色散关系（布洛赫簇）与费米曲面的解析与代数性质：已知与未知

PETER KUCHMENT

Abstract. 本文综述了关于数学物理周期方程及其谱表现形式的色散关系与费米曲面的解析性质，目前已知的结果和猜想。

arXiv:2304.01478v1 [math-ph] 4 Apr 2023

1. Introduction

这篇简短综述主要沿袭并拓展了作者在以下会议演讲中提出的纲要：“从绝缘体中学习：金属电导率研究的新趋势”，2021年8月在荷兰莱顿的洛伦兹中心举行；以及“谱理论中的代数几何”，2023年2月在布朗大学的 ICERM 举行。

数学物理中周期算子的色散关系与费米曲面，是凝聚态物理中最常见且重要的概念之一，尤其是在近年来广受关注的纳米材料（石墨烯、纳米管等）、光子晶体理论和拓扑绝缘体领域。本文尝试综述它们的基本解析性质、与相应算子之谱的关系、物理意义，以及一些相关结果和猜想。

鉴于本文读者可能来自不同的数学家和物理学家群体，作者谨先致歉：文中有些讨论对部分读者而言或许显而易见，但对其他读者未必如此。因此，对于尚未接触过色散关系的数学家，我们先从常系数偏微分方程/算子（PDE）的类比入手。随后转向真正的周期算子，并介绍相应的定义。之后，我们开始讨论这些代数簇的解析性质，以及它们对于解的性质和谱所起的作用。

标题中的“代数的”一词是有依据的：在离散情形（例如常用的紧束缚近似）中，所产生的解析几何问题会转变为代数几何问题。这当然是一种“改进”，因为人们可以运用强有力的代数几何结果，而这些结果有时在解析情形中并不适用。另一方面，离散（图）情形有时会带来令人意外的现象，而这些现象在

日期：2023年4月5日。2010年 数学主题分类。 81Q10；81Q35；47F10；47N50；32C81。关键词和短语。 周期算子、谱、色散关系、布洛赫簇、费米面。P.K.感谢美国国家科学基金会 DMS-2007408 项目资助。

连续情形中不可能出现，这是由于非平凡的图拓扑以及缺乏延拓唯一性。近年来，离散情形取得了显著进展。遗憾的是，此处不可能提供任何证明。因此，读者可参阅相关文献。综述 [52] 中收录了许多参考文献。不过，过去几年发生了许多新进展，我们会尽可能补充更多引文。一如既往，即便我们已尽最大努力，仍可能遗漏一些重要文献，作者谨先致歉。

2. Constant coefficient PDEs and Fourier transform

我们用 D 表示算子

$$D := \frac{1}{i}\nabla \tag{2.1}$$

在 $\mathbb{R}^d$ 中，其中 $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}$ 是标准梯度。任意 m 阶线性常系数算子 L 都可以写成关于 D 的多项式：

$$L(D) = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha,\ L = L(D) : u(x) \mapsto L(D)u(x). \tag{2.2}$$

这里，α 是一个多重指标，由对每个坐标分别微分的阶数组成。

经过傅里叶变换 $u(x) \mapsto \hat{u}(\xi)$ 后，有

$$L : \hat{u}(\xi) \mapsto L(\xi)\hat{u}(\xi), \tag{2.3}$$

其中多项式

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} \xi^\alpha \tag{2.4}$$

称为 L 的 **符号** 。这本质上是 **直积分解** 的最简单情形

$$L = \int\limits^{\oplus}_{\xi\in\mathbb{R}^d} L(\xi). \tag{2.5}$$

2.1. 常系数算子的“色散关系”和“费米面”。这里的引号反映了一个事实：在常系数情形下，没有人使用这些术语。不过，我们身处自由世界，将使用它们。

定义 2.1。

- $L(\xi)$ 的图像（在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ 中）

$$\mathcal{B} := \{(\xi, \lambda) \,|\, \lambda = L(\xi)\}, \tag{2.6}$$

即 t 符号的图像是**“色散关系”**，或称**“布洛赫簇”**。

- 等值面

$$\mathcal{F}_\lambda := \{\xi \,|\, L(\xi) = \lambda\} \tag{2.7}$$

是**“费米面”** 在“能级” λ处。

请注意，不仅使用 ξ 和 λ 的实数值，而且使用它们的复数值也很重要，无论是在常系数情形还是周期情形中。
以下陈述显然成立，因为这两个代数簇都是由多项式的零点集给出的：

引理 2.2. 布洛赫簇和费米簇都是代数的。

请注意，“费米”面 $\mathcal{F}_\lambda$ 恰好是符号 $L(\xi) - \lambda$)的零点集。它称为算子 $L(D) - \lambda$ 的**特征集**，并且已知它承载着关于该算子的许多“秘密”（例如参见 [42]）。

2.2. **常系数偏微分方程组**。设 $L(D)$ 是一个系统，即由线性常系数微分算子构成的矩阵。那么，符号 $L(\xi)$ 也是一个矩阵。因此，直接积分展开变为

$$L = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} L(\xi). \tag{2.8}$$

情况似乎与标量情形非常相似，只是使用矩阵值符号 $L(\xi)$ 的“图”可能会比较繁琐（尽管有时也有用）。因此，**舍弃部分信息**，只绘出它的谱 $\sigma(L(\xi))$。现在我们处理的是一个多值标量函数，因此得到以下定义：

定义 2.3.

- **“色散关系”**，或**“布洛赫簇”**（在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ **中）是**

$$\mathcal{B} := \{(\xi, \lambda) \,|\, \det(L(\xi) - \lambda I) = 0\},$$

即， $\mathcal{B}$ 是多值函数 $\xi \mapsto \sigma(L(\xi))$ 的图

- 能级 λ 处的**“费米面”**：

$$\mathcal{F}_\lambda := \{\xi \,|\, (\xi, \lambda) \in \mathcal{B}\}$$

两个代数簇的代数性依然成立，因为我们要寻找的是该多项式的零点集

$$D(\xi, \lambda) := \det\left(L(\xi) - \lambda I\right). \tag{2.9}$$

而现在我们是 c 为引入相应的周期算子定义而失去 .

3. Periodicity enters the fry

3.1. 周期群。 在常系数情形中，我们的出发点是使用傅里叶变换。这很自然，因为这类算子与通过平移作用于 $\mathbb{R}^d$ 的群 $\Gamma = \mathbb{R}^d$ 可交换。于是， $L(\xi)$ 是 L 在由函数 $e^{i\xi\cdot x}$ 生成的 $1D$ 空间上的限制，这正是 Γ 的任意不可约表示（**不可约表示**）的形式。这就是常见的按不可约表示进行的谱直接积分分解（例如参见 [14]）。

现在来看看周期情形下会发生什么。设 $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ 通过平移[1]（非传递地）作用于 $\mathbb{R}^d$。 Γ的不可约表示为 $e^{ik\cdot\gamma}$，其参数为**准（晶体）动量**

$$k \in \mathbb{R}^d(\text{ or } \mathbb{C}^d)\, mod\, \Gamma^*, \tag{3.1}$$

其中 $\Gamma^* := 2\pi\mathbb{Z}^d$ 是 $\Gamma = \mathbb{Z}^d$的**对偶晶格**。 Γ对应的特征空间 $\mathcal{H}_k$ 由如下形式的**布洛赫函数** 组成

$$v(x) = e^{ik\cdot x}p(x), \tag{3.2}$$

其中 p 是 Γ-周期的。
我们选取**基本域** W （**维格纳-赛茨原胞**）作为 Γ 在 $\mathbb{R}^d$上的作用域，并选取基本域 B （**布里渊区**）作为 Γ^*的作用域。Γ-周期函数可视为环面上的函数： $\mathbb{T} := \mathbb{R}^d_x/\Gamma$。类似地，$\Gamma^*$-周期函数可识别为“布里渊环面”上的函数： $\mathbb{T}^* := \mathbb{R}^d_k/\Gamma^*$。这些环面配备了从空间 $\mathbb{R}^2$ 下推得到的自然**平坦** 度量。我们将分别用 dx 和 dk 表示相应的归一化至体积为 1 的测度。

所有 Γ不变的线性偏微分算子都具有如下形式

$$L = L(x, D) = \sum a_\alpha(x)D^\alpha \tag{3.3}$$

其中函数 a_α 是 Γ周期函数。
若记 $L(k)$为算子 L ，其作用于来自 $\mathcal{H}_k$ 的函数，则有如下直积分展开

$$L = \int\limits^{\oplus}_{k\in T^*} L(k)dk \tag{3.4}$$

对于周期算子 $L = L(x,\ D)$， $L(k)$ 的一种方便表示如下：

引理 3.1。 $L(k) = L(x, D + k)$ 作用于环面上的函数 $T := \mathbb{R}^d/\Gamma$。

特别地，若 $L = -\Delta + V(x) = (D)^2 + V(x)$，则

$$L(k) = (\frac{1}{i}\nabla + k)^2 + V(x) = -\Delta + \frac{2}{i}k\cdot\nabla + k^2 + V(x),$$

[1]此时以及许多其他情形下，平移的余紧阿贝尔子群的具体选择并不重要。

作用于 Γ-周期函数（即 $\mathbb{T}$ 上的函数）。

注释 3.2。

- 与 L 相比， $L(k)$ 的优势在于它们作用于紧流形（环面）上；如果它们是椭圆的，其谱就是离散的。
- 由于准动量 k 与 Γ 的不可约表示之间的对应关系并非一一对应，因此通常方便引入**弗洛凯乘子**

$$z := e^{ik} := (e^{ik_1}, \dots, e^{ik_d}) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d. \tag{3.5}$$

如果 k 为实数，则 z 位于“布里渊环面” $\mathbb{T}^* := \mathbb{R}^d/\Gamma^*$。

可以观察到，在离散情形下，采用弗洛凯乘子而非准动量表示时，布洛赫簇和费米簇会变成代数簇。

注3.3。在继续讨论之前，读者应注意，在余紧作用于**离散非阿贝尔（=非交换）群**[2] Γ 这一（往往很重要的）情形中，不可约表示展开似乎并不太有用，因为不可约表示空间的结构十分复杂；特别是在阿贝尔情形中，还会用到非酉表示（对应于复准动量 k）。人们已经认识到，更合适的语言是群代数（这里不提供完整的参考文献，仅举一些例子 [38, 39, 66]）。

我们不讨论非阿贝尔情形 ，它是另一种截然不同的情况 ，这里。

4. The class of operators

下面我们准确描述所讨论的算子类别。主要假设如下（尽管有时我们需要放宽或加强这些假设）：

-

$$L = L(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{4.1}$$

其中系数 a_α 具有 Γ-周期性且光滑[3]

- 假设该算子是**椭圆的**，即其主符号

$$L_0(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{4.2}$$

对任意实的非零向量 ξ均不为零。

这是一个关键假设；若缺少这一假设，布洛赫簇和费米簇解析理论的整套工具与结果就会基本失效，或者必须进行重大修改

[2]例如，这一条件是允许恒定磁场存在所必需的。相应的**Zak 变换** 的磁平移群是非阿贝尔的（例如参见 [2, 93]）。[3]系数具有无穷阶可微性要求过高，但我们不会讨论系数所需的最弱条件。

。 [4]例如，这适用于时间周期波动方程或薛定谔型方程（关于相关讨论、应用和参考文献，参见 [22, 34, 50, 52, 80, 87,92, 94] 及其中的参考文献）。

- 通常假设该算子在 $L_2(\mathbb{R}^d)$中是自伴的，尽管一些基本事实（例如代数簇的解析性）并不依赖这一条件。
- 在某些结果中，需要要求该算子是二阶算子$m = 2$。事实上，由于唯一延拓性质可能缺失[50, 52, 75]，一些关键结论对于一般的高阶周期椭圆算子并不成立。周期离散情形或量子图情形 [52]也存在同样的问题。

- 数学物理中的其他一些矩阵算子，例如麦克斯韦算子或狄拉克算子，也很重要且受到研究（例如参见 [7, 8, 11–13, 51, 53, 68]），但本文不讨论这些算子。

我们的**典型示例 是**这里的薛定谔算子，其电势为实值周期函数 al

$$L = -\Delta + V(x). \tag{4.3}$$

5. And finally, Bloch and Fermi varieties!

定义 5.1. 布洛赫簇（色散关系）算子 L

$$\mathcal{B}_L := \{(k, \lambda) |\, \lambda \in \sigma(L(k))\}.$$

能级为 λ 时的**费米面**

$$\mathcal{F}_\lambda := \{k |\, \lambda \in \sigma(L(k))\}.$$

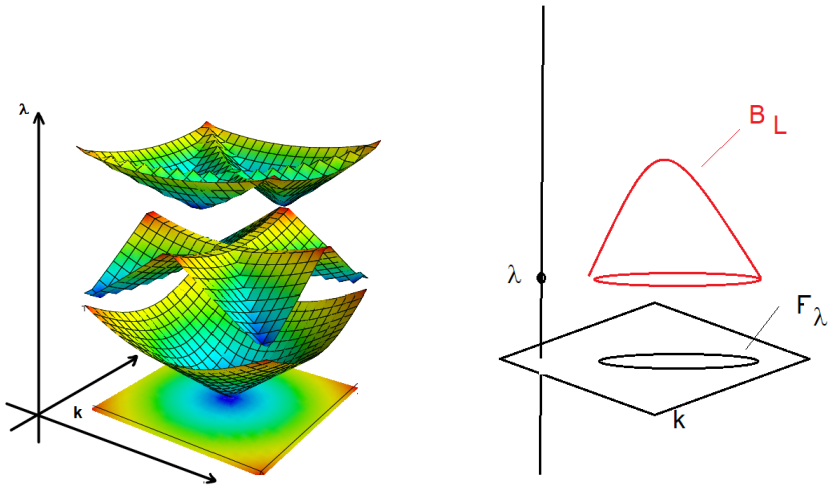


Figure 5.1. 布洛赫簇（左）和费米面（右）的示意图。

[4]在一定程度上可以处理亚椭圆情形，例如抛物型方程；但在这种情形下，问题会困难得多 [50]。

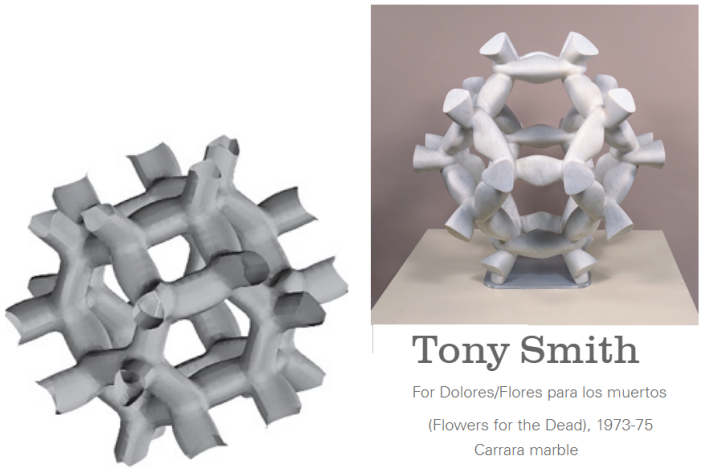


FIGURE 5.2. 铅的美丽费米面

注释 5.2。 读者应注意，上述布洛赫簇和费米簇的定义并未说明准动量 k 和特征值 λ 是否必须为实数。可以**允许它们为复数**，这没有问题，从而得到**复数版本**$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{d+1}$, $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathbb{C}^2$。

6. Analyticity of Bloch and Fermi varieties

我们已经看到，对于常系数方程及其系统，布洛赫簇和费米簇是“良好”的，即代数集（也就是说，它们是关于（k, λ）函数 $\det(L(\xi) - \lambda I)$ 的多项式的零点集）。如果在周期情形下也能有类似的描述就好了，比如“$\det(L(k) - \lambda I) = 0$。”然而，我们的算子 $L(k)$ 对每个 k 都是无界的。这时椭圆性便发挥了作用。算子 $L(k)$ 现在具有离散谱，但若直接尝试为它们定义某种“行列式”，则行不通。不过，我们可以使用所谓的**正则化行列式**（见 [17, 37, 50],，它们解决了这个难题，并使我们能够证明以下结果 [50, 52]:

定理 6.1。 存在一个整函数 $f(k, \lambda)$ 定义在 $\mathbb{C}^{d+1}$ 上，使得

$$\mathcal{B} = \{(k, \lambda) \in \mathbb{C}^{d+1} | \, f(k, \lambda) = 0\}, \tag{6.1}$$

$$\mathcal{F}_\lambda = \{k \in \mathbb{C}^d | \, f(k, \lambda) = 0\}, \tag{6.2}$$

$$|f(k, \lambda)| \leq C e^{C(|k|+|\lambda|)^r} \tag{6.3}$$

对于某些 $C > 0$ 和 $r \geq 1$。

我们与常系数情形的类比几乎已经实现，唯一的区别是，我们关注的代数簇恰好是解析的，而不是代数集。换言之，它们可以描述为整函数的零点集，而不是多项式的零点集。对于某些问题而言，这并没有太大区别；但代数集的一些有用性质在解析情形下确实无法保留。尤其是，代数集具有如下“几乎全有或几乎全无”的性质，这一点很有用：代数集在某一空间上的投影，要么包含于一个真代数子集（即“几乎全无”），要么包含该子集的补集（即“几乎全有”）。遗憾的是，整函数的零点集可能不具备这一性质。幸运的是，拥有类似 (6.3) 的估计有助于 $[19,62]$，也让我们看到了一些希望。

7. The spectrum

若算子 (4.1) 有下界且为自伴算子，则对于实数 k， $L(k)$ 的特征值可按非递减顺序标记[5]

$$\lambda_1(k) \le \lambda_2(k) \le \cdots \to \infty. \tag{7.1}$$

能带函数 **能带函数** $\lambda_j(k)$ 是连续且分段解析的，仅在相交时才失去解析性。

由于直积分解 (3.4)，有

$$\sigma(L) = \bigcup_{k\in B} \sigma(L(k)). \tag{7.2}$$

以下定理概述了关于周期椭圆算子之谱的众所周知的结果（例如，参见 $[76,$第 $4]$ 卷和 $[18,50,52,84]$）。

定理 7.1。

(1) 谱 $\sigma(L)$ 是实布洛赫簇 $\mathcal{B}_L$ 在谱轴（即 λ-轴）上的投影。(2) 谱由谱带 I_j组成，它们是能带函数 $\lambda_j(k)$ 的值域，因此是闭的有限区间。(3) 当 $j \to \infty$ 时， I_j 的两个端点都趋于无穷。(4) 在高于1维的空间中，谱带可能彼此重叠。(5) 谱带之间可能留有一些未覆盖的谱隙 。谱隙的端点（边缘）对应于色散关系 $\lambda(k)$的极值。

8. Bloch and Fermi varieties and spectrum

8.1. 谱的几何——能带与带隙。根据定理 7.1 的陈述 (1)，布洛赫簇（色散关系）决定了谱，并表明谱具有带隙结构。一个非常重要的问题是，谱隙是否

[5]当 k 为复数时，这种标记便会消失。

确实存在。例如，半导体和光子晶体的存在取决于这一性质 [1, 43, 51]。

谱通常是纯绝对连续的。至少，人们预期所有二阶椭圆周期算子都具有这一性质。奇异连续谱的缺失往往是周期性带来的一个相当平常的结论 [52], ，而且这一结论实际上适用范围更广——对于一类解析纤维化算子 [35], ，它同样成立，我们的直积分就属于这一类。纯点谱的存在（或者说不存在）则是另一回事，也就是束缚态的问题。

猜想 8.1。 任何具有足够“良好”系数的周期椭圆二阶算子，其谱都是绝对连续的，因此不存在束缚态。

这一结果在近半个世纪前就已针对薛定谔算子得到证明 **4.3** [88] （另见 [50, 52, 76]中的综述）。证明周期磁势存在时的这一结论要困难得多，历时很久，最终于 [86]中完成。二阶项中的可变系数无法用此前采用的调和分析工具处理。 [32], 通过施加一个看似无关的对称条件实现了这一点，但至今无人成功将其去除。

为什么要限制为二阶？原因是存在一些高阶（弹性类型）的周期椭圆算子，它们确实存在束缚态。这是因为缺乏较弱的延拓唯一性，因此存在紧支撑解（参见 [52]中的讨论）。文献 [27], 中的二阶算子示例强调了（弱）延拓唯一性原理[6] 的作用：其主项中的系数仅比保证延拓唯一性的条件低一个档次，而紧支撑解（因而也包括束缚态）确实会出现。图（离散图和量子图）众所周知缺乏延拓唯一性，因此可能存在束缚态。此外，在这种情况下，如果确实存在束缚态，相应的特征空间就由紧支撑解 [5, 49, 52, 60, 61]生成。如果这一结果能在连续情形下得到证明，那么仅凭延拓唯一性就能一举证明谱的绝对连续性。

这里的另一项佐证是以下结果 [50, 52]:

定理 8.2。 椭圆周期方程存在束缚态，意味着存在超指数衰减解 $u(x)$，即满足

$$|u(x)| \le Ce^{-C|x|^r} \tag{8.1}$$

对于某个 $r > 1$ （关于 r 的估计也可获得）。

猜想 8.3. 这类解的存在应当被某种无穷远处延拓唯一性所禁止，适用于二阶周期性（或更一般类型的）椭圆方程（至少在自伴情形下）

[6]这表明，在某个开集上为零的解必定恒等于零。

（即 ***Landis*** 问题）。因此，谱必定是绝对连续的。

作者所知，这方面唯一的结果见于 [33, 67]。这些结果仅适用于电势有界的薛定谔算子，并且还允许 r 达到 4/3（至少在非自伴情形下）。如今，Landis问题受到广泛关注，但迄今为止，这些结果都未能推动上述猜想的确立。

来自 [88] 的一个有趣且非常有用的观察（尽管其中并未以这样的措辞表述）如下：

定理 8.4. 能量为 λ 时存在一个束缚态（L_2-特征函数），等价于费米面 $\mathcal{F}_\lambda$ 是“平坦的”：

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathbb{C}^d_k. \tag{8.2}$$

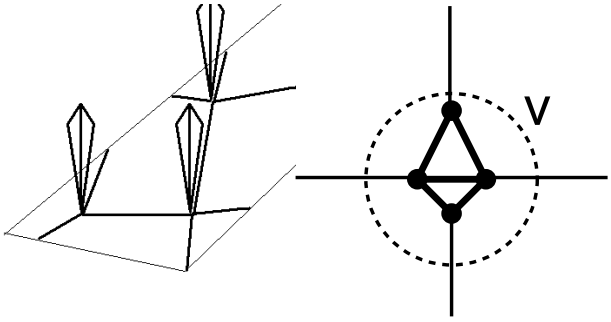
通过巧妙地选择虚部较大的准动量值 k_0，使得点 k_0 不属于 $\mathcal{F}_\lambda$，便可证明不存在束缚态。

8.2. 谱隙的存在与形成。 幸运的是，自然为我们提供了半导体，但光子谱隙的形成并非易事（无论在实验上还是理论上）。

有哪些技术可以用来产生谱隙？对于 schr¨odinger 算子，可以通过以下简单步骤在谱底部附近产生谱隙：在自由算子（拉普拉斯算子）上添加一个局域深势阱，就会在连续谱之下产生一个特征值。随后，将这一势阱以足够大的间距周期性重复，就会使该特征值展宽为一个很窄的谱带，从而仍然留下一个谱隙。这种方法不适用于麦克斯韦算子，因为无法移动谱底部。创建光子晶体所面临的挑战，正是这一问题。

另一种方法是在整个介质中周期性地布置高对比度夹杂物（这是上述方法的一种变体）。众所周知，这样可以在整个谱范围内产生谱隙（参见例如 [23–25,41,85,95]）。其思路是在介质中布置小型、相同且具有内部结构的谐振器，使得在其特征频率附近，传播受到抑制。这类谱隙通常称为**共振型**。这一思路至少可追溯至 [74],，但迄今为止，明确的实现仅见于图的情形 [81] 以及量子图 [5,16,69]。谱隙的打开通过“装饰图”实现：要么在每个图顶点上连接另一个图（“风筝图”）[81]，要么在每个顶点中嵌入一个内部结构（“蜘蛛图”）[16],，见图 8.1。从某种意义上说，蜘蛛形装饰看起来更实用，但它不一定能打开谱隙，因此更难处理[7]。

[7]将蜘蛛形装饰与用于生成扩展图的之字形积进行比较，很有意思 [77]。



ht!

FIGURE 8.1. “风筝图”（左）和“蜘蛛图”（右）装饰。

古老的 **贝特-索末菲猜想** （BSC） [6] 声称，在高于 1 维的情形下，谱隙的数量预期是有限的。经过一系列杰出数学家的长期研究，这一结论已在薛定谔算子的情形下得到证明 [71]，其中 ¨以及在 [73] 可以找到更多参考文献。

对于周期离散图，构造 BSC 的简单反例很容易（通过装饰）；但对于量子图的情形，该猜想仍未解决。

8.3. **谱隙边缘的位置**。 相当长一段时间以来，人们一直认为谱隙边缘只能出现在布里渊区中准动量的某些“对称”取值处。计算谱时，这一假设可以显著降低维数（但无法确定谱的稠密性）。在一维情形下，这一结论成立，且原因很简单。在高维情形下则没有这样的理由；事实上，这一结论已在 $[20, 40]$ 中被证伪。不过，也存在这一结论成立的情形 [3]。

8.4. **波包的行为**。 众所周知，对于位于色散关系某一点处的布洛赫波窄波包，其传播在一段时间内由一个常系数算子所支配，该算子的符号是色散关系在该点处的喷流（泰勒展开中的低次部分） $[1, 21]$ （一种准经典极限）。

有两种特别重要的情形。

8.4.1. 谱隙边缘。 第一种情形出现在谱隙的边缘，即色散关系 $k \mapsto \lambda$ 的极值点处。

猜想 8.5. 就椭圆周期算子（*elliptic periodic operator*）的参数而言，一般情况下，例如对于“几乎所有”周期势，谱隙边缘在 k 空间中是孤立且非退化的（即色散关系呈抛物线形状）。

该条件指出，在谱边缘附近，解的行为类似于自由（尽管具有各向异性）空间中的情形。这使得我们能够定义**有效质量** [1]。此外，该条件对于建立格林函数在谱隙边缘附近的渐近性质、刘维尔定理、安德森局域化及其他问题也很重要 $[45, 46, 52, 54–56]$。

人们预期这一猜想在连续情形下成立，但除了 [10, 28, 47] 之外，在证明方面几乎没有进展。在离散情形下，已知存在反例 [28]，也有一些情形下的各种正面结果 [15, 72]。

8.4.2. 狄拉克锥。 如今另一个非常流行的情形是色散关系中出现（稳定的）狄拉克锥（“二重简并点”）。
存在这样的锥意味着，在某段时间内，位于锥附近的波包表现得如同无质量费米子的狄拉克方程的解 [22]。著名的石墨烯的许多令人瞩目的性质都源于这些锥的存在 [44]。 [22], 证明了它们必然出现在蜂窝几何中；另见 [4]中优美的群论论证。

9. Am esoteric question: irreducibility

设 $Z \subset \mathbb{C}^n$是一个**解析（代数）簇**，即它在局部可表示为有限个解析（多项式）函数 f_j（z）的所有公共零点组成的集合。若一个集合可表示为两个严格更小的解析（代数）子集 Z_1，$Z_2 \subset Z$的并集，则称其为**可约**。可以设想这样的情形： f（z）具有非平凡的因式分解 f_1（z）f_2（z），可分解为两个解析（多项式）函数 f_j的乘积。若一个解析（代数）集合不可约，则称其为**不可约** 。不可约性的另一种表现是，其所有光滑点组成的集合是连通的。关于不可约性的另一种理解是，簇的任意一小块开区域都能唯一确定整个簇（通过解析延拓）。以下结果见 [48]:

定理 9.1。设 $L = -\Delta + V(x)$，其中 $V(x)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续周期势。那么， L 的布洛赫簇是不可约的。

This 这似乎是个深奥的问题。事实上并非如此。实际上，它意味着： at

(1) 不存在束缚态。也就是说， L 的谱是纯绝对连续的。(2) 布洛赫簇展现出惊人的刚性：能带函数的任意一个小片段都能确定色散关系。（不要指望能做到这一点！这是一个数值上极不稳定的过程。）

第一个结论的证明很简单。事实上，正如定理 8.4 所述，存在束缚态意味着存在一个平坦的费米面 $\mathcal{F}_\lambda$。这个分支表明，布洛赫簇可以分解为两个部分：一个是 $\mathcal{F}_\lambda \times \{\lambda\}$，另一个是布洛赫簇的其余部分。

人们相信下面的猜想成立，但它仍未得到证明（上述结果除外）：

猜想 9.2. 任意周期薛定谔算子 $-\Delta + V(x)$（甚至一般的二阶椭圆周期算子）的布洛赫簇都是不可约的。

I在离散情形下，这一猜想的若干特例已在 [36 中得到证明].
人们也曾针对费米曲面提出过类似的不可约性问题（针对所有或几乎所有能量值 λ）。

这个不可约性问题看起来也很冷僻。然而，正如 [57–59], 中所发现的，它是证明不存在**嵌入态**的关键，而这是一个在二维及更高维中长期悬而未决的问题。具体而言，当周期介质受到局域扰动时，一个长期以来备受关注的问题是：杂质特征值是否会出现在谱带内部，而不是谱隙中。这一点早在1D [78,79,79] 中便已得到证明（另见 [9,29,29,30,89–91]）。据作者所知，在 [57–59]中发现以下结果之前，高维情形一直没有进展：对于连续谱内部给定的 λ，若该点处的费米面 $\mathcal{F}_\lambda$ 不可约，则可阻止嵌入杂质特征值的出现。该文也给出了不可约性的例子。甚至在这些研究之前， $2D$ 平方晶格情形下费米面不可约性的条件已在 [36]中得到。近期的重要进展包括证明离散模型的不可约性、给出可约性的例子，以及构造相应的嵌入特征值出现实例，详见 [26, 31, 63–65, 70, 82, 83]。

10. Acknowledgments

作者感谢美国国家科学基金会数学科学部基金 # 2007408 的资助。作者也感谢许多同事富有成效的讨论与合作，其中包括但不限于 G. Berkolaiko、Ngoc Do、J. Fillman、L. Friedlander、W. Liu、B. Ong、R. Matos、S. Shipman、F. Sottile 和 J. Zhao。

References

[1] N. W Ashcroft 和 N. D. Mermin。《固体物理学》。Holt, Rinehart and Winston，纽约—伦敦，1976年。[2] L. Auslander 和 R. Tolimieri。《幂零流形上的阿贝尔调和分析、θ函数与函数代数》，Lecture Notes in Mathematics 第436卷。施普林格出版社，柏林，1975年。[3] G. Berkolaiko、Y. Canzani、G. Cox 和 J. Marzuola。周期图色散关系全局极值的局部检验。《纯粹与应用分析》，4(2):257–286，2022年。[4] G. Berkolaiko 和 A. Comech。石墨烯谱中的对称性与狄拉克点。《谱理论杂志》，8(3):1099–1147，2018年。[5] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment。《量子图导论》，数学调查与专著第186卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013年。[6] H. Bethe 和 A. Sommerfeld。金属电子理论。载于 H. Geiger 和 K. Scheel 编，《物理学手册》第24,2卷，第333–622页。Springer，1933年。这个近300页的章节后来以独立专著形式出版：《金属电子理论》（Springer，1967年）。[7] M. Sh. Birman 和 T. Suslina。磁导率为常数时定常周期麦克斯韦系统的平均化。《泛函分析及其应用》，41(2):3–23，111，2007年。[8] M. Sh. Birman 和 T. A. Suslina。关于具有磁势的周期薛定谔算子和狄拉克算子的谱的绝对连续性。载于《微分方程与数学物理（伯明翰，

AL，1999年），AMS/IP 高等数学研究第16卷，第41–49页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。[9] M. Born 和 K. Huang。晶格动力学理论。牛津物理科学经典文库。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，[1998]。1954年原版重印。[10] Y. Colin de Verdi`ere。关于一般范霍夫奇点。《法国数学会回忆录》（新系列），(46):99–110，1991年。全球分析与数学物理（里昂，1989年）。[11] L. Danilov。关于周期狄拉克算子的谱。《理论与数学物理》，124(1):3–17，2000年。[12] L. Danilov。关于广义二维周期狄拉克算子的谱中不存在特征值。《代数与分析》，17(3):47–80，2005年。[13] L. Danilov。关于三维周期磁狄拉克算子谱的绝对连续性。《积分方程与算子理论》，71(4):535–556，2011年。[14] J. Dixmier。《希尔伯特空间中的算子代数（冯·诺伊曼代数）》。科学丛书，第XXV分册。Gauthier-Villars，巴黎，1957年。[15] Ngoc Do、Peter Kuchment 和 Frank Sottile。离散周期算子色散关系的一般性质。《J. Math. Phys.》，61(10):103502，19，2020年。[16] Ngoc T. Do、P. Kuchment 和 B. Ong。量子图中的共振谱隙。载于《量子物理的泛函分析与算子理论》，EMS 会议报告系列，第213–222页。欧洲数学会，苏黎世，2017年。[17] N. Dunford 和 J. T. Schwartz。《线性算子》。第二部分。威利经典文库。John Wiley & Sons Inc.，纽约，1988年。谱理论。希尔伯特空间中的自伴算子，由 William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写；1963年原版重印，Wiley-Interscience 出版物。[18] M. S. P. Eastham。《周期微分方程的谱理论》。苏格兰学术出版社有限公司，伦敦，1973年。[19]A. Eremenko。整函数全纯族中的例外值。《密歇根数学杂志》，54(3):687–696，2006年。[20] P. Exner、P. Kuchment 和 B. Winn。周期介质中谱边缘的位置。《J. Phys. A》，43(47):474022，8，2010年。[21] C. Fefferman 和 M. Weinstein。蜂窝结构中的波包与二维狄拉克方程。《数学物理通讯》，326(1):251–286，2014年。[22] C. L. Fefferman 和 M. I. Weinstein。蜂窝晶格势与狄拉克点。《美国数学会杂志》，25(4):1169–1220，2012年。[23] A. Figotin 和 P. Kuchment。周期介电与声学介质谱的带隙结构。I. 标量模型。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，56(1):68–88，1996年。[24] A. Figotin 和 P. Kuchment。周期介电与声学介质谱的带隙结构。II. 二维光子晶体。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，56(6):1561–1620，1996年。[25] A. Figotin 和 P. Kuchment。高对比度周期介质中经典波的谱性质。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，58(2):683–702（电子版），1998年。[26] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。有限程薛定谔算子的布洛赫簇的不可约性。《J. Funct. Anal.》，283(10):论文编号109670，22，2022年。[27] N. Filonov。具有紧支撑解的散度形式二阶椭圆方程。《数学科学杂志（纽约）》，106(3):3078–3086，2001年。函数论与相变。[28] N. Filonov 和 I. Kachkovskiy。二维周期椭圆算子能带边缘的结构。《数学学报》，221(1):59–80，2018年。[29] N. E. Firsova。一维希尔算子的若干谱恒等式。《理论与数学物理》，37(2):281–288，1978年。

[30] N. E. Firsova. 一维受扰希尔算子的正反散射问题。《数学文集》 (N.S.), 130(172)(3):349–385, 431, 1986年.[31] L. Fisher, W. Li, and S. P. Shipman. 包含堆叠石墨烯在内的多层量子图的可约费米面。《数学物理通讯》, 385(3):1499–1534, 2021年.[32] L. Friedlander. 一类二阶周期椭圆微分算子的谱。《数学物理通讯》, 229(1):49–55, 2002年.[33] R. Froese, I. Herbst, M. Hoffmann-Ostenhof, and T. Hoffmann-Ostenhof. L^2-体薛定谔方程解的下界。《Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A》, 95(1–2):25–38, 1983年.[34] M. Gavrila. 强激光场中的原子结构与衰变，载于《强激光场中的原子》。见《Atoms in Intense Laser Fields》，第435–510页。Academic Press，1992年.[35] C. G´erard and F. Nier. 解析纤维化算子的Mourre理论。《J. Funct. Anal.》, 152(1):202–219, 1998年.[36] D. Gieseker, H. Kn¨orrer, and E. Trubowitz. 代数费米曲线的几何，载于《数学展望》第14卷。Academic Press Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1993年.[37] I. C. Gohberg and M. G. Kre˘ın. 线性非自伴算子理论导论。A. Feinstein从俄文译出。《数学专著译丛》第18卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1969年.[38] M. J. Gruber. 磁系统的布洛赫理论与量子化。《J. Geom. Phys.》, 34(2):137–154, 2000年.[39] M. J. Gruber. 非交换布洛赫理论。《J. Math. Phys.》, 42(6):2438–2465, 2001年.[40] J. M. Harrison, P. Kuchment, A. Sobolev, and B. Winn. 布里渊区内部周期算子的谱边缘出现问题。《J. Phys. A》, 40(27):7597–7618, 2007年.[41] R. Hempel and K. Lienau. 大耦合极限下周期介质的谱性质。《Comm. Partial Differential Equations》, 25(7-8):1445–1470, 2000年.[42] L. H¨ormander. 线性偏微分算子的分析。II。《数学经典丛书》。施普林格出版社，柏林，2005年。常系数微分算子，重印自1983年的原版。[43] J. D. Joannopoulos, S. J ohnson, R. D. Meade, and J. N. Winn. 《光子晶体：塑造光的流动》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，第2版，2008年.[44] M. I. Katsnelson. 《石墨烯：二维碳》。剑桥大学出版社，2012年.[45] Minh Kha and P. Kuchment. 阿贝尔覆盖上的Liouville-Riemann-Roch定理，载于《数学讲义》第2245卷。Springer，Cham， [2021] ©2021年.[46] Minh Kha, P. Kuchment, and A. Raich. 周期椭圆算子谱的内部边缘附近的格林函数渐近：谱隙内部情形。《J. Spect. Theory》，即将发表，2015年.[47] F. Klopp and J. Ralston. 周期算子的谱端点通常是单重的。《Methods Appl. Anal.》, 7(3):459–463, 2000年。Cathleen Morawetz：一位伟大的数学家。[48] H. Kn¨orrer and E. Trubowitz. 复布洛赫簇的方向性紧化。《Comment. Math. Helv.》, 65(1):114–149, 1990年.[49] P. Kuchment. 周期差分方程的弗洛凯理论。载于《多复变函数的几何与代数方面》（切特拉罗，1989年），《Sem. Conf.》第8卷，第201–209页。EditEl，Rende，1991年.[50] P. Kuchment. 偏微分方程的弗洛凯理论，载于《算子理论：进展与应用》第60卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1993年.[51] P. Kuchment. 光子晶体数学。载于G. Bao、L. Cowsar和W. Masters编，《光学科学中的数学建模》，《Frontiers Appl. Math.》第22卷，第207–272页。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2001年。

[52] P. Kuchment. 周期椭圆算子概述。《美国数学会通报》 (N.S.), 53(3):343–414, 2016年.[53] P. Kuchment and S. Levendorskiĭ. 周期椭圆算子谱的结构。《美国数学会汇刊》, 354(2):537–569, 2002年.[54] P. Kuchment and Y. Pinchover. 周期椭圆方程解的积分表示与刘维尔定理。《J. Funct. Anal.》, 181(2):402–446, 2001年.[55] P. Kuchment and Y. Pinchover. 紧流形阿贝尔覆盖上的刘维尔定理与谱边缘行为。《美国数学会汇刊》, 359(12):5777–5815, 2007年.[56] P. Kuchment and A. Raich. 周期椭圆算子谱的内部边缘附近的格林函数渐近：谱边缘情形。《数学通讯》, 285(14-15):1880–1894, 2012年.[57] P. Kuchment and B. Vainberg. 受扰周期薛定谔算子的嵌入特征值。载于《谱理论与散射理论》（美国特拉华州纽瓦克，1997年），第67–75页。普林纽出版社，纽约，1998年.¨P. Kuchment and B. Vainberg. 受扰周期势薛定谔算子不存在嵌入特征值。《Comm. Partial Differential Equations》, 25(9-10):1809–1826, 2000年.[59] P. Kuchment and B. Vainberg. 局部受扰周期图算子的嵌入特征值对应特征函数的结构。《数学物理通讯》, 268(3):673–686, 2006年.[60] P. Kuchment and J. Zhao. 量子图的谱的解析性与狄利克雷到诺伊曼算子方法。《J. Math. Phys.》, 60(9):093502, 8, 2019年.[61] N. Kuiper. 希尔伯特空间酉群的同伦型。《拓扑学》, 3:19–30, 1965年.[62] P. Lelong and L. Gruman. 多复变量整函数，载于《数学科学基础丛书》第282卷 /《数学科学基本原理》/。施普林格出版社，柏林，1986年.[63] W. Liu. 离散薛定谔算子的嵌入特征值判据。《国际数学研究通知》, (20):15803–15832, 2021年.¨W. Liu. 离散周期薛定谔算子的费米簇的不可约性与嵌入特征值。《几何与泛函分析》, 32(1):1–30, 2022年.[65] W. Liu. 离散周期薛定谔算子的费米簇专题。《J. Math. Phys.》, 63(2):论文编号023503，13页，2022年.[66] M. Ludewig and Guo Chuan Thiang. 与拓扑绝缘体相关的希尔伯特模中的优良瓦尼尔基。《J. Math. Phys.》, 61(6):061902, 22, 2020年.[67] V. Meshkov. 二阶偏微分方程解在无穷远处可能的衰减速率。《数学文集》, 182(3):364–383, 1991年。（俄文；英文译本见《苏联数学文集》。）[68] A. Morame. 周期介质中麦克斯韦算子谱的绝对连续性。《J. Math. Phys.》, 41(10):7099–7108, 2000年.[69] Beng-Seong Ong. 光波导与量子图的谱问题。博士论文，德克萨斯农工大学，2006年.[70] V. Papanicolaou. 连续谱中含有嵌入特征值的四阶散射型算子示例，2021年.[71] L. Parnovski. 贝特-索末菲猜想。《Ann. Henri Poincar ´e》, 9(3):457–508, 2008年.[72] L. Parnovski and R. Shterenberg. 二维周期薛定谔算子谱隙边缘的扰动理论。《J. Funct. Anal.》, 273(1):444–470, 2017年.[73] L. Parnovski and A. Sobolev. 强扰动周期算子的贝特-索末菲猜想。《数学创刊》, 181(3):467–540, 2010年.[74] B. Pavlov. 具有内部结构的零半径势模型。《理论与数学物理》, 59(3):345–353, 1984 年。

[75] A. Pli´s. 关于椭圆型微分方程柯西问题的非唯一性。《数学与力学杂志》，9:557–562，1960年。[76] M. Reed 和 B. Simon。《现代数理物理方法》。第 I–4 卷：泛函分析。Academic Press，纽约，1972 年。[77] O. Reingold、S. Vadhan 和 A. Wigderson。熵波、之字形图乘积与新型常数度扩展图。《数学年刊》（第 2 辑），155(1):157–187，2002年。[78] F. S. Rofe-Beketov。关于具有周期系数的非自伴微分算子的谱。《苏联科学院院报》，152:1312–1315，1963年。[79] F. S. Rofe-Beketov。谱扰动、Knezer 型常数与区域型势的有效质量。载于《1984年函数构造理论会议》，第 757–766 页，索非亚，1984年。国际函数构造理论会议论文集，瓦尔纳，1984年。[80] A. Sagiv 和 M. I. Weinstein。连续 Floquet 哈密顿量中的有效谱隙。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，54(1):986–1021，2022年。[81] J. Schenker 和 M. Aizenman。通过图装饰产生谱隙。《数学物理通讯》，53(3):253–262，2000年。[82] S. Shipman。局部扰动周期图算子的嵌入特征值对应的无界支撑特征函数。《数学物理通讯》，332(2):605–626，2014年。[83] Stephen P. Shipman。非对称双层量子图算子的可约费米面。《谱理论杂志》，10(1):33–72，2020年。[84] M. Skriganov。多维周期算子谱理论中的几何与算术方法，第 171 卷。斯捷克洛夫数学研究所，1985年。[85] V. P. Smyshlyaev 和 P. Kuchment。通过“非经典”均匀化减缓高对比度周期介质中的波传播并实现波的传输。2007年。[86] A. Sobolev。周期磁薛定谔算子的绝对连续性。《数学创刊》，137(1):85–112，1999年。[87] V. V. Sviridov。关于准能态的完备性。《苏联科学院院报》，274(6):1366–1367，1984年。[88] L. Thomas。晶体中杂质散射的含时方法。《数学物理通讯》，33:335–343，1973年。[89] V. A. ˇZeludev。具有周期势的受扰薛定谔算子的特征值。载于《数理物理问题》第 2 期：谱理论、衍射问题（俄文），第 108–123 页。列宁格勒大学出版社，列宁格勒，1967年。[90] V. A. ˇZeludev。衰减势对周期薛定谔算子的扰动。《列宁格勒大学学报》，23(7):144–145，1968年。[91] V. A. ˇZeludev。具有周期势的一维自伴薛定谔算子的谱扰动。载于《数理物理问题》第 4 期：谱理论、波动过程（俄文），第 61–82 页。（勘误表）。列宁格勒大学出版社，列宁格勒，1970年。[92] K. Yajima。周期含时系统的量子动力学。《物理学 A》，124(1-3):613–619，1984年。数理物理，第七卷（博尔德，科罗拉多州，1983年）。[93] J. Zak。磁平移群。II. 不可约表示。《物理评论》（第 2 辑），134:A1607–A1611，1964年。[94] Ya. B. Zeldovich。强电磁波中的量子系统散射与发射。《苏联物理学进展》，16:427–433，1973年。[95] V. V. Zhikov。具有周期系数的某些散度形式椭圆算子的谱隙。《代数与分析》，16(5):34–58，2004年。

Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA电子邮箱地址：kuchment@tamu.edu