arXiv:2304.01493v1 [math.AP] 4 Apr 2023

奇数维（ $d \geqslant 3$）中半拉普拉斯算子的散射极点数量上界

EBRU TOPRAK

Abstract. 我们研究爱因斯坦–薛定谔算子 $\sqrt{-\Delta}+V$ 的散射极点，其中 V 是一个紧支撑、有界的复值势。我们证明，预解算子 $\chi R_V \chi$ 可亚纯延拓至 Λ 的整个对数黎曼曲面，作为算子 $L^2 \to L^2$。随后，我们得到计数函数 $N(r$ 的上界： $a) = \#\{z_j \in \Lambda\colon\ 0 \leqslant |z_j| \leqslant r, |\arg\ z_j| \leqslant a\}$, $r > 1, |a| > 1$ 当 $C\langle a\rangle(\langle r\rangle^d + (\log\langle a\rangle)^d)$ 时，其中 z_j 是 $\chi R_V(\lambda)\chi$ 的极点。

1. Introduction

众所周知，对于能量可以散射至无穷远的系统，散射共振是特征值或束缚态的一般化，并且与预解算子的亚纯延拓的极点有关。更准确地说，设 $V \in L^\infty(\mathbb{C}^d)$ 是一个紧支撑势，并令 $R_H(\lambda) := (-\Delta + V - \lambda^2)^{-1}$ 对于 $\Im\lambda > 0$ 成立，则已知 $R_H(\lambda)$ 是 L^2 上的有界算子，除有限多个 λ 值外均如此。若 χ 是一个紧支撑截断函数，且 $\chi V = V$，则当 d 为奇数时，$\chi R_H(\lambda)\chi$ 可亚纯延拓至下半平面；当 d 为偶数时，则可延拓至复平面的对数覆盖 Λ。$\chi R_H(\lambda)\chi$ 的极点称为共振，且与截断函数 χ 的选取无关。关于散射共振的详细说明，读者可参见例如 [3]。

关于 $\chi R_H(\lambda)\chi$ 极点数量的上界一直受到许多作者的关注，参见 [3] 及其中的参考文献。事实上，对于一大类紧支撑扰动，这些上界已在每个维度中得到研究。设 $\{z_j\}$ 为 $\chi R_H(\lambda)\chi$ 的极点，并按重数重复计数；又设 $N(r) = \#\{z_j\colon\ |z_j| \leqslant r\}$，其中 $d \geqslant 3$ 为奇数。于是有 $N(r) \leqslant C_1 r^d$，参见 [9, 6]。

偶数维情形下，计数函数的表述更为微妙，因为 $R_H(\lambda)$ 在零点附近具有对数奇点。一种广为人知的表述考虑 $N(r,a) = \#\{z_j \in \Lambda\colon\ 0 < |z_j| \leqslant r, |\arg\ z_j| \leqslant a\}$, $r, a > 1$。在 [11], 中，Vodev 证明了 $N(r,a) \leqslant Ca(r^d + (\log\ a)^d)$。Intissar 在 [4] 中考虑了另一种计数函数，其形式为 $\tilde{N}(r) = \#\{\lambda_j : r^{-\epsilon} \leqslant |\lambda_j| \leqslant \epsilon \log\ r\}$, $r > 1$, $\epsilon \in (0, 2^{-1/2})$，并满足界 $\tilde{N}(r) \leqslant Cr^{d+1}$。关于二维情形下的估计，可参见 [12]。

本文研究 $H:=\sqrt{-\Delta}+V$ 的散射极点，其中 V 有界、紧支撑且取复值。回顾一下，对于 $s>0$， $(-\Delta)^{s/2}$ 通过傅里叶符号 $|\xi|^s$ 定义；它在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是自伴的，定义域为 H^s ，且在 $[0,\infty)$ 中具有绝对连续谱。它还具有如下表示，对任意 $0<s<2$

$$(-\Delta)^{s/2}\psi(x)=\frac{2^s\Gamma(\frac{d+s}{2})}{\pi^{d/2}|\Gamma(-\frac{s}{2})|}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi(x)-\psi(y)}{|x-y|^{d+s}}dy. \tag{1}$$

我们的研究动机来自近期关于与 H 相关的波算子的论文 [13] 。令 $W\pm=s-\lim_{t\to\pm\infty}e^{itH}e^{-it\sqrt{-\Delta}}$为上述波算子。文献 [13] 证明，对于短程势函数， $W\pm$存在且是完备的。此外，散射矩阵 $S:=(W^+)^*W_-$是酉的。在附录 A 中，我们还计算了 H 在奇数维且$d\geqslant 3$时的散射矩阵，其中 V为实值且具有紧支撑；计算方法与薛定谔算子的情形类似。事实上，由（1）可知，对于 $\lambda>0$，$(\sqrt{-\Delta}-\lambda)\psi_0=0$ 的所有解都是基本平面波解 $e^{\pm i\lambda\langle x,\ \omega\rangle}$ 的叠加，其中 $x\in\mathbb{R}^d$，且 $\omega\in\mathbb{S}^{d-1}$。因此，与$\sqrt{-\Delta}$ 相对应的绝对散射矩阵以类似于与 $-\Delta$相对应的方式产生。

需要说明的是，本文并未回答对于 $\lambda>0$ ，$(H-\lambda)u=0$ 是否存在出射解这一问题。事实上，为了计算散射矩阵，我们假设 H不存在正特征值。类似于 Agmon 引导论证，不难看出，在对 V 施加某些衰减条件时， H中对应于正特征值的特征函数比任何多项式都衰减得更快。另一方面，研究 H 不存在嵌入特征值的论文很少，而且这些论文要么假设 V为负，要么假设 [7, 8] 很小。本文将在别处讨论这一问题。

本文定义 $R_0(z):=(\sqrt{-\Delta}-z)^{-1}$，以及 $R_V(z):=(\sqrt{-\Delta}+V-z)^{-1}$，其中 $\Im z>0$、$\Re z>0$。在第 2 节中，我们在 d 为奇数时计算 $R_0(z)$ 在 $d\geqslant 3$ 中的展开。据我们所知，这种展开此前未见于其他文献。由于 $R_0(z)$ 呈现对数行为， $\chi R_V(z)\chi$ 的亚纯延拓为 Λ。这也促使我们研究 $\chi R_V(z)\chi$ 在 $N(r、a)$ 中的极点，正如文献 [11]中所做的那样。我们的主要定理如下

定理 1.1. 设 $V(x)$ 是有界、紧支撑的复值函数，则与算子 $\sqrt{-\Delta}+V$ 相关的散射极点计数函数 $N(r、a)$ 满足以下界

$$N(r,a)\leqslant C\langle a\rangle(\langle r\rangle^d+(\log\langle a\rangle)^d)$$

其中$|a|\geqslant\frac{\pi}{4}$、 $r\geqslant 1$。

本节最后介绍本文中通用的记号。我们用 L^2_c 表示紧支撑的 L^2 函数，用 L^2_{loc} 表示局部 L^2 函数。我们用 $L^{2,\ \sigma}:=\{f:\ \|\langle x\rangle^\sigma f\|_{L^2}<\infty\}$, $\mathcal{H}_s$ 表示索博列夫范数，用 $\mathcal{H}_{s,\ \sigma}:=\{f:\ \|\langle x\rangle^\sigma f\|_{\mathcal{H}_s}<\infty\}$ 表示。

2. Meromorphic continuation of $\chi R_V \chi$

设 V 是有界、紧支撑且取复值的函数。定义预解算子

$$R_0(z) := (\sqrt{-\Delta} - z)^{-1}, \quad R_V(z) := (\sqrt{-\Delta} + V - z)^{-1} \quad \text{for} \quad \Im z > 0, \ \Re z > 0. \tag{2}$$

我们将 $R_0(z)$ 的积分核表示为 $R_0(z)(x,y)$。本节将证明

命题2.1. 设 $\chi(x) \in C_c^\infty$ 为满足 $\chi V = V$ 的截断函数。那么， $\chi R_V(z)\chi$ 可亚纯延拓至由 Λ 的 $\log z$ 构成的整个黎曼曲面，作为算子 $L^2 \to L^2$。该延拓的极点与 $\chi R_V \chi$ 的延拓的极点重合，且重数有限。

在证明命题2.1之前，我们需要证明 $\chi R_0(z)\chi$ 存在解析延拓。

引理 2.2. 设 $d \geqslant 3$ 为奇函数，且 χ 为紧支撑截断函数。 $\chi R_0(z)\chi$ 可解析延拓至由 Λ 的 $\log z$ 构成的整个黎曼曲面，作为算子 $L^2 \to L^2$ ，并且有

$$\|\chi R_0(z)\chi\|_{L^2 \to L^2} \lesssim e^{|z|}. \tag{3}$$

证明。我们首先证明，对于任意满足 $\Im z > 0$、 $\Re z > 0$ 的 z ，有如下展开式

$$R_0(z)(x,y) = \sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}} \frac{\tilde{c_k}}{|x-y|^{d-1-s_k}} \partial_s^{s_k} \left\{ e^{izs} E_i(-izs) + e^{-izs} E_i(-izs) + 2\pi i e^{izs} \right\} \Big|_{(s=|x-y|)} \tag{4}$$

其中 $\tilde{c_k}$ 是复系数， $s_k = \frac{d-1}{2} - k$， 且

$$E_i(\sigma) = \gamma + \ln(-\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k k!}. \tag{5}$$

这里 γ 是欧拉–马歇罗尼常数，而 $\log\ \sigma$ 的支割线为 $[0, \infty)$。

定义

$$R_0^\epsilon(z)(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{|\xi| - z} d\xi. \tag{6}$$

对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $\Im z > 0, \ \Re z > 0$, $R_0^\epsilon(z)(x,y)$ 逐点收敛到 $R_0(x,y)$。此外，有

$$\|R_0(z) * f\|_{L^2} = \left\| \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi| - z} \right\|_{L^2_\xi} \lesssim \|f\|_{L^2}$$

因此，根据控制收敛定理， $R_0^\epsilon(z)$ 收敛为$(\sqrt{-\Delta} - z)^{-1}$ ，作为一个 $L^2 \to L^2$算子。

因此，我们开始计算 $\Im z>0$、 $\Re z>0$,

$$R_0^\epsilon(x,0)(z)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}e^{ir(\omega\cdot x)}\frac{e^{-\epsilon r}}{r-z}r^{d-1}d\omega dr \tag{7}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{c_k}{|x|^{\frac{d-1}{2}+k}}\Big(\int_0^\infty\frac{e^{ir|x|-\epsilon r}}{r-z}r^{\frac{d-1}{2}-k}dr+\int_0^\infty\frac{e^{-ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(-r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr\Big)$$

其中， $d\omega$ 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$上的测度， c_k是复系数。在最后一个等式中，我们使用了以下适用于任意奇数 $d\geqslant 3$的展开式。

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}e^{ir\omega\cdot x}d\omega=\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}c_k\frac{e^{ir|x|}}{(r|x|)^{\frac{d-1}{2}+k}}+\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}c_k\frac{e^{-ir|x|}}{(-r|x|)^{\frac{d-1}{2}+k}} \tag{8}$$

根据柯西积分公式，我们有

$$\int_0^R\frac{e^{ir|x|-\epsilon r}}{r-z}r^{\frac{d-1}{2}-k}dr+\int_{iR}^0\frac{e^{ir|x|-\epsilon r}}{r-z}r^{\frac{d-1}{2}-k}dr \tag{9}$$
$$+(i)^{\frac{d-1}{2}-k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{iRe^{i\theta}|x|-\epsilon(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta}-z}(Re^{i\theta})^{\frac{d+1}{2}-k}dr=2\pi ie^{iz|x|-\epsilon z}z^{\frac{d-1}{2}-k}$$

类似地,

$$\int_0^R\frac{e^{-ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(-r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr+\int_{-iR}^0\frac{e^{-ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(-r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr \tag{10}$$
$$(-i)^{\frac{d-1}{2}-k}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-iRe^{i\theta}|x|-\epsilon(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta}-z}(Re^{i\theta})^{\frac{d+1}{2}-k}dr=0.$$

注意， $\epsilon\quad>0$，且 $|e^{\pm iRe^{i\theta}|x|-\epsilon(Re^{i\theta})}|\lesssim e^{R(\mp\text{正弦 }\theta|x|-\epsilon\text{余弦 }\theta)}$。因此，当 $R\to\infty$时，我们得到 n

$$\int_0^\infty\frac{e^{ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr=-\int_{i\infty}^0\frac{e^{ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr+\frac{1}{2\pi i}e^{iz|x|-\epsilon z}z^{\frac{d-1}{2}-k} \tag{11}$$
$$=-\int_{-\infty}^0\frac{e^{r|x|}e^{i\epsilon r}}{r-iz}(-ir)^{\frac{d-1}{2}-k}dr+2\pi ie^{iz|x|-\epsilon z}z^{\frac{d-1}{2}-k}$$

and

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ir|x|-\epsilon r}}{r-z}(-r)^{\frac{d-1}{2}-k}dr=-\int_{-\infty}^0\frac{e^{r|x|}e^{-i\epsilon r}}{r+iz}(-ir)^{\frac{d-1}{2}-k}dr. \tag{12}$$

有 $s_k:=\frac{d-1}{2}-k\geqslant 1$，还有 $\Re z>0$，因此根据控制收敛定理

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^0\frac{e^{r|x|}e^{\pm i\epsilon r}}{r\mp iz}(-ir)^{s_k}dr=\Big((-i\partial_s)^{s_k}\int_{-\infty}^0\frac{e^{rs}}{r\mp iz}dr\Big)\Big|_{s=|x|} \tag{13}$$

令 $r(t):=\sigma+t$，其中任意 $\sigma\notin\mathbb{R}^{\geqslant 0}$。那么，上述等式右侧的积分可利用以下展开式计算，参见 [1]。

$$E_i(\sigma):=\int_{r(-\infty)}^{r(0)}\frac{e^t}{t}dt=\gamma+\ln(-\sigma)+\sum_{k=1}^\infty\frac{\sigma^k}{kk!} \tag{14}$$

as

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{rs}}{r\mp iz}dr=e^{\pm izs}E_i(\mp izs). \tag{15}$$

因此，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to 0}R_0^{\epsilon}(x,0)(z)=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{c_k(-i)^{s_k}}{|x|^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\left\{e^{izs}E_i(-izs)+e^{-izs}E_i(izs)+2\pi ie^{izs}\right\}\Big|_{(s=|x|)}. \tag{16}$$

由此得到 (4)。

为了将 $\chi R_0(z)\chi$ 延拓到 Λ，我们为 $\log(z)$取支割线 $[0,\infty)$，并将 $g_m(z)=\tilde{}\log|z|+i(2\pi m+\arg(z))$ 沿着满足 $0<\arg z<2\pi$ 的位置粘合起来。我们用 $E_i(\pm izs)$ 表示将 $E_i(\pm izs)$ 解析延拓至 Λ，并将延拓后的预解算子表示为

$$\begin{aligned}&R_0(z)(x,y)\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{|x-y|^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\left\{e^{izs}\tilde{E}_i(-izs)+e^{izs}\tilde{E}_i(-izs)+2\pi ie^{izs}\right\}\Big|_{(s=|x-y|)}\end{aligned} \tag{17}$$

对所有 $z\in\Lambda$ 均成立。

最后，指数界 (3) 自然地由展开式 (17) 以及如下事实得到：对于 $0<s_k<d$，与 $|x|^{-s_k}$ 的卷积将 L^2_{c} 映射到 L^2_{loc}，参见例如 [5]。□

注 2.3. i) 如果对 $\Im z<0,\Re z>0$ 计算 $(\sqrt{-\Delta}-z)^{-1}$，则会得到以下预解算子。

$$R_0^-(z)(x,y)=\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{|x-y|^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\left\{e^{izs}\tilde{E}_i(-izs)+e^{-izs}\tilde{E}_i(izs)+2\pi ie^{-izs}\right\}\Big|_{(s=|x-y|)} \tag{18}$$

ii) 令 $\lambda>0$，并定义 $R_0^{\pm}(\lambda)=\lim_{\epsilon\to 0}(\sqrt{-\Delta}-(\lambda\pm i\epsilon))^{-1}$。文献 [13], 中证明了 $R_0^{\pm}(\lambda)$ 将 $L^{2,\ \sigma}\to\mathcal{H}_{1,\ -\sigma}$ 映射到 $\sigma>1/2,$，参见定理 4.7。因此，对于任意 $f\in L^{2,\ \sigma}$，可利用公式 (4) 定义出射解 $u=R_0^+(\lambda)f$，并利用公式 (18) 定义入射解 $u=R_0^-(\lambda)f$。此外，$R_0^{\pm}(\lambda)f$ 是以下方程的强解

$$(\sqrt{-\Delta}-\lambda)u=f.$$

iii）在引理 2.2 中，$\chi R_0(z)\chi$ 的延拓是连续的，包括零能量，因为$s_k\geqslant 1$ 对所有 k均成立。事实上，若令 $r:=|x-y|$，则

$$\begin{aligned}R_0(z)(r)=&\sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}}\frac{\alpha_j z^{j-1}}{r^{d-j}}+\sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}}\tilde{c_j}\frac{(iz)^je^{izr}\tilde{E}_i(-izr)}{r^{d-1-j}}\\&+\sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}}\tilde{c_j}\frac{(-iz)^je^{-izr}\tilde{E}_i(izr)}{r^{d-1-j}}+\sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}}c_j\frac{z^je^{izr}}{r^{d-1-j}}\end{aligned} \tag{19}$$

因此，当 $z \to 0$ 时，有

$$[\chi R_0(z)\chi](x,y) = \chi(x)\frac{\alpha_1}{|x-y|^{d-1}}\chi(y) + O_C(|z|). \tag{20}$$

这里， $O_C(|z|^p)$ 指来自 $L^2 \to L^2$ 的紧算子，其范数有一个常数倍于 $|z|^p$的上界。

引理 2.4。当 $z \to 0$时，展开式 (20) 有效。

˜证明。若 $|zr| < 1$，则有 $E_i(\pm izr) = \gamma +$ 对数$(\mp izr) + O(|z|r)$，因此，

$$R_0(z)(x,y) = \frac{\alpha_1}{r^{d-1}} + O\Big(|z|r^{2-d}\Big) \tag{21}$$

由于 $V(x)|x-y|^{2-d}\chi(y)$ 是一个核算子，因此也是一个紧算子，证明至此完成。

□

展开式 (20) 很重要，因为它表明，对于在无穷远处衰减足够快的势函数，0 要么是 $\sqrt{-\Delta} + V$的正则点，要么是具有有限几何重数的特征值。因此，0 不是$\sqrt{-\Delta} + V$的谱的聚点。在下一个引理中，我们将 S_1L^2 定义为到 $(I + G_0V)^{-1}$的核上的投影。注意， G_0V是一个紧算子，因此我们可以定义 S_1，而 S_1 是一个有限秩算子。

引理 2.5。 当且仅当 $|V| \lesssim \langle x\rangle^{-1-}$、 $f \in S_1$： ψ 且 $= -G_0Vf \in L^2$ 满足 $(\sqrt{-\Delta}+V)\psi = 0$.

证明。若 $f \in S_1$，则 $(I + G_0V)f = 0$，且 $f = -G_0Vf$。因此，

$$(\sqrt{-\Delta} + V)G_0Vf = Vf - Vf = 0.$$

此外，有

$$\frac{1}{|x-y|^{d-1}} = \chi(|x| \gtrsim 2|y|)\Big(\frac{1}{|x|^{d-1}} + O\big(\big(|y|/|x|\big)^{0+}\big)\Big) + \chi(|x| \lesssim 2|y|)\frac{1}{|y|^{d-1}} \tag{22}$$

因此，

$$\begin{aligned}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x| \gtrsim 2|y|)\Big(\frac{1}{|x|^{d-1}} + O\big(\big(|y|/|x|\big)^{0+}\big)\Big)Vf(y)dy \\ + \int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x| \lesssim 2|y|)\frac{1}{|y|^{d-1}}Vf(y)dy \lesssim \frac{1}{\langle x\rangle^{d-1}} \in L^2(\mathbb{R}^d)\end{aligned} \tag{23}$$

只要 $|V(y)| \lesssim \langle y\rangle^{-1-}$。相反，若 $(\sqrt{-\Delta} + V)\psi = 0$，则 $\psi = -G_0V\psi$，且 $(I + G_0V)\psi = 0$。

□

最后我们证明命题2.1。

命题2.1的证明。注意，对于任意满足 $\Im z > 0$的 z， $\Re z > 0$ 均有

$$R_V(z) - R_0(z) = -R_V(z)VR_0(z)$$

以及 $(I + VR_0(z))R_V(z) = R_0(z)$。因此，

$$\chi R_V\chi + \chi R_V VR_0\chi = \chi R_0\chi \Rightarrow \chi R_V\chi(I + VR_0\chi) = \chi R_0\chi. \tag{24}$$

由于 $(-\Delta)^{1/2}$ 是对称的，因此当 $\Re(z) > 0$ 时， $(I + VR_0\chi)$ 可逆；并且当 $\Im(z)$ 足够大时，由纽曼级数可得，且

$$\chi R_V\chi = \chi R_0\chi(I + VR_0\chi)^{-1}. \tag{25}$$

此外，对于每个固定的 $z \in \Lambda$， $\chi R_0(z)V$ 都是一个从 L^2 到 L^2 的紧算子。因此，$(I + VR_0(z)\chi)$ 要么可逆，要么 0 是一个特征值。因此，根据弗雷德霍姆择一定理， $\chi R_V\chi$ 可作为一个从 L^2 到 L^2 的算子亚纯延拓至 Λ。此外， $\chi R_V(z)\chi$ 的极点应满足

$$(I + VR_0(z)\chi)\psi = 0 \quad \Rightarrow \psi = -VR_0(z)\chi\psi$$

对于某个 $\psi \in L^2_c$。 □

3. Poles of $\chi R_V(z)\chi$

回忆一下，共振是 $\chi R_V(z)\chi$ 的亚纯延拓的极点。若 z_0 是这样的极点，则有

$$\mathrm{mult}(z_0) = \mathrm{rank}\int_{|z-z_0|=\epsilon} \chi R(z)\chi dz,$$

其中， $\epsilon > 0$ 足够小，使得闭球$B(z_0, \epsilon)$ 不包含 $\chi R(\overline{z})\chi$的任何其他极点。

我们首先要指出，共振的数量及其重数都不依赖于截断函数 χ。事实上，对于任意一个在 V的支集上取值为 1、在该支集之外为 0 的 χ，我们有

$$\chi R_V(z)\chi = \chi R_0(z)\chi + \chi R_0(z)VR_0(z)\chi + \chi R_0(z)VR_V(z)VR_0(z)\chi.$$

由于对于任意奇数 $d \geqslant 3$， $\chi R_0(z)\chi$ 在 z 中全纯，因此按重数计数的 $\chi R_V(z)\chi$的共振数等于按重数计数的 $VR_V(z)V$的共振数。

作为第二点说明，我们想提及 $\mathsf{mult}(z_0)$ 与 $(I + VR_0\chi)$ 的弗雷德霍姆行列式之间广为人知的关系，参见例如 [10, 11]。设 $K(z)$ 为有界迹类， $B(z)$、$C(z)$ 为有界线性算子，并且对于零点的某个开邻域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中的某个 $f(0) \neq 0$，令 $\det(I - K(z)) = z^\ell f(z)$，则

$$\mathrm{rank}\int_{|z|=\epsilon} B(z)(I - K(z))^{-1}C(z)dz \leqslant \ell. \tag{26}$$

注意，由命题2.1，我们有 $VR_V\chi = (I + VR_0\chi)^{-1}VR_0\chi$。因此，人们会想对 $K(z) = VR_0(z)\chi$ 使用 (26)。然而，我们将在下文看到，$(\chi R_0(z)V)$ 不是迹类算子。

为了解决这个问题，我们对 $K(z) = (VR_0(z)\chi)^{d+1}$ 使用 (26)。$(VR_0(z)\chi)^{d+1}$ 是迹类算子（见下文命题 3.1），而展开式

$$(I - (VR_0(z)\chi)^{d+1}) = \sum_{j=0}^{d}(-VR_0(\lambda)\chi)^j(I + VR_0(\lambda)\chi)$$

将说明：若 $\det(I-(VR_0(z_0)\chi)^{d+1}) = 0$，且 $\ell(z_0)$ 是 z_0 的代数重数，则 $\mathrm{mult}(z_0) \leqslant \ell(z_0)$。

本节中，我们令 $H(z) := \det(I - (VR_0(z)\chi)^{d+1})$，并估计其增长阶。

命题 3.1. 设 $V(x)$ 与定理 1.1 中相同。对于 $|argz| \leqslant a$ 和 $\delta < |z|$，有

$$|H(z)| \lesssim e^{(\langle z\rangle + \log\langle a\rangle)^d} \tag{27}$$

我们从以下引理开始。

引理3.2. 设 $D^+ := \{z \in \Lambda : \arg\ z \in (0,\pi]\}$。那么对于任意 $z_0 \in D^+$，有

$$R_0(z_0) = \sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}} B_j(r, z_0) \tag{28}$$

其中 $\|B_j(r,z_0)\|_{L^2\to H^j} \lesssim \langle z_0\rangle^{j-1}$。

证明。我们先证明当 $\arg\ z_0 \in (0,\pi/2),$ 时该结论成立，其中我们最初定义了预解算子 $R_0(z)$。回顾公式(14)，当 $\arg\ z_0 \in (0,\pi/2)$ 时，有

$$E_i(\pm i\sigma) = \int_{-\infty}^{\pm i\sigma} \frac{e^p}{p}dp \tag{29}$$

这可以表示为

$$E_i(\pm i\sigma) = e^{\pm i\sigma}a(\pm\sigma), \tag{30}$$

其中 $|\partial^j a(\pm\sigma)| \lesssim |\sigma|^{-1-j},\ j = 0, 1, ..., \frac{d-3}{2}$ 对于 $|\sigma| \gtrsim 1$。利用(30)，我们得出，若 $\arg\ z_0 \in (0,\pi/2),$，则

$$\tilde{E}_i(\pm iz_0s) = E_i(\pm iz_0s) = h(|z_0|s)\log|z_0s| + e^{\pm iz_0s}(1 - h(|z_0|s))a(\pm iz_0s) \tag{31}$$

其中 $h(z)$ 是一个支集包含于 $|z| < 1$ 的截断函数。可以计算得，对于任意 $s_k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &|\partial_s^{s_k}\{h(|z_0|s)e^{iz_0s}\log|z_0s|\}| \lesssim \sum_{m+p=s_k}(|z_0|^m s^{-p})h(|z_0|s) \lesssim s^{-s_k} \\ &|\partial_s^{s_k}\{(1-h(|z_0|s))e^{\pm iz_0s}\tilde{E}_i(\pm iz_0s)\}| = |\partial_s^{s_k}\{(1-h(|z_0|s))a(\pm iz_0s)\}| \lesssim s^{-s_k}. \end{aligned} \tag{32}$$

将 (32) 代入 $R_0(z)$ 的展开式 (4)，我们得到

$$|R_0(z_0)(r)| \lesssim \frac{1}{r^{d-1}} + \sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}} \frac{\langle z\rangle^{s_k}}{r^{d-1-s_k}} \tag{33}$$

对于 z，当 $\Im z \geqslant 0$ 时，有 $|\partial_s^{s_k}\{e^{izs}\}| \lesssim \langle z\rangle^{s_k}$；对任意非负实数 s，这一结论均成立。这意味着当 arg $z \in (0、\pi/2)$ 时，(37) 成立。

接下来考虑 arg $z_0 \in (\pi/2, \pi]$ 的情形。我们证明，在此区域内，$E_i(\pm i\sigma)$ 在 $z_0 r$ 处的延拓与积分 (29) 一致。得到这一结论后，不等式 (31) 和 (32) 对 $e^{\pm iz_0 s}\tilde{E}_i(\pm iz_0 s)$ 均成立，因此由 (33) 可得所述结论。我们证明 $E_i(iz_0 r)$ 与积分 (29) 一致。$E_i(-iz_0 r)$ 的证明类似。

$$\begin{aligned} \ln(-iz_0 r) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz_0 r)^k}{kk!} &= \ln(-iz_0 r) + \int_0^{iz_0 r} \frac{e^p - 1}{p} dp \\ &= \ln(-iz_0 r) + \int_{-1}^{iz_0 r} \frac{e^p - 1}{p} dp + \int_0^{-1} \frac{e^p - 1}{p} dp \\ &= \int_{-1}^{iz_0 r} \frac{e^p}{p} dp + \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^p}{p} dp - \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^p}{p} dp + \int_0^{-1} \frac{e^p - 1}{p} dp \\ &= \int_{-\infty}^{iz_0 r} \frac{e^p}{p} dp - \gamma = e^{iz_0 r} a(iz_0 r) - \gamma \end{aligned} \tag{34}$$

在最后一个等式中，我们用到了

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^p}{p} dp - \int_0^{-1} \frac{e^p - 1}{p} dp = \int_0^1 \frac{1 - e^{-p} - e^{-1/p}}{p} dp = \gamma.$$

最后，当 arg $z_0 = \pi/2$ 时，计算 (34) 对 $E_i(iz_0 r)$ 也成立。此外，当 arg $z_0 = \pi/2,$ 时，$e^{iz_0 s}$ 指数衰减，我们有

$$e^{iz_0 s} E_i(-iz_0 s) = e^{iz_0 s}(\gamma + \log(iz_0 s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iz_0 s)^n}{nn!}) = b(z_0 s) \tag{35}$$

其中 $|\partial^j b(\sigma)| \lesssim |\sigma|^{-1-j}$、$j = 0$、1、.....、$\frac{d-3}{2}$ 对于 $|\sigma| \gtrsim 1$。利用 (35)，我们得到

$$e^{iz_0 s}\tilde{E}_i(-iz_0 s) = e^{iz_0 s} h(|z_0|s) \log|z_0 s| + (1 - h(|z_0|s)) b(\pm iz_0 s). \tag{36}$$

因此，界 $|\partial_s^{s_k}\{e^{iz_0 s} E_i(-iz_0 s)\}| \lesssim s^{-s_k}$ 成立，当 arg z_0 $=\pi/2$ 时，(33) 也成立。□

引理 3.3. 设 $D^- := \{z \in \Lambda : \text{arg } z \in (\pi, 2\pi]\}$。那么对于任意 $z_0 \in D^-$，有

$$\chi R_0(z_0)\chi = \sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}} \tilde{B}_j(r, -z_0) + 2i\Big(\frac{z_0}{2\pi}\Big)^{d-1} \mathcal{E}_\chi^*(-\bar{z_0})\mathcal{E}_\chi(-z_0) \tag{37}$$

其中 $\|\tilde{B}_j(r,z)\|_{L^2\to H^j}\lesssim\langle z\rangle^{j-1}$。这里，

$$\mathcal{E}_\chi(z):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{izx\cdot\omega}\chi(x)f(x)dx.$$

证明。设 $z=e^{-i\pi}z_0$。则对数$(iz_0s)=$对数$(-izs)+2\pi i$，且对数$(-iz_0s)=$对数(izs)。因此 ，

$$e^{-iz_0s}\tilde{E}_i(iz_0s)=e^{izs}E_i(-izs),\quad e^{iz_0s}\tilde{E}_i(-iz_0s)=e^{-izs}E_i(izs)+e^{-izs}2\pi i \tag{38}$$

因此，

$$\begin{aligned}R_0(z_0)(r)&=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{r^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\Big\{e^{izs}E_i(-izs)+e^{-izs}E_i(izs)+4\pi ie^{-izs}\Big\}\Big|_{(s=|r|)}\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{r^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\Big\{e^{izs}E_i(-izs)+e^{-izs}E_i(izs)-4\pi ie^{izs}\Big\}\Big|_{(s=|r|)}\\&+\frac{2i}{(2\pi)^{d-1}}\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{r^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\{e^{izs}+e^{-izs}\}\Big|_{(s=|r|)}\end{aligned} \tag{39}$$

注意，arg $z\in(0,\pi]$。因此，(39) 第二行中的项满足 (33) 形式的估计。此外，由 (8) 可得

$$\sum_{k=0}^{\frac{d-3}{2}}\frac{\tilde{c_k}}{|x-y|^{d-1-s_k}}\partial_s^{s_k}\{e^{izs}+e^{-izs}\}\Big|_{(s=|x-y|)}=z^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}e^{iz(x-y)\cdot\omega}d\omega \tag{40}$$

证明至此完成。 □

接下来，我们估计 $\chi R_0(z)\chi$，对所有 $z\in\Lambda$ 均成立。令 $z_0\in D^+\cup D^-/\{0\}$，和 $z_m:=e^{2\pi im}z_0$, $m\in\mathbb{Z}$。于是有

$$[e^{iz_1s}\tilde{E}_i(-iz_1s)+e^{-iz_1s}\tilde{E}_i(iz_1s)]-[e^{iz_0s}\tilde{E}_i(iz_0s)+e^{-iz_0s}\tilde{E}_i(-iz_0s)]=2\pi i[e^{iz_0s}+e^{-iz_0s}]$$

逐点成立。因此，由 (8)、(28) 和 (37) 可得

$$R_0(z_1)(x,y)-R_0(z_0)(x,y)=2\pi i\widehat{\sigma_{z_0\mathbb{S}^{d-1}}}(r)$$

作为算子 $L^2_c\to L^2_{\text{loc}}$。更一般地，有

$$R_0(z_m)(x,y)-R_0(z_0)(x,y)=2\pi im\widehat{\sigma_{z_0\mathbb{S}^{d-1}}}(r) \tag{41}$$

等式 (41) 得到以下推论。界 (44) 将由 (39)、(31) 和 (41) 推出。

推论 3.4. 设 $z_m=e^{2\pi im}z_0$。则对于 $z_0\in D^+$，有

$$\chi R_0(z_m)\chi=\sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}}B_j(r,z_0)+im\Big(\frac{z_0}{2\pi}\Big)^{d-1}\mathcal{E}^*_\chi(\bar{z_0})\mathcal{E}_\chi(z_0) \tag{42}$$

而对于 $z_0 \in D^-$

$$\chi R_0(z_m)\chi = \sum_{j=1}^{\frac{d-1}{2}} \tilde{B}_j(r,-z_0) + 2i\Big(\frac{z_0}{2\pi}\Big)^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(i\bar{z_0})\mathcal{E}_\chi(-i\bar{z_0}) + im\Big(\frac{z_0}{2\pi}\Big)^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(z_0)\mathcal{E}_\chi(\bar{z_0}) \tag{43}$$

其中 $\|\tilde{B}_j(r,z_0)\|_{L^2\to H^j}, \|B_j(r,z_0)\|_{L^2\to H^j} \lesssim \langle z\rangle^{j-1}$。此外，我们有

$$\|\chi R_0(z_m)\chi\|_{L^2\to H^1} \lesssim \langle m\rangle e^{\langle z_0\rangle}, \tag{44}$$

现在我们准备证明命题 3.1。

命题 3.1 的证明。为证明该结论，我们首先说明 $(VR_0\chi)^{d+1}$ 属于迹类。证明这一点后，我们利用下式估计 $|H(\lambda)|$

$$|H(\lambda)| \leqslant \Pi_j s_j((VR_0\chi)^{d+1})$$

对于 $\lambda \geqslant 1$，其中 s_j 是 $(VR_0\chi)^{d+1}$ 的奇异值。设 A, B 紧致，且 $C:\ H_1 \to H_2$为有界算子，则对于 $k, j \geqslant 0$，有以下两个性质，见 [10] 中的定理 1.6 和定理 1.7。

i) $s_{k+j+1}(A+B) \leqslant s_{k+1}(A) + s_{j+1}(B)$

ii) $s_j(AC) \leqslant s_j(A)\|C\|_{H_1\to H_2}$

我们开始证明 $(VR_0\chi)^{d+1}$ 属于迹类。首先注意到，$(VR_0\chi)^{d+1}$ 的支集包含在半径为 B(0 的球内，R) 适用于某个 $0 < R < \infty$。因此，对于任意满足 arg $z \in$ (0 的 $\lambda = ze^{2m\pi i}$，有 2π]

$$\begin{aligned} s_j(VR_0(\lambda)\chi) &\leqslant \|V\|_{L^\infty} s_j((-\Delta+I)_B^{-\frac{1}{2}}(-\Delta+I)_B^{\frac{1}{2}}\chi R_0\chi) \\ &\lesssim \|V\|_{L^\infty} s_j((-\Delta+I)_B^{-\frac{1}{2}})\|\chi R_0\chi\|_{L^2\to H^1} \lesssim \|V\|_{L^\infty} j^{-1/d}\langle m\rangle e^{|\lambda|} \end{aligned} \tag{45}$$

其中 Δ_B 是 B(0 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，R)。在第二个不等式中，我们使用了性质 ii)；在最后一个等式中，我们使用了特征值渐近的韦尔定律以及 (44)。因此，

$$Tr((VR_0(\lambda)\chi)^{d+1}) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^+} s_j((VR_0(\lambda)\chi)^{d+1}) \lesssim \langle m\rangle e^{|\lambda|} \tag{46}$$

因此，$(\chi R_0 V)^{d+1}$ 是迹类。

接下来我们估计 $|H(\lambda)|$。回顾 (42)，对于任意 $z \in D^+$，我们有

$$VR_0(ze^{2\pi im})\chi = \sum_{k=1}^{\frac{d-1}{2}} VB_k(r,z) + 2\pi miz^{d-1}V\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z) \tag{47}$$

因此，由性质 i)

$$s_j(VR_0(ze^{2\pi im})\chi) \lesssim \|V\|_{L^\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\frac{d-1}{2}} s_{(\frac{j}{d-1})}(B_k(r,z)) + s_{(\frac{j}{2})}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z))\Big) \tag{48}$$

类似地，由（43）可知，对于任意 $z \in D^-$

$$s_j(VR_0(ze^{2\pi im})\chi) \lesssim \tag{49}$$
$$\|V\|_{L^\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\frac{d-1}{2}} s_{(\frac{j}{d-1})}(B_k(r,z)) + s_{(\frac{j}{4})}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z)) + s_{(\frac{j}{4})}(z^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(-\bar{z})\mathcal{E}_\chi(-z))\Big)$$

首先注意，由 (42) 可得

$$s_j(B_k(r,z)) \lesssim ((-\Delta+I)_B^{-\frac{k}{2}})\|B_k(r,z)\|_{L^2\to H^k} \lesssim j^{-k/d}\langle z\rangle^{k-1}. \tag{50}$$

这利用 $\sum_{k=1}^{\frac{d-1}{2}} j^{-k/d}\langle z\rangle^{k-1}$ 估计了 (48) 和 (49) 中的第一项。

接下来我们估计 (48) 中的第二项。这里采用的思路最早见于 [6]。回顾

$$\mathcal{E}_\chi^*(z) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi(x)e^{izx\cdot\omega}g(\omega)d\omega.$$

因此，

$$s_{j/2}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z)) \leqslant C_0e^{|z|}s_{j/2}((-\Delta+I)_{\mathbb{S}^2}^{-l})\|(-\Delta+I)_{\mathbb{S}^{d-1}}^{l}\langle m\rangle\mathcal{E}_\chi(z))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{S}^2)}$$

我们还有，

$$\|(-\Delta+I)_{\mathbb{S}^2}^{l}\langle m\rangle\mathcal{E}_\chi(z)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{S}^2)} \leqslant e^{C_2(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)}(2l)! \tag{51}$$

由此得到

$$s_{j/2}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z)) \leqslant C_1j^{-l}e^{C_2(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)}(2l)!$$

[1]选取 $j/l = C_3e,$，然后 $j^{-l}(2l)! \leqslant e^{-C_4j^{\frac{1}{d-1}}}$。因此，

$$s_{j/2}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z)) \lesssim e^{C_1(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)-C_2j^{\frac{1}{d-1}}} \tag{52}$$

对于某些 C_1、$C_2 \in \mathbb{R}$。

采用导出式（52）的类似论证，我们对任意 $z \in D^-$ 得到

$$s_{(\frac{j}{4})}(mz^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(\bar{z})\mathcal{E}_\chi(z)) \lesssim e^{C_3(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)-C_4j^{\frac{1}{d-1}}} \tag{53}$$
$$s_{(\frac{j}{4})}(\bar{z}^{d-1}\mathcal{E}_\chi^*(z)\mathcal{E}_\chi(\bar{z})) \lesssim e^{C_5\langle z\rangle-C_6j^{\frac{1}{d-1}}}$$

将式（50）、（52）代入式（48），并将式（50）、（53）代入式（49），得到

$$s_j(VR_0(ze^{im\pi})\chi) \lesssim \begin{cases} \sum_k^{(d-1)/2}\langle z\rangle^{k-1}j^{-k/d} & j \geqslant \tilde{C}(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)^{d-1} \\ e^{\langle z\rangle+\log\langle m} & j \leqslant \tilde{C}(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)^{d-1} \end{cases} \tag{54}$$

[~]对于某个 $C \in \mathbb{R}$，其根据 C_i, $i = 1, 2, ...,6$ 确定。

注意，如果 $j \geqslant \tilde{C}(\langle z\rangle + \text{对数}\langle m\rangle)^{d-1}$，那么 $z^{k-1}j^{-(k-1)/d} \lesssim \langle z\rangle^{(k-1)/d}$。此外，由于 $k \leqslant \frac{d-1}{2}$，我们进一步得到 $z^{k-1}j^{-(k-1)/d} \lesssim \langle z\rangle^{(d-3)/2d},$，对于 $d \geqslant 3$。因此，

$$s_j((VR_0(ze^{2im\pi})\chi)^{d+1}) \lesssim \begin{cases} \langle z\rangle^{\frac{d-3}{2d}(d+1)} j^{-\frac{d+1}{d}} & j \geqslant \tilde{C}(\langle z\rangle + \log\langle m\rangle)^{d-1} \\ e^{\langle z\rangle + \log\langle m\rangle} & j \leqslant \tilde{C}\langle(\langle z\rangle + \log\langle m\rangle)^{d-1}. \end{cases} \tag{55}$$

回想一下，我们有 $|H(\lambda)| \leqslant \Pi_j s_j((VR_0\chi)^{d+1})$。因此，对 $\lambda = ze^{2i\pi m}$ 使用 (55)，可得

$$\begin{aligned} |H(\lambda)| &\lesssim \Big(\prod_{j\leqslant\tilde{C}(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)^{d-1}} e^{\langle z\rangle+\log\langle m\rangle}\Big)\Big(e^{\langle z\rangle^{\frac{d-3}{2d}(d+1)}\sum_{j\geqslant\tilde{C}\langle z\rangle+\log\langle m\rangle} j^{-\frac{d+1}{d}}}\Big) \\ &\lesssim e^{(\langle z\rangle+\log\langle m\rangle)^d}. \end{aligned} \tag{56}$$

这就完成了命题 3.1 的证明。 □

4. Proof of Theorem 1.1

在定理 1.1 的证明中，我们使用了 [11] 中的定理 4.1。

定理 4.1。设 $h(z)$ 是定义在 $\{z \in \Lambda$ 上的全纯函数：$|z| \leqslant r\}$，其中 $r \geqslant 1$，并且

$$h(z) = 1 + O_1(|z|^\gamma) \quad as \quad z \to 0, |arg z| \leqslant a.$$

$\forall a \geqslant 1$，其中 $\gamma > 0$ 与 a 无关。那么，对任意整数 $m \geqslant 2/\gamma$，$h(z)$ 在 $\{z \in \Lambda$ 中的零点 $\tilde{N}(r/2, \pi m/4)$（按重数重复计算）的数量满足如下界，其中常数 $C > 0$ 与 $h(z)$、r 和 m 无关，且 $\log^+ x = \max\{\log\ x, 0\}$。

$$\begin{aligned} \tilde{N}(r/2, \pi m/4) \leqslant Cm \sup_{|\theta|\leqslant\pi m/2} \log^+ |h(re^{i\theta})| \\ + Cr^{1/m}\int_0^r t^{-1-1/m}\log^+ |h(te^{-i\pi m/2})h(te^{i\pi m/2})|dt \end{aligned} \tag{57}$$

定理 1.1 的证明。注意，由 (19) 可得

$$(VR_0(z)\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j K_{1,j} + \log(z)\sum_{j=0}^{\infty} z^{2j} K_{2,j}$$

对于 $|z| \ll 1$，其中 $K_{1,\ j}$ 和 $K_{2,\ j}$ 均为迹类算子，因此我们有

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} z^j + \log(z)\sum_{j=1}^{\infty} c_{2,j} z^{2j}, \quad |z| \ll 1$$

注意，由于 0 是非退化的，至少有一个 $c_{1,j}$,$c_{2,j}$ 不为零。设 p 是使其中一个 $c_{1,p}$,$c_{2,p/2}$ 不为零的最小整数。然后，定义

$$H_1(z) := \begin{cases} \frac{H(z)}{c_{1,p}z^p} & \text{if } c_{1,p} \neq 0 \\ \frac{H(z)}{c_{2,p}z^p \log(z)} & \text{if } c_{2,p/2} \neq 0 \\ \frac{H(z)}{z^p(c_{1,p}+c_{2,p}\log(z))} & \text{if } c_{1,p}, c_{2,p/2} \neq 0 \end{cases} \tag{58}$$

注意，命题 3.1 中的估计对 $H_1(z)$ 仍然成立。此外，对于 $z \ll 1$，$\log^+ |H_1(z)| \lesssim z^{1-}$。因此，我们可以对 $H_1(z)$ 使用 (57)，以估计 H_1 的零点个数。

我们有

$$m \sup_{|\theta| \leqslant \pi m/2} \log^+ |H_1(re^{i\theta})| \lesssim m(\langle r\rangle + \log\langle m\rangle)^d.$$

此外，

$$\begin{aligned} r^{1/m} \int_0^r t^{-1-1/m} \log^+ |H(te^{-i\pi m/2})H(te^{i\pi m/2})|dt \\ \lesssim r^{1/m} \int_0^r t^{-1/m-} dt + \int_{r_0}^r t^{-1-1/m}(\langle t\rangle + \log\langle m\rangle)^d dt \lesssim r^d + (\log\langle m\rangle)^d + r^{1/m}(\log\langle m\rangle)^d. \end{aligned} \tag{59}$$

注意，利用 $ab \lesssim a^k + b^{k/k-1}$ 对于 $k \geqslant 2$，以及 a、$b > 0$，我们有

$$r^{1/m}(\log\langle m\rangle)^d \lesssim r^d + (\log\langle m\rangle)^{d(\frac{d}{d-m})} \lesssim r^d + m(\log\langle m\rangle)^d$$

因此，$H_1(z)$ 的零点由 ($m \geqslant 1$) 确定

$$\tilde{N}(r/2, \pi m/4) \lesssim m(\langle r\rangle + \log\langle m\rangle)^d$$

计入零能量后，我们得到定理 1.1。 □

Appendix A.

本节我们按照 [3] 计算 H 的散射矩阵。首先注意到，与 Schr¨odinger 情形一样，$\lambda > 0$ 的所有 $(\sqrt{-\Delta} - \lambda)\psi_0 = 0$ 解都是基本平面波解 $e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}$ 的叠加，其中 $x \in \mathbb{R}^d$，且 $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$，即。

$$\psi_0(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}\phi(\omega)d\omega. \tag{60}$$

此外，由于任意 $(\sqrt{-\Delta} - \lambda)\psi = 0$ 解也是 $(-\Delta - \lambda^2)u = 0$ 解，$\psi_0(x)$ 是满足当 $|x| \to \infty$ 时，的唯一 $(\sqrt{-\Delta} - \lambda)\psi_0 = 0$ 解。

$$\psi_0(x) = \frac{c_d}{(\lambda r)^{\frac{d-1}{2}}}(e^{i\lambda r}\phi(\theta) + e^{-i\lambda r}i^{1-d}\phi(-\theta)) + O(r^{-\frac{d+1}{2}}). \tag{61}$$

这里，我们令 $x = r\theta$，并在弱意义下使用如下展开式 $r \to \infty$

$$e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle} = \frac{1}{(\lambda r)^{\frac{d-1}{2}}}\Big(\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{e^{\frac{1}{4}\pi(n-1)i}}e^{i\lambda r}\delta_\omega(\theta) + e^{\frac{1}{4}\pi(n-1)i}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}e^{i\lambda r}\delta_{-\omega}(\theta) + O(r^{-1})\Big). \tag{62}$$

注意，如果在（60）中使用 $e^{-i\lambda\langle x,\ \omega\rangle}$ 而不是 $e^{i\lambda\langle x,\ \omega\rangle}$，则可得到与（61）类似的表达式，但参数化方式不同。这两种参数化之间的关系由绝对散射矩阵给出。特别地，将 $\phi(\theta)$ 映射到 $i^{1-d}\phi(-\theta)$ 的算子是自由方程的绝对散射矩阵，我们将其记为 $S_{\mathrm{abs},\ 0}(\lambda)$。

为了对 H 定义相同的算子，我们需要寻找满足 H 且表现为平面波的广义特征函数。我们将这族函数定义为以下形式：

$$\psi(x,\lambda) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} w(\lambda,\omega,x)\phi(\omega)d\omega \tag{63}$$

其中 $w(\lambda、\ \omega、\ x) = e^{-i\lambda\langle x,\ \omega\rangle} + u(x、\ \lambda、\ \omega)$ 和 $u \to 0$ 在 $x \to \infty$ 时逐点成立。特别地，我们希望由以下方程求解 u。

$$(\sqrt{-\Delta} + V - \lambda)u = -Ve^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} \tag{64}$$

下面我们将证明，如果 H 没有正特征值，那么对于所有 $\lambda > 0,\ \ R_V(\lambda)$ 都有定义，并且 $u = -R_V(\lambda)(Ve^{-i\lambda\langle\cdot,\ \omega\rangle})$ 满足式 (64)。事实上，它是唯一的外向解。

我们从以下两个引理开始。

引理 A.1. 设 V 是紧支撑、实值且有界的势。若对于某个 $g \in L^\infty_c,\ \ u = R_0(\lambda)g$ 满足 $(H-\lambda)u = 0$，则 $\lambda > 0$ 是一个特征值。

证明。注意，若 $\lambda > 0$，则有

$$R_0(\lambda) = 2\lambda R_\Delta(\lambda) + R_0(-\lambda) \tag{65}$$

其中 $R_\Delta(\lambda)$ 是自由薛定谔算子的外向预解算子。此外，对于 $x = r\theta$，有

$$R_\Delta(\lambda)f = e^{i\lambda r}r^{\frac{1-d}{2}}h(\theta) + O_{L^2(\mathbb{R}^d)},\ \ h(\theta) = c_n\lambda^{\frac{d-3}{2}}\widehat{f}(\lambda\theta), \tag{66}$$

因此，利用 (33) 和 (34)，对于 $\lambda > 0$，我们有

$$R_0(\lambda)f = e^{i\lambda r}r^{\frac{1-d}{2}}h(\theta) + O_{L^2(\mathbb{R}^d)},\ \ h(\theta) = c_n\lambda^{\frac{d-1}{2}}\widehat{f}(\lambda\theta), \tag{67}$$

现在，设 $u = R_0(\lambda)g$ 是 $(H-\lambda)u = 0$ 的解，则由注 2.3 的第 ii) 部分可知 $(I + VR_0(\lambda))g = 0$，且 $g = -Vu$。因此，只需证明 $Vu(\lambda\theta) = 0$ 即可完成证明。

为看出 $Vu(\lambda\theta) = 0$，注意到对于 $f \in \mathcal{S}$，有 $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\langle R_0(\lambda+i\epsilon)f, f\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi| - (\lambda+i\epsilon)}d\xi \\ &= \text{p.v.}\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\frac{|\hat{f}(r\theta)|^2 r^{d-1}}{(r-\lambda)}drd\omega + i\pi\lambda^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\hat{f}(\lambda\theta)|^2 d\omega.\end{aligned} \tag{68}$$

此外，

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\langle R_0(\lambda+i\epsilon)g, (I+R_0(\lambda+i\epsilon)g\rangle \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\langle R_0(\lambda+i\epsilon)g, g\rangle + \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

注意， $g=-Vu$ 具有紧支集、有界，且 V为实数。因此，几乎处处有 $\widehat{Vu}(\lambda\theta)=0$。这就证明了该结论。

□

注 A.2. 设$u\in\mathcal{H}_{1,loc}$，且对于 $\lambda>0$， $(H-\lambda)u=0$；令$\hat{}u$ 为 u的傅里叶变换。若$\hat{}u\in L^1_{loc}$，则对于 $\sigma>1/2$，有 $u\in L^{2,\sigma}$。这是 $\widehat{Vu}(\lambda\theta)=0$ 的推论，因为

$$\hat{u}(\xi)=\frac{\widehat{Vu}(\xi)}{|\xi|-\lambda}=\chi(|\xi|<\lambda/2)\frac{\widehat{Vu}(\xi)}{|\xi|-\lambda}+\chi(|\xi|\geqslant\lambda/2)\frac{\widehat{Vu}(\xi)}{|\xi|-\lambda} \tag{69}$$

根据 [2] 中的定理 B.1，第二项将 $L^2\to L^2$映射到$^{\sigma}_{,}$。注意，对于任意$s<\frac{d}{2}+1$，第一项属于 $\mathcal{H}_s$。

回顾一下，我们最初定义了 $R_0(z)$，并针对 $\Im z>0$、$\Re z>0$定义了 $R_V(z)$。此外，根据注 2.3 的 ii) 部分，作为算子，$\lim_{\epsilon\to 0}R_0(\lambda+i\epsilon)$ 存在于 $L^{2,\sigma}\to L^{2,-\sigma}$，因此对于 $f\in L^{2,\sigma}$满足$(\sqrt{-\Delta}-\lambda)u=f$。在下面的引理中，我们将证明对于 $\lambda\in\mathbb{R}^+\backslash e_+(H)$， $R_V(\lambda)f$满足 $(H-\lambda)u=f$，且 $f\in L^{2,\sigma}$。

引理 A.3. 设 V 为紧支撑的实值有界势。此外，设 $e_+(H)$ 为 H 的正特征值离散集。那么，对于任意 $f\in L^{2,\ \sigma}$，以及 $\lambda\in\mathbb{R}^+\backslash e_+(H)$,$R_V(\lambda)f\in\mathcal{H}_{1,\ -s}$，且它满足

$$(\sqrt{-\Delta}+V-\lambda)u=f$$

证明. 为证明该结论，只需说明 $(I+R_0(z)V)^{-1}$ 在算子 $\mathcal{H}_{1,\ -\sigma}\to\mathcal{H}_{1,\ -\sigma}$ 的一致拓扑下存在，当且仅当 $\lambda\in\mathbb{R}^+\backslash e_+(H)$。若 $(I+R_0(z)V)^{-1}$ 存在，则对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}^+\backslash e_+(H)$, $R_V^+(\lambda)f\in\mathcal{H}_{1,\ -s}$，并且

$$(H-\lambda)R_V(\lambda)f=(\sqrt{-\Delta}-\lambda)(I+T(\lambda))(I+T(\lambda))^{-1}R_0(\lambda)f=f.$$

我们首先考虑 $z\notin\mathbb{R}^+$ 的情形。注意，由预解式恒等式可知，对于任意 $f\in L^2$

$$R_V(z)f+R_0(z)VR(z)f=R_0(z)f\Rightarrow(I+T(z))u=R_0(z)f \tag{70}$$

其中 $u=R_V(z)f\in\mathcal{H}_1$。注意，这意味着 $\overline{R(I+T(z))}=\mathcal{H}_{1,\ -\sigma}$。因此，根据弗雷德霍姆择一定理，$(I+T(z))^{-1}$对所有 $\Im z>0$、$\Re z>0$均存在。此外，若 $\lambda\in\mathbb{R}^+$，则再次根据弗雷德霍姆择一定理，$(I+T(\lambda)u=0$ 当且仅当 $u=-R_0(\lambda)(Vu)$；并且根据引理 A.1， u 是一个特征值。因此 $\lambda\in e_+(H)$。

现在，假设 $\lambda \in e_+(H)$，则存在 $u \in D(H)$ 使得 $(H-\lambda)u = 0$，于是 $(\sqrt{-\Delta} - z)u + Vu = (z-\lambda)u$，因此 $u + R_0(z)Vu = (z-\lambda)R_0(z)u$。令 $z \to \lambda$，根据注 A.2，我们有 $(I + R_0(\lambda)V)u = 0$。

□

接下来，注意到由引理 A.3，我们有

$$\begin{aligned} w &= e^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} + u(x,\lambda,\omega) \\ &= e^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} - R_V(\lambda)(Ve^{i\lambda\langle\cdot,\omega\rangle}) = e^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} - R_0(\lambda)(I+T(\lambda))^{-1}(Ve^{i\lambda\langle\cdot,\omega\rangle}) \end{aligned}$$

此外，利用 (66)

$$\begin{aligned} (71)\quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} & R_0(\lambda)(I+VR_0(\lambda))^{-1}(Ve^{-i\lambda\langle\cdot,\omega\rangle})\phi(\omega)d\omega = \\ &= \frac{\lambda^{\frac{d-1}{2}}}{r^{\frac{d-1}{2}}}e^{i\lambda r}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\langle\theta,x\rangle}(I+VR_0(\lambda))^{-1}Ve^{-i\lambda\langle\cdot,\omega\rangle}\phi(\omega)d\omega dx + O_{L^2} \\ &= \frac{\lambda^{\frac{d-1}{2}}}{r^{\frac{d-1}{2}}}e^{i\lambda r}\mathcal{E}(\lambda)(I+VR_0(\lambda))^{-1}V\mathcal{E}^*(\bar{\lambda})\phi + O_{L^2}. \end{aligned}$$

因此，

$$\psi(x) = \frac{c_d}{(\lambda r)^{\frac{d-1}{2}}}\Big(e^{-i\lambda r}\phi(\theta) + e^{i\lambda r}i^{1-d}\Big(\phi(-\theta) + \tilde{a}_d\lambda^{d-1}\mathcal{E}(\lambda)(I+VR_0(\lambda))^{-1}V\mathcal{E}^*(\bar{\lambda})\phi\Big) + O_{L^2}$$

绝对散射矩阵现在定义为将 $\phi(\theta)$ 映射到 $i^{1-d}\Big(\phi(-\theta) + \tilde{a}_d\lambda^{d-1}\mathcal{E}(\lambda)(I+VR_0(\lambda))^{-1}V\mathcal{E}^*(\bar{\lambda})\phi\Big)$ 的映射，并将其记作 $S_{\mathrm{abs}}(\lambda)$。最后，散射矩阵为

$$(72)\qquad S(\lambda) = S_{\mathrm{abs}}(\lambda)S_{\mathrm{abs},0}^{-1}(\lambda) = I + a_d\mathcal{E}(\lambda)(I+VR_0(\lambda))^{-1}V\mathcal{E}^*(\bar{\lambda}) : L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L^2(\mathbb{S}^{d-1})$$

我们以如下定理结束本节，该定理是 (72) 的推论。这里，唯一性成立只是因为我们假设不存在正特征值。

定理 A.4. 假设 V 是实值、有界且紧支撑的，并且 $\lambda > 0$。此外，设 H 没有正特征值。那么对于任意 $g \in C^\infty(S^{d-1})$，存在唯一的 $f \in C^\infty(S^{d-1})$ 和 $\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，使得

$$(H-\lambda)\psi = 0, \quad \psi(r\theta) = r^{-\frac{d-1}{2}}\Big(e^{i\lambda r}f(\theta) + e^{-i\lambda r}g(\theta)\Big) + O(r^{-\frac{d+1}{2}})$$

证明。我们只证明唯一性。我们将证明，如果 $\psi_0(r\theta) = r^{-\frac{d-1}{2}}e^{i\lambda r}f(\theta) + O(r^{-\frac{d+1}{2}})$是 $(H-\lambda)\psi = 0$的解，那么 $\psi_0(x) = -R_0(\lambda)V\psi_0(x)$。引理 (A.1) 随后证明唯一性。

设 $\psi_0(x) = -R_0(\lambda)V\psi_0(x)+h$，其中 $h \in L^2,\ ^{-\sigma}$ 是 $(H-\lambda)\psi = 0$的解。那么，$(\sqrt{-\Delta}-\lambda)h = 0$，并由 (61)

$$h = \frac{c_d}{(\lambda r)^{\frac{d-1}{2}}}(e^{i\lambda r}\phi(\theta) + e^{-i\lambda r}i^{1-d}\phi(-\theta)) + O(r^{-\frac{d+1}{2}}).$$

对于某个 ϕ。注意，我们假设 $\psi_0(r\theta)$ 是向外的。因此， $\phi = 0$ 从而得到 $h = 0$。 □

Acknowledgement

作者谨此感谢 John Schotland 建议研究半拉普拉斯算子的共振。

References

[1] Abramowitz, M. 和 Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* 美国国家标准局《应用数学系列》第55卷。由美国政府出版物监管局、美国政府印刷局代售，华盛顿特区。1964年[2] Agmon, S. *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering Theory* 比萨高等师范学校年刊 2(1975), 151–218[3] Dytalov, S. 和 Zworski, M. *Mathematical Theory of Scattering Resonances* AMJ. 2019, 罗得岛州普罗维登斯。[4] Intissar A.

A polynomial bound on the number of scattering poles for potential in even dimensional space in$\mathbb{R}^n$ 《偏微分方程通讯》II (1986), 367–396[5] Jensen A.,

Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions results in $L^2(R^m)$,$m \geqslant 5$. 《杜克数学杂志》47 (1980), 第1期, 57–80。[6] Vodev, G.

*Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*Comm. Math, Phys. 146(1992), 205-216。[7] L¨orinczi, J., 和 Sasaki, I.

Non-existence of embedded eigenvalues for a class of non-local Schrödinger opera-tors, 预印本 (2016)[8] Richard, S. 和 Umeda, T. *Low energy spectral and scattering theory for relativistic Schroedinger operators*《北海道数学杂志》45(2): (2016年6月) 141-179。[9] Sj¨ostrand J. 和 Zworski M.

Complex scaling and the distribution of the scattering poles J. Amer. Math. Soc 4(1991). 729– 769[10] Simon B. *Trace Ideals and Their Applications*, 伦敦数学会讲义丛书 35，剑桥大学出版社，剑桥-纽约，1979年[11] Vodev, G. *Sharp bounds on the number of scattering poles in even-dimensional spaces*,《杜克数学杂志》74(1994): 1-17[12] Vodev, G. *Sharp bounds on the number of scattering poles in the two dimensional case*, Math. Nachrichten, 170(1994), 287–297。[13] Zhang, R., Huang, T. 和 Zhen, Quan.

The scattering of fractional Schrödinger operators with short rangepotentials 《泛函分析杂志》第281卷 (2021) 第2期，109033