arXiv:2304.01479v1 [math.PR] 4 Apr 2023

基于分布回归的最优停止：一种高阶秩签名方法

布兰卡·H ORVATH、Maud Lemercier、Chong Liu、Terry Lyons 和 CRISTOPHER SALV I

Abstract. 路径空间上的分布回归是指学习将随机过程的分布映射到标量目标的函数。基于路径签名这一概念的学习过程，即粗糙路径理论中的一种经典变换，被广泛用于近似弱连续泛函，例如路径依赖型期权收益的定价泛函。然而，对于数理金融中产生的最优停止问题，例如美式期权的定价，这种方法并不适用，因为相应的价值函数通常关于弱拓扑是不连续的。本文通过将最优停止问题重新表述为一种基于测度值路径的高阶签名和适应拓扑概念的高阶核均值嵌入回归，建立了一个严谨的数学框架来解决这一问题。我们所提出的算法的核心计算部分包括求解一族二维双曲型偏微分方程。

关键词：最优停止问题、适应弱拓扑、高阶签名、核回归

MSC 2020 分类：主要分类 60L10；次要分类 60L20、60G40、91G6 0

1. Introduction

路径签名的概念最早由 K. T. Chen [Che54] 于 1954 年提出，并已应用于多种数学情境，尤其是对不规则信号驱动的动力系统的研究中。

给定一个连续路径 $x\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d$ 具有有界变差，签名 $S(x)$ 由 x 的迭代积分构成，这些积分在空间 $\prod_{k=0}^{\infty}(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ 中形成一系列张量，定义如下

$$S(x)=\left(1,\int_{0<u_1<T}dx_{u_1},...,\int_{0<u_1<...<u_k<T}dx_{u_1}\otimes...\otimes dx_{u_k},...\right), \tag{1.1}$$

其中，$\otimes$ 表示标准张量积。

Hambly and Lyons [HL10] 于 2010 年指出，签名能够在路径空间上刻画路径，精确到一种等价关系（称为树状等价），因此它在相应的等价类集合（通常称为无参数化路径）上构成单射。近年来，签名已成为数据科学领域的一种流行工具，因为其丰富的代数结构有助于构建强大的逼近理论，以便在存在时间序列数据时进行学习 [ASS20, KBPA+19, LSC+21]。实际上，直接应用 Stone-Weierstrass 定理即可得出，任意定义在紧集 K 上的无参数化路径（或参数化路径）$f\colon K\to\mathbb{R}$ 的连续实值函数，都可以由作用于签名的线性泛函在 $\bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ 上实现一致逼近

Date：2023年4月5日。

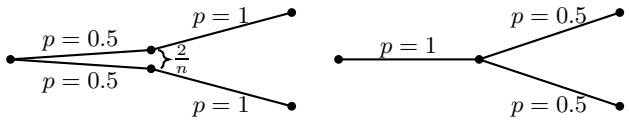


FIGURE 1. $\mathbb{P}_n$ （左侧）弱收敛于 $\mathbb{P}$ （右侧），但 v（$\mathbb{P}_n$） $\nrightarrow v$（$\mathbb{P}$）。

（或响应时间增强签名） [Lyo14], 即对任意 $x \in K$

$$f(x) \approx \langle \ell, S(x) \rangle. \tag{1.2}$$

在数理金融领域，签名的这一通用逼近性质使我们能够将许多具有路径依赖收益的期权定价问题，重新表述为对价格过程的期望签名进行线性回归。为了说明这一方法可能如何运作，暂且不指定任何技术假设，设 f 是某个路径依赖期权的收益函数， X 是某个价格过程，那么相应的期权价格 $\mathbb{E}[f$（X）] 可以通过对期望签名 [PA18]进行线性回归来近似:

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \langle \ell, \mathbb{E}[S(X)] \rangle. \tag{1.3}$$

方程（1.3）可以解释为对随机过程 X的分布进行回归，也是路径空间上的分布回归。该方法已在[LSD$^+$21] 中得到广泛研究，用于近似取值于路径的随机变量上的弱连续实值函数。上述研究采用的核心工具是签名核 [CLSY20] ，其定义为两个签名的内积，本文后续将对此进行详细讨论。

尽管上述方法已成功应用于金融衍生品定价，但它存在一个重大局限，因而无法用于解决数学金融中的一类重要优化问题，即最优停止问题，例如美式期权定价。事实上，在这类问题中，价值函数 $v(\cdot)$

$$v(\mathbb{P}) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma(X_\tau)] : \tau \text{ is stopping time}\}$$

作为定义在 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$（路径空间 $\mathcal{X}$ 上的概率测度集合）上的函数，它既不能表示为路径依赖连续函数期望的上确界（因为停止时通常不是路径空间上的连续函数），也不能表述为弱拓扑下的连续函数，反例见图1。这是因为弱拓扑完全忽略了滤过，而滤过在最优停止问题中发挥着至关重要的作用。因此，由 [LSD$^+$21] 提出的分布回归方法无法用于美式期权定价，因为价值函数 $v(\cdot)$ 关于弱拓扑不连续。

本文通过采用由 D. Aldous [Ald81], 率先提出、后由 Hoover 和 Keisler [HK84],进一步发展的适应拓扑，以及 Beiglb¨ock 等人 [BVBBE20b], [BVBEP20], [BBP21],[Pam22], 近期对其进行的深入研究，并结合 [BLO22]提出的“高阶秩签名”方法，解决了这一问题。粗略地说，我们的新方案包括以下步骤。

（1）新的输入空间和新的拓扑：我们采纳 [BBP21] 的建议，将输入空间（即最优停止问题的价值函数所定义的空间）视为离散时间区间上所有滤过程 $\mathbb{X} = (X, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 的集合

并赋予其所谓的适应拓扑 $\hat{\tau}_1$（即由 [Ald81], 引入的扩展弱收敛，另见 [BLO22]）。该拓扑 $\hat{\tau}_1$ 由测度值鞅 $\hat{X}_t^1 = \mathbb{P}[X \in \cdot|\mathcal{F}_t]$ 的弱收敛所诱导，且强于弱拓扑，因此也能反映底层过程所附滤过之间的差异；特别地，最优停止问题的价值函数 $v(\cdot)$ 现在关于拓扑 $\hat{\tau}_1$连续。

(2) 高阶签名作为通用特征：在市场 $\mathbb{X}$ 上，我们将 [BLO22], 中介绍的二阶签名 S^2 应用于测度值鞅 $\hat{X}_t^1 = \mathbb{P}[X \in \cdot|\mathcal{F}_t]$。该签名具有与通常的 $\mathbb{R}^d$ 值路径签名相同的通用性质。

(3) 基于高阶签名的分布回归：我们证明，现在可以通过对（期望）二阶签名 S^2 的像进行核回归，来近似美式期权的价格。

此外，本文的另一项贡献是提供了一种可行且明确的算法，以便在数值上实现上述理论框架。具体而言，通过使用所谓的签名核偏微分方程技巧 [CLSY20], ——该技巧基于将签名视为迭代积分集合时的动力学——并结合 [SLL+21] 中研究的高阶核均值嵌入方法，我们无需进行签名截断，即可构造出用于估计 $v(\cdot)$ 的相合估计量 $\hat{v}(\cdot)$，最终将上述无限维回归问题化简为求解一族简单的二维双曲线性偏微分方程。

我们将本文所得的主要结果总结为以下命题，该命题将在本文末尾证明，见附录 E。

命题 1.1. 设 $\mathbb{X} = (X, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的紧子集、且适应于自然滤过 $\mathbb{F}$[1] 的离散时间随机过程，其底层概率模型为 $\mathbb{P}$。设 $v(\mathbb{X}) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma(X_\tau)] : \tau$ 是与有界连续函数 γ 相关联的最优停止问题的 $\mathbb{F}$ 停止时$\}$ 价值函数。那么：

(1) 存在一族相合经验估计量 $\hat{v}_{(x^i)_{i\le m}}$, $m \ge 1$，用于估计 $v(\cdot)$。这些估计量由基于高阶秩签名的分布回归构造，使得

$$\lim_{m\to\infty} \hat{v}_{(x^i)_{i\le m}}(\mathbb{X}) = v(\mathbb{X})$$

对于独立同分布样本 $(x^i)_{i\le m} \sim \mathbb{P}_X$ 的随机生成，有如下结果依概率成立。

(2) 计算 $\hat{v}_{(x^i)_{i\le m}}$ 归结为求解一族二维线性偏微分方程，每个方程的系数均可通过计算 $\mathbb{R}^d$ 向量的欧几里得内积得到。

据我们所知，这是首篇从签名核和适应拓扑的角度应用核回归来求解最优停止问题的研究。沿这一方向，唯一已有的相关研究是近期的 [BHRS23]。该论文将最优停止问题重新表述为一个关于通常的期望签名的线性泛函的确定性优化问题，其依据是 [KLPA20] 提出的“签名停止策略”方法。这与我们的方法有显著不同，因为他们的算法并非为处理适应拓扑上的连续函数而设计

[1]事实上，我们的结果对一般滤过也成立，参见附录C。[2]这一概念将在第2节中给出精确定义。

此外，我们的算法仍然继承了经典签名核学习方法的所有优点：例如，它适用于高维随机过程。

最后请注意，尽管我们以最优停止问题作为该算法应用的示例，本文提出的方法也可用于逼近随机过程上的其他类型函数，只要这些函数有界且关于适应拓扑连续。例如，[BVBBE20a] 中研究的效用最大化问题所产生的函数，或 [BDD20], 中考虑的、具有比例交易成本的效用最大化问题中的目标函数，前提是底层效用函数有界。

本文结构如下：第2节介绍适应拓扑和高阶签名的定义，并阐述其相对于适应拓扑的普适性；随后说明如何利用它们构建分布回归方案来求解最优停止问题。第3节探讨将理论框架付诸实践的具体算法，并构造一个相合估计量来逼近目标函数。第3.5节给出两个具体示例，分别在多维布莱克–斯科尔斯模型和停止的分数布朗运动模型下为美式期权定价，以验证该算法的有效性。附录中记录了有关签名和核学习的基础知识，以及第2节和第3节中各项论断的全部证明；附录 C 还简要讨论了如何应用第3节的算法，在一般滤过下求解最优停止问题。第4节给出简短的总结，并展望未来工作。

致谢：BH 和 CL 感谢慕尼黑数据科学研究所 2021 年种子基金项目 https://www.mdsi.tum.de/en/mdsi/research/seed-funds-2021/sybendafin/ 提供的经费支持。ML、TL 和 CS 获得了 DataSig 项目支持，该项目由英国工程与自然科学研究委员会通过资助号 EP/S026347/1 资助。

2. Theoretical Background

为方便读者，我们首先介绍将在全文中使用的记号。

- $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 是一个给定的离散时间区间。
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P})$ 表示一个滤过概率空间，而 $X = (X_t)_{t\in I}$ 表示定义在 Ω 上的一个取值于 $\mathbb{R}^d$、$\mathbb{F}$–适应的过程，即，对于每个 t，X_t 都是 $\mathcal{F}_t$–可测的。沿用 [BBP21] 中的记号，我们将这五元组称为

$$\mathbb{X} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P}, X)$$

  一个滤过（或适应）过程 .
- $\mathbb{P}_X$ 表示 X的分布，即 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$。
- $\mathcal{FP}_I$ 表示以 I为指标的所有滤过过程的集合。
- $\Lambda_{\text{素}} \subset \mathcal{FP}_I$表示 $\mathcal{FP}_I$的子集，该子集由具有自然滤过的滤过过程组成。也就是说，若 $\mathbb{X} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, \mathbb{P}, X) \in \Lambda_{\text{素}}$，则滤过 $\mathbb{F}$ 由过程 X生成。
- $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$表示 $\mathbb{R}^d$ 的一个紧子集，而 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 表示所有取值于 $\mathcal{K}$ 的滤过过程所构成的集合。记号 $\Lambda_{\text{普通}}(\mathcal{K})$ 的含义则不言自明。

• 给定一个 $\mathbb{X}:=(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in I},\mathbb{P},X)$，我们用 $\mathcal{T}_{\mathbb{X}}$ 表示所有关于滤过 $\mathbb{F}$ 的停止时（以上界 T 为限）构成的集合；也就是说，若对每个 $t\in I$ 都有 $\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$ 成立，则当且仅当 $\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{X}}$。

• 对于任意波兰空间 $\mathcal{X}$， $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 上的（博雷尔）概率测度集合，该集合始终赋予弱拓扑。

• $C_b(\mathcal{X})$表示定义在 $\mathcal{X}$上的实值有界连续函数空间，该空间始终赋予由半范数$p_\psi(f):=\sup_{x\in\mathcal{X}}|f(x)\psi(x)|$生成的严格拓扑，该拓扑适用于 ψ 在无穷远处消失的函数（参见 [CO22，定义 8]）。如果 $\mathcal{X}$是紧致的，则严格拓扑与一致收敛拓扑重合。

2.1. 预测过程与适应拓扑。正如我们在引言中所见，对于随机最优控制问题中的应用（例如最优停止问题（OSP）），弱拓扑过于粗糙。因此，作为第一步，我们需要在 $\mathcal{FP}_I$ 上寻找一个更强的拓扑，使 OSP 的价值函数 $v(\cdot)$ 具有连续性。为此，我们引入以下概念。这些概念由 D. Aldous 在 [Ald81] 中定义，并将成为本文的核心对象。

定义 2.1. 对任意 $\mathbb{X}\in\mathcal{FP}_I$，其中 $I=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T\}$，若存在 $\mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^I)$–ˆ ˆ ˆ 值离散过程 $X=(X_t)_{t\in I}$，使得 $X_t=\mathbb{P}[X\in\cdot|\mathcal{F}_t]$，则称其为 $\mathbb{X}$ 的预测过程。

注 2.2. 预测过程的概念可扩展至轨迹为 c `adl `ag 的连续时间区间上的随机过程。关于连续时间情形下预测过程的详细介绍，尤其是其存在性和唯一性，请参阅 [Ald81，第 13] 节。

ˆ 显然，根据上述定义， $X_t=\mathbb{P}[X\in\cdot|\mathcal{F}_t]$ 描述了在给定信息 $\mathcal{F}_t$ 的情况下对 X 的轨迹进行预测的能力，因此预测过程 $X=(X_t)_{t\in I}$ 揭示了滤过 $\mathbb{F}$ 的演变方式，即其“预测能力”如何随时间变化。另一方面，如果 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的，那么 $X_0=\mathbb{P}_X$ 就是 X 的分布；也就是说， X 的分布仅对应于预测过程 X 的初始值。基于上述观察，我们可以认为，通过考察两个滤过过程的预测过程，能够更深入地了解它们所诱导的信息流之间的本质差异，而这些差异完全无法通过比较它们的分布来体现。因此，我们引入弱拓扑的以下强化版本：

定义 2.3. (1) 若两个滤过程 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}\in\mathcal{FP}_I$ 的预测过程 X 和 Y 具有相同的概率分布，则称它们是同义的：

$$\mathcal{L}(\hat{X})=\mathcal{L}(\hat{Y}).$$

(2) 若一列滤过过程 $\mathbb{X}^n$ 在扩展弱收敛意义下收敛到 $\mathbb{X}$，则称

$$\mathcal{L}(\hat{X}^n)\to\mathcal{L}(\hat{X}),$$

其中，收敛是在 $\mathcal{P}(\mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^I)^I)$ 的弱拓扑下发生的。

下一个定理证实，扩展弱收敛拓扑确实比通常的弱拓扑更强，因为在使用自然滤过时，它能保证 OSP 的价值函数具有连续性。回顾一下， $\Lambda_{\text{plain}}\subset\mathcal{FP}_I$ 表示由所有配备自然滤过的滤过过程组成的子集。

定理 2.4。设 $\gamma\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个连续有界函数，且 $v\colon\ \mathcal{FP}_I \to \mathbb{R}$ 为以下最优停止问题的价值函数：

$$v(\mathbb{X}) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma(X_\tau)].$$

那么，对于 Λ_{plain} 上的扩展弱收敛拓扑， v 是连续的；也就是说，若 Λ_{plain} 中的元素 $\mathbb{X}^n$ 和 $\hat{}\,\hat{}\mathbb{X}$ 满足 $\mathcal{L}(X^n) \to \mathcal{L}(X)$，则 $v(\mathbb{X}^n) \to v(\mathbb{X})$。

证明。命题（1）已由 [BVBBE20b 的定理 1.2], 证明，第二个命题则由 [Ald81 的定理 17.2] 得出。□

这里我们指出，上述定理中关于滤过为自然滤过的假设不可省略。事实上，即使在离散情形 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 且 $N \geq 2$ 下，也可以构造一个连续有界函数 γ 以及两个具有非自然滤过的滤过过程$\hat{}\,\hat{}\mathbb{X}$、$\mathbb{Y}$，使得 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同义的（即 $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$），但 $v(\mathbb{X}) \neq v(\mathbb{Y})$，见 [BBP21，第 6] 节。这个反例表明，一般而言，由预测过程诱导的弱拓扑仍不足以描述附属于滤过过程的滤过的全部细节，因此我们仍有改进扩展弱收敛拓扑的动机。为此，我们引入以下定义。Hoover 和 Keisler（[HK84]）基于这样的理念提出了这些定义：通过迭代取条件期望，可以揭示有关滤过的更多信息；另见 [BLO22] 和 [BBP21]:

$\hat{}$ 定义 2.5。（1）对于 $r \geq 1$ 和 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I$，秩 r预测过程 X^r 被递归定义为秩 $r-1$ 预测过程的预测过程，即，

$$\hat{X}^r_t = \mathbb{P}[\hat{X}^{r-1} \in \cdot | \mathcal{F}_t], \quad t \in I.$$

按照惯例，我们设定 $\hat{}X^0 = X$.

(2) 对于 $r \geq 1$和 $\mathbb{X}^n, \mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I$，如果其秩 r 预测过程的分布满足弱收敛，即，则称 $\mathbb{X}^n$在秩 r适应拓扑下收敛于 $\mathbb{X}$，即，

$$\mathcal{L}(\hat{X}^{n,r}) \to \mathcal{L}(\hat{X}^r).$$

我们用 $\hat{}\tau_r$ 表示 $\mathcal{FP}_I$ 上的秩 r 适应拓扑，并用 $\mathbb{X}^n \xrightarrow{r} \mathbb{X}$ 表示相应的收敛。此外，我们用 $\mathbb{X} \sim_r \mathbb{Y}$ 表示如下关系：$\mathcal{L}(\hat{}X^r) = \mathcal{L}(\hat{}Y^r)$，并称 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 具有相同的秩 r 适应分布。

显然，对于 $r = 0$ ，秩 0 适应拓扑 $\hat{}\tau_0$ 不过就是通常意义上的弱收敛（或依分布收敛）；而对于 $r = 1$ ，秩 1 适应拓扑 $\hat{}\tau_1$ 则给出了 Aldous 扩展弱收敛。

出于技术原因，除非另有明确说明，从现在起我们将主要考虑取值于紧子集 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ 并配备其自然滤过的离散时间滤过过程，即对于 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，属于 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 的元素。我们认为，这是设计任何用于求解最优停止问题（OSP）的数值方案时最相关的情形：首先，在大多数金融应用中，附加于随机过程的滤过由过程自身生成，即这些滤过是自然滤过；其次，如果我们希望对连续时间模型中的 OSP 价值函数进行数值计算，通常需要在时间上对其进行离散化，并在空间上对其进行局部化，而所得的离散化模型确实是 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 中的元素；在附录 D 中，我们可以看到，这些离散模型上的 OSP 价值函数收敛于

连续时间市场中相应的价值函数，至少从理论角度来看是如此。因此，根据定理 2.4，在这种情况下，我们只需考虑扩展弱收敛，即秩 1 适应拓扑 $\hat{\tau}_1$。

注 2.6。尽管本文主要关注配备自然滤过的滤过过程，但这里要提及 [BBP21] 中的一个显著结果：对于离散情形 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，与定理 2.4 中关于配备自然滤过的适应过程的结论相反，要使 OSP 的任意价值函数 v 在整个集合 $\mathcal{FP}_I$（即所有具有一般滤过的适应过程的集合）上连续，正确的拓扑是秩 N 适应拓扑 $\hat{\tau}_N$；也就是说，若 $\mathbb{X}^n \xrightarrow{N} \mathbb{X}$，则 $v(\mathbb{X}^n) \to v(\mathbb{X})$，并且存在一个连续有界函数 γ 和一列滤过过程 $\mathbb{X}^n$，$n \geq 1$，使得$\mathbb{X}^n \to \mathbb{X}$ 在秩 $N-1$ 适应拓扑下成立，其中某个 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I$ 满足 $v(\mathbb{X}^n) \nrightarrow v(\mathbb{X})$（其中$v(\cdot)$表示与 γ相关的 OSP 价值函数），参见 [BBP21，定理 6.1]。这意味着，对于具有一般滤过的 $N+1$ 步离散滤过过程，需要研究它们的秩 N 预测过程，以找出隐藏在这些滤过中的所有关键信息。关于具有一般滤过的滤过过程上的 OSP 的更详细讨论，参见附录 C。

2.2. 用于求解最优停止问题的秩 2 签名与分布回归。回顾概率论中的一个经典结果：有界 $\mathbb{R}$ 值随机变量的分布由其矩唯一确定。该结论在多维情形下仍然成立，即对于 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ 一个紧子集，以及 X, Y 两个 $\mathcal{K}$值随机变量，其分布分别记为 $\mathbb{P}_X$ 和 $\mathbb{P}_Y$，有 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ 当且仅当

$$\int_{\mathcal{K}} \exp_{\otimes}(x)\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathcal{K}} \exp_{\otimes}(y)\mathbb{P}_Y(dy),$$

其中，$\exp_{\otimes}$ 是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^d$上的张量代数 $T((\mathbb{R}^d))$ 的张量指数映射，$\exp_{\otimes}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\otimes n}}{n!}$ 其中 $x^{\otimes n} = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{d} x^{i_1} \ldots x^{i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$（$e_i$ 是 $\mathbb{R}^d$的典范基）。这里我们指出，$T((\mathbb{R}^d))$ 包含一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}^1$（见附录 A.1），且该空间包含 $\exp_{\otimes}$ 的像，因此上述积分是 $\mathcal{H}^1$值 Bochner 积分，并且总是有定义的。由于 $\int_{\mathcal{K}} \exp_{\otimes}(x)\mathbb{P}_X(dx)$ 可以写成$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp_{\otimes}(X)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X^{\otimes n}]$，我们也将此积分称为 X的矩母函数。

上述关于用矩母函数刻画分布的结果，还可以进一步推广到取值于紧集的离散时间滤过过程情形。更准确地说，对于 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 存在一个映射$S: (\mathbb{R}^d)^I \to T((\mathbb{R}^{d+1}))$，使得对于 $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$，有

$$\mathbb{X} \sim_0 \mathbb{Y} \iff \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)]. \tag{2.1}$$

这种映射 S 是通过定义的

定义 2.7。对于 $x = (x_t)_{t \in I}$ 一个定义在 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 上的离散时间路径，满足 $x_t \in \mathcal{K}$ 对所有 t，其（时间增强的）签名 $S(x)$定义为

$$S(x) = \prod_{i=0}^{N} \exp_{\otimes}((t_i - t_{i-1}, x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) \in \mathcal{H}^1, \quad t_{-1} := 0, x_{t_{-1}} := 0,$$

其中，$\mathcal{H}^1$是附录 A.1 中定义的希尔伯特空间。对于离散时间滤过过程 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$，我们称 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)]$ 为 $\mathbb{X}$ 的期望签名。

注 2.8。事实上，（期望）签名的概念以及关系式 (2.1) 可以进一步推广到所有定义在连续时间区间 $[0,T]$ 上、满足一定正则性条件（例如具有有界变差）的连续滤过过程，参见例如 [CO22] 及其中的相关文献。关于签名 S 基本性质的简要回顾，也请读者参阅附录 A。

本节将推广（期望）签名的概念以及关系式 (2.1)，使其适用于具有扩展弱收敛拓扑的滤过过程。回顾一下，扩展弱收敛是通过预测过程来定义的，而预测过程是一个测度值鞅；我们需要为测度值路径构造一个“签名”映射。

首先引入一些记号：令

$$\mathcal{H}^2 := \Big\{ \mathbf{h} \in \prod_{n=0}^{\infty} (\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^1)^{\hat{\otimes} n} : \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle_{(\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^1)^{\hat{\otimes} n}} < \infty \Big\}$$

为嵌入乘积空间 $\prod_{n=0}^{\infty}(\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^1)^{\hat{\otimes} n}$ 中的希尔伯特空间，见附录 A.1。我们也用 $\exp_1$ 表示 $\mathcal{H}^1$ 上的张量指数。

定义 2.9. 设 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，令 $\mu = (\mu_t)_{t \in I}$ 为一条离散时间路径，使得对每个 t，$\mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{K})^I$ 是 $\mathcal{K}$ 上的一个分布。令 $S : (\mathbb{R}^d)^I \to \mathcal{H}^1$ 为定义 2.7 中的签名映射，并设 $\bar{\mu}_t := \int S(x) \mu_t(dx) \in \mathcal{H}^1$ 为 μ_t 的期望签名。令 $S_{\mathcal{H}^1}$ 为定义在 $(\mathcal{H}^1)^I$ 上的（时间增强）签名映射，则映射 $S^2 : \mathcal{P}(\mathcal{K})^I)^I \to \mathcal{H}^2$，

$$S^2(\mu) := S_{\mathcal{H}^1}(t \mapsto \bar{\mu}_t) = \prod_{i=0}^{N} \exp_1(t_i - t_{i-1}, \bar{\mu}_{t_i} - \bar{\mu}_{t_{i-1}}).$$

对于 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$，其预测过程为 $\hat{}X^1$，根据定义有

$$S^2(\hat{X}^1) = S_{\mathcal{H}^1}(t \mapsto \mathbb{E}[S(X)|\mathcal{F}_t]).$$

下面的定理表明，$S^2(\hat{}X^1)$ 的期望在 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 上的秩 1 适应分布中起到“矩母函数”的作用。此定理的广义版本见 [BLO22，定理 3]。为方便读者，本文也给出一个简短证明，参见附录 E。

定理 2.10. 对于 $\mathbb{X} = (X, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ $\mathbb{Y} = (Y, \mathbb{G}, \mathbb{Q}) \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$，若 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，则有

- $\mathbb{X} \sim_0 \mathbb{Y} \iff \mathcal{L}(\hat{X}^0) = \mathcal{L}(\hat{Y}^0) \iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)]$,
- $\mathbb{X} \sim_1 \mathbb{Y} \iff \mathcal{L}(\hat{X}^1) = \mathcal{L}(\hat{Y}^1) \iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)]$,

其中 $\hat{}\hat{}X^r$ 和 Y^r, $r = 0, 1$ 表示秩 r 预测过程，分别对应 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$，见定义 2.5。

用核学习中的术语来说，定理 2.10 告诉我们，签名映射 S 和二阶签名映射 S^2 分别是定义在 $\mathbb{R}^d$值路径空间 $(\mathbb{R}^d)^I$ 和测度值路径空间 $(\mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^I))^I$ 上的通用特征映射（“通用特征映射”的概念见附录 B）。因此，它们分别为秩 0 和秩 1 的适应拓扑诱导出以下签名最大均值差异：

定理 2.11. 设 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 和 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ 为紧子集。那么

(1) 秩 1 签名最大均值差异

$$\mathcal{D}^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)]\|_{\mathcal{H}_1}$$

将 τ_0 上的秩 0 适应拓扑（即随机过程概率分布上的通常弱拓扑）度量化。(2) 二阶签名最大均值差异

$$\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)]\|_{\mathcal{H}_2}$$

将 τ_1 上的秩 1 适应拓扑（即 Aldous 扩展弱收敛，见定义 2.3）度量化。

上述定理的证明可见 [BLO22，定理 4]。为方便读者，我们将在附录 E 中给出定理 2.11 的简短证明。

注记 2.12。事实上，给定上述秩 2 签名映射 S^2，我们可以利用 S^2 以及定义在取值于 $\mathcal{H}^2$ 的路径上的（时间增强）签名映射 $S_{\mathcal{H}^2}$，按照我们从 $S = S^1$构造 S^2 的方式，构造出适用于秩 2 预测过程的秩 3 签名映射 S^3。重复这一过程，我们可以递归地获得适用于秩 $r-1$预测过程的秩 r 签名映射，并且所得的秩 r 签名最大均值差异 $\mathcal{D}^r_{\mathcal{S}}$ 将对所有 $r \geq 1$ 的秩 $r-1$适应拓扑进行度量化；更多详情请见附录 C。

注记 2.13. 另一种用于刻画适应拓扑的常用度量是所谓的适应（或双因果）Wasserstein 距离（例如，参见 [BVBBE20b]和 [BBP21]），其定义如下:

$$\mathcal{AW}_p(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \inf_{\pi \in CPL_{bc}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} \int d_{(\mathbb{R}^d)^I}(x, y)^p \pi(dx, dy),$$

其中 CPL_{bc} 是双因果耦合集合，关于滤过的约束包含在双因果性要求中，参见 [BBP21, 定义 2.1]。在开创性工作 [BVBBE20b] 中，作者证明，对于 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，扩展弱收敛拓扑 $\hat{}\tau_1$ 等价于由 $\mathcal{AW}_p$ 在 $\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$上诱导的拓扑，这意味着二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}$ 生成的拓扑与 $\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$上的适应 Wasserstein 度量生成的拓扑相同。然而，当滤过不是自然滤过时，这种等价性不再成立，参见[BBP21]。在这种情况下，适应 Wasserstein 度量与秩 $N+1$ 签名最大均值差异等价，即二者生成相同的拓扑 $\hat{}\tau_N$，参见附录 C 中的定理 C.2。关于能够刻画滤过差异的各种拓扑（包括适应拓扑以及由适应 Wasserstein 距离度量的拓扑），可参阅近期的预印本 [Pam22]。

由于最优停止问题（OSP）中的价值函数

$$v(\mathbb{X}) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma(X_\tau)].$$

关于 Aldous 扩展弱收敛，Λ_{plain} 上是连续的（见定理 2.4）。利用上面的定理 2.11，我们得到：如果 $\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}^n, \mathbb{X}) \to 0$ 对于$\mathbb{X}^n, \mathbb{X} \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$，则 $v(\mathbb{X}^n) \to v(\mathbb{X})$。这一观察与核学习中的一个经典结果相结合，得出了以下重要结论，这是我们用于求解最优停止问题的数值方案的理论基础。以下定理的证明推迟至附录 E。

让我们回顾一下第2章开篇所引入的严格拓扑概念。根据 [Gil71]（另见 [CO22，定义 8]），对于一个拓扑空间 $\mathcal{X}$，$C_b(\mathcal{X},\mathbb{R})$ 上的严格拓扑是由半范数 $p_\psi(f) = \sup_{x\in\mathcal{X}}|f(x)\psi(x)|$ 所生成的拓扑，其中 ψ 在无穷远处消失，其含义是：对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧集 $K \subset \mathcal{X}$，使得 $\sup_{x\notin K}|\psi(x)|\leq \varepsilon$。显然，严格拓扑比一致拓扑弱，但比紧集上一致收敛拓扑强。

定理 2.14. 设 $\sigma > 0$ 固定。我们定义核 $K^2_{\mathcal{S}}\colon \Lambda_{plain}(\mathcal{K}) \times \Lambda_{plain}(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}$,

$$K^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) := \exp(-\sigma^2\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2)$$

由 $K^2_{\mathcal{S}}$ 生成的再生核希尔伯特空间（再生核希尔伯特空间）关于严格拓扑在空间 $C_b(\Lambda_{plain}(\mathcal{K}), \hat{}\tau_1)$ 中稠密。特别地，若 $v(\cdot)$ 表示 OSP 中的价值函数，则对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathbb{X} \in \Lambda_{plain}(\mathcal{K})$，存在一个 $M \in \mathbb{N}$、$\mathbb{Y}^i \in \Lambda_{plain}(\mathcal{K})$ 以及标量 $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,M$，使得

$$\left|v(\mathbb{X}) - \sum_{i=1}^{M} a_i \exp(-\sigma^2\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}^i)^2)\right| \leq \varepsilon,$$

并且该不等式关于 $\hat{}\tau_1$ 在 $\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$ 上的每个紧集上一致成立.

注2.15. 请注意，在上述定理中，$K^2_{\mathcal{S}}$ 的再生核希尔伯特空间关于严格拓扑仅在空间 $C_b(\Lambda_{plain}(\mathcal{K}), \hat{}\tau_1)$ 中稠密，而非关于一致拓扑稠密。这是因为具有自然滤过的随机过程集合 $\Lambda_{plain}(\mathbb{R}^d)$ 关于秩 1 拓扑并不完备（例如参见 [BVBBE20b] 和 [BVBEP20]），因此，尽管状态空间 $\mathcal{K}$ 是紧致的，集合 $\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$ 通常关于秩 1 拓扑并非紧致（这一观察再次揭示了通常的弱拓扑与高阶秩适应拓扑之间的差异）。因此，[Gil71] 中引入的严格拓扑似乎是对与自然滤过相关的 OSP 价值函数进行逼近的恰当概念。关于刻画 $\Lambda_{plain}(\mathbb{R}^d)$ 紧致性的具体判据，请读者参见 [Ede19]。

注2.16。得益于注2.12和注2.13，上述定理可以推广到任意 $r \geq 2$ 下的秩 r 适应拓扑。特别是，我们的核学习方法仍适用于定义在具有一般滤过的滤过过程上的 OSP。再次提醒读者，可参阅附录 C 或 [BLO22]，了解有关高阶签名及其在求解 OSP 中应用的更详细讨论。

本文其余部分将致力于基于定理 2.14 提出一种高效的数值方案，以对 OSP 的价值函数 $v(\cdot)$进行签名核回归；特别地，我们将给出一种简洁而精确的方法来计算二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}$。

3. Algorithm

根据定理 2.14，我们可以看到，定义在 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 上的 OSP 的价值函数 $v(\cdot)$，可通过对核执行所谓的分布回归来近似

$$\exp(-\sigma^2\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)^2).$$

具体而言，为了从 OSP 求出价值函数 $v(\cdot)$ 的数值解，我们现在的任务归结为数值计算二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)$。

然而，计算二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot)$ 并非易事：根据定理 2.11 中给出的 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot)$ 的定义，即

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)]\|_{\mathcal{H}^2},$$

其中 $S^2(\hat{X}^1) = S_{\mathcal{H}^1}(t \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t])$，求得 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 的数值方案可望拆分为以下步骤：

(1) 通过在 $\mathbb{P}$ 下（其中 $I_t := \{s \in I : s \le t\}$）对路径进行采样$X|_{I_t}$，估计每个 $t \in I$ 对应的条件分布 $\mathbb{P}(X \in \cdot|\mathcal{F}_t)$。(2) 根据条件分布 $\mathbb{P}(X \in \cdot|\mathcal{F}_t)$，通过路径采样计算每个 $t \in I$ 对应的条件期望 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t]$。(3) 使用步骤 1 中获得的 X 的样本路径，计算取值于 $\mathcal{H}^1$ 的路径 $t \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t]$ 的签名以及期望二阶签名 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)]$。

上述方法最关键的缺陷有两个：首先，条件分布 $\mathbb{P}(X \in \cdot|\mathcal{F}_t)$ 通常不易采样；其次，由于签名映射的取值属于无限维空间，必须对签名进行截断才能求得数值解。因此，如果 X 的陪域维数 d 较高，计算截断签名的代价就会非常高（因为截断签名的维数呈指数增长）。更糟糕的是，这里还需要考虑对二阶签名 S^2 进行截断；它取值于无限维空间的张量代数，而该空间具有非常复杂的代数结构（见 [BLO22，附录 B。2]）。因此，涉及截断过程的上述方法在实践中似乎不可行。

本节将说明，得益于 $\mathcal{H}^1$ 和 $\mathcal{H}^2$ 的希尔伯特空间结构，以及签名 S和 S^2所满足的特殊动力学，我们无需对条件分布进行采样，也无需对签名进行任何截断，就能计算 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot)$；只需在 $\mathbb{P}$ 下生成 X 的样本，并求解有限组同类型的二维线性双曲型偏微分方程。我们新算法的核心方案是所谓的高阶条件签名核均值嵌入（高阶条件核均值嵌入），该方法在 [SLL+21]中提出；另一个核心是 [CLSY20], 中发展的签名偏微分方程技巧，详见下文。

3.1. 条件签名核均值嵌入。为了数值计算二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)]\|_{\mathcal{H}^2}$，我们首先将该距离改写为条件签名核均值嵌入的形式（而非直接使用秩 2 签名），从而能够借助核学习中的工具设计高效的数值方案，见下一小节。

令 S 为 $\mathbb{R}^d$值路径的（时间增强）签名，其定义如定义 2.7 所述，相应的签名核 k_S 定义为

$$k_S(x,y) := \langle S(x), S(y)\rangle_{\mathcal{H}^1}, \quad x,y \in (\mathbb{R}^d)^I. \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ 表示再生核希尔伯特空间（再生核希尔伯特空间），其中 k_S 为再生核。对于滤过程 $\mathbb{X} \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$，且满足 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，我们将其（签名）核均值嵌入定义为

$$\mu_X := \int_{(\mathcal{K})^I} k_S(x,\cdot)\mathbb{P}_X(dx),$$

这是一个定义良好的 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ 值 Bochner 积分，因为 $\mathcal{K}$ 是紧致的，且签名映射 S 连续（参见 A.2.1 节）。接着，对于另一个滤过程 $\mathbb{Y} \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$，利用

再生性质

$$\langle k_S(x,\cdot), k_S(y,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{S}} = \langle S(x), S(y)\rangle_{\mathcal{H}^1} \tag{3.2}$$

我们得到 1 阶秩最大均值差异的另一种表述：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^1_\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2 &= \|\mathbb{E}_\mathbb{P}[S(X)] - \mathbb{E}_\mathbb{Q}[S(Y)]\|^2_{\mathcal{H}^1}\\ &= \int \langle S(x), S(x')\rangle_{\mathcal{H}^1} \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_X(dx, dx')\\ &\quad + \int \langle S(y), S(y')\rangle_{\mathcal{H}^1} \mathbb{Q}_Y \otimes \mathbb{Q}_Y(dy, dy')\\ &\quad - 2\int \langle S(x), S(y)\rangle_{\mathcal{H}^1} \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{Q}_Y(dx, dy)\\ &= \|\mu_X - \mu_Y\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}.\end{aligned}$$

为了获得二阶秩最大均值差异的类似表达式，我们通过以下方式定义 $\hat{}X^1_t = \mathbb{P}(X \in \cdot|\mathcal{F}_t)$ 的条件核均值嵌入（CKME）via

$$\mu_{\hat{X}^1_t} = \int k_S(x,\cdot)\hat{X}^1_t(dx) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[k_S(X,\cdot)|\mathcal{F}_t]. \tag{3.3}$$

显然，$\mu_{\hat{X}} = (\mu_{\hat{X}^1_t})_{t\in I}$ 是一个 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$值随机过程。令 $S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}$ 为定义在 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$值路径上的（时间增强）签名映射，令 $k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}$ 为相应的签名核，由此得到一个具有再生核 $k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}$的“高阶”再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}^2_\mathcal{S}$。更明确地说， $\mathcal{H}^2_\mathcal{S}$ 是包含于定义在$(\mathcal{H}_\mathcal{S})^I$ 上的实值连续函数空间中的一个希尔伯特空间，使得对于所有$\hat{}x$、$\hat{}y \in (\mathcal{H}_\mathcal{S})^I$，以下再生性质成立：

$$\langle k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}(\hat{x},\cdot), k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}(\hat{y},\cdot)\rangle_{\mathcal{H}^2_\mathcal{S}} = \langle S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}(\hat{x}), S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}(\hat{y})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_\mathcal{S}}} \tag{3.4}$$

其中，希尔伯特空间 $\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_\mathcal{S} \subset \mathsf{T}((\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_\mathcal{S}))$ 的定义见附录 A.1。我们将 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 的二阶（签名）核均值嵌入定义为

$$\mu^2_{\hat{X}^1} := \int_{\hat{x}\in(\mathcal{H}_\mathcal{S})^I} k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}(\hat{x},\cdot)\mathbb{P}_{\mu_{\hat{X}^1}}(d\hat{x}) \in \mathcal{H}^2_\mathcal{S}.$$

引理 3.1. 对于 $\mathbb{X}$、$\mathbb{Y} \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$，

$$\mathcal{D}^2_\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \|\mu^2_{\hat{X}^1} - \mu^2_{\hat{Y}^1}\|_{\mathcal{H}^2_\mathcal{S}}.$$

上述引理的证明高度依赖于这一事实：出现在 (3.1) 和 (3.4) 中的内积是所谓的 Goursat 偏微分方程的解，参见附录 E。

注 3.2。尽管我们将二阶核均值嵌入写作 $\mu^2_{\hat{X}^1}$，但应牢记，它实际上取决于 $\hat{}X^1$ 的分布。由于根据预测过程的定义，对于每个 $t \in I$，$\hat{}X^2_t$ 的取值空间与包含 $\mathcal{L}(\hat{}X^1)$ 的空间相同，因此二阶 CKME $\mu^2_{\hat{X}^2_t}$ 是良定义的，这与我们在 (3.3) 中定义 $\mu_{\hat{X}^1}$ 的方式相同。因此，我们可以定义取值于 $\mathcal{H}^3_\mathcal{S}$ =“$\mathcal{H}_\mathcal{S}\circ\mathcal{H}_\mathcal{S}\circ\mathcal{H}_\mathcal{S}$”的三阶核均值嵌入 $\mu^3_{\hat{X}^2}$。继续这一过程，对于任意 $r \geq 1$，我们都可以构造取值于 $\mathcal{H}^r_\mathcal{S}$ 的 r 阶核均值嵌入 $\mu^r_{\hat{X}^{r-1}}$；结合归纳论证和引理 3.1 证明中使用的论证，我们可以证明 $\mathcal{D}^r_\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \|\mu^r_{\hat{X}^{r-1}} - \mu^r_{\hat{Y}^{r-1}}\|_{\mathcal{H}^r_\mathcal{S}}$，其中 $\mathcal{D}^r_\mathcal{S}$ 表示使二阶适应拓扑度量化的二阶签名最大均值差异，见附录 C。

3.2. 高阶核均值嵌入的经验估计。本节将基于上一小节引入的二阶核均值嵌入，提出一种可行的数值实现方法，用于计算二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot)$。这里再次强调，所有滤过过程均配备自然滤过，即我们将关注集合 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 中的元素。这一设定使我们能够根据由 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 生成的样本外路径，估计高阶最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$。

回想一下，根据引理 3.1，我们有 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2 = \|\mu^2_{\hat{X}^1} - \mu^2_{\hat{Y}^1}\|^2_{\mathcal{H}^2_{\mathcal{S}}}$ and

$$\mu^2_{\hat{X}^1} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\mu_{\hat{X}^1},\cdot)], \quad \mu^2_{\hat{Y}^1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\mu_{\hat{Y}^1},\cdot)]$$

with $\mu_{\hat{X}^1} = (\mu_{\hat{X}^1_t})_{t\in I}$, $\mu_{\hat{X}^1_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X,\cdot)|\mathcal{F}_t]$，而且对于 $\mu_{\hat{Y}^1}$ 也有类似的表达式。从上述方程可以看出，$\mu^2_{\hat{X}^1}$ 是关于 $\mathcal{L}(\mu_{\hat{X}^1})$ 的核 $k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}$ 的期望。由于我们要求 $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$，对于每个 $t \in I$，都存在一个可测函数 $F_{t,k_S}\colon \mathcal{K}^{I_t} \to \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$，使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X,\cdot)|\mathcal{F}_t] = F_{t,k_S} \circ X|_{I_t}$$

其中 $I_t = \{s \in I : s \le t\}$，且 $X|_{I_t} = (X_s)_{s\in I_t}$ 是 X 在 I_t 上的限制。因此，为了计算 $\mu^2_{\hat{X}^1}$，首要且最重要的任务是为可测函数 F_{t,k_S} 构造一个相合估计量 $\widehat{F_{t,k_S}}\colon \mathcal{K}^{I_t} \to \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$。

为了构造这样的估计量，我们将采用 [PM20] and[PM21] 中提出的方案：粗略地说，由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X,\cdot)|\mathcal{F}_t] = F_{t,k_S} \circ X|_{I_t}$, F_{t,k_S} 是在所有可测映射 $F \in L^2(\mathcal{K}^{I_t}, \mathcal{H}_{\mathcal{S}}, \mathbb{P}_{X|_{I_t}})$ 中，使损失函数 $\mathbb{E}[\|k_S(X,\cdot) - F(X|_{I_t})\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}]$ 最小化的映射，
这提示我们在该 L 空间内求解此最小化问题。 ^{2} 欲进一步为降低复杂度，我们只考虑来自较小子空间的候选项。
为此，设 $k_{S_t}(\cdot,\cdot)$ 为定义在 $\mathcal{K}^{I_t}$ 上的签名核，其定义为 $k_{S_t}(v,w) = \langle S(v)\ S(w)\rangle_{\mathcal{H}^1}$，其中路径为 $v, w \in \mathcal{K}^{I_t}$，并且可以将其视为签名核 $k_S(\cdot,\cdot)$ 在定义于子区间 I_t 上的路径空间上的限制。随后，我们定义 $\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$ 为由 $\mathcal{H}_S$–核 $\Gamma_t = k_{S_t}(\cdot,\cdot)\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_S}$ 所诱导的 $\mathcal{H}_S$–值再生核希尔伯特空间。这意味着，$\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$ 是一个希尔伯特空间，其元素是从 $\mathcal{K}^{I_t}$ 到 $\mathcal{H}_S$ 的函数，且其内积满足：

$$\langle f(z), h\rangle_{\mathcal{H}_S} = \langle f, k_{S_t}(\cdot,z)h\rangle_{\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}}, \quad \langle h, k_{S_t}(z,z')h'\rangle_{\mathcal{H}_S} = \langle k_{S_t}(\cdot,z)h, k_{S_t}(\cdot,z')h'\rangle_{\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}}$$

对于所有 $h, h' \in \mathcal{H}_S$ 和 $z, z' \in \mathcal{K}^{I_t}$。得益于签名核 k_{S_t} 的良好性质，可以证明希尔伯特空间 $\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$ 在 $L^2(\mathcal{K}^{I_t}, \mathcal{H}_{\mathcal{S}}, \mathbb{P}_{X|_{I_t}})$ 中是稠密的，关于这些涉及向量值再生核希尔伯特空间的论证，详见附录 B。

现在，由于 $\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$ 的稠密性，只需考虑在所有元素 $F \in \mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$ 上的最小化问题 $\mathbb{E}[\|k_S(X,\cdot) - F(X|_{I_t})\|^2_{\mathcal{H}_S}]$。因此，可以合理地认为，给定独立同分布样本路径 $(\bar{x}^i)_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$，带有正则化参数 $\lambda_M > 0$ 的正则化经验替代损失（此处，我们需要 λ_M 比 $\mathcal{O}(M^{-1/2})$ 更慢地趋于 0，以保证下文定理 3.3 中的收敛性，见 [PM21, 定理 4.4]）在 $\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}$

$$\hat{\mathcal{E}}_{X|_{I_t},M,\lambda_M}(F) := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\|k_S(\bar{x}^i,\cdot) - F(\bar{x}^i|_{I_t})\|^2_{\mathcal{H}_S} + \lambda_M\|F\|^2_{\mathcal{G}^t_{\mathcal{H}_S}}$$

应当是所需函数的一个良好估计量 $F_{t,\ k_S}$。鉴于 [PM20，第 4], 节，极小化量具有如下形式：

$$\widehat{F}_{t,k_S}((\bar{x}^i)_{i\le M},\cdot) = \mathbf{k}^X_t(\cdot)(\mathbf{K}^X_{t,t} + M\lambda_M \mathrm{I}_M)^{-1}\mathbf{k}^X_T, \tag{3.5}$$

其中，$\mathbf{k}_t^X(\cdot) = (k_{S_t}(\bar{x}^i|_{I_t}, \cdot))_{i=1,\dots,M}$：$\mathcal{K}^{I_t} \to \mathbb{R}^M$是在$\mathcal{K}^{I_t}$上取值于 $\mathbb{R}^M$ 的（连续）函数，$\mathbf{K}_t^X$，$_t = ([\mathbf{K}_t^X, _t]_{i,j})_{i,j=1,\dots,M}$ 是一个元素为 $[\mathbf{K}_t^X, _t]_{i,j} = k_{S_t}(\bar{x}^i|_{I_t}, \bar{x}^j|_{I_t})$ 的 $M \times M$ 矩阵，$\mathbf{k}_T^X = (k_S(\bar{x}^i, \cdot))_{i=1,\dots,M}$是 $(\mathcal{H}_S)^M$ 中的一个向量，而 $\mathbf{I}_M$是 $M \times M$ 单位矩阵。注意，$\mathbf{k}_t^X(\cdot)$、$\mathbf{K}_t^X, _t$ 和 $\mathbf{k}_T^X$ 都依赖于样本路径 $(\bar{x}^i)_{i\le M}$（为简化记号，我们在式（3.5）右侧省略了这些依赖关系）；$\mathbf{k}_t^X(\cdot)$ 的下标 t 强调该函数仅依赖于子区间 I_t 上的样本路径，而 $\mathbf{k}_T^X$ 的下标 T 表示该向量依赖于 I上样本路径的完整轨迹。特别地，我们使用记号 $\widehat{F_{t,k_S}}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot)$，以强调该估计量对样本路径 $(\bar{x}^i)_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$的依赖关系。

给定的 独立同分布样本路径（$\bar{x}^i$）$_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$，我们定义取值于 $\mathcal{H}_S$ 的随机过程

$$\hat{\mu}_{\hat{X}_t^1}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot) := \widehat{F_{t,k_S}}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot),$$

$t \in I$（定义在路径空间 $\mathcal{K}^I$ 上）。以下定理证明，$\hat{}\mu_{\hat{}X_t^1}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot)$ 确实是我们条件核均值嵌入过程 $\mu_{\hat{}X_t^1} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X, \cdot)|\mathcal{F}_t]$, $t \in I$ 的相合估计量。

定理 3.3. 对任意 $\mathbb{X} \in \Lambda_{plain}(\mathcal{K})$，有以下结论。

$$\lim_{M\to\infty} \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[k_{S_{\mathcal{H}_S}}(t \mapsto \hat{\mu}_{\hat{X}_t^1}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot))] - \mu^2_{\hat{X}^1}\|_{\mathcal{H}_S^2} = 0$$

对于$(\bar{x}^i)_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$的独立同分布实现，在 λ_M 以慢于 $\mathcal{O}(M^{-1/2})$的速率趋于 0 的条件下，以概率收敛。

证明。上述定理的证明基于签名核 k_S 的普适性（见附录 B）以及签名映射的解析性质（见 A.2.1 节）。所有细节请参见 [SLL+21, 定理 7] 的证明。□

借助上述定理，我们可以通过计算其经验对应量 $\|\hat{}\mu^2_{\hat{X}^1} - \hat{}\mu^2_{\hat{Y}^1}\|_{\mathcal{H}_S^2}$，以任意高的精度逼近 $\mathcal{D}_S^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \|\mu^2_{\hat{X}^1} - \mu^2_{\hat{Y}^1}\|_{\mathcal{H}_S^2}$，其中

$$\hat{\mu}^2_{\hat{X}^1} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[k_{S_{\mathcal{H}_S}}(t \mapsto \hat{\mu}_{\hat{X}_t^1}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot))]$$

并且通过对足够大的 M 和 N 使用 $(\bar{x}^i)_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$ 和 $(\bar{y}^j)_{j\le N} \sim \mathbb{Q}_Y$，得到 $\hat{}\mu^2_{\hat{Y}^1}$：$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_Y}[k_{S_{\mathcal{H}_S}}(t \mapsto \hat{}\mu_{\hat{}Y_t^1}((\bar{y}^j)_{j\le N}, \cdot))]$。现在我们固定样本 $(\bar{x}^i)_{i\le M} \sim \mathbb{P}_X$ 和 $(\bar{y}^j)_{j\le N} \sim \mathbb{Q}_Y$，为简便起见，记 $t \mapsto \hat{}\mu_{\hat{}X_t^1}((\bar{x}^i)_{i\le M}, \cdot) = \hat{}\mu_{\hat{}X^1}$，以及 $t \mapsto \hat{}\mu_{\hat{}Y^1}((\bar{y}^j)_{j\le N}, \cdot) = \hat{}\mu_{\hat{}Y^1}$。按照引理 3.1 的证明中对 $\|\hat{}\mu^2_{\hat{X}^1} - \hat{}\mu^2_{\hat{Y}^1}\|^2_{\mathcal{H}_S^2}$ 使用极化展开，然后用经验测度 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{x^i}$ 近似其中涉及的所有项（对于带有 $(x^i)_{i\le m} \sim \mathbb{P}_X$ 的 $\mathbb{P}_X$）以及用经验测度 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{y^j}$ 近似（对于带有 $(y^j)_{j\le n} \sim \mathbb{Q}_Y$ 的 $\mathbb{Q}_Y$），最终可得 $\|\hat{}\mu^2_{\hat{X}^1} - \hat{}\mu^2_{\hat{Y}^1}\|^2_{\mathcal{H}_S^2}$ 的无偏经验估计量：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}_S^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})^2 = &\frac{1}{m(m-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^m k_{S_{\mathcal{H}_S}}(\widetilde{x}^i, \widetilde{x}^j) - \frac{2}{mn}\sum_{i,j=1}^{m,n} k_{S_{\mathcal{H}_S}}(\widetilde{x}^i, \widetilde{y}^j) \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^n k_{S_{\mathcal{H}_S}}(\widetilde{y}^i, \widetilde{y}^j)\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\tilde{x}_t^i := \hat{\mu}_{X_t^1}(x^i|_{I_t}) = \widehat{F_{t,k_S}}((\bar{x}^k)_{k\le M}, x^i|_{I_t})$，$t \in I$ 且 $\tilde{y}_t^j := \hat{\mu}_{Y_t^1}(y^j|_{I_t}) = \widehat{F_{t,k_S}}((\bar{y}^k)_{k\le N}, y^j|_{I_t})$ $t \in I$。由于 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{x^i} \to \mathbb{P}_X$、$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{y^j} \to \mathbb{Q}_Y$ 随着 m、$n \to \infty$ 弱收敛，且经验估计量 $\widehat{F_{t,\ k_S}}$ 是连续的，我们确实得到

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2 \to \|\hat{\mu}_{\hat{X}^1}^2 - \hat{\mu}_{\hat{Y}^1}^2\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^2}^2 \approx \mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$$

作为 $m,n \to \infty$。这一观察结合定理 3.3，立即推出经验 2 阶最大均值差异 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 收敛到真实度量 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 的预期行为：

定理 3.4。对于任意 $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in \Lambda_{plain}(\mathcal{K})$，$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是 2 阶最大均值差异的相合估计量，即

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \to \mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$$

依概率收敛，其中 $m,n \to \infty$ 且 $M,N \to \infty$；前提是其定义中出现的参数 λ_M, λ_N 分别以慢于 $\mathcal{O}(M^{-1/2})$ 和 $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ 的速度趋于 0。

3.3. 签名核偏微分方程技巧。得益于定理 3.4，我们可以通过计算其经验对应量 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$，来近似 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})$。根据其表达式 (3.6)，计算该估计量归结为：对某些 i,j，求出 $\tilde{x} = \tilde{x}^i$ 和 $\tilde{y} = \tilde{y}^j$ 的签名核 $k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\tilde{x},\tilde{y})$。根据 CLSY20 的定理 2.5]，签名核 $k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\tilde{x},\tilde{y})$ 是下列双曲型偏微分方程的唯一解 $u(T,T)$，该方程也称为古尔萨问题：

$$\frac{\partial^2 u_{\tilde{x},\tilde{y}}}{\partial s \partial t} = \langle \frac{\partial}{\partial t}\tilde{x}_t, \frac{\partial}{\partial s}\tilde{y}_s \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} u_{\tilde{x},\tilde{y}}$$

其中，我们通过线性插值将 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 视为 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ 中的连续路径（见注 A.3）。由于上述方程中的两个导数可以用时间增量为 δ 的有限差分近似，因此可以通过求解其离散化版本来近似上述古尔萨问题的解：

$$\frac{\partial^2 u_{\tilde{x},\tilde{y}}}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\delta^2}\left(\langle \tilde{x}_{t-\delta}, \tilde{y}_{s-\delta} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - \langle \tilde{x}_{t-\delta}, \tilde{y}_s \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} - \langle \tilde{x}_t, \tilde{y}_{s-\delta} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} + \langle \tilde{x}_t, \tilde{y}_s \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \right) u_{\tilde{x},\tilde{y}} \tag{3.7}$$

现在利用 $\tilde{x}_t := \hat{\mu}_{X_t^1}(x|_{I_t}) = \widehat{F_{t,k_S}}((\bar{x}^k)_{k\le M}, x|_{I_t})$，$t \in I$和 $\tilde{y}_s := \hat{\mu}_{Y_s^1}(y|_{I_s}) = \widehat{F_{s,k_S}}((\bar{y}^k)_{k\le N}, y|_{I_s})$，$s \in I$，根据表达式 (3.5) 对于 $\widehat{F_{t,k_S}}$，我们可以直接验证 $\forall s,t \in I$

$$\langle \tilde{x}_t, \tilde{y}_s \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} = \mathbf{k}_s^x (\mathbf{K}_{t,t}^X + M\lambda_M \mathrm{I}_M)^{-1} \mathbf{K}_{T,T}^{X,Y} (\mathbf{K}_{s,s}^Y + N\lambda_N \mathrm{I}_N)^{-1} \mathbf{k}_s^y, \tag{3.8}$$

其中 $\mathbf{k}_t^x \in \mathbb{R}^M$ 和 $\mathbf{k}_t^s \in \mathbb{R}^N$ 是向量

$$[\mathbf{k}_t^x]_i = k_{S_t}(\bar{x}^i|_{I_t}, x|_{I_t}), \quad [\mathbf{k}_s^y]_j = k_{S_s}(\bar{y}^j|_{I_s}, y|_{I_s}), \quad i \le M, j \le N \tag{3.9}$$

以及 $\mathbf{K}_{s,s}^X \in \mathbb{R}^{M\times M}$, $\mathbf{K}_{T,T}^{X\ Y} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ 以及 $\mathbf{K}_{t,t}^Y \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是矩阵

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{t,t}^X]_{i,j} &= k_S(\bar{x}^i|_{I_t}, \bar{x}^j|_{I_t}), \quad [\mathbf{K}_{T,T}^{X,Y}]_{i,j} = k_S(\bar{x}^i, \bar{y}^j), \\ [\mathbf{K}_{s,s}^Y]_{i,j} &= k_S(\bar{y}^i|_{I_s}, \bar{y}^j|_{I_s}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

现在，再次对这些与 S关于 $\mathcal{K}^I$的正规签名映射相关的核应用签名核偏微分方程技巧 [CLSY20 定理 2.5] ，即 $k_S(\bar{x}^i,\bar{y}^j)$ 是古尔萨问题的唯一解 $u(T,T)$

$$\frac{\partial^2 u_{\bar{x}^i,\bar{y}^j}}{\partial s \partial t} = \langle \frac{\partial}{\partial t}\bar{x}_t^i, \frac{\partial}{\partial s}\bar{y}_s^j \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} u_{\bar{x},\bar{y}}$$

（对于 $k_S(\bar{x}^i|_I, \bar{x}^j|_I)$ 和 $k_S(\bar{y}^i|_I, \bar{y}^j|_I)$，也有类似的表达式），我们可以计算上述向量和矩阵，从而得到式 (3.8) 中 $\langle \tilde{x}^i_t, \tilde{y}^j_s \rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}$ 对所有 i, j 的数值解。然后，将它们代回偏微分方程 (3.7) 的系数中，我们可以计算高阶核 $k_{S_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}}(\tilde{x}^i, \tilde{y}^j)$，最后通过公式 (3.6)，使用样本路径 $\tilde{x}^i$、$\tilde{y}^j$, $i \le m$ 和 $j \le n$，得到经验估计量 $\widehat{\mathcal{D}}^2_\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的所需数值结果。

3.4. 算法概述。现在，我们将计算估计量 $\widehat{\mathcal{D}}^2_\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$（其中 $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$）的算法总结为下图。为简化记号，假设（在定理 3.4 的语境下） $M = m$, $N = n$, $\bar{x}^i = x^i$, $i = 1, \dots, m$ and$\bar{y}^j = y^j$, $j = 1, \dots, n$ 分别是来自 $\mathbb{P}_X$ 和 $\mathbb{Q}_Y$ 的样本。还请回忆， $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$定义在离散时间区间 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ 上，其中$N \ge 1$为某个整数。

算法 1 PDESolve $\mathcal{O}(N^2)$

输入：矩阵 $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 其中 $[M]_{p,q} = \langle x^i_{s_{p+1}} - x^i_{s_p},\ y^j_{t_{q+1}} - y^j_{t_q} \rangle_{\mathbb{R}^d}$，完整 $\in$ {True, False}
输出：完整解 $u \in \mathbb{R}^{N \times N}$ with $u[p, q] = k_S(x|_{I_t}{}_p, y|_{I_{t_q}})$ 或 $u[-1, -1] = k_S(x, y)$
$u[1, :] \leftarrow 1$
$u[:, 1] \leftarrow 1$
对于 p，从 1 到 $N-1$，执行
    对于 q，从 1 到 $N-1$，执行
        $u[p+1, q+1] \leftarrow f(u[p, q+1], u[p+1, q], u[p, q], M[p, q])$
if full then return u else return $u[-1, -1]$

算法 2 一阶 Gram 矩阵 $\mathcal{O}(dm^2N^2)$

输入：样本路径 $\{x^i\}_{i=1}^m \sim \mathbb{P}_X$ 和 $\{y^j\}_{j=1}^n \sim \mathbb{Q}_Y$，完整 $\in$ {True, False}
输出：$G \in \mathbb{R}^{m \times n \times P \times Q}$ 其中 $G[i, j, p, q] = k_S(x^i|_{I_s}{}_p, y^j|_{I_{t_q}})$ 或 $G[:, :-1, -1]$
$M[i, j, p, q] \leftarrow \langle x^i_{s_p},\ y^j_{t_q} \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}, p \in \{1, \dots, P\},\ q \in \{1, \dots, Q\}$
$M \leftarrow M[:, :, 1:, 1:] + M[:, :, :-1, :-1] - M[:, :, 1:, :-1] - M[:, :, :-1, 1:]$
$G[i, j] \leftarrow$ 偏微分方程求解器$(M[i, j]), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}$
如果完整，则返回 G，否则返回 $G[:, :-1, -1]$

算法3 InnerProdPredCondKME $\mathcal{O}(N^2m^3)$

输入：三个 Gram 矩阵 G_{XX}, G_{XY}, G_{YY} 和超参数λ，其中 $G_{XY}[i,j,p,q] = k_S(x^i|_{I_{s_p}}\ y^j|_{I_{t_q}})$以及 G_{XX}和 G_{YY}的类似表达式。
输出：返回 M的经验估计量 $\in \mathbb{R}^{m\times n\times N\times N}$其中 $M[i,j,p,q] = \langle \widetilde{x}^i_{s_p}\ \widetilde{y}^j_{t_q}\rangle$
$W_X[:,:p] \leftarrow (G_{XX}[:,:p,p] + m\lambda I)^{-1}, \quad \forall p \in \{1,\dots,P\}$
$W_Y[:,:q] \leftarrow (G_{YY}[:,:q,q] + n\lambda I)^{-1}, \quad \forall q \in \{1,\dots,Q\}$
对于 p 从 1 到 P 执行
    对于 q，从 1 到 Q，执行
        $M[:,:p,q] \leftarrow G_{XX}[:,:p,p]^T W_X[:,:p] G_{XY}[:,:-1,-1] W_Y[:,:q] G_{YY}[:,:q,q]$

算法 4 SecondOrderGram $\mathcal{O}(N^2m^3)$

输入：G_{XX}, G_{XY}, G_{YY}和超参数 λ.输出：$G^2_{X,Y}$的经验估计量$\in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $G^2_{X,Y}[i,j] = k_{S_{\mathcal{H}_S}}(\widetilde{x}^i, \widetilde{y}^j)$$M \leftarrow$ InnerProdPredCondKME$(G_{XX}, G_{XY}, G_{YY}, \lambda)$
$M \leftarrow M[:,:,1:,1:] + M[:,:,:-1,:-1] - M[:,:,1:,:-1] - M[:,:,:-1,1:]$
$G^2_{XY}[i,j] \leftarrow$ PDESolve$(M[i,j]) \quad \forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}$返回 G^2_{XY}

算法 5 二阶最大均值差异 $\mathcal{O}(dm^2N^2 + N^2m^3)$

输入：样本路径 $\{x^i\}_{i=\ \ 1}^m \sim \mathbb{P}_X$ 和 $\{y^j\}_{j=\ 1}^n \sim \mathbb{Q}_Y$，超参数 λ。
输出：2^{nd} 阶最大均值差异的经验估计量 $\widehat{\mathcal{D}}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$。
$G^1_{XX} \leftarrow$一阶 Gram 矩阵$(\{x^i\}_{i=1}^m, \{x^i\}_{i=1}^m,$ full $=$True$)$
$G^1_{XY} \leftarrow$一阶 Gram 矩阵$(\{x^i\}_{i=1}^m, \{y^j\}_{j=1}^n,$ full $=$True$)$
$G^1_{YY} \leftarrow$一阶 Gram 矩阵$(\{y^j\}_{j=1}^n, \{y^j\}_{j=1}^n,$ full $=$True$)$
$G^2_{XX} \leftarrow$ SecondOrderGram$(G^1{}_{XX}, G^1_{XX}, G^1_{XX}\ \lambda)$
$G^2_{XY} \leftarrow$ SecondOrderGram$(G^1{}_{XX}, G^1_{XY}, G^1_{YY}\ \lambda)$
$G^2_{YY} \leftarrow$ SecondOrderGram$(G^1{}_{YY}, G^1_{YY}, G^1_{YY}\ \lambda)$
返回 avg$(G^2{}_{XX}) - 2 *$ 平均值$(G^2_{XY}) +$ 平均值(G^2_{YY})

最后，根据定理 2.14，我们得到一个相合估计量 $\hat{}\ K^2_{\mathcal{S}} := \exp(-\sigma^2\widehat{\mathcal{D}}^2_{\mathcal{S}})$，用于估计（2 阶）分布回归核 $K^2_{\mathcal{S}}$。因此，给定由输入–输出对 $\mathcal{D} = \{(\mathbb{Y}^i, v_i)\}_{i=1}^M$ 构成的数据集，其中 $\mathbb{Y}^i \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 是金融模型，v_i 是 $v(\mathbb{Y}^i) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{Y}^i}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^i}[\gamma(Y^i_\tau)]$ 的值（在数理金融的背景下，它是市场上由 $\mathbb{Y}^i$ 建模的模型对应的美式期权的公平价格），我们可以通过 2 阶核 $\hat{}\ K^2_{\mathcal{S}}$ 执行核岭回归。更准确地说，$\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 上的近似价值函数 $\hat{}v(\cdot)$ 具有如下形式：

$$\hat{v}(\cdot) = \sum_{i=1}^{M} a_i \hat{K}^2_{\mathcal{S}}(\cdot, \mathbb{Y}^i), \tag{3.11}$$

其中，$\mathsf{a} = (a_i)_{i \le M} = (\widehat{\mathbf{K}}^2_{\mathcal{S}} + \lambda \mathbf{I}_M)^{-1}\mathbf{v}$，$[\widehat{\mathbf{K}}^2_{\mathcal{S}}]_{ij} = \hat{K}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{Y}^i, \mathbb{Y}^j)$。最后，要在新的模型 $\mathbb{X}$ 上计算 $\hat{v}(\cdot)$，我们需要使用上述算法计算 M 维向量 $(\hat{K}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}^i))_{i \le M}$。

3.5. 数值示例。本节通过实验研究所提出的签名核算法在以下两个最优停止问题中的有效性：

（1）具有几何平均看跌期权收益的美式篮子期权定价；（2）分数布朗运动的最优停止。

更具体地说，我们将这些问题视为从路径空间上的概率测度到 $\mathbb{R}$ 的分布回归问题，并为经典核岭回归（KRR）算法 [CST+00] 配备前文研究的特征核 $K^2_{\mathcal{S}}$，再将其表现与经典算法进行比较。所有实验均在 NVIDIA Tesla P100 GPU 上运行。

3.5.1. 美式篮子期权定价。美式期权赋予持有人在到期日之前的任意时刻行使期权的权利，但没有必须行使的义务，其对应的收益函数 Φ 为非负。美式期权可以用百慕大期权近似，后者只能在特定日期 $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N$ 行使。如果时间网格选取得足够细，美式期权就能被百慕大期权很好地近似。对于 $d \in \mathbb{N}$，我们考虑布莱克-斯科尔斯模型，其中股票价格由一个 d 维几何布朗运动 $(X_t)_{t \ge 0}$ 描述。在时刻 $t \in [0, T]$、初始股票价格为 $X_t = x \in \mathbb{R}^d$ 时，美式期权的价格 $V(t, x)$ 可表述为以下最优停止问题

$$V(t,x) = \sup_{\tau \in [t,T]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(\tau - t)} \Phi(S_\tau) \middle| S_t = x \right]$$

收益函数为 $\Phi\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$，其中上确界取遍所有停时。这里，我们考虑如下定义的几何平均看跌期权收益

$$\Phi(x) = \left(K - \left(\prod_{i=1}^{d} x_i \right)^{1/d} \right)_+$$

执行价格为 $K > 0$。

备注 3.5。如 [LL21]，所述，遵循布莱克–斯科尔斯模型的 d 维股票上的几何平均看跌期权，等价于遵循布莱克–斯科尔斯模型、参数经过调整的一维股票上的一维看跌期权。这一观察为通过 CRR二叉树方法 [CRR79]，推导“真实值”衍生品价格提供了一种途径：随着树的深度趋于无穷，用该方法计算出的价格将收敛到布莱克–斯科尔斯模型下的正确价格。随后，可以用这个真实值作为基准来评估其他算法的性能，正如我们将在下文中所做的那样。

为进行核岭回归，我们考虑经典的监督学习设定，并构建一个由 $N = 100$ 输入-输出对组成的数据集 $\{(\mathcal{X}_i, y_i)\}_{i=1}^N$，其中：

- $\mathcal{X}_i = \{x^{i,j}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d\}_{j=1}^{n_i}$ 是从一个 d维布莱克-斯科尔斯模型中抽样得到的一组 n_i 条路径，利率固定为 $r = 2\%$，$d = 20$ 波动率在时间网格 $\{0, T/\ell, 2T/\ell, ..., T\}$ 上均匀随机抽样，$\ell = 10$与 [HKRT21]中相同。为简化起见，我们设定 $n_1 = ... = n_N = n$。

- y_i 是使用深度为 10000 的树，通过二项树方法得到的美式期权价格，其执行价格为 $K = 100$，到期日为 $T = 1$。

数据集被随机拆分为大小为 $N_{\text{train}} = 90$ 的训练集和大小为 $N_{\text{test}} = 10$ 的测试集。我们在训练集上拟合核岭回归，并在测试集上评估模型。

备注 3.6。请注意，此处我们将粗离散化下的样本路径用作模型的输入，而目标标签 $\{y_i\}_{i=1}^N$ 是通过精细得多的离散化获得的；可以认为该离散化已收敛至真实的美式期权价格。这意味着，我们的算法将百慕大期权价格作为真实美式期权价格的近似值来学习。

我们将监督学习核方法与最先进的 Longstaff 和 Schwartz（LS）算法进行基准比较。该算法见 [LS01]。我们通过统计两种方法分别需要多少条样本路径 n，才能使其相对于格点方法得到的目标价格的近似误差 ε 达到要求，来进行比较。我们使用平均绝对百分比误差（MAPE），即 $\varepsilon = N_{\text{test}}^{-1} \sum_{i=1}^{N_{\text{test}}} |(\hat{y}_i - y_i)/y_i|$，其中 $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^{N_{\text{test}}}$ 是由任一算法预测的价格。我们使用 [HKRT21] 中提供的代码，应用 LS 算法，并采用最高次数为二次的泰勒多项式作为基函数，这一做法符合 [HKRT21] 中的建议。如表 1 所示，高阶秩签名方法，即使用核 $K_{\mathcal{S}}^2$ 和 $K_{\mathcal{S}}^1$ 的核岭回归，生成达到所需精度的模型都显著减少了所需的样本路径数量。我们观察到，对于高阶秩签名方法，回归是在 N_{train} 个基准模型上拟合的，因此依赖于 $n \times N_{\text{train}}$ 条样本路径。然而，对于任何新的预测，$n \times N_{\text{train}}$ 条训练样本路径都是固定的，无需重新采样；只需额外增加 n 个样本即可。因此，对于总计 N_{test} 个新预测，我们有 $n(N_{\text{train}} + N_{\text{test}}) \approx nN_{\text{test}}$，当 $N_{\text{train}} << N_{\text{test}}$ 时。

TABLE 1. 布莱克–斯科尔斯模型下的几何平均看跌期权。样本数为 n 时，测试集上的平均绝对百分比误差为 ε。

	$\varepsilon = 10\%$	$\varepsilon = 5\%$	$\varepsilon = 2.5\%$
Longstaff 和 Schwartz	8 000	16 000	60 000
高阶秩签名（秩 1）	50	250	1 000
高阶秩签名（秩 2）	50	200	500

3.5.2. 停止分数布朗运动。为了展示我们方法的灵活性，我们考虑第二个例子，这次是一个非马尔可夫型的停止分数布朗运动，遵循 [BHRS23]。更具体地说，我们考虑一个具有赫斯特指数 $H \in [0, 1$ 的一维分数布朗运动 X^H，并研究收益由底层过程本身给出的最优停止问题。

为了像前一个示例那样通过核岭回归执行此最优停止任务，我们构建一个由输入-输出对组成的数据集 $\{(\mathcal{X}_i, y_i)\}_{i=1}^N$，其中：

- $\mathcal{X}_i = \{x^{i,j} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2\}_{j=1}^{n_i}$ 是从赫斯特指数为 $H_i =$（$i + 1$）的时间增广分数布朗运动中采样得到的一组 n_i 条路径，适用于 $i = 1$，....., 39，时间网格为 $\{0, 1/\ell, 2/\ell, ..., 1\}$，且 $\ell = 10$。为简便起见，我们设定 $n_1 = ... = n_N = n = 500$；
- $\{y_i\}_{i=1}^N$ 是在 [BCJ19]，中使用 $\ell = 100$ 得到的值。

我们将 $H = i/10 \text{for } i = 1, \ldots, 10$ 作为测试集，并将其余所有样本作为训练集。作为评估模型性能的一种方式，我们在下表中报告了使用高阶签名方法获得的预测（前两列），并将其与 [BCJ19] 中获得的最优值的下界和上界估计（后两列）进行比较。正如可以观察到的，我们的预测接近目标区间。

TABLE 2. 分数布朗运动的最优停止。

H	高阶秩签名		[BCJ19]	
	秩 1	秩 2	下界	上界
0.1	1.085	**1.061**	1.048	1.049
0.2	**0.684**	0.689	0.658	0.659
0.3	0.363	**0.376**	0.369	0.380
0.4	0.137	**0.174**	0.155	0.158
0.5	0.070	**0.065**	0.000	0.005
0.6	0.177	**0.143**	0.115	0.118
0.7	**0.189**	0.229	0.206	0.207
0.8	**0.278**	**0.276**	0.276	0.278
0.9	0.324	**0.330**	0.336	0.339
1.0	0.375	**0.390**	0.395	0.395

4. SUMMARY AND FUTURE WORK

本节将简要总结本文所取得的主要成果，以及其背后蕴含的核心思想。

• 签名核回归方法可用于计算弱连续的路径依赖型衍生品定价泛函的价值。然而，由于最优停止问题的价值函数对于弱拓扑通常并不连续，这种基于标准期望签名的经典方法无法继续用于美式期权价格的数值计算。

• 为了解决这一不连续性问题，D. Aldous 引入了扩展弱拓扑的概念（本文也称为秩 1 适应拓扑），该拓扑是由三元组（X、$\mathbb{F}$、$\mathbb{P}$）的预测过程 $X_t = \mathbb{P}[X \in \cdot | \mathcal{F}_t] \, t \in I$ 所诱导的ˆ弱拓扑。此外，Aldous 证明，如果所有滤过都是自然的，即由过程本身生成，那么最优停止问题（附带连续有界收益函数）的价值函数关于扩展弱拓扑是连续的。

• 二阶签名 S^2 可被视为测度值路径 $\hat{}X_t$、 $t \in I$的签名。对于预测过程 $\hat{}X$， $S^2(\hat{}X)$ 取值于希尔伯特空间 $\mathcal{H}^2$，该空间嵌入于 $\mathcal{H}^1$的张量代数中，而后者是欧几里得空间值路径的标准签名 S 的目标空间。利用核学习中的技术，我们证明了期望的秩 2 签名之间的 $\mathcal{H}^2$–范数距离诱导出一个再生核 $K^2_{\mathcal{S}}(\cdot, \cdot)$，其相应的再生核希尔伯特空间在具有自然滤过的滤过过程集合上的有界扩展弱连续函数空间中稠密。因此，最优停止问题的价值函数可以通过线性

任意逼近核 $K^2_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)$ 的组合，就像用多项式逼近连续函数一样。

• 本文的一项主要贡献是，我们利用条件核均值嵌入方法，对核 $K^2_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)$ 进行经验估计，从而可以通过核回归求得美式期权价格的数值解。此外，得益于二阶签名所满足的内在动力学以及 $\mathcal{H}^2$ 的内积结构，我们证明，计算核 $K^2_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)$ 的数值方案本质上只需解一族二维线性双曲型偏微分方程（古尔萨问题），其系数由 $\mathbb{R}^d$ 值向量的欧几里得内积构成。这一签名偏微分方程技巧大幅降低了这一无限维数回归问题的复杂度。

对于相关的未来工作 [3]，我们可以提出以下有趣的问题：

• 核回归中所用基准模型（$\mathbb{Y}^i$）$_{i\leq M}$ 的选择如何影响算法的性能。

• 将本文提出的方法应用于更复杂的美式奇异期权，例如 [BTW11], 中的美式移动平均期权；这类期权的价值函数取决于路径的历史，而不仅仅是即期值。正如引言末尾所述，原则上，只要能够证明这类期权的价值函数有界，且关于扩展弱拓扑或适应性 Wasserstein 拓扑连续，我们的方法就适用于对其定价。

• 正如我们在附录 D 中所示，给定一个连续时间模型，理论上，当网格大小趋于 0 时，对于任意时间离散化序列，离散化市场上的价值函数都会收敛到原连续时间模型中的对应函数。值得研究的是，时间离散化方案会如何影响我们算法的相应收敛速率。我们期望借助 [BBP21] 中发展的工具，得到定量估计。

• 本文提出的所有理论结果都基于 Stone–Weierstrass 定理，该定理要求目标函数有界且连续。然而，随机最优控制问题中的许多奖励函数并无界。作为将我们的方法推广到无界情形的第一步，我们可以尝试证明，高阶期望签名所诱导的再生核希尔伯特空间对于增长阶为 $p \geq 1$ 的这类奖励函数在 L^p space 中稠密，正如近期论文 [BBP21] 中所示。

Appendix A. Basic Properties of Signatures

A.1. 张量代数上的希尔伯特空间结构。设 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ 是一个可分希尔伯特空间，并固定 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基 $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$。对于每个 $n \geq 1$，我们考虑 $\mathcal{H}$ 的 n 阶张量积，即 $\mathcal{H}^{\otimes n} = \text{span}(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n \colon h_i \in \mathcal{H})$。我们在 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上赋予一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$，使得

$$\langle h_1 \otimes \ldots \otimes h_n, h'_1 \otimes \ldots \otimes h'_n\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} := \prod_{i=1}^{n} \langle h_i, h'_i\rangle_{\mathcal{H}}.$$

[3]我们感谢匿名审稿人的评论和问题，这些意见促使我们研究了此处提到的这些主题。

令 $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ 为 $\mathcal{H}^{\otimes}$ 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$ 的完备化，它是一个可分希尔伯特空间，其中 $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n} : \ i_1, \ \ldots\ldots, \ i_n \in \mathbb{N}\}$ 构成标准正交基。现在我们定义以下空间：

- $T(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$,
- $\mathbf{T}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$,
- $T((\mathcal{H})) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$,
- $\mathbf{T}((\mathcal{H})) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$.

显然，$T((\mathcal{H}))$ 是 $T(\mathcal{H})$ 的对偶空间，$\mathbf{T}((\mathcal{H}))$ 是 $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ 的对偶空间。我们关注 $\mathbf{T}((\mathcal{H}))$ 的以下子集：对于 $\mathbf{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{h}_n$，其中 $\mathbf{h}_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$，令

$$\tilde{\mathcal{H}} := \Big\{ \mathbf{h} \in \mathbf{T}((\mathcal{H})) : \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}} < \infty \Big\}, \tag{A.1}$$

并且 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$ 是 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上的内积，使得 $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{h}_n, \mathbf{h}'_n \rangle_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}$。容易看出 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}})$ 是一个可分希尔伯特空间。

在本文中，我们主要考虑如下按式 (A.1) 构造的特殊希尔伯特空间：

- $\mathcal{H}^0 := \mathbb{R}^d$,
- $\mathcal{H}^1 := \mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^0 \subset \mathbf{T}((\mathbb{R}^{d+1}))$,
- $\mathcal{H}^2 := \mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^1 \subset \mathbf{T}((\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^1))$,
- $\mathcal{H}^r := \mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^{r-1} \subset \mathbf{T}((\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^{r-1}))$ 对于 $r \geq 1$,

其中，$\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^r$ 配备了自然的希尔伯特空间结构。

对于给定的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，我们用 $\exp_{\otimes, \mathcal{H}}$ 表示从 $\mathcal{H}$ 到$T((\mathcal{H}))$的张量指数映射。即，

$$\exp_{\otimes, \mathcal{H}}(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{\otimes n}}{n!}.$$

显然，得益于阶乘衰减，对于所有 $h \in \mathcal{H}$，我们都有 $\exp_{\otimes, \mathcal{H}}(h) \in \mathcal{H}$。使用上述记号，对于每个 $r \geq 0$，使得对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $h \in \mathcal{H}^r$，我们定义 $\exp_r = \exp_{\otimes, \mathbb{R} \oplus \mathcal{H}^r}$。

$$\exp_r(t, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t, h)^{\otimes n}}{n!} \in \mathcal{H}^{r+1}.$$

注释 A.1. 对于任意给定的函数 $\phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to (0, \infty)$，实际上可以在张量代数 $\mathbf{T}(\mathcal{H})$ 上定义一个 ϕ–内积，即

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{h}' \rangle_{\phi} := \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) \langle \mathbf{h}_n, \mathbf{h}'_n \rangle_{\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}}.$$

本文仅考虑经典情形，即 $\phi \equiv 1$（如 [CO22] 中所示）。关于权重 ϕ 及其应用的更多示例，请参阅 [CLX21]。

A.2. 签名的代数性质。首先回顾离散时间路径的（时间增广）签名定义。

定义 A.2. 设 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 和 $x\colon I \to \mathcal{H}$ 是一个取值于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的离散时间路径。那么， x 的时间增广签名定义为

$$S_{\mathcal{H}}(x) := \prod_{i=0}^{N} \exp_{\otimes, \mathbb{R}\oplus\mathcal{H}}(\Delta t_i, x_{t_{i-1},t_i}) \in \widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}}$$

其中 $t_{-1} := 0$, $x_{t_{-1}} := 0$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $x_{t_{i-1},t_i} = x_{t_i} - x_{t_{i-1}}$ 且 $\mathbb{R}\oplus\mathcal{H} \subset T((\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}))$ 是按附录 A.1 中的定义构造的希尔伯特空间。

注 A.3. （时间增强）签名的概念可以扩展到定义在具有有界变差的连续时间区间 $[0,T]$ 上的连续 $\mathcal{H}$–值路径。更确切地说，对于 $x \in C^{1-var}([0,T],\mathcal{H})$，其签名是所有迭代积分的集合

$$S_{\mathcal{H}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n_{\mathcal{H}}(x), \quad S^n_{\mathcal{H}}(x) := \int_{0<u_1<\ldots<u_n<T} d(u_1, x_{u_1}) \otimes \ldots \otimes d(u_n, x_{u_n}), \tag{A.2}$$

其中 $S^0_{\mathcal{H}} \equiv 1$ 这些积分按黎曼–斯蒂尔杰斯意义定义，参见 [LCL07，第 2.2 节。2]。容易验证，离散时间路径 x 在 I 上的签名（见定义 A.2）实际上与式 (A.2) 给出的签名一致：通过经典线性插值，将 x 扩展为定义在 $[0,T]$ 上的分段线性路径 $\tilde{x}$。

我们还要回顾一下，在分次向量空间 $T(\mathcal{H})$ 上存在一个双线性映射，其值也属于该空间，即 $\mathcal{H} := \mathbb{R}\oplus\mathcal{H}$；该映射记作 $\sqcap\!\sqcap$，称为洗牌积。离散时间路径的签名映射有一项关键性质：作为张量指数的有限乘积，$S_{\mathcal{H}}(x)$ 的取值属于对偶空间 $T((\mathcal{H}))$ 中的特征标群，而群性质可转化为以下代数关系：

$$\langle \mathbf{h}_1 \sqcap\!\sqcap \mathbf{h}_2, S_{\mathcal{H}}(x)\rangle = \langle \mathbf{h}_1, S_{\mathcal{H}}(x)\rangle \langle \mathbf{h}_2, S_{\mathcal{H}}(x)\rangle \tag{A.3}$$

对所有 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in T(\mathcal{H})$ 均成立，其中 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 $T(\mathcal{H})$ 与 $T((\mathcal{H}))$ 之间的对偶配对。上述所有结果均可见于 [Reu93，第 2,3] 章，因为 $T(\mathcal{H})$ 对应于以向量空间 $\mathcal{H}$ 的任意哈梅尔基构成的字母集上的自由李代数。当然，连续有界变差路径的签名也满足关系式 (A.3)，参见例如 [LCL07]。

根据 [CO22，第 5.3] 节，我们知道，时间增强签名 $S_{\mathcal{H}}$ 在离散时间的 $\mathcal{H}$ 值路径集合上是单射的。结合关系式 (A.3)，我们可以得出结论：

$$\{\langle \mathbf{h}, S_{\mathcal{H}}(\cdot)\rangle : \mathbf{h} \in T(\bar{\mathcal{H}})\} \subset \mathbb{R}^{(\mathcal{H})^I} \text{ is a point–separating algebra.} \tag{A.4}$$

A.2.1. 签名的解析性质。对于 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$，我们现在赋予离散时间的 $\mathcal{H}$ 值路径（以 I 为索引）全变差范数 $\|\cdot\|_{1\text{–var}}$，其中 $\|x\|_{1\text{–var}} := \sum_{i=0}^{N} \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|_{\mathcal{H}}$。粗糙路径理论中的一个著名结果，参见 [LQ02，第 3.1 定理3]，，告诉我们（时间增广的）签名映射 $S_{\mathcal{H}}$ 关于 $\|\cdot\|_{1\text{–var}}$ 局部利普希茨连续，即对于每个 $M > 0$，存在一个常数 $C = C(M,T)$，使得对于所有 $x, y \in (\mathcal{H})^I$，满足 $\|x\|_{1\text{–var}}, \|y\|_{1\text{–var}} \le M$，

$$\|S_{\mathcal{H}}(x) - S_{\mathcal{H}}(y)\|_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}}} \le C(M,T)\|x - y\|_{1\text{–var}}. \tag{A.5}$$

Appendix B. Basics on Universal Feature Maps and Vector–valued RKHS设 $\mathcal{H}$ 表示一个希尔伯特空间， $\mathcal{Z}$ 表示一个拓扑空间。

定义 B.1.（[CO22，定义 2.2]）若映射 $\Phi : \mathcal{Z} \mapsto \mathcal{H}$ 满足以下等价条件之一，则称其为通用特征映射：

(1) 集合 $\{\langle h, \Phi(\cdot)\rangle_{\mathcal{H}} : h \in \mathcal{H}\}$ 在连续有界实值函数空间 $C_b(\mathcal{Z})$ 中关于严格拓扑稠密。(2) 由核 $k_\Phi(\cdot,\cdot)$ 诱导的再生核希尔伯特空间在连续有界实值函数空间 $C_b(\mathcal{Z})$ 中关于严格拓扑稠密，其中 $k_\Phi(z, z') := \langle \Phi(z)$ $\Phi(z')\rangle_{\mathcal{H}}$ 对 $z.z' \in \mathcal{Z}$ 成立。(3) 对于 $\mathcal{Z}$ 上的有限博雷尔测度 μ 和 ν， $\mu = \nu$ 当且仅当 $\int \Phi(z)\mu(dz)$ $= \int \Phi(z)\nu(dz)$。

在上述定义中， Φ 的“普适性”是相对于连续有界实值函数空间 $C_b(\mathcal{Z})$ 上的严格拓扑而言的。这一概念可以自然地推广到赋备 L^2 拓扑的向量值（连续有界）函数。

定义 B.2。（[PM20，定义 2.10]）一个取值于 $\mathcal{H}$ 的再生核希尔伯特空间，在 $\mathcal{Z}$ 上是一个希尔伯特空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$，满足

(1) 每个 $g \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 都是从 $\mathcal{Z}$ 到 $\mathcal{H}$ 的函数，(2) 对于每个 $z \in \mathcal{Z}$ ，评估映射 $\mathrm{ev}_z(g) = g$ (z) 是从 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 到 $\mathcal{H}$ 的有界线性映射。

与标量情形一样， $\mathcal{H}$ 值再生核希尔伯特空间在 $\mathcal{Z}$ 上都对应一个（正定的） $\mathcal{H}$ 核Γ： $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to L(\mathcal{H})$，其含义见 [PM20，定义 2.11]；反之，每个 $\mathcal{H}$ 核 Γ 都确定一个 $\mathcal{H}$ 值再生核希尔伯特空间。

定义 B.3. [PM20，定义 4.3] 若 $\mathcal{H}$–核 Γ 的 $\mathcal{H}$–值再生核希尔伯特空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 满足 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 是 $C_0(\mathcal{Z}, \mathcal{H})$（无穷远处消失的连续函数空间）的子集，且对于任意概率测度 ν，它在 $L^2(\mathcal{Z}, \nu; \mathcal{H})$ 中稠密，则称其为通用的。

假设在 $\mathcal{Z}$ 上存在一个标量核 $k_{\mathcal{Z}}$ ，那么

$$\Gamma := k_{\mathcal{Z}}(\cdot,\cdot)\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \tag{B.1}$$

是一个 $\mathcal{H}$–核。在这种情况下，如果 $k_{\mathcal{Z}}(\cdot,\cdot)$ 是符合定义 B.1 意义下的通用标量核，那么根据定义 B.3，Γ 也是通用的，参见 [CDVTU10，例 14]。

注意，由于 (1.2)，签名核 k_S 是路径空间上的通用标量核，因此，核 $k_S(\cdot,\cdot)\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ 根据定义 B.3 的意义也是通用的。这一事实已在第 3.2 节中使用。

Appendix C. Optimal Stopping Problem for Processes with GeneralFiltration

本节将介绍高阶签名，说明其与高阶适应拓扑之间的关系，以及其在求解具有一般滤过的滤过程的 OSP 中的应用。以下内容中，所有滤过程均定义在给定的离散时间区间 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 上，且取值于紧子集 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$。回顾一下（参见定义 2.5），对于 $\mathbb{X} \in \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ ，任意给定 $r \geq 1$，我们均可通过递归设定来定义其秩为 r 的预测过程 X^r 】【。

$$\hat{X}^r_t := \mathbb{P}(\hat{X}^{r-1} \in \cdot | \mathcal{F}_t), \quad t \in I.$$

然后，秩 r 适应拓扑中的收敛可用秩 r 预测过程的分布的弱收敛来表示。得益于这种预测的层级结构

对于过程，我们可以采用递归方式，相应地为秩 r 预测过程构造秩 r 签名：令 $S^1 = S$ 为定义 2.7 中给出的签名映射，它作为 $\hat{X}^0 := X$ 的秩 1 签名。然后，假设对于某个 $r \geq 1$，我们已经得到了秩 $r-1$ 预测过程 $\hat{X}^{r-1}$ 的秩 r 签名映射 S^r，那么秩 r 预测过程 X^r 的秩 $r+1$ 签名映射定义如下：

$$S^{r+1}(\hat{X}^r) = S_{\mathcal{H}^r}(t \mapsto \mathbb{E}[S^r(\hat{X}^{r-1})|\mathcal{F}_t])$$

其中，$\mathcal{H}^r$ 表示 S^r 的陪域，$S_{\mathcal{H}^r}$ 是 $\mathcal{H}^r$值路径的签名映射，参见附录 A。注意，由于对于每个 $k \geq 1$，签名映射 $S_{\mathcal{H}^k}$ 都是连续的，且$X = \hat{X}^0$ 取值于紧集 $\mathcal{K}$中，因此每个条件期望 $\mathbb{E}[S^r(\hat{X}^{r-1})|\mathcal{F}_t]$ 都是定义良好的 $\mathcal{H}^r$值 Bochner 积分。

有了秩为 r 的签名这一概念，我们可以将定理 2.10 和 2.11 推广到任意 $r \geq 0$上的秩为 r 的适应拓扑。

定理 C.1。（[BLO22，定理 4]）对于任意 $r \geq 0$，我们有

$$\mathbb{X} \sim_r \mathbb{Y} \iff \mathcal{L}(\hat{X}^r) = \mathcal{L}(\hat{Y}^r) \iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^{r+1}(\hat{X}^r)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^{r+1}(\hat{Y}^r)].$$

此外，秩为 $r+1$ 的签名最大均值差异

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{r+1}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^{r+1}(\hat{X}^r)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^{r+1}(\hat{Y}^r)]\|_{\mathcal{H}^{r+1}}$$

刻画了秩为 r 的适应拓扑 $\hat{\tau}_r$。

正如我们在注 2.6 中所提到的，与具有自然滤过的滤过程情形不同，一般滤过过程的 OSP 价值函数仅在高阶适应拓扑下连续。

定理 C.2。令 $I = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ 和 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ 为一个紧致子集。回顾一下，$\Lambda_{plain}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 表示所有具有自然滤过的滤过过程所组成的子集。

(1) 对于 $\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$，适应 Wasserstein 度量 $\mathcal{AW}_p$ 和二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2$ 生成相同的拓扑 $\hat{\tau}_1$，对于任意 $p \in [1, \infty)$。(2) 在整个空间 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 上，适应 Wasserstein 度量 $\mathcal{AW}_p$ 和二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 生成相同的拓扑 $\hat{\tau}_N$，对于任意 $p \in [1, \infty)$。(3) 定义在整个空间 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 上的最优停止问题的价值函数 v，关于二阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 是连续的。

证明。第一个结论由 [BVBBE20b 定理 1 得出。该定理证明了当滤过为自然滤过时，由适应 Wasserstein 度量 $\mathcal{AW}_p$ 诱导的拓扑与 Aldous 扩展弱拓扑 $\hat{\tau}_1$ 相同。第二个结论由 [BBP21 引理 4.7、4 得出。这些引理隐含地表明，对于一般滤过过程，由 $\mathcal{AW}_p$ 生成的拓扑与秩为 N 的适应拓扑 $\hat{\tau}_N$ 相同，前提是离散区间 I 包含$N+1$ 个点，且状态空间 $\mathcal{K}$ 是紧致的；再结合 [BLO22 定理 4]（该定理证明了秩为 $N+1$ 的签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 诱导拓扑 $\hat{\tau}_N$）。最后一个断言由 [BBP21 例 4 得出（该例证明了 v 对于秩为N的适应拓扑 $\hat{\tau}_N$是连续的），并结合上述第二个结论（当状态空间紧致时，秩为 $N+1$ 的签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 生成 $\hat{\tau}_N$ ）。□

得益于上述结果，我们的核学习方法（定理 2.14）仍适用于求解具有一般滤过的滤过过程的 OSP：只需将二阶

签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2$ 替换为 $N+1$ 阶签名最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{r+1}$，前提是时间区间 I包含 $N+1$ 个点。

推论 C.3。设 $I=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T\}$ 和 $\sigma>0$ 为固定值。我们定义核 $K_{\mathcal{S}}^{N+1}$: $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})\times\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})\to\mathbb{R}$，如下:

$$K_{\mathcal{S}}^{N+1}(\mathbb{X},\mathbb{Y}):=\exp(-\sigma^2\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2).$$

由 $K_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 生成的再生核希尔伯特空间在一致拓扑 [4] 下，在空间 $C_b(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{}\tau_N)$ 中稠密。特别地，若 $v(\cdot)$ 表示 OSP 中的成本函数，则对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\mathbb{X}\in\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$，存在一个 $M\in\mathbb{N}$、 $\mathbb{Y}^i\in\Lambda_{plain}(\mathcal{K})$ 以及标量 $a_i\in\mathbb{R}$、 $i=1$、 ..... 、 M，使得

$$\left|v(\mathbb{X})-\sum_{i=1}^{M}a_i\exp(-\sigma^2\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}(\mathbb{X},\mathbb{Y}^i)^2)\right|\le\varepsilon.$$

现在，利用注释 3.2，只要这些滤过由某些可观测过程生成，上述观察便允许我们将第 3 节中的算法推广到所有具有一般滤过的滤过过程。更确切地说，假设 $\mathbb{X}=(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P},X)$ 是 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 中的一个元素，且滤过 $\mathbb{F}$ 由某个随机过程 $\xi=(\xi_t)_{t\in I}$ 生成，那么我们可以通过从 ξ 的分布中抽取 M 个实现 $(\bar{\xi}^i)_{i\le M}$，为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X,\cdot)|\sigma(\xi_s,s\le t)]$ 构造一个经验估计量 $\widehat{F_{t,K_S}}((\bar{\xi}^i)_{i\le M},\cdot)$。利用该估计量，我们可以构造 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$ 对应的经验距离 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{N+1}$，进而像之前一样，对定义在 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 上的 OSP 价值函数进行分布回归。

AppendixD. Space–Time Discretization

在本附录中，我们简要讨论 OSP 中价值函数从离散时间市场到连续时间市场的收敛性。这里得到的结果至少在理论上可以确认，我们能够通过时空离散化来近似连续时间模型中的 OSP 价值函数。

固定时间区间 $[0,T]$，我们考虑定义在 $[0,T]$ 上的滤过过程的最优停止问题价值函数，这些过程具有与其自然滤过相关的连续轨迹:

$$v(\mathbb{X})=\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{X}}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\gamma(X_\tau)].$$

在这里，我们不对 $\mathbb{X}$ 作出任何其他额外假设： $\mathbb{X}$ 可以是连续半鞅、分数布朗运动，或其他任何过程。

现在我们按以下简单方式对市场进行空间和时间离散化：对于划分 $\mathcal{P}_n=\{0=t_0^n<t_1^n<\ldots<t_{N_n}^n=T\}$，定义

$$X^n:=\sum_{k=0}^{N_n-1}(X_{t_k^n}^n\wedge n)\vee(-n)1_{[t_k^n,t_{k+1}^n)}+(X_T^n\wedge n)\vee(-n)1_{\{T\}},$$

并赋予其自然滤过 $\mathcal{F}_t^n=\sigma(X_s^n:\ s\le t)$。作为[CT07, 定理 5]的一个简单推论，我们可以证明，对于 $\mathbb{X}^n=(\Omega\ \mathcal{F}_T^n,\mathbb{F}^n=(\mathcal{F}_t^n)\ X^n,\mathbb{P})$，只要 $\mathcal{P}_n$ 的网格大小趋于 0，就有 $v(\mathbb{X}^n)\to v(\mathbb{X})$。

与 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 的非紧致性相反，集合 $\mathcal{FP}_I(\mathcal{K})$ 对 $\hat{\tau}_N$ 对任意 N 都是紧致的，参见 [BBP21，定理 1。7]

引理 D.1. 对于任意具有连续轨迹和自然滤过的连续时间滤过过程 $\mathbb{X}$，沿任意满足$|\mathcal{P}_n|\to 0$ 的分割序列 $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 1}$，均有 $v(\mathbb{X}^n)\to v(\mathbb{X})$。

证明。设 $\mathbb{X}$ 是一个具有自然滤过的给定连续滤过程。我们固定 $[0,T]$ 的一列分割，使得其网格大小 $|\mathcal{P}_n|\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时。我们记 $\mathcal{P}_n := \{0=t_0^n<t_1^n<\ldots<t_{N_n}^n=T\}$。

现在，对于每个 n，我们定义局部化离散市场 $\mathbb{X}^n=(\Omega,\mathcal{F}_T^n,\mathbb{F}^n=(\mathcal{F}_t^n)_{t\in[0,T]},X^n,\mathbb{P})$，其中

$$X^n=\sum_{k=0}^{N_n-1}(X^n_{t_k^n}\wedge n)\vee(-n)1_{[t_k^n,t_{k+1}^n)}+(X_T^n\wedge n)\vee(-n)1_{\{T\}}$$

以及 $\mathcal{F}_t^n=\sigma(X_s^n\colon\ s\leq t)$，$t\in[0,T]$ X^n 的自然滤过。此外，令 $\mathcal{T}$ 为所有 $\mathbb{F}$–停止时的集合。

由于 X 连续，我们确实有 $\sup_{t\in[0,T]}|X_t^n-X_t|\to 0$ 几乎必然为 $n\to\infty$，这进一步意味着 that

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{\tau,\sigma\in\mathcal{T},\sigma\leq\tau\leq\sigma+\delta}|X_\sigma^n-X_\tau^n|=0$$

几乎必然成立，因此 Aldous 条件 [CT07, (1)] 对于 $(\mathbb{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 得以满足。因此，根据 [CT07, 定理 5]，我们有 $v(\mathbb{X}^n)\to v(\mathbb{X})$，当 $n\to\infty$ 时成立。换言之，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $N=N(\varepsilon)$，使得对于所有 $n\geq N$，均有以下结论成立：

$$|v(\mathbb{X}^n)-v(\mathbb{X})|\leq\varepsilon.$$

□

当然，上述结果纯属理论性，并未给出定量结论。在实践中，时间离散化方式的选择可能会显著影响计算成本和收敛速度。未来可以进一步定量估计价值函数的收敛速率与时间分割的网格大小之间的关系。

Appendix E. Proofs

定理 2.10 的证明。先考虑 $r=0$ 的情形。由于 X 和 Y 是取值于 $\mathcal{K}$ 的（离散）路径，签名映射 S 连续（例如参见 (A.5)），因此 $\mathcal{H}^1$ 值的 Bochner 积分 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)]$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)]$ 均有定义。利用签名 S 的代数性质，根据 (A.4) 可知，类 $\{\langle\ell,S(x)\rangle_{\mathcal{H}^1}\colon\ \ell\in T(\mathbb{R}^{d+1})\}$ 是 $C(\mathcal{K}^I,\mathbb{R})$ 上的点分离代数。因此，利用标准的 Stone–Weierstrass 论证可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X=\mathbb{Q}_Y &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\langle\ell,S(X)\rangle_{\mathcal{H}^1}]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle\ell,S(Y)\rangle_{\mathcal{H}^1}],\quad\forall\ell\in T(\mathbb{R}^{d+1})\\ &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)].\end{aligned}$$

对于 $r=1$ 的情形，我们首先将上述结果应用于每个 $\hat{}\ X_t^1=\mathbb{P}(X\in\cdot|\mathcal{F}_t)$，$t\in I$，从而得出 $\hat{}\ X^1\mapsto(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t])_{t\in I}$ 是单射，也就是说，我们可以考虑 $\mathcal{H}^1$ 值路径 $(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t])_{t\in I}$，而非测度值路径 $\hat{}X^1$。然后，将 (A.4) 应用于在空间 $\mathcal{H}^1$ 中演化的路径的签名（即 $(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t])_{t\in I}$），并利用 Stone–Weierstrass 定理

再次可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{X}\sim_1\mathbb{Y} &\iff \mathcal{L}(\hat{X}^1)=\mathcal{L}(\hat{Y}^1)\\ &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\langle \ell, S^2(\hat{X}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle \ell, S^2(\hat{Y}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}],\quad \forall \ell\in T(\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}^1)\\ &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)],\end{aligned}$$

如 $S^2(\hat{X}^1)=S_{\mathcal{H}^1}(t\mapsto\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t])$。 □

定理 2.11 的证明。由于 $\mathcal{K}$ 是紧致的，离散路径空间 $\mathcal{K}^I$ 是紧致的，因此根据 (A.4) 和 Stone–Weierstrass 定理，每个连续函数 $f\colon \mathcal{K}^I\to\mathbb{R}$ 都可以通过 $\langle \ell, S(x)\rangle_{\mathcal{H}^1}$ 对于 $\ell\in T(\mathbb{R}^{d+1})$ 进行一致逼近，因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X^n}\to\mathbb{P}_X \text{ weakly} &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[f(X^n)]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)]\quad \forall f\in C(\mathcal{K}^I,\mathbb{R})\\ &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[\langle \ell, S(X^n)\rangle_{\mathcal{H}^1}]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\langle \ell, S(X)\rangle_{\mathcal{H}^1}],\quad \forall \ell\in T(\mathbb{R}^{d+1})\\ &\iff \mathcal{D}^1_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}^n,\mathbb{X})=\|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[S(X^n)]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)]\|_{\mathcal{H}^1}\to 0.\end{aligned}$$

类似地，由于 $\mathcal{P}(\mathcal{K}^I)$ 是弱紧致的，乘积空间 $\mathcal{P}(\mathcal{K}^I)^I$ 以及 $\hat{X}^1\in\mathcal{P}(\mathcal{K}^I)^I$ 也都是弱紧致的，按照定理 2.10 的证明中将 (A.4) 用于 S^2 的做法，我们可以再次利用 Stone–Weierstrass 定理得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\hat{X}^{n,1})\to\mathcal{L}(\hat{X}) &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[f(\hat{X}^{1,n})]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\hat{X}^1)],\quad \forall f\in C(\mathcal{P}(\mathcal{K}^I)^I,\mathbb{R})\\ &\iff \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[\langle \ell, S^2(X^{1,n})\rangle_{\mathcal{H}^2}]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\langle \ell, S^2(\hat{X}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}],\forall \ell\in T(\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}^1)\\ &\iff \mathcal{D}^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}^n,\mathbb{X})=\|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[S^2(\hat{X}^{1,n})]\to\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)]\|_{\mathcal{H}^2}\to 0.\end{aligned}$$

□

定理 2.14 的证明。(1) 根据 [CS10，定理 2.2]，若 $\mathfrak{K}$ 是紧致度量空间，且 H 是可分希尔伯特空间，并且存在一个连续且单射的映射 $\rho\colon \mathfrak{K}\to H$，那么对于任意实解析函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若其泰勒展开系数严格为正且其泰勒级数在全局收敛，则由下式给出的核 $k\colon \mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathbb{R}$ 易购

$$k(z,z')=f(\langle\rho(z),\rho(z')\rangle_H)$$

具有普适性，即其再生核希尔伯特空间在从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数空间中稠密。

现在，由于 $\mathcal{K}$ 是紧致的，根据 [BBP21, 定理 5.1、引理 4.7]，我们知道对于任意 $r\geq 0$，拓扑空间 $(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{\tau}_r)$ 是紧致的。然后，由于 $\mathbb{X}\mapsto\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X})]$ 是单射（见定理 2.10），将上述结果应用于 $\mathfrak{K}=(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{\tau}_1)$、$H=\mathcal{H}^2$ 和 $\rho=S^2$，可得由 $K_f(\mathbb{X},\mathbb{Y})=f(\langle\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X})],\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y})]\rangle_{\mathcal{H}^2})$ 诱导的再生核希尔伯特空间在 $C_b(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{\tau}_1)$ 中稠密，对任意满足上述条件的 f 均成立。

(2) 现在考虑 OSP 在 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 上限制后的价值函数 $v(\cdot)$，也就是说，我们只考虑自然滤过对应的停时。不失一般性，取 $\sigma=1$。首先，根据 [BVBBE20b，定理 1.1]，我们知道 $v|_{\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})}$ 关于 $\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})$ 上的秩 1 适应拓扑 $\hat{\tau}_1$ 是连续的，也就是说，$v|_{\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K})}$ 是 $C_b(\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}),\hat{\tau}_1)$ 中的一个元素。现在取 $f(x)=\exp(x)$，它是 $\mathbb{R}$ 上一个泰勒展开系数严格为正的解析函数。鉴于上一步得到的结果，我们知道由 $K_{\exp}(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\exp\circ\langle\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{X}^1)],\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{Y}^1)]\rangle_{\mathcal{H}_2}$ 诱导的再生核希尔伯特空间在 $C_b((\Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}),\hat{\tau}_1)\ \mathbb{R})$ 中稠密，其中

关于严格拓扑。这里我们只需注意，我们使用的是 Giles 定理（参见 [CO22, 定理 2.6]），其作用于非紧集 $(\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1)$，而不是在紧集上使用经典的 Stone–Weierstrass 定理。

此外，令 $\alpha(\mathbb{X}) := K_{\exp}(\mathbb{X},\mathbb{X})^{-\frac{1}{2}}$for $\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})$。根据[CS08, Theorem 4.55] 的证明，我们看到，若 Φ 是 $K_{\exp}$的典范特征映射，则$\alpha\Phi$ 是核 $K_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) := \exp(-\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2) = \exp(-\|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{}X^1)] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{}Y^1)]\|_{\mathcal{H}^2}^2)$的典范特征映射。这里注意到，由于 $(\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1) \subset(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1)$，且后一个集合是紧致的，$\alpha$在 $(\mathcal{FP}_I(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1)$ 上的连续性蕴含 $c := \sup_{\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})}|\alpha(\mathbb{X})|<\infty$。由于由 $K_{\exp}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) =\exp\circ\langle\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S^2(\hat{}X^1)],\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^2(\hat{}Y^1)]\rangle_{\mathcal{H}_2}$所诱导的再生核希尔伯特空间相对于严格拓扑在 $C_b(\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1)$ 中稠密，对于每个 $g\in C_b((\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K}),\hat{}\tau_1)$、每个在无穷远处消失的函数 ϕ 以及每个$\varepsilon>0$，都存在一个 $\ell\in\mathcal{H}_2$，使得

$$\sup_{\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})}\left|\left(\langle\ell,\Phi(\mathbb{X})\rangle_{\mathcal{H}_2}-\frac{g}{\alpha}\right)\phi(\mathbb{X})\right|<\varepsilon/c,$$

由于严格拓扑的定义。因此，这意味着

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})}\left|\left(\langle\ell,\alpha(\mathbb{X})\Phi(\mathbb{X})\rangle_{\mathcal{H}_2}-g(\mathbb{X})\right)\phi(\mathbb{X})\right| &\le \sup_{\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})}|\alpha(\mathbb{X})|\\ &\quad\times\sup_{\mathbb{X}\in\Lambda_{\mathrm{plain}}(\mathcal{K})}\left|\left(\langle\ell,\Phi(\mathbb{X})\rangle_{\mathcal{H}_2}-\frac{g}{\alpha}\right)\phi(\mathbb{X})\right|\\ &\le c\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\alpha\Phi$ 是严格拓扑的通用特征映射，由此即可得出我们的结论：根据[CO22 命题 E.3]，$\alpha\Phi$ 诱导的核为 $\exp(-\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot)^2)$。

□

引理 3.1 的证明。步骤 1：根据再生性质，

$$\langle k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\hat{x},\cdot),k_{S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}(\hat{y},\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}=\langle S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\hat{x}),S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\hat{y})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}},$$

按照推导出 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^1$对应方程时所用的相同论证，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mu_{\hat{X}}^2-\mu_{\hat{Y}}^2\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^2}^2 &= \mathbb{E}_{X,X'}[\langle S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{X}^1}),S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{X}'^{,1}})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}]\\ &\quad+\mathbb{E}_{Y,Y'}[\langle S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{Y}^1}),S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{Y}'^{,1}})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}]\\ &\quad-2\mathbb{E}_{X,Y}[\langle S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{X}^1}),S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\mu_{\hat{Y}^1})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}}],\end{aligned}$$

其中，$\mathbb{E}_{X,\ X'}$表示相对于定义在滤过概率空间 $(\Omega\times\Omega\ \mathbb{F}\otimes\mathbb{F})$ 上的乘积测度 $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$ 所取的期望，其中 X 和 X' 分别为第一和第二个坐标过程；记号 $\mathbb{E}_{Y,\ Y'}$、$\mathbb{E}_{X,\ Y}$ 和 $\mu_{\hat{}X',\ 1}$则不言自明。另一方面，使用完全相同的计算，我们还有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2 &= \mathbb{E}_{X,X'}[\langle S^2(\hat{X}^1),S^2(\hat{X}'^{,1})\rangle_{\mathcal{H}^2}]\\ &\quad+\mathbb{E}_{Y,Y'}[\langle S^2(\hat{Y}^1),S^2(\hat{Y}'^{,1})\rangle_{\mathcal{H}^2}]\\ &\quad-2\mathbb{E}_{X,Y}[\langle S^2(\hat{X}^1),S^2(\hat{Y}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}].\end{aligned}$$

因此，只需证明以下结论即可。

$$\mathbb{E}_{X,X'}[\langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}^1}), S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}'^{,1}})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}] = \mathbb{E}_{X,X'}[\langle S^2(\hat{X}^1), S^2(\hat{X}'^{,1})\rangle_{\mathcal{H}^2}],$$

$\mathbb{E}_{Y,Y'}[\langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}^1})\ S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}'^{,1}})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}] = \mathbb{E}_{Y,Y'}[\langle S^2(\hat{Y}^1)\ S^2(\hat{Y}'^{,1})\rangle_{\mathcal{H}^2}]$和

$$\mathbb{E}_{X,Y}[\langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}^1}), S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}^1})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}] = \mathbb{E}_{X,Y}[\langle S^2(\hat{X}^1), S^2(\hat{Y}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}].$$

步骤 2：我们来验证以下结论。

$$\mathbb{E}_{X,Y}[\langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}^1}), S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}^1})\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}] = \mathbb{E}_{X,Y}[\langle S^2(\hat{X}^1), S^2(\hat{Y}^1)\rangle_{\mathcal{H}^2}].$$

随后，另外两个方程也可类似地证明。为此，我们首先注意到，离散时间区间 I 上路径的签名（见定义 2.7）等于其在线性插值 $[0,T]$ 的连续路径签名（由迭代积分给出），见注 A.3。从后者的角度以及 [CLSY20，定理 2.5]，我们知道，对于任意 ω、ω'，两个签名 $\langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}^1})(\omega)\ S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}^1})(\omega')\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}$的内积是 Goursat 型偏微分方程（带有给定的边界条件）的唯一解$u(T,T)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(t,s) = \langle(1, \frac{\partial}{\partial t}\mu_{\hat{X}^1_t}(\omega)), (1, \frac{\partial}{\partial s}\mu_{\hat{Y}^1_s}(\omega'))\rangle_{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S} u(t,s). \tag{E.1}$$

另一方面，回顾 S^2 的构造（见定义 2.9），即

$$S^2(\hat{X}^1) = S_{\mathcal{H}^1}(t \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t]),$$

运用相同的论证，我们还可得 $\langle S^2(\hat{X}^1)(\omega)\ S^2(\hat{Y}^1)(\omega')\rangle_{\mathcal{H}^2}$ 是偏微分方程（边界条件与上文相同）的唯一解 $w(T,T)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial s}(t,s) = \langle(1, \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t](\omega)), (1, \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)|\mathcal{G}_s](\omega'))\rangle_{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}^1} w(t,s). \tag{E.2}$$

由于这些路径在固定时间区间上是分段线性的，也就是说，对所有 $t \in (t_{i-1}, t_i)$，都有

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_{\hat{X}^1_t}(\omega) = \frac{\mu_{\hat{X}^1_{t_i}}(\omega) - \mu_{\hat{X}^1_{t_{i-1}}}(\omega)}{t_i - t_{i-1}}$$

对 $\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t](\omega)$ 也同样成立。基于这些观察，我们看到，如果能够证明对所有 $s,t \in I$

$$\langle \mu_{\hat{X}^1_t}(\omega), \mu_{\hat{Y}^1_s}(\omega')\rangle_{\mathcal{H}_S} = \langle \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t](\omega), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)|\mathcal{G}_s](\omega')\rangle_{\mathcal{H}^1}, \tag{E.3}$$

那么，(E.1) 中的 u 和 (E.2) 中的 w 满足同一个偏微分方程，因此，根据 Goursat 型偏微分方程解的唯一性，我们可以得出

$$\langle S^2(\hat{X}^1)(\omega), S^2(\hat{Y}^1)(\omega')\rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{X}^1})(\omega), S_{\mathcal{H}_S}(\mu_{\hat{Y}^1})(\omega')\rangle_{\widetilde{\mathbb{R}\oplus\mathcal{H}_S}}$$

这进而意味着它们的期望相同，并完成了证明。步骤 3：最后，我们来检验 (E.3)。

由于

$$\mu_{\hat{X}^1_t}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[k_S(X,\cdot)|\mathcal{F}_t](\omega) = \int k_S(x,\cdot)\hat{X}^1_t(\omega)(dx)$$

并且 $\mu_{\hat{Y}^1_s}(\omega') = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[k_S(Y,\cdot)|\mathcal{G}_s](\omega') = \int k_S(y,\cdot)\hat{Y}^1_s(\omega')(dy)$，我们确实得到

$$\langle \mu_{\hat{X}^1_t}(\omega), \mu_{\hat{Y}^1_s}(\omega')\rangle_{\mathcal{H}_S} = \int \langle k_S(x,\cdot), k_S(y,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_S} \hat{X}^1_t(\omega)(dx) \otimes \hat{Y}^1_s(\omega')(dy).$$

然而，根据（3.2），上述方程等于

$$\int \langle S(x), S(y)\rangle_{\mathcal{H}^1} \hat{X}_t^1(\omega)(dx) \otimes \hat{Y}_s^1(\omega')(dy),$$

这不过就是 $\langle \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(X)|\mathcal{F}_t](\omega)\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(Y)|\mathcal{G}_s](\omega')\rangle_{\mathcal{H}^1}$ (请回忆 $\hat{}\ X_t^1 = \mathbb{P}(X \in \cdot|\mathcal{F}_t)$ 和 $\hat{}\ Y_s^1 = \mathbb{Q}(Y \in \cdot|\mathcal{G}_s)$) 。□

命题 1.1 的证明。(1) 利用定理 2.14，我们推得存在 $\mathbb{Y}^i \in \Lambda_{\text{plain}}(\mathcal{K}), i \le M$、标量 $a_i, i \le M$，使得

$$\left| v(\mathbb{X}) - \sum_{i=1}^{M} a_i K_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}^i) \right| \le \varepsilon.$$

其中 $K_{\mathcal{S}}^2(\cdot,\cdot) = \exp(-\sigma^2 \mathcal{D}^2_{,\mathcal{S}^n}(\cdot,\cdot))$。在第 3.2 节中，我们利用经验观测值 $x^i \sim \mathbb{P}_X$, $i \le m$ 和 $y^j \sim \mathbb{Q}_Y$, $j \le n$，构造了 2 阶最大均值差异 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的相合经验估计量 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$，使得当 $m, n \to \infty$ 时， $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \to \mathcal{D}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 依概率收敛，参见定理 3.4。因此，我们得到核 $K_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的相合经验估计量 $\widehat{K}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \exp(-\sigma^2 \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$，并且 $\hat{}v(\mathbb{X}) := \sum_{i=1}^{M} a_i \widehat{K}_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}^i)$ 可以任意精确地逼近值 $v(\mathbb{X})$。注意，线性回归系数 a_i 可以通过核岭回归计算，参见第 3.4 节。

(2) 鉴于第 3 节提出的算法，要计算 $v(\mathbb{X})$，只需求解一族如下形式的线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial s \partial t} = \langle \frac{\partial}{\partial t} x_t, \frac{\partial}{\partial s} y_s \rangle_{\mathbb{R}^d} u_{x,y}$$

对于取值于 $\mathbb{R}^d$ 的路径 x、y。证明至此完成。

□

References

[Ald81] D. J. Aldous, *Weak convergence and general theory of processes*, 专著未发表草稿（1981），1–148。[ASS20] Imanol Perez Arribas、Cristopher Salvi 和 Lukasz Szpruch, *Sig-SDEs model for quantitative finance* 2020, 1 8 ，《第一届 ACM 金融人工智能国际会议论文集》，第 – 页。[BBP21] Daniel Bartl、Mathias Beiglb ock 和 Gudmund Pammer, , arXiv 预印本 arXiv:。 （） , –。[BCJ19] Sebastian Becker、Patrick Cheridito 和 Arnulf Jentzen, *Deep optimal stopping*, 《机器学习研究杂志》20（2019），74。[BDD20] E. Bayraktar、L. Dolinski 和 Y. Dolinsky, *Extended weak convergence and utility maximisation with proportional transaction costs* **24** 2020 4, 1013 1034 ，《金融与随机》。 （） , 第 – 期。[BHRS23] C. Bayer、H. Hager、S. Riedel 和 J. Schoenmakers, *Optimal stopping with signatures*, 《应用概率年刊》（2023），238–273。[BLO22] Patric Bonnier、Chong Liu 和 Harald Oberhauser, *Adapted topologies and higher rank signatures* 2022 1 39 ，即将在《应用概率年刊》发表（） , –。[BTW11] M. Bernhart、P. Tankov 和 X. Warin, *A finite–dimensional approximation for pricing moving average options* **2** 2011 1, 989 1013 ，SIAM金融数学杂志（） , 第 – 期。[BVBBE20a] Julio Backhoff-Veraguas、Daniel Bartl、Mathias Beiglb ock 和 Manu Eder, , 《金融与随机》（） , 第 – 期。[BVBBE20b] , *All adapted topologies are equal*, 《概率论及相关领域》178（2020），第3期，1125–1172。

Adapted Wasserstein distances and stability in mathematical finance **24** 2020 3, 601 632

[BVBEP20] Julio Backhoff-Veraguas、Mathias Beiglb
¨
ock、Manu Eder 和 Alois Pichler，，《随机过程及其应用》（），–。[CDVTU10] C. Carmeli、E. De Vito、A. Toigo 和 V. Umanita，，《分析与应用》（），–。

[Che54] K. T. Chen，，《伦敦数学会会刊》（1954），502–512。[CLSY20] Thomas Cass、Terry Lyons、Cristopher Salvi 和 Weixin Yang，，SIAM：数据科学数学杂志（），–。[CLX21] T. Cass、T. Lyons 和 X. Xu，，预印本，arXiv:2107.00447（2021），1–41。[CO22] Ilya Chevyrev 和 Harald Oberhauser，，《机器学习研究杂志》（），–。[CRR79] John C Cox、Stephen A Ross 和 Mark Rubinstein，，《金融经济学杂志》7（1979），第3期，229–263。[CS08] Andreas Christmann 和 Ingo Steinwart，，Springer，2008。[CSt10]，，《神经信息处理系统进展》，2010年，第406–414页。[CST+00] Nello Cristianini、John Shawe-Taylor 等，，，剑桥大学出版社，。[CT07] F. Coquet 和 S. Toldo，，《电子概率杂志》（），–。

[Ede19] M. Eder，，预印本，arXiv:1905.00856（2019），1–14。[Gil71] Robin Giles，，《美国数学会汇刊》161（1971），467–474。[HK84] D. Hoover 和 J. Keisler，，《美国数学会汇刊》（1984），159–201。[HKRT21] Calypso Herrera、Florian Krach、Pierre Ruyssen 和 Josef Teichmann，，，arXiv 预印本 arXiv:，（），–。[HL10] Ben Hambly 和 Terry Lyons，，《数学年刊》（），–。[KBPA+19] Patrick Kidger、Patric Bonnier、Imanol Perez Arribas、Cristopher Salvi 和 Terry Lyons，，《神经信息处理系统进展》（），–。[KLPA20] J. Kalsi、T. Lyons 和 I. Perez Arribas，，SIAM金融数学杂志11（2020），第2期，470–493。[LCL07] Terry Lyons、Michael. J. Caruana 和 Thierry L´evy，Springer，。[LL21] Bernard Lapeyre 和 J´erˆome Lelong，，《蒙特卡罗方法与应用》27（2021），第3期，227–247。[LQ02] Terry Lyons 和 Zhongmin Qian，，Claredon Press，2002。[LS01] Francis A Longstaff 和 Eduardo S Schwartz，，《金融研究评论》（），第 – 期。[LSC+21] Maud Lemercier、Cristopher Salvi、Thomas Cass、Edwin V Bonilla、Theodoros Damoulas 和 Terry J Lyons，，国际机器学习会议，PMLR，2021年，第6233–6242页。[LSD+21] Maud Lemercier、Cristopher Salvi、Theodoros Damoulas、Edwin Bonilla 和 Terry Lyons，，国际人工智能与统计会议，PMLR，2021年，第3754–3762页。[Lyo14] Terry Lyons，，国际数学家大会论文集，韩国（2014），1–24。[PA18] Imanol Perez Arribas，，预印本，arXiv:1809.09466（2018），1–18。[Pam22] Gudmund Pammer，，预印本，arXiv:2205.00989（2022），1–14。[PM20] Junhyung Park 和 Krikamol Muandet，，《神经信息处理系统进展》（），–。

[PM21] J. Park 和 K. Muandet, *Regularised least–squares regression with infinite–dimensional output space* , 2010 10973 2021 1 11 arXiv 预印本 arXiv: 。( ), –。[Reu93] Christophe Reutenauer, *Free lie algebras*, Claredon Press, 1993年。[SLL+21] Cristopher Salvi、Maud Lemercier、Chong Liu、Blanka Horvath、Theo Damoulas 和 Terry Lyons, *Higher order kernel mean embeddings to capture filtrations of stochastic processes*, 《神经信息处理系统进展》（2021 年）, 1–23。

Blanka Horvath, Technical University of Munich, The Munich Data Science Institute, & The Alan Turing Institute
Email address: blanka.horvath@tum.de

Maud Lemercier, University of Oxford & The Alan Turing Institute*Email address*: maud.lemercier@warwick.ac.uk

Chong Liu, ShanghaiTech University
Email address: liuchong@shanghaitech.edu.cn

Terry Lyons, University of Oxford & The Alan Turing Institute
Email address: tlyons@maths.ox.ac.uk

Cristopher Salvi, Imperial College London & The Alan Turing Institute
Email address: c.salvi@imperial.ac.uk