关于液滴下落速度

Wenjie Ji[1], Siyuan Wang[2], Jiguang Hao[1*]，以及 J. M. Floryan[3]北京理工大学航空航天工程学院，北京 100081，中国[2]中国运载火箭技术研究院，北京 100076，中国[3]西安大略大学机械与材料工程系，加拿大安大略省伦敦 N6A 5B9

采用高速摄影研究了液滴撞击研究中使用的液滴速度。研究发现，在典型撞击发生前，液滴尚未达到终端速度，因此需要解决如何预测撞击速度的问题。通过实验对这一问题进行了研究，并利用实验结果验证了一个理论模型。实验所用液滴直径为 0.70 mm 至 4.0 mm，液体密度为 791 kg/m^3 至 1261.5 kg/m^3,，黏度为 1.0 mPa·s 至 1390.0 mPa·s，释放高度最高为 1.0 m。环境压力在大气压与 25 kPa 之间变化。结果表明，液滴速度随液滴直径、液体密度、释放高度和环境压力降低而增大，但受黏度影响很小。本文提出了一种考虑空气动力阻力的简单动力学模型。该模型采用经验公式确定瞬时阻力系数，可预测速度；在本研究所用参数范围内，预测结果与实验数据吻合良好。该模型为液滴撞击研究的设计提供了有价值的工具。

1. 引言

液滴在自然界和各种应用中随处可见。例如，降雨[1-3]、打印[4-6]、燃烧[7-10]、冷却[11, 12], 涂层[13, 14], 气溶胶形成[15], 病毒传播[16-19]、农药递送[11],萃取[20] 和增材制造[21-23]。通常，液滴以特定速度撞击目标，而该速度决定了撞击结果，即飞溅 [24-26]、铺展 [27, 28]或穿透 [29-31]。目前尚无通用理论方法能够确定液滴在撞击前加速过程中的撞击速度。因此，在各种应用中，速度的确定依赖于实验，例如液滴撞击实验研究[25, 30, 32-34]、病毒传播[17, 18], 打印[5, 6], ；这限制了对液滴撞击结果的预测能力，例如难以确定安全的社交距离。液滴的终端速度已为人们所熟知，但加速过程中速度的变化仍有待详细研究。由于应用中的液滴撞击很少发生在加速过程完全结束之后，本文旨在提供一种实用的理论工具，用于确定液滴在加速不同阶段的速度。

液滴的加速过程是其重力、空气动力阻力和惯性相互作用的结果。空气动力阻力表示为$F_d = 1/8\ \rho_g V^2 C_d \pi D^2$ [35] 其中，C_d 是阻力系数，ρ_g 是空气密度，V是液滴速度，D是液滴直径。液滴速度较小时，F_d 主要由摩擦[36]决定。随着速度增加，空气动力（压力）阻力会以复杂的方式增大，导致难以从理论上预测液滴速度，尤其是在压力变化时[37-40]。

如果 C_d 能够准确确定[43]，那么根据牛顿第二定律建立模型来确定液滴速度[41, 42] 就很简单。对于球形物体，当Re's[44]足够小时，通常可以接受近似值C.5；随着Re增加，偏差也会增大[45]。当雷诺数$Re = \rho_g VD/\mu_g < 0.1$非常低时，可以使用斯托克斯定律[46, 47]确定C_d 。其中，μ_g 是空气黏度。当Re较高时，由于液滴上游侧与下游侧之间压力场不对称，Re会强烈影响C_d ；这种关系通常通过实验确定[48]。针对广泛的Re's[45, 48-61] ，研究者提出了各种经验公式和半经验公式。然而，目前仍不清楚哪种公式最能准确预测加速液滴的速度。对于尺寸大于毛细长度的液滴，还会出现其他复杂因素，因为形状 变形会影响C_d[62]。

在此，我们通过实验测定了液滴撞击前瞬间的速度与其释放高度的关系，

以及直径、液体密度、黏度和环境气压的影响。我们利用瞬时C_d提出了一个用于预测该速度的简单模型。通过与实验结果进行比较，验证了该模型。结果表明，采用恰当确定的 C_d 可高度准确地预测液滴速度，为在液滴撞击应用中感兴趣的各种条件下确定液滴速度提供了实用的理论工具。

2. 实验

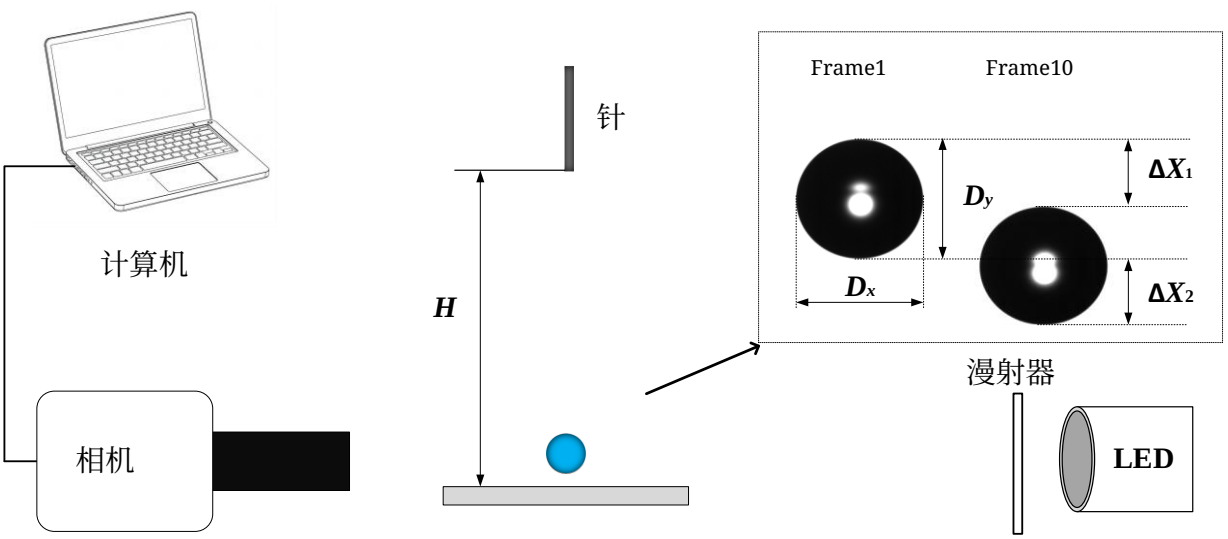


图1。 实验装置示意图。 H为释放高度。插图展示了用于确定液滴速度和直径的过程。D_x 和D_y 分别为水平和垂直液滴直径。ΔX_1 和ΔX_2 分别为撞击前第十帧与第一帧图像之间液滴上边缘和下边缘的位移。

如图1所示，直径为0.7至4.0 mm的液滴通过以下方式生成：使用注射泵驱动的平头针（当D > 1.8 mm时，采用滴落法），或使用自制DOD装置[30]（当D < 1.8 mm时）。压电陶瓷蜂鸣器驱动DOD装置，可生成直径为0.7至1.5 mm的液滴；详细信息见[30]。实验使用去离子水、乙醇和甘油，其性质汇总于表I。

表 I. 实验液体的物理性质（T = 23±1°C）

液体	ρ (kg/m^3)	σ (mNm^{-1})	μ (mPa s)
水	998.7	72.9	1.00
乙醇	791.0	22.9	1.19
甘油	1261.5	63.3	1390.00

对于在环境压力下进行的实验，释放高度 H 的调整范围为 0.1 至 1.0 m；对于在减压条件下进行的实验，调整范围为 0.1 至 0.78 m。透明真空室将压力控制在 10-101 kPa[25, 39]。

使用 Photron Nova S12 高速摄像机以 20,000 帧/秒的速率和 12 的空间分辨率记录液滴运动和直径。4 μ米/像素。使用发光二极管和漫射器提供照明。 表 II 中列出的每组条件均重复进行了三次实验。

表 II. 实验条件组 1：H (m) = 0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.8;1.0; 组 2：H (m) = 0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.78

编号	D （毫米）	液体	P (千帕)	set
1	0.70	水	101	1
2	0.93	水	101	1
3	1.08	水	101	1
4	1.50	水	101	1
5	2.30	水	101	1
6	2.74	水	101	1
7	3.40	水	101	1
8	4.00	水	101	1
9	2.30	乙醇	101	1
10	2.30	甘油	101	1
11	1.84	乙醇	25/50/75	2
12	2.30	水	25/50/75	2
13	2.74	水	25/50/75	2
14	4.00	水	25/50/75	2

液滴直径计算为[36, 55, 56]

$$D=(D_x^2 D_y)^{(1/3)} \tag{1}$$

其中 D_x 和 D_y 分别表示水平和垂直液滴直径；参见图1中的插图。所有报告的直径值均为多次实验所得的平均值。液滴速度按以下公式计算：

$$V=\frac{\Delta X}{\Delta T} \tag{2}$$

其中，$\Delta X=(\Delta X_1+\Delta X_2)/2$, ΔX_1 和 ΔX_2 分别表示液滴上边缘和下边缘在撞击前第 1 帧和第 10 帧之间的位移（液滴在第 11 帧撞击板，见图 1 插图），ΔT = 0.0005s 是液滴在这些帧之间移动所需的时间。此处报告的速度是相同条件下三次实验结果的平均值。

3. 确定液滴速度的理论或经验方法

液滴的加速度由其重力、惯性和空气动力阻力共同决定。球形液滴的重力为 $G=4/3\pi(D/2)^3\rho g$, 其中，g 表示重力加速度，ρ 表示液体密度。空气动力阻力为 $F_d=1/2\pi\,\rho_g C_d (D/2)^2 V^2$, ，其中 ρ_g 表示空气密度。液滴的加速度为

$$\frac{dV}{dT}=\frac{(G-F_d)}{4/3\pi(D/2)^3\rho}=g-\frac{(3C_d\rho_g V^2)}{4D\rho} \tag{3}$$

其中 T 是从液滴释放时刻开始测量的时间，而液滴速度可以通过使用 ng

$$V=\frac{dH}{dT} \tag{4}$$

在式（3）中，C_d 是唯一未确定的参数。忽略阻力后，结果为 $C_d=0$ 和 $V=\sqrt{2gH}$ 它们给出了环境压力极低时的极限值。

一般而言，C_d 不可忽略，其值由经验公式给出 [45, 48, 55]

$$C_d=\frac{24}{Re}(1+k(Re)) \tag{5}$$

其中，$k(R_e)$ 是一个取决于 Re 的修正系数，通过实验确定，通常采用球形刚性模型进行风洞实验；这类实验未考虑液滴变形、振荡和内部动力学。

当 $Re < 1$ 时，满足斯托克斯定律[48]，，即 $k(Re) \approx 0$。随着 D 和/或 V 增大，压力效应会对阻力产生影响，因此通常通过实验确定关系 $k(Re)$。Fuchs[63] 提出了一个经验表达式

$$C_d = f_1(Re) = \frac{24}{Re}(1+0.158Re^{2/3}). \tag{6}$$

本研究采用这一关系确定液滴速度[44]，其中 C_d 的变化以图 2 中的洋红色实线表示。

Yang[64] 收集了光滑球体的 C_d 历史数据，并采用多基因遗传编程方法得到了关联式 (7)。基于该关联式的 C_d 预测结果以图 2 中的绿色虚线表示。

$$\begin{cases} C_d = f_2(Re) = R(Re) + err(Re), \\ R(Re) = \dfrac{24}{Re}\left(1+\dfrac{3/16Re}{1+(19/240Re)/(1+1/122Re)}\right), \\ err(Re) = \dfrac{8}{1000}\dfrac{ln[(1+Re)/21000][ln((1+Re)/254)]^2}{1+Re/7000}. \end{cases} \tag{7}$$

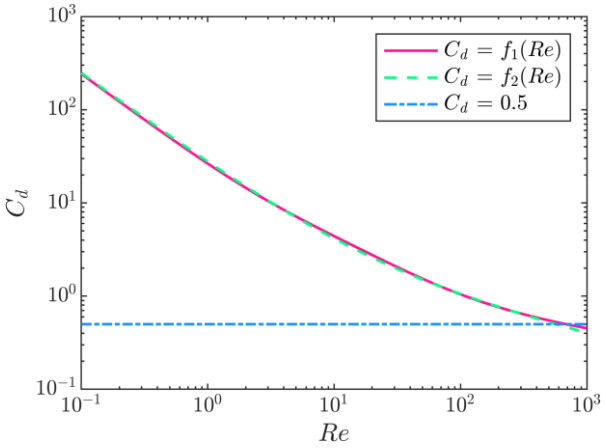


图 2. 由式 (6)（洋红色实线）和式 (7)（绿色虚线）确定的阻力系数 C_d 随 Re 的变化。蓝色点划线表示参考值 C_d =0.5。

编写了 SCILAB 程序，对方程 (3) 和 (4) 进行数值求解，其中 C_d 要么如式 (6) 或 (7) 所述随速度变化，要么取为 $C_d = 0.5$。该程序计算瞬时 C_d，并在初始条件为 $V = 0.0$、$H = 0.0$ 和 $T = 0.0$，时间步长为 0.001 秒，且指定 H 的特定值作为终止条件的情况下，得到 H 的函数 V。

先前关于液滴撞击的研究采用了另一种经验表达式（8）[65-69]，根据液滴的终端速度确定特定 H 值对应的液滴速度

$$V = V_T[1-\exp(\frac{-2gH}{V_T^2})]^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

whe其中 V_T 是液滴直径的函数，可使用经验表达式[66, 7]确定 [0]：

$$V_T = 9.65-10.3\exp(-600D) \tag{9}$$

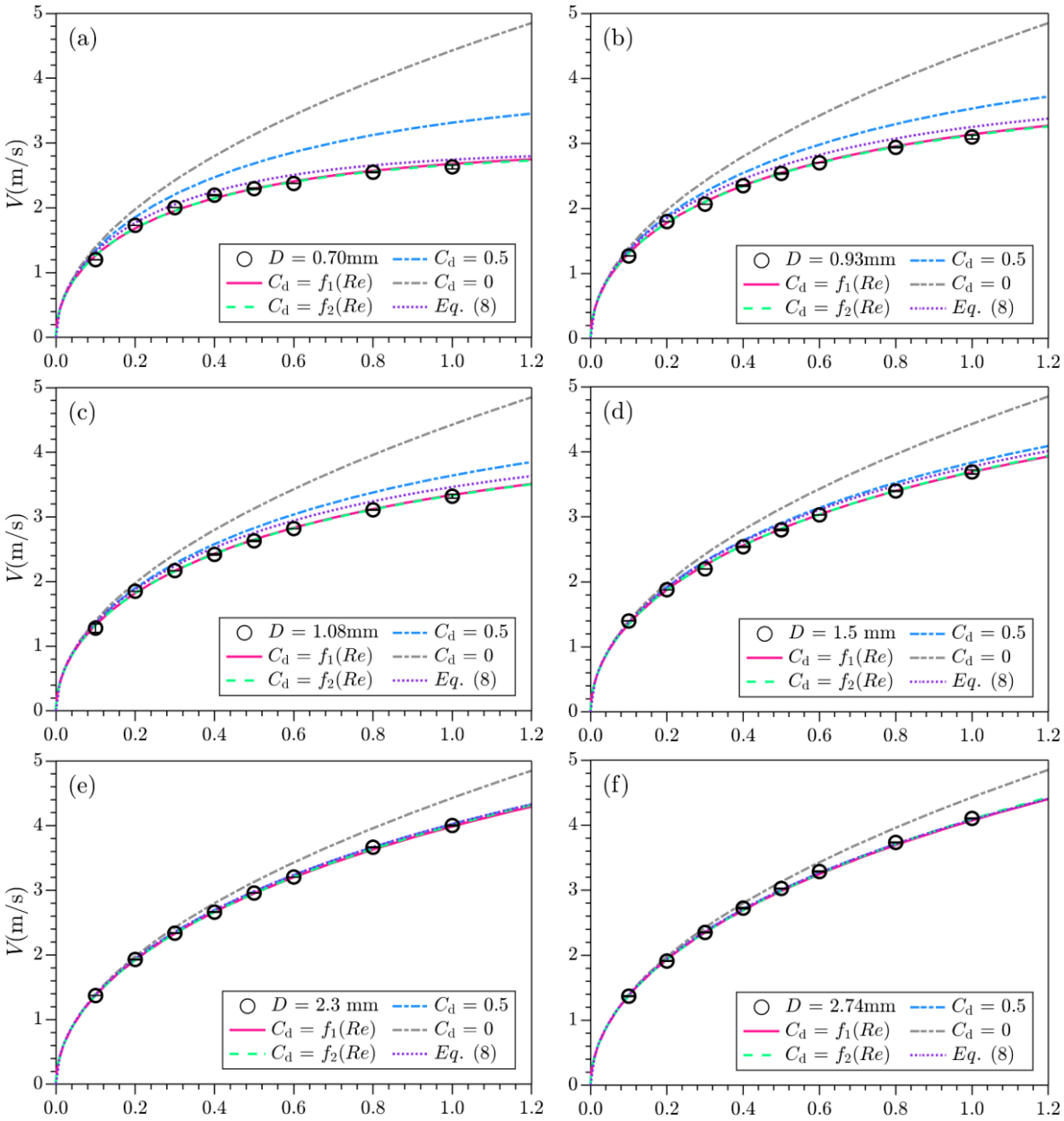
基于五种模型的预测结果，即$C_d = f_1(R_e)$、$f_2(R_e)$、0、0.5，以及方程（8）和（9）的组合，均被

与实验结果进行比较，以确定最准确的模型。

4. 结果

4.1 在环境压力下

图3展示了环境压力下，直径为 (a) D = 0.70mm、(b) D =0.93mm、(c) D = 1.08mm、(d) D = 1.5mm、(e) D = 2.3mm、(f) D = 2.74mm、(g) D = 3.4mm、(h) D = 4.0mm 的水滴，其速度V随释放高度H的变化。所有直径的液滴，其速度均随H增大而增加。在相同H下，液滴越大，速度越高。随着 H增加，这一趋势愈发明显，表明随着H或V增大，小液滴的加速度下降得更快。



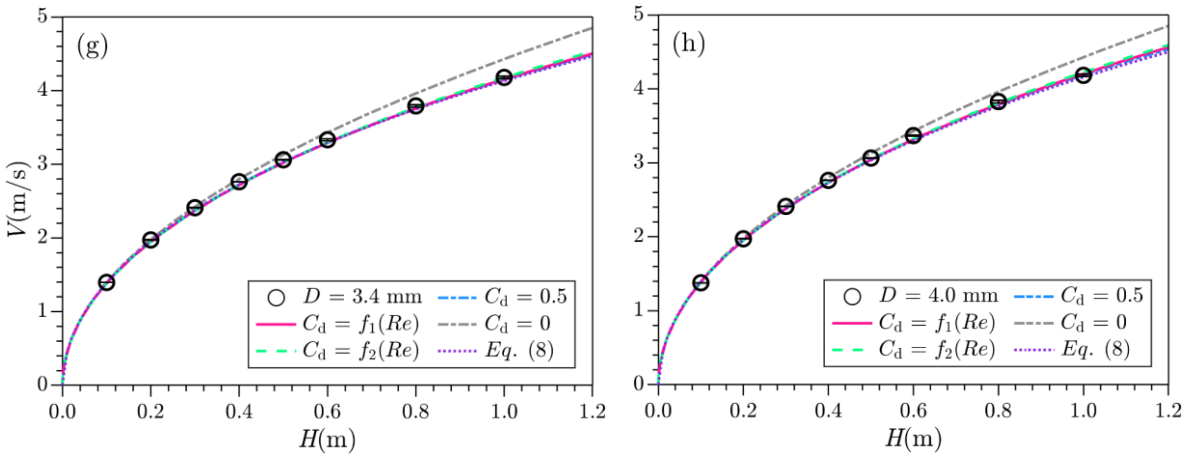


图 3。 水滴直径分别为 (a) D = 0.70mm、(b) D = 0.93mm、(c) D = 1.08mm、(d) D = 1.50mm、(e) D = 2.30mm、(f) D = 2.74mm、(g) D = 3.40mm 和 (h) D = 4.00mm 时，V 随 H 的变化。圆形标记表示实验数据点。误差棒表示标准差。洋红色实线、绿色虚线、蓝色线和灰色点划线分别表示使用方程（6）和（7）确定 C_d 、C_d =0.5 和 C_d =0 时理论确定的速度。紫色点线表示使用方程（8）和（9）确定的速度。

图3中的曲线展示了使用上述五种模型计算得到的理论下落速度随H的变化。洋红色实线和绿色虚线分别表示通过数值求解方程 (3) 和 (4)，并使用由方程 (6) 和 (7) 分别确定的瞬时C_d 得到的速度。无论液滴直径如何，两者都与实验结果吻合良好。灰色点划线表示使用C_d = 0（即忽略空气阻力）预测的速度。与实验结果比较可见，空气阻力导致的下落速度降低，对较小液滴和较高释放高度的影响更为显著。蓝色点划线表示使用C_d = 0.5确定的速度。对于较大的液滴，即D= 2.3mm、2.74mm、3.4mm 和 4.0mm，其预测结果与使用方程 (6) 和 (7) 得到的结果相近。基于C_d = 0.5 的预测结果与实验结果之间的偏差，随着液滴直径减小而增大，这表明C_d = 0.5 仅在有限的液滴直径范围内（即 2.3mm < D < 4.0mm）能给出良好结果。紫色点线表示使用方程 (8) 和 (9) 预测的速度；这些预测结果介于使用C_d = 0 和 0.5 得到的结果之间，但准确度不如使用方程 (6) 和 (7) 所述的瞬时 C_d预测的结果，尤其是对四个较小液滴而言。五种方法所得结果均与最低释放高度H =0.1m（即液滴速度最小的情况）下的实验结果吻合良好，表明当H较小时可以忽略空气阻力，且 $V = \sqrt{2gH}$ 能够较准确地预测速度[36]。对于D = 3.4mm 和 4.0mm 的较大液滴，即使H为 = 0.6 m， $V = \sqrt{2gH}$ 所得速度也与实验结果较为吻合，这表明使用 $V = \sqrt{2gH}$ 预测从H < 0.6m 处释放的大液滴速度是合理的[44]。

图4展示了释放高度H分别为0.8 m（a）和1.0 m（b）时，水滴速度V随液滴直径D的变化。这直观地支持了上述结论：在H相同的情况下，V会随着D的增大而增大，对于D < 2.3 mm 的较小液滴尤其如此。基于C_d 、由式（6）和式（7）确定的预测结果，与本研究所用所有液滴直径下的实验测量值吻合最好；基于式（8）和式（9）的预测结果也与实验结果较为吻合。采用C_d = 0.5 的模型在液滴直径范围为 2.3 mm < D < 4.0 mm 时能得到较好的结果，但误差会随着D减小而增大。对于较高的H's（0.8 m 和 1.0 m），采用C_d = 0 的方法无法给出合理的预测结果，尤其是对于较小的液滴。

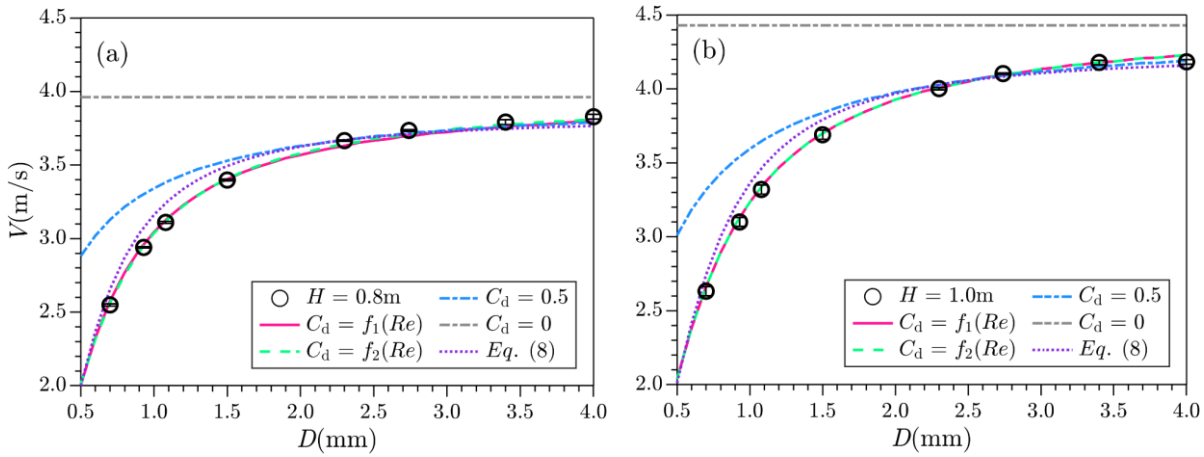


图 4。 在不同 H 下，速度 V 随 D 的变化：(a) 0.8 m，(b) 1.0 m。符号和线条与图 3 相同。

图5展示了释放高度H变化时，直径D = 2.30 mm 的乙醇液滴（a）和甘油液滴（b）的V变化。实验测得的乙醇和甘油液滴V变化趋势与水滴相同。基于式（3）和式（4）的数值解、并采用不同瞬时C_d's（即0.5，分别由式（6）或式（7）确定）的理论预测结果考虑了液滴密度，因此能够准确预测由不同液体构成的液滴。采用式（8）和式（9）时，无论液体密度如何，所得速度都相同；这些速度高于乙醇液滴的实验测量值，但低于甘油液滴的实验测量值。

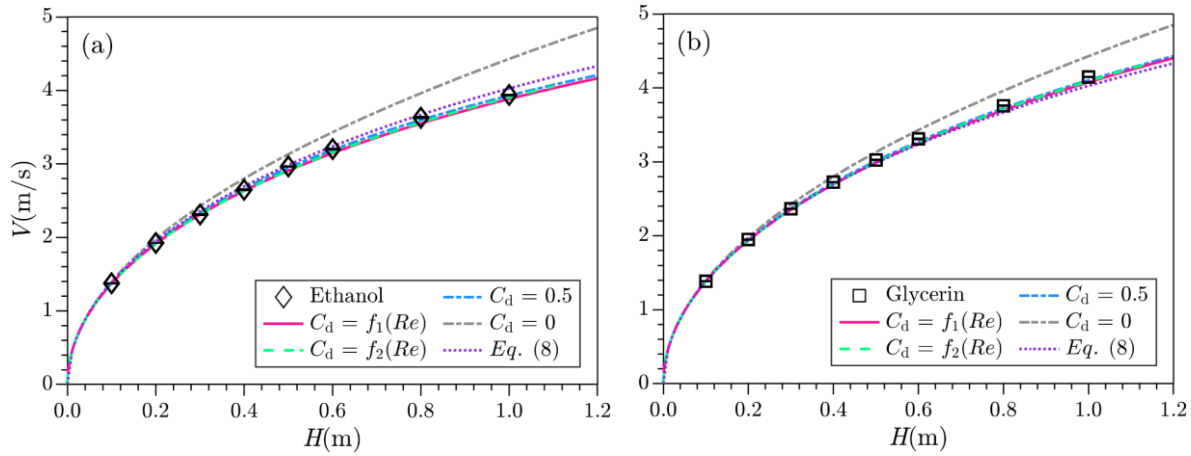


图 5。乙醇 (a) 和甘油 (b) 液滴的速度 V 随释放高度 H 的变化，D 为 = 2.30mm。菱形标记表示乙醇的实验数据点，方形标记表示甘油的实验数据点。误差棒表示标准差。线条与图 3 相同。

图6展示了液滴直径V在液体密度ρ 变化时的变化情况：(a) H = 0.8 m，(b) 1.0 m，液滴的D为= 2.30mm。菱形标记（乙醇）、圆形标记（水）和方形标记（甘油）表示实验数据点。曲线表示理论预测结果。结果表明，对于相同的H，随着ρ 增加，V也会增加，这是因为重力的增幅大于空气阻力F_d的增幅。基于前三种模型的理论预测与这一趋势吻合良好，但基于公式（8）和（9）的预测对密度变化不敏感，进一步说明了这些模型的局限性。

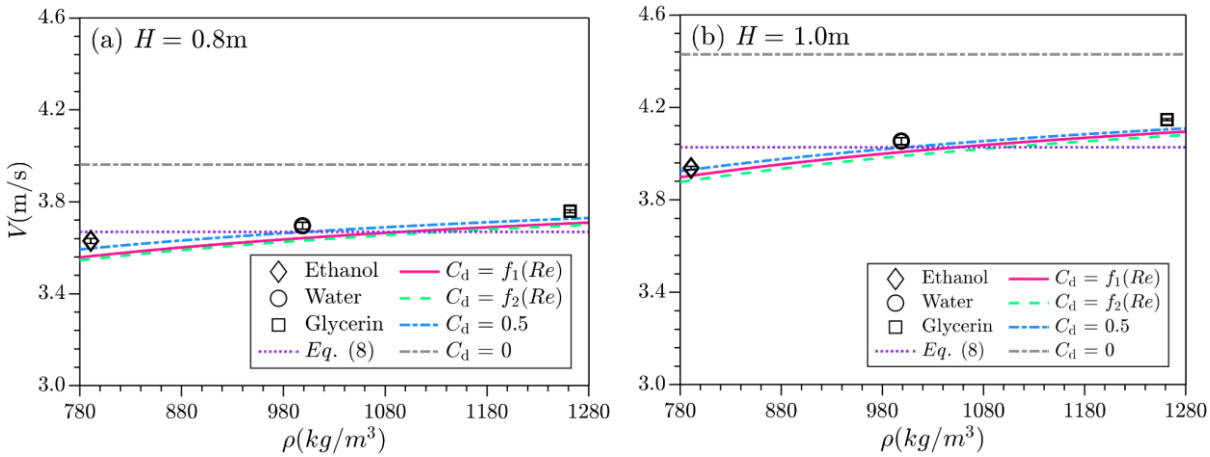


图 6。液滴密度 ρ 变化时，H 分别为 (a) 0.8 m 和 (b) 1.0 m、D = 2.30 mm 时速度 V 的变化。乙醇、水和甘油的结果分别用菱形标记、圆形标记和方形标记表示。误差棒表示标准差。曲线与图 3 中相同。

4.2 减压条件下

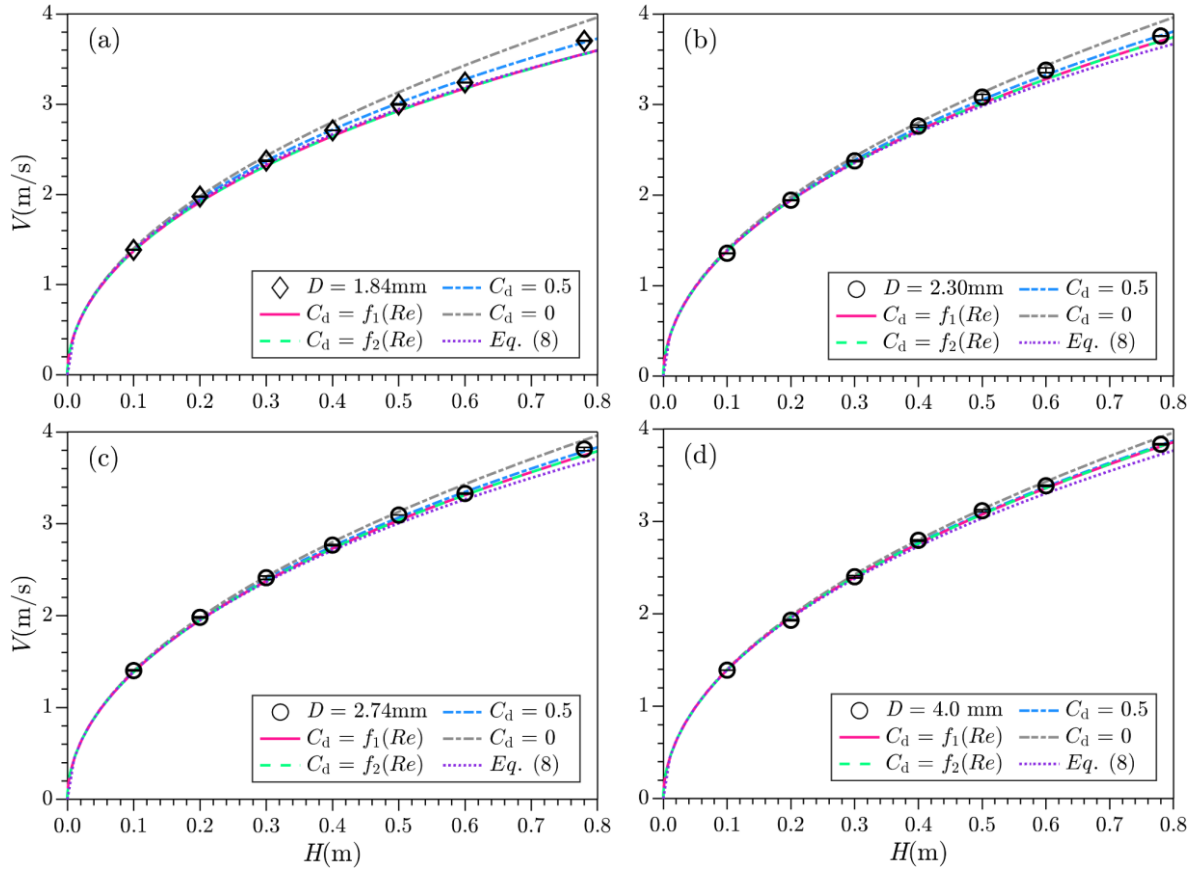


图 7。 对于 (a) 直径 D = 1.84mm 的乙醇液滴、(b) 直径 D = 2.3 mm 的水滴、(c) D = 2.74mm 的液滴和 (d) D = 4.0 mm 的液滴，在 P = 50 kPa 下，速度 V 随 H 的变化。菱形标记和圆形标记分别表示乙醇和水的实验数据点。误差棒表示标准差。曲线说明见图 3 的图注。

图7展示了在减压P为= 50 kPa时，液滴速度V随H的变化：(a) 直径D为= 1.84mm的乙醇液滴，(b) 直径D为=2.30mm的水滴，(c) 直径D为= 2.74mm的液滴，以及(d) 直径D为= 4.00mm的液滴。由于在减压条件下DOD无法工作，因此无法对更小的液滴进行实验，因为会形成

溶解空气形成的气泡。与环境压力下的结果相比，结果更接近基于$C_d = 0$（灰色点划线）的预测结果，这表明减压会降低空气阻力。为考虑气压的影响，前三种模型使用理想气体状态方程确定空气密度，所得预测结果与实验结果吻合良好。基于公式（8）和（9）的预测结果保持不变，因为这些关系无法考虑气压变化。

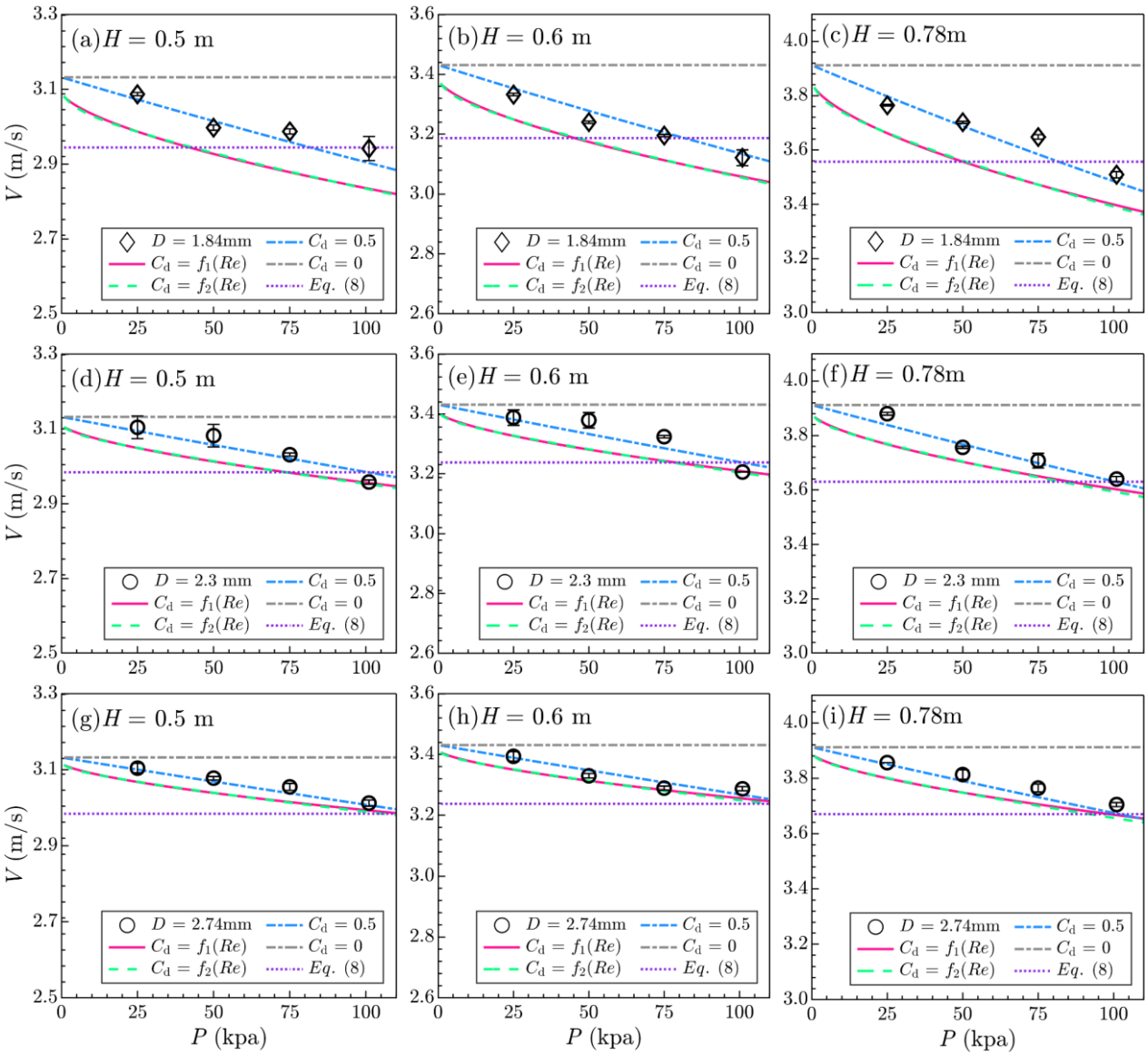


图 8。对于直径为V的液滴，速度随气压P 的变化：乙醇液滴的D = 1.84mm，H= 0.5m (a)、0.6m (b) 和 0.78m (c)；水滴的D = 2.3mm，H = 0.5m (d)、0.6m (e) 和 0.78m (f)；以及水滴的D = 2.74mm，H = 0.5m (g)、0.6m (h) 和 0.78m (i)。菱形标记和圆形标记分别表示乙醇和水的实验数据点。误差棒表示标准差。曲线含义见图 3 的图注。

图 8 展示了乙醇液滴速度 V 随空气气压 P 变化的情况：液滴直径 D 为 = 1.84 mm、分别从 (a) H = 0.5m、(b) H = 0.6m 和 (c) H = 0.78m 处释放；水滴直径 D 为 = 2.3 mm、分别从 (d) H = 0.5m、(e) H = 0.6m 和 (f) H = 0.78m 处释放；水滴直径 D 为 = 2.74 mm、分别从 (g) H = 0.5m、(h) H = 0.6m 和 (i) H = 0.78m 处释放。对于不同的 H 和 D，随着 P 降低，V 几乎线性增大；H 越大、D 越小，这种增幅越明显，表明这两种情况下空气阻力更强。读者

可能会注意到，对于直径 D 为 = 1.84mm、从 H = 0.5m 处释放的乙醇液滴，V 从 2.94 m/s 增至 3.09 m/s（图 8 (a)）；而对于从 H = 0.78m 处释放的液滴，速度从 3.51 m/s 增至 3.76 m/s（图 8 (c)）。对于直径 D 为 = 2.30mm 、从 H = 0.5m 处释放的水滴，V 从 2.96 m/s 增至 3.10 m/s（图 8 (d)）；而对于直径 D 为 = 2.74mm 的水滴，速度从 3.01 m/s 增至 3.10 m/s（图 8 (g)）。

使用$C_d = 0$ 和方程（8）与（9）得到的预测结果不受气压影响，这表明它们无法考虑气压变化。基于方程（6）和（7）的预测结果在图8中从P = 1 kPa开始，因为连续介质模型不适用于稀薄气体（$P \to 0$）。前三种模型得出的预测结果与实验结果较为吻合，表明它们具有广泛的适用性。

5. 结论

通过实验测定了不同液滴直径、液体密度、释放高度和气压条件下液滴撞击前瞬间的速度。将现有的液滴速度预测关联式与实验结果进行了比较。结果表明，在本研究采用的参数范围内，利用两种经验关联式所提供的阻力系数瞬时值的动力学模型，其预测结果与所有实验结果均吻合良好，可为确定撞击研究中使用的液滴速度提供有价值的工具。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12072032）、国家重点研发计划（项目编号：2018YFF0300804）以及111计划（项目编号：B16003）的资助。

*hjgizq@bit.edu.cn

参考文献

1. D. Soto, A. B. De Lariviere, X. Boutillon, C. Clanet, 和 D. Quéré, 《降雨撞击力》, 《软物质》**10**, 4929 (2014)。2. X. Cheng, T.-P. Sun, 和 L. Gordillo, 《液滴撞击动力学：撞击力与应力分布》, 《流体力学年度评论》**54**, 57 (2022)。3. S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, 和 K. Takehara, 《液滴与气泡的高速成像》, 《流体力学年度评论》**40**, 257 (2008)。4. H. Abdolmaleki, P. Kidmose, 和 S. Agarwala, 《用于柔性物理传感器的功能性墨水打印液滴技术》, 《先进材料》**33**, 2006792 (2021)。5. D. B. van Dam, 和 C. L. Clerc, 《喷墨打印液滴撞击固体基底的实验研究》, 《流体物理学》**16**, 3403 (2004)。6. D. Lohse, 《喷墨打印中的基础流体动力学挑战》, 《流体力学年度评论》**54**, 349 (2022)。7. A. Williams, 《液体燃料液滴的燃烧：综述》, Combust. Flame. **21**, 1 (1973)。8. C. Josserand, 和 S. T. Thoroddsen, 《液滴撞击固体表面》, 《流体力学年度评论》**48**, 365 (2016)。9. D. Quéré, 《莱顿弗罗斯特动力学》, 《流体力学年度评论》**45**, 197 (2013)。10. G. Liang, 和 I. Mudawar, 《液滴撞击热壁的综述》, Int. J. Heat Mass Transfer. **106**, 103 (2017)。11. A. L. Yarin, 《液滴撞击动力学：飞溅、铺展、回缩、反弹……》, 《流体力学年度评论》**38**, 159 (2006)。12. W. Jia, 和 H. H. Qiu, 《喷雾冷却中液滴动力学与传热的实验研究》, Exp. Therm Fluid Sci. **27**, 829 (2003)。13. S. Ren, S. Wang, Z. Dong, J. Chen, 和 L. Li, 《均匀直流电场中超疏水涂层上液滴的动态行为与自清洁特性》, Colloids Surf. A Physicochem. Eng. Aspect. **626**, 127056

(2021)。14. J. Chen, J. Chen, L. Li, S. Wang, 和 Y. Xie, 《微纳结构超疏水涂层表面的液滴滚动角模型》, 《欧洲物理学杂志 E》**44**, 25 (2021)。15. P. Mirbod, E. A. Haffner, M. Bagheri, 和 J. E. Higham, 《牙科操作引发的气溶胶形成：对疾病向环境传播的启示》, 《皇家学会界面》**18**, 20200967 (2021)。16. L. Xu, S. Zong, J. Hao, 和 J. Floryan, 《液滴穿透倾斜网格》, 《流体物理学》**12**, 122105 (2022)。17. R. Mittal, R. Ni, 和 J.-H. Seo, 《COVID-19 的流动机理》, 《流体力学杂志》**894**, F2 (2020)。18. L. Bourouiba, 《疾病传播的流体动力学》, 《流体力学年度评论》**53**, 473 (2021)。19. M. Zhou, 和 J. Zou, 《呼吸道传染病传播中液滴的动力学概述》, 《流体物理学》**33**, 031301 (2021)。20. P. Mary, V. Studer, 和 P. Tabeling, 《微流控液滴液体–液体萃取》, 《分析化学》**80**, 2680 (2008)。21. L. E. Murr, 和 W. L. Johnson, 《三维金属液滴打印的发展与先进材料增材制造》, 《材料研究与技术杂志》**6**, 77 (2017)。22. S. Fathi, P. Dickens, 和 F. Fouchal, 《增材制造工艺中液滴列撞击运动表面的模式》, 《材料加工技术杂志》**210**, 550 (2010)。23. T. Colton, 和 N. B. Crane, 《液滴速度、间距和到达间隔时间对粘结剂喷射增材制造中线条形成与饱和的影响》, 《增材制造》**37**, 101711 (2021)。24. L. Xu, W. W. Zhang, 和 S. R. Nagel, 《液滴在干燥光滑表面上的飞溅》, 《物理评论快报》**94**, 184505 (2005)。25. J. Hao, J. Lu, L. Lee, Z. Wu, G. Hu, 和 J. M. Floryan, 《液滴在倾斜表面上的飞溅》, 《物理评论快报》**122**, 054501 (2019)。26. G. Riboux, 和 J. M. Gordillo, 《飞溅后喷射液滴的直径与速度》, 《流体力学杂志》**772**, 630 (2015)。27. Y. Cheng, E. Li, J. Wang, P. Yu, 和 Y. Sui, 《液滴在热基底上的快速铺展》, 《流体物理学》**33**, 092103 (2021)。28. Y. Song, Q. Wang, Y. Ying, Z. You, S. Wang, J. Chun, X. Ma, 和 R. Wen, 《超低接触角滞后的超滑固体亲水表面上的液滴铺展特性》, 《涂层》**12**, 755 (2022)。29. L. Xu, W. Ji, J. Lu, Y. Li, J. Hao, G. Hu, 和 J. M. Floryan, 《液滴撞击预湿网格》, 《物理评论：流体》**6**, L101602 (2021)。30. A. Abouei Mehrizi, S. Lin, L. Sun, 和 L. Chen, 《黏弹性液滴撞击超疏水网格时的惊人行为》, 《朗缪尔》**38**, 6106 (2022)。31. G. Vadlamudi, S. Thirumalaikumaran, D. Chakravortty, A. Saha, 和 S. Basu, 《咳嗽液滴喷雾穿透口罩并形成气溶胶：一种独特的感染传播途径》, 《流体物理学》**34**, 052108 (2022)。32. R. Payri, B. Tormos, F. J. Salvador, 和 L. Araneo, 《三种不同直径收敛喷嘴的喷雾液滴速度表征》, 《燃料》**87**, 3176 (2008)。33. A. R. Esmaeili, G. Meisoll, N. Mir, 和 R. Mohammadi, 《非离子表面活性剂溶液在非润湿涂层上的液滴撞击动力学》, 《胶体与界面科学杂志》**623**, 1039 (2022)。34. B. Gorin, D. Bonn, 和 H. Kellay, 《液滴撞击冷表面》, 《流体力学杂志》**944**, A23 (2022)。35. R. Clift, 和 W. H. Gauvin, 《气流中夹带颗粒的运动》, 《加拿大化学工程杂志》**49**, 439 (1971)。36. Z. Wu, J. Hao, J. Lu, L. Xu, G. Hu, 和 J. M. Floryan, 《小液滴在深液池上的反弹》, 《流体物理学》**32**, 012107 (2020)。37. Y. Cao, 和 M. Xin, 《过冷大液滴结冰现象的数值模拟：综述》, 《档案》。

《计算方法与工程》**27**, 1231 (2019). 38. S. Zhou, and L. Zhang, "关于负压救护车医疗舱气流优化与感染风险评估的研究," 可持续性. **14**, 4900 (2022). 39. J. Hao, J. Lu, Z. Zhang, Z. Wu, G. Hu, and J. M. Floryan, "非对称液滴飞溅," 《物理评论：流体》**.5**, 073603 (2020). 40. L. Xu, L. Barcos, and S. R. Nagel, "液体飞溅：表面粗糙度与周围气体的相互作用," 《物理评论E》. **76**, 066311 (2007). 41. G. D. Kinzer, and R. Gunn, "自由下落水滴的蒸发、温度与热弛豫时间," 《气象学杂志》 **8**, 71 (1951). 42. G. Lorenzini, "喷头液滴动力学的简化建模," 《生物系统工程》 **87**, 1 (2004). 43. K. Hayashi, and A. Tomiyama, "中等雷诺数下静止液体中气泡或液滴在垂直管道内上升的阻力关联式," 《化学工程科学》 **64**, 3019 (2009). 44. K. Range, and F. Feuillebois, "表面粗糙度对液滴撞击的影响," 《胶体与界面科学杂志》**.203**, 16 (1998). 45. K. Ceylan, A. Altunbaş, and G. Kelbaliyev, "一种用于估算牛顿流体绕刚性或可变形颗粒流动时阻力的新模型," 《粉体技术》 **119**, 250 (2001). 46. W. W. Rubey, "砾石、砂和粉砂颗粒的沉降速度," 《美国科学杂志》 **5**, 325 (1933). 47. F. Engelund, and E. Hansen, 冲积河流泥沙输运专著（丹麦技术出版社，哥本哈根，1967年）。48. G. Kelbaliyev, and K. Ceylan, "用于估算气泡或液滴阻力系数、形状变形和上升速度的新经验方程的推导," 《化学工程通讯》 **194**, 1623 (2007). 49. J. L. Buzzard, and R. M. Nedderman, "液滴在空气中加速运动时的阻力系数," 《化学工程科学》 **22**, 1577 (1967). 50. B. G. Cox, "关于将黏性流体排出管道," 《流体力学杂志》 **14**, 81 (2006). 51. R. M. Wellek, A. K. Agrawal, and A. H. P. Skelland, "液体介质中运动液滴的形状," 《美国化学工程师学会会刊》**.12**, 854 (1966). 52. J. R. Garratt, "海洋和大陆上方阻力系数综述," 《月刊天气评论》 **105**, 915 (1977). 53. M. Aminzadeh, A. Maleki, B. Firoozabadi, and H. Afshin, "关于牛顿和非牛顿液滴的运动," 《伊朗科学》 **19**, 1265 (2012). 54. Z.-G. Feng, and E. E. Michaelides, "中高雷诺数下黏性球体的阻力系数," 《流体工程杂志》 **123**, 841 (2001). 55. J. A. Mulholland, R. K. Srivastava, and J. O. L. Wendt, "非蒸发单分散流中液滴间距对阻力系数的影响," 《美国航空航天学会杂志》 **26**, 1231 (1988). 56. J. R. G. R. Clift, and M. E. Weber, 气泡、液滴与颗粒（学术出版社，纽约，1978年）。57. S. A. Morsi, and A. J. Alexander, "两相流系统中颗粒轨迹的研究," 《流体力学杂志》 **55**, 193 (2006). 58. R. Turton, and O. Levenspiel, "关于球体阻力关联式的简短说明," 《粉体技术》 **47**, 83 (1986). 59. P. K. Swamee, and C. S. P. Ojha, "非球形颗粒的阻力系数和沉降速度," 《水力工程杂志》**.117**, 660 (1991). 60. A. R. Khan, and J. F. Richardson, "实心球体在流体中的运动阻力," 《化学工程通讯》**.62**, 135 (2007). 61. W. R. A. Goossens, "刚性球体阻力系数经验关联式综述," 《粉体技术》 **352**, 350 (2019). 62. Y. Lin, and J. Palmore, "液滴变形和内部环流对阻力系数的影响," 《物理评论：流体》. **7**, (2022)。

63. N. A. Fuchs, R. Daisley, M. Fuchs, C. Davies, and M. Straumanis, "气溶胶力学," 《今日物理》. **18**, 73 (1965). 64. H. Yang, M. Fan, A. Liu, and L. Dong, "基于理论定律的球体阻力系数和沉降速度通用公式," 《国际采矿科学与技术杂志》 **25**, 219 (2015). 65. T. Kurniawan, P.-H. Tsai, S.-S. Chen, D. H. Frakes, C.-C. Chen, and A.-B. Wang, "提高液滴与液面相互作用实验质量和可靠性的实用建议," 《实验流体力学》. **63**, 8 (2022). 66. J. Saylor, and N. Grizzard, "液滴撞击产生涡旋的最佳液滴形状: 表面活性剂对液滴表面的影响," 《实验流体力学》. **36**, 783 (2004). 67. H. C. Pumphrey, and P. A. Elmore, "液滴撞击引起的气泡卷吸," 《流体力学杂志》 **220**, 539 (1990). 68. H. C. Pumphrey, L. A. Crum, and L. Bjo/Rno/, "单个液滴撞击和降雨产生的水下声," 《美国声学学会杂志》**.85**, 1518 (1989). 69. M. J. Thoraval, K. Takehara, T. G. Etoh, and S. T. Thoroddsen, "液滴撞击时气泡环的捕获," 《流体力学杂志》 **724**, 234 (2013). 70. D. Atlas, R. Srivastava, and R. S. Sekhon, "垂直入射降水的多普勒雷达特征," 《地球物理学评论》 **11**, 1 (1973).