)、(3.35) 和闵可夫斯基不等式可得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left\{|f(we^{i\theta})| - |f(ze^{i\theta})|\right\}_+^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)),$$

对于 $w \in \{\varsigma:\ \ |\varsigma - z| \leq d_{\mathbb{D}}(z)\}$. 仿照定理 2.3 证明中的步骤 5，我们有 $f \in \Lambda_{\omega,\ p}(\mathbb{D})$。

情形 **2**. $p = \infty$。用于证明情形 1 的证明方法对情形 2 仍然有效。我们只需在 $p \in [1, \infty)$ 时替换一些公式，以得到

当 $p=\infty$ 时对应的公式，以完成证明。因此，我们在此省略。

该定理的证明到此结束。 □

3.5. 定理 2.10 的证明。我们只需证明 $p\in[2,\infty)$ 的情形，因为 $p=\infty$ 的情形可由定理 C 得出。我们先证明必要性。对于 $z\in\mathbb{D}$，令

$$\mathscr{S}_p(z)=\left(\int_0^{2\pi}\left(P[|f|^2](ze^{i\eta})-|f(ze^{i\eta})|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\eta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $f\in\Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$，可知存在一个正数常量 M，使得

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i(\tau+\eta)})-f(ze^{i\eta})|^p d\eta\le M^p\big(\omega(|z-e^{i\tau}|)\big)^p. \tag{3.36}$$

然后，由 (3.36) 和引理 F 可知，存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_p(z) &= \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(e^{i(\tau+\eta)})-f(ze^{i\eta})|^2\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\right)^{\frac{p}{2}}d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\int_0^{2\pi}\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\left(\int_0^{2\pi}|f(e^{i(\tau+\eta)})-f(ze^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{2}{p}}\frac{d\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le M\left(\int_0^{2\pi}\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\big(\omega(|z-e^{i\tau}|)\big)^2\frac{d\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.37)\end{aligned}$$

另一方面，对于 $z\neq 0$ 和 $\widetilde{z}=z/|z|$，由 (3.30) 可得

$$\begin{aligned}\big(\omega(|z-e^{i\tau}|)\big)^2 &\le \big(\omega(|\widetilde{z}-e^{i\tau}|)+\omega(|z-\widetilde{z}|)\big)^2\\ &\le 2\left(\big(\omega(|\widetilde{z}-e^{i\tau}|)\big)^2+\big(\omega(d_{\mathbb{D}}(z))\big)^2\right). \qquad (3.38)\end{aligned}$$

结合 (3.37)、(3.38) 和 [15, 引理 2] 可得，存在一个正数常量 M 使得

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(P[|f|^2](ze^{i\theta})-|f(ze^{i\theta})|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\le M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)).$$

接下来，我们证明充分性。对于 $z\in\mathbb{D}$ 和固定的 $\eta\in[0,2\pi]$，由柯西积分公式和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{D}}(z)|f'(ze^{i\eta})| &= \left|\int_{|\zeta|=1}\big(f(\zeta e^{i\eta})-f(ze^{i\eta})\big)\frac{d_{\mathbb{D}}(z)}{(\zeta-z)^2}\frac{d\zeta}{2\pi i}\right|\\ &\le \int_0^{2\pi}|f(\zeta e^{i\eta})-f(ze^{i\eta})|\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\\ &\le \left(\int_0^{2\pi}|f(\zeta e^{i\eta})-f(ze^{i\eta})|^2\mathbf{P}(z,e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.39)\end{aligned}$$

其中 $\zeta = e^{i\tau}$。对于 $z \in \mathbb{D}$，令

$$\mathscr{Q}_p(z) = d_{\mathbb{D}}(z)\left(\int_0^{2\pi} |f'(ze^{i\eta})|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

于是，由 (3.37) 和 (3.39) 可知，存在一个正数常量 M，使得

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_p(z) &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i(\tau+\eta)}) - f(ze^{i\eta})|^2 \mathbf{P}(z, e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\right)^{\frac{p}{2}} d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \mathscr{S}_p(z) \\ &\leq M\omega(d_{\mathbb{D}}(z)),\end{aligned}$$

结合推论 2.4，可得 $f \in \Lambda_{\omega,\,p}(\overline{\mathbb{D}})$。该定理的证明至此完成。□

4. 等价范数与 Hardy-Littlewood 型定理的应用

若连续非递减函数 $\psi : [0,1) \to (0,\infty)$ 满足 ψ 无界（见 [1]），则称其为权函数。此外，如果权函数 ψ 满足存在常数 $M > 1$，使得

$$\psi(1 - s/2) < M\psi(1 - s)$$

对于 $s \in (0,1]$，以下结果可由 [1, 引理 1] 和[1, 定理 2] 直接得到。

引理 4.1. 设 ψ 是一个倍增函数。那么存在全纯函数 $f_j\,(j \in \{1,2\})$，使得

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f_j'(z)|}{\psi(|z|)} < \infty$$

使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{j=1}^{2} |f_j'(z)| \geq \psi(|z|).$$

引理 G.（[30, 引理 2]）设 $f \in \mathscr{A}(\mathbb{D})$。对于 $z \in \mathbb{D}$，令$D_z = \{w : |w - z| \leq d_{\mathbb{D}}(z)\}$ 且 $M_z = \max\{|f(w)| : \ w \in D_z\}$。那么，对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{1}{2}(1 - |z|)|f'(z)| + |f(z)| \leq M_z.$$

引理 4.2. 设 ω_1 为一个主控函数，使得 ω_1 在 $(0,1]$上可微，且 ω_1' 在 $(0,1]$, 上也是非递增的，并设 ω_2 为一个快速主函数。对于$p \in [1,\infty]$，若 ϕ 是从 $\mathbb{D}$ 到其自身的全纯函数，则 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\,p}(\mathbb{D})$ 当且仅当存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\text{(4.1)}\quad \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p \in [1,\infty), \\ \mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(z) \leq M\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p = \infty. \end{cases}$$

证明. 不失一般性，假设 ϕ 不是常数且 $p \in [1,\infty)$。我们先证明充分性。对于 $z \in \mathbb{D}$，经过初等计算可得

$$\left|\frac{\partial \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial d_{\mathbb{D}}(\phi(z))}{\partial z}\right| \omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) = \frac{|\phi'(z)|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{2}$$

and

$$\left|\frac{\partial \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{\partial \overline{z}}\right| = \left|\frac{\partial d_{\mathbb{D}}(\phi(z))}{\partial \overline{z}}\right| \omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) = \frac{|\phi'(z)|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{2},$$

这给出:

$$\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(z) = |\phi'(z)|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.2}$$

由于 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 的 ω_2快速主函数 Λ_{ω_2}-扩展区域，我们看到，对于 z、$w \in \mathbb{D}$，存在一条可求长曲线 $\gamma \subset \mathbb{D}$，连接 z 和 w，使得

$$\int_\gamma \frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(\zeta))}{d_{\mathbb{D}}(\zeta)} ds(\zeta) \leq M\omega_2(|z-w|), \tag{4.3}$$

其中 M 是一个正数常量。

根据 (4.1)、(4.2)、(4.3) 和引理 F，我们得出，对于 z、 $w \in \mathbb{D}$，存在一条可求长曲线 $\gamma \subset \mathbb{D}$，连接 z 和 w，使得

$$\begin{aligned} I(z,w) &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\gamma \mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(e^{i\theta}\zeta)ds(\zeta)\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_\gamma \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(\zeta e^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} ds(\zeta) \\ &\leq M\int_\gamma \frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(\zeta))}{d_{\mathbb{D}}(\zeta)} ds(\zeta) \\ &\leq M^2\omega_2(|z-w|), \end{aligned}$$

其中

$$I(z,w) = \left(\int_0^{2\pi} \left|\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))) - \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(we^{i\theta})))\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

接下来，我们证明必要性。对于 $a, b \in [0,1]$ 满足 $b > a$ 的情形，由拉格朗日中值定理可知，存在一个 $a_0 \in (a,b)$，使得

$$\frac{\omega_1(a) - \omega_1(b)}{a-b} = \omega_1'(a_0) \geq \omega_1'(b). \tag{4.4}$$

由于 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\, p}(\mathbb{D})$，我们可以看出存在一个正数常量 M，使得

$$\mathscr{J}_6 \leq M\omega_2(|z-w|) \tag{4.5}$$

对于 $z, w \in \mathbb{D}$，其中

$$\mathscr{J}_6 = \left(\int_0^{2\pi} \left|\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))) - \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(we^{i\theta})))\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由 (4.4) 和 (4.5)，我们得到

$$\mathscr{J}_7 \leq M\omega_2(|z-w|),$$

对于 z、$w \in \mathbb{D}$，其中

$$\mathscr{J}_7 = \left(\int_0^{2\pi} \left(\left\{|\phi(we^{i\theta})| - |\phi(ze^{i\theta})|\right\}_+ \omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么，对于 z、$w \in \mathbb{D}$，其中 $|w-z| \leq d_{\mathbb{D}}(z)/2$，我们有

$$\mathscr{J}_7 \leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z)). \tag{4.6}$$

Let

$$\mathscr{W}(z) = \int_0^{2\pi} \left(\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta$$

and

$$\mathscr{J}_8(w, ze^{i\theta}) = \{|\phi(w)| - |\phi(ze^{i\theta})|\}_+ \omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))).$$

对于固定的 $z \in \mathbb{D}$ 和 $\varepsilon_0 = d_{\mathbb{D}}(z)/2$，由引理 3.3 可知存在一个正常数 C，使得

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}(z) &\leq \int_0^{2\pi} \frac{C}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(ze^{i\theta},\varepsilon_0)} \left(\mathscr{J}_8(w, ze^{i\theta})\right)^p dm(w) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{C}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} \left(\mathscr{J}_8(we^{i\theta}, ze^{i\theta})\right)^p dm(w) d\theta \\
&= \frac{C}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} \int_0^{2\pi} \left(\mathscr{J}_8(we^{i\theta}, ze^{i\theta})\right)^p d\theta dm(w),
\end{aligned}$$

这与（4.6）结合起来，得到的是

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}(z) &\leq \frac{C}{\varepsilon_0^{p+2}} \int_{\mathbb{D}(z,\varepsilon_0)} M^p \omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))^p dm(w) \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon_0^{p}} M^p \left(\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))\right)^p \\
&\leq 2^p C M^p \frac{\left(\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))\right)^p}{\left(d_{\mathbb{D}}(z)\right)^p}.
\end{aligned}$$

这个引理的证明至此完成。 □

由引理 4.2 的必要性证明，我们还可得到以下结果。在这里，我们只需假设 ω_2 是一个主控函数，因为“快速”条件仅在引理 4.2 的充分性证明中使用。

引理 4.3. 设 ω_1 是一个主控函数，使得 ω_1 在 $(0,1]$ 上可微，且 ω_1' 在 $(0,1]$，上也单调不增，并设 ω_2 是一个主控函数。假设 ϕ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到其自身的全纯函数。对于 $p \in [1,\infty]$，如果

$$\begin{cases}
\chi_{\omega_1}(z,w) \leq \omega_2(d_{\mathbb{D}}(z)), & p \in [1,\infty), \\
\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) - \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(w)))\}_+ \leq \omega_2(d_{\mathbb{D}}(z)), & p = \infty.
\end{cases}$$

当 $z\in\mathbb{D}$ 和 $w\in\{\varsigma\in\mathbb{D}:\ \ |\varsigma-z|\le d_{\mathbb{D}}(z)/2\}$ 时，其中

$$\chi_{\omega_1}(z,w)=\left(\int_0^{2\pi}\left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))-\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(we^{i\theta})))\right\}_+^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}},$$

于是存在一个正数常量 M，使得对于 $z\in\mathbb{D}$,

$$\begin{cases}\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\le M\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p\in[1,\infty),\\ \mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(z)\le M\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}, & p=\infty.\end{cases}$$

引理 4.4. 设 ω 是一个主控函数，使得 ω 在 $(0,1]$ 上可微，且 ω' 在 $(0,1]$ 上也非递增。设 ϕ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到其自身的解析函数。那么 $\omega(d_{\mathbb{D}}(\phi))$ 在 $\mathbb{D}$ 上是超调和的。

证明. 不失一般性，我们假设 ϕ 不是常数。由于 ϕ 在 $\mathbb{D}$ 中是解析的，我们看到 $|\phi(z)|$ 在 $\mathbb{D}$ 中是次调和的。令 $\varphi(t)=-\omega(1-t)$，其中 $t\in(-\infty,1]$。于是，$\varphi'(t)$ 存在且在$[0,1)$上非递减。任意固定 $t_0\in[0,1)$。对于 $0\le t<t_0<1$，由拉格朗日中值定理可知，存在一个 $s\in(t,t_0)$，使得

$$\frac{\varphi(t_0)-\varphi(t)}{t_0-t}=\varphi'(s)\le\varphi'(t_0),$$

这意味着

$$\varphi(t)\ge\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0). \tag{4.7}$$

对于 $0\le t_0<t<1$，根据拉格朗日中值定理，存在一个 $s\in(t_0,t)$，使得

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}=\varphi'(s)\ge\varphi'(t_0),$$

这意味着

$$\varphi(t)\ge\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0). \tag{4.8}$$

由（4.7）和（4.8），我们有

$$\varphi(t)\ge\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0),\quad t\in[0,1). \tag{4.9}$$

对于 $z\in\mathbb{D}, r\in(0,d_{\mathbb{D}}(z))$ 和 $\zeta\in\mathbb{T}$，令 $t=|\phi(z+r\zeta)|$,

$$t_0=\int_0^{2\pi}|\phi(z+re^{i\tau})|\frac{d\tau}{2\pi}$$

在不等式 (4.9) 中，并在 $\mathbb{T}$ 上积分，我们得到

$$\int_{\mathbb{T}}\varphi(|\phi(z+r\zeta)|)\frac{|d\zeta|}{2\pi}\ge\varphi\left(\int_{\mathbb{T}}|\phi(z+r\zeta)|\frac{|d\zeta|}{2\pi}\right),$$

由此，结合 $|\phi|$ 的次调和性以及 φ 是递增函数这一事实，可得

$$\varphi(|\phi(z)|)\le\varphi\left(\int_{\mathbb{T}}|\phi(z+r\zeta)|\frac{|d\zeta|}{2\pi}\right)\le\int_{\mathbb{T}}\varphi(|\phi(z+r\zeta)|)\frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

因此， $\varphi(|\phi(z)|)$ 在 $\mathbb{D}$ 中是次调和函数，这意味着 $\omega(d_{\mathbb{D}}(\phi))$ 在 $\mathbb{D}$ 中是超调和函数。该引理的证明至此完成。□

以下结果可由定理 2.3 轻易得到。

引理 4.5。设 ω 是一个快速主函数，并设 $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$。当且仅当存在一个正数常量 M 使得 $f \in \Lambda_\omega(\mathbb{D})$。

$$\mathscr{M}_f(z) \leq M\frac{\omega(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

此外，存在一个与 f 无关的正数常量 M，使得

$$\frac{1}{M}\|f\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{D}),s} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\mathscr{M}_f(z)\frac{d_{\mathbb{D}}(z)}{\omega(d_{\mathbb{D}}(z))}\right\} \leq M\|f\|_{\Lambda_\omega(\mathbb{D}),s}.$$

4.1. 定理 2.11 的证明。我们将该定理的证明分为七个步骤。

步骤 1。“$(\mathscr{F}_2) \Rightarrow (\mathscr{F}_1)$”。

对于 $f \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$，由引理 4.5 可知，存在一个正数常量 M，使得对于 $w \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{M}_f(w) \leq M\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(w))}{d_{\mathbb{D}}(w)},$$

这与假设（$\mathscr{F}_2$）一起意味着

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{C_\phi(f)}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_f(\phi(ze^{i\theta}))|\phi'(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta \\ &\leq M^p\int_0^{2\pi}\left(\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}|\phi'(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta \\ &\leq M^{2p}\left(\frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

根据 (4.10) 和定理 2.3，我们有 $C_\phi(f) \in \Lambda_{\omega_2,\,p}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$。

步骤 2. “$(\mathscr{F}_1) \Rightarrow (\mathscr{F}_2)$”.

假设 $C_\phi \quad (f) \in \Lambda_{\omega_2,\,p}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$ 对每个 $f \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$。我们将这一步的证明分为两种情况。

情形 1. 假设

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\omega_1(t)}{t} = \infty.$$

对于这种情况，令

$$\psi(t) = \frac{\omega_1(1-t)}{1-t}$$

对于 $t \in [0,1)$ 。由于对于 $s \in (0,1]$,

$$\psi\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\omega_1(\frac{s}{2})}{\frac{s}{2}} \leq 2\frac{\omega_1(s)}{s} = 2\psi(1-s),$$

我们可知 ψ 是一个倍增函数。然后，根据引理 4.1，存在全纯函数 f_j ($j \in \{1,2\}$)，满足

$$\sup_{\xi\in\mathbb{D}} \frac{|f_j'(\xi)|}{\psi(|\xi|)} < \infty$$

使得对于 $\xi \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{j=1}^{2} |f_j'(\xi)| \geq \psi(|\xi|),$$

由此可得

$$|f_1'(\phi(z))| + |f_2'(\phi(z))| \geq \frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(z))}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.11}$$

由引理 4.5 可知 f_1, $f_2 \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$。因此，$f = f_1 + \overline{f_2} \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$。由于 $C_\phi(f) \in \Lambda_{\omega_2,p}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$，根据定理 2.3，我们得出存在正数常量 M，使得对于$z \in \mathbb{D}$,

$$\mathscr{J}_9 \leq M\frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}, \tag{4.12}$$

其中

$$\mathscr{J}_9 = \left(\int_0^{2\pi} \left(|f_1'(\phi(ze^{i\theta}))| + |f_2'(\phi(ze^{i\theta}))|\right)^p |\phi'(ze^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么，由 (4.11) 和 (4.12) 可得 ($\mathscr{F}_2$)。
情形 2。假设

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\omega_1(t)}{t} < \infty.$$

在这种情形下，令 $f_0(\xi) = \xi$，其中 $\xi \in \mathbb{D}$。由于 $\omega_1(t)/t$ 在 $t > 0$ 上单调不增，因此可知存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$|f_0'(\phi(z))| \geq M\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(z))}. \tag{4.13}$$

另一方面，对于 $t \in (0,2]$,

$$\frac{\omega_1(t)}{t} \geq \frac{\omega_1(2)}{2},$$

由此得到 $f_0 \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$。根据定理 2.3，存在正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(|f_0'(\phi(ze^{i\theta}))||\phi'(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)},$$

结合 (4.13)，可推出 ($\mathscr{F}_2$)。

步骤 3。“($\mathscr{F}_1$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{F}_3$)”。

由步骤 2 可知，存在一个正数常量 M，使得对于$z \in \mathbb{D}$,

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(|\phi'(ze^{i\theta})|\frac{\omega_1\big(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))\big)}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)}. \tag{4.14}$$

由 $\omega_1 \in \mathscr{S}$和 (4.4) 可得，对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) \leq \frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) - \omega_1(0)}{d_{\mathbb{D}}(\phi(z)) - 0}. \tag{4.15}$$

由 (4.2) 和 (4.15)，我们有

$$\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(z) = |\phi'(z)|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z))) \leq |\phi'(z)|\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(z))},$$

结合 (4.14)，可知存在一个正数常量 M，使得对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_{10} &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(|\phi'(ze^{i\theta})|\frac{\omega_1\big(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))\big)}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\frac{\omega_2\big(d_{\mathbb{D}}(z)\big)}{d_{\mathbb{D}}(z)},\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{J}_{10} = \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{M}_{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

然后，由引理 4.2 可得 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\ p}(\mathbb{D})$。因此，$\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\ p}(\overline{\mathbb{D}})$，因为 ϕ 在 $\overline{\mathbb{D}}$中连续。

第 4 步。“$(\mathscr{F}_3) \Rightarrow (\mathscr{F}_1)$”。

由于 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\ p}(\mathbb{D})$，由引理 4.2 可知，存在一个正常数 M，使得

$$\mathscr{J}_{11} \leq M\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)},\ z \in \mathbb{D}, \tag{4.16}$$

其中

$$\mathscr{J}_{11} = \left(\int_0^{2\pi}\left(|\phi'(ze^{i\theta})|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由引理 4.5 可知，存在一个正数常量 M，使得对于 $f \in \Lambda_{\omega_1}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$,

$$\mathscr{M}_{C_\phi(f)}(ze^{i\theta}) = \mathscr{M}_f(\phi(ze^{i\theta}))|\phi'(ze^{i\theta})| \leq M\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}|\phi'(ze^{i\theta})|,$$

结合 (4.16)，可得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{J}_{12} &= \int_0^{2\pi} \left(\mathscr{M}_f(\phi(ze^{i\theta}))|\phi'(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta \\
&\leq M^p \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta}))}|\phi'(ze^{i\theta})|\right)^p d\theta \\
&\leq M^p M_1^p \int_0^{2\pi} \left(|\phi'(ze^{i\theta})|\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))\right)^p d\theta \\
&\leq M^{2p} M_1^p \left(\frac{\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z))}{d_{\mathbb{D}}(z)}\right)^p,
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

其中

$$\mathscr{J}_{12} = \int_0^{2\pi} \left(\mathscr{M}_{C_\phi(f)}(ze^{i\theta})\right)^p d\theta$$

and

$$M_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{\frac{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}{d_{\mathbb{D}}(\phi(z))\omega_1'(d_{\mathbb{D}}(\phi(z)))}\right\} < \infty.$$

因此，($\mathscr{F}_1$) 由 (4.17) 和定理 2.3 得出。

步骤 5。“($\mathscr{F}_3$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{F}_4$)”显而易见。

步骤 6。“($\mathscr{F}_4$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{F}_5$)”。

对于 $r \in (0, 1)$ 和 $\theta \in [0, 2\pi]$，设

$$\mathscr{K}_1(re^{i\theta}) = \left(\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta})\right),$$

$$\mathscr{K}_2(re^{i\theta}) = \left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - \omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(e^{i\theta})))\right\}_+$$

and

$$\mathscr{K}_3(re^{i\theta}) = \left|\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(e^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta})\right|.$$

于是，根据（$\mathscr{F}_4$），我们看到存在一个正数常量 M 使得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\mathscr{K}_2(re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(r)). \tag{4.18}$$

由于 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi)) \in \Lambda_{\omega_2,\, p}(\mathbb{T})$ 且 ω_2 是正则主函数，根据定理 2.5，存在一个正常数 M，使得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\mathscr{K}_3(re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(r)). \tag{4.19}$$

另一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{K}_1(re^{i\theta}) &= \left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(re^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta})\right\}_+ \\
&\leq \mathscr{K}_2(re^{i\theta}) + \left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(e^{i\theta}))) - P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](re^{i\theta})\right\}_+ \\
&\leq \mathscr{K}_2(re^{i\theta}) + \mathscr{K}_3(re^{i\theta}),
\end{aligned}
$$

结合（4.18）、（4.19）和闵可夫斯基不等式可知，存在正常数 M，使得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_1(re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_2(re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad+\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_3(re^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(r)).\end{aligned}$$

步骤 7。“$(\mathscr{F}_5)\Rightarrow(\mathscr{F}_1)$”。

对于 z、$w\in\mathbb{D}$ 和 $\theta\in[0,2\pi]$，令

$$\mathscr{K}_4(ze^{i\theta},we^{i\theta})=\left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))-P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](we^{i\theta})\right\}_+,$$

$$\mathscr{K}_5(ze^{i\theta},we^{i\theta})=\left\{\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(ze^{i\theta})))-\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi(we^{i\theta})))\right\}_+$$

and

$$\mathscr{K}_6(ze^{i\theta},we^{i\theta})=\left\{P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](ze^{i\theta})-P[\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))](we^{i\theta})\right\}_+.$$

由于 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))$ 在 $\mathbb{D}$ 中是超调和的（见引理 4.4），我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_5(ze^{i\theta},we^{i\theta}) &\leq \mathscr{K}_4(ze^{i\theta},we^{i\theta}) \\ &\leq \mathscr{K}_4(ze^{i\theta},ze^{i\theta})+\mathscr{K}_6(ze^{i\theta},we^{i\theta}).\end{aligned}\tag{4.20}$$

由 $(\mathscr{F}_5)$ 可知，存在一个正数常量 M，使得

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_4(ze^{i\theta},ze^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z)).\tag{4.21}$$

由于 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))\in\Lambda_{\omega_2,\,p}(\mathbb{T})$，且 ω_2 是正则主函数，根据定理 2.5，存在一个正数常量 M，使得

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_6(ze^{i\theta},we^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leq M\omega_2(|z-w|).\tag{4.22}$$

对于 $z\in\mathbb{D}$ 和 $|z-w|\leq d_{\mathbb{D}}(z)$，由（4.20）、（4.21）、（4.22）以及闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_5(ze^{i\theta},we^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_4(ze^{i\theta},ze^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad+\left(\int_0^{2\pi}\left(\mathscr{K}_6(ze^{i\theta},we^{i\theta})\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\omega_2(d_{\mathbb{D}}(z)).\end{aligned}\tag{4.23}$$

结合式 (4.23)、引理 4.2 和引理 4.3 可得 $\omega_1(d_{\mathbb{D}}(\phi))\in\Lambda_{\omega_2,\,p}(\mathbb{D})$，再结合第 4 步可知，$(\mathscr{F}_1)$ 成立。该定理的证明至此完成。□

声明与声明内容

利益冲突。不存在利益冲突。

数据可用性。由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

5. 致谢

第一作者的研究部分得到了中国国家自然科学基金（项目编号：12071116）、中国湖南省自然科学基金（编号：2022JJ10001）、湖南省教育厅重点项目（项目编号：21A0429）、湖南省“双一流”建设项目（湘教通[2018]469）、湖南省科技计划项目（2016TP1020）以及衡阳师范学院学科专项研究项目（XKZX21002）的资助；第二作者的研究部分得到了日本学术振兴会科研费（项目编号：JP22K03363）的资助。

参考文献

[1] E. Abakumov 和 E. Doubtsov，增长空间中的反向估计，Math. Z. 271 (2012), 399–413。[2] M. Arsenovi´c、V. Koji´c 和 M. Mateljevi´c，单位球中调和拟正则映射的 Lipschitz 连续性，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33 (2008), 315–318。[3] M. Arsenovi´c 和 M. Pavlovi´c，关于调和拟正则映射的 Dyakonov 型定理，Czech. Math. J. 67 (2017), 289–296。[4] M. Arsenovi´c、V. Manojlovi´c 和 M. Mateljevi´c，空间中的 Lipschitz 型空间与调和映射，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 35 (2010), 379–378。[5] J. L. Chen、M.Z. Huang、A. Rasila 和 X.T. Wang，双曲泊松方程解的 Lipschitz 连续性，Calc. Var. Partial Differ. Equ. 57 (2018), 32 p。[6] S. L. Chen 和 H. Hamada，调和 Lipschitz 型空间与复合算子及主控函数，J. Geom. Anal.，即将发表。[7] S. L. Chen 和 H. Hamada，关于 Riesz 型不等式、Hardy-Littlewood 型定理和光滑模，已投稿。[8] S. L. Chen、H. Hamada 和 J. -F. Zhu，Bloch 型空间与 Hardy 型空间上的复合算子，Math. Z. 301 (2022), 3939–3957。[9] S. L. Chen、S. Ponnusamy 和 A. Rasila，平面调和映射的长度、面积与 Lipschitz 型空间，Nonlinear Anal. 115 (2015), 62–70。[10] S. L. Chen、S. Ponnusamy 和 A. Rasila，Bloch 型空间、Hardy 型空间和 Lipschitz 型空间的刻画，Math. Z. 279 (2015), 163–183。[11] S. L. Chen、S. Ponnusamy 和 A. Rasila，平面调和映射的系数估计、Landau定理与 Lipschitz 型空间，J. Aust. Math. Soc. 96 (2014), 198–215。[12] S. L. Chen、S. Ponnusamy 和 X. Wang，关于平面调和 Lipschitz 空间与平面调和 Hardy 类，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 36 (2011), 567–576。[13] S. L. Chen 和 S. Ponnusamy，某些复值函数类的 Lipschitz 型空间与 Hardy 空间，Integral Equations Oper. Theory 77 (2013), 261–278。[14] P. Duren，平面调和映射，剑桥大学出版社，2004。

[15] K. M. Dyakonov，全纯函数 Lipschitz 型空间上的等价范数，Acta Math. 178 (1997), 143–167。[16] K. M. Dyakonov，具有光滑模的全纯函数与拟共形映射，Adv. Math. 187(2004), 146–172。[17] K. M. Dyakonov，有限畸变解析函数与映射的强 Hardy-Littlewood 定理，Math. Z. 249(2005), 597–611。[18] K. M. Dyakonov，Bloch 型空间中的函数及其连续模，Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 41(2016), 705–712。[19] J. B. Garnett，有界解析函数。Academic Press, 纽约，1981。[20] A. Gjokaj 和 D. Kalaj，单位球与带边界的空间区域之间的拟共形调和映射，Potential Anal. 57 (2022), 367–377。[21] F. W. Gehring 和 O. Martio，Lipschitz 类与拟共形映射，Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 10 (1985), 203–219。[22] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood，共轭函数的若干性质，J. Reine Angew. Math. 167 (1931), 405–423。[23] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood，分数阶积分的若干性质 II，Math. Z. 34 (1932), 403–439。[24] D. Kalaj 和 M. Vuorinen，关于调和函数与 Schwarz 引理，Proc. Am. Math. Soc. 140 (2012), 161–165。[25] M. Kne$\check{z}$evi´c 和 M. Mateljevi´c，关于调和拟共形映射的拟等距，J. Math. Anal. Appl. 334 (2007), 404–413。[26] V. Koji´c 和 M. Pavlovi´c，拟正则调和函数的次调和性及其应用，J. Math. Anal. Appl. 342 (2008), 742–746。[27] V. Lappalainen，Lip$_h$-延拓区域，Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes 56 (1985)。[28] H. Lewy，关于某些单射映射中雅可比行列式不为零，Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 689–692。[29] C. A. Nolder 和 D. M. Oberlin，连续模与 Hardy-Littlewood 定理，复分析：第 13 届 Rolf Nevanlinna-Colloq. 会议论文集，约恩苏/芬兰，1987，Lect. Notes Math. 1351(1988), 265–272。[30] M. Pavlovi´c，关于 Dyakonov 论文《全纯函数 Lipschitz 型空间上的等价范数》，Acta Math. 183 (1999), 141–143。[31] M. Pavlovi´c，调和函数模的 Lipschitz 条件，Rev. Mat. Iberoamericana 23 (2007), 831–845。[32] M. Pavlovi´c，Lipschitz 空间上一类复合算子中的内函数除法，Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 199–209。[33] M. Pavlovi´c，Lipschitz 空间之间有界复合算子的无导数刻画，Math. Z. 258 (2008), 81–86。[34] J. A. Pel´aez 和 J. R¨atty¨a，加权 Bergman 空间上的广义 Hilbert 算子，Adv. Math. 240 (2013), 227–267。[35] J. A. Pel´aez 和 J. R¨atty¨a，小 Bergman 空间上 Toeplitz 算子与复合算子的迹类判据，Adv. Math. 293 (2016), 606–643。[36] I. I. Privalov，关于共轭函数，Bull. Soc. Math. France 44(1916), 100–103。[37] J. Qiao 和 X. T. Wang，多重调和映射的 Lipschitz 型空间，Filomat 27 (2013), 693–702。[38] J. H. Shapiro，复合算子的本质范数，Ann. Math. 125 (1987), 375–404。[39] K. Zhu，函数空间中的算子理论，Mathematical surveys and monographs，美国数学会，第 138 卷，第 2 版，2007。[40] A. Zygmund，三角级数，剑桥大学出版社，1959。

S. L. CHEN，中华人民共和国湖南省衡阳市衡阳师范学院数学与统计学院，邮编 421002；中华人民共和国邮编 421002，湖南省智能信息处理与应用重点实验室。

电子邮箱：mathechen@126.com

H. HAMADA，日本福冈市东区松香台二丁目 3-1，九州产业大学理工学部，邮编 813-8503。电子邮箱：h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp