arXiv:2304.01495v1 [cond-mat.stat-mech] 4 Apr 2023

收敛与发散群体行为的拉普拉斯动力学*

Yang Tian, † Yunhui Xu, ‡ 和 Pei Sun§

群集现象广泛存在于各种物理、生物和社会系统中，个体单元之间简单的局部相互作用会形成复杂的全局模式。各种群集现象的一个共同特征是，单元在行为上呈现收敛或发散演化，即彼此变得越来越相似或越来越不同。相关动力学随时间变化，并在全局尺度上产生复杂后果。本研究提出一种广义拉普拉斯动力学模型，用于描述收敛与发散的群体行为；收敛与发散的趋势相互竞争，共同决定全局模式的演化。我们通过实证观察到，收敛与发散演化阶段之间存在非平凡的类相变现象，而这些现象受局部相互作用特性的控制。我们还对其潜在的相变机制提出猜想，并概述了检验这一猜想面临的主要理论困难。总体而言，我们的框架可作为群体行为及其复杂相变动力学的最简模型。

背景。群体行为会随时间动态演化 [1]。这些行为的收敛与发散演化过程存在于不同尺度。例如，在相似环境中，彼此互动的多个物种可能沿着收敛路径演化 [2–4], ，而同一物种中亲缘关系密切的种群若承受不同的选择压力，则可能沿着分化路径演化 [5–7]。再如，发生突发事件（如流行病或社会动荡）时，人们可能表现出趋同的社会行为（例如观点或消费行为）；突发事件结束后，这些社会行为则会分化并日益个性化 [8–10]。

尽管收敛与发散的群体行为具有普适性，因而广泛存在于世间，但群体行为内涵丰富、细节多样，这给解析建模带来了严峻挑战。目前尚不清楚，有机体演化中的收敛与发散动力学、人类社会行为的收敛与发散，以及其他类似现象，能否用统一而简单的模型加以描述。尽管专门模型 [11–21], 、统计分析 [22, 23], 和数据驱动方法 [24] 在研究群集现象方面已取得重要进展，但对群体行为收敛与发散演化过程的描述仍进展有限。

我们的工作。在本研究中，我们提出了一个简单的收敛与发散群体行为模型，并描述了收敛与发散演化随时间动态切换的过程。该框架可作为刻画多种真实群集现象的最简模型。此外，我们还可以通过纳入更多主体异质性以及局部交互规则（例如记忆和偏好）来丰富模型。针对该模型开展的计算实验表明，收敛与发散演化阶段之间存在类相变现象，这种现象受局部相互作用中收敛倾向与分化倾向之间的平衡所控制。我们对潜在的相变机制提出了一个猜想，并总结了理论上的难点用于验证这一猜想。

收敛演化的局部动力学。为兼顾适用于不同群集现象的普适性与便于进行解析推导的简洁性，我们考虑一个 n 维抽象状态空间 $S \subset \mathbb{R}^n$，其中每个元素 $\mathbf{s} \in S$ 表示一个抽象状态，可用于模拟系统个体的任意目标属性（例如空间坐标、意见或遗传性状）。群体模型根据每个个体在时刻 $t \in T$ 的当前状态（记为 $\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{s}(\sigma_i(t))$）以及其与邻居个体的相互作用（由集合 N_i包含），按照局部规则 ψ更新该个体 $\sigma_i \in V$ 的状态

$$\mathbf{s}_i(t+\varepsilon) = \psi(\mathbf{s}_i(t), \mathbf{s}_{N_i}(t)). \tag{1}$$

这里，$\mathbf{s}^{N_i}(t) = \{\mathbf{s}^j(t) | \sigma_j \in N_i\}$ 表示个体 i 在时刻 t 的邻居个体状态，而 ε 表示最小时间步长（示意图见图 1(a)）。

相互作用规则的局部化通过约束 N_i（个体 σ_i的邻居集合）来实现，使其成为一组状态接近于 σ_i的个体的子集

$$N_i = \{\sigma_j | d(\mathbf{s}_i(t), \mathbf{s}_i(t)) \leq \Delta\} \subset V, \tag{2}$$

其中，$d(\cdot,\cdot)$ 表示任意距离函数，Δ 是决定交互范围的参数（见图 1(a)）。请注意，集合 N_i 会随时间根据式 (2) 演化，因为个体状态依赖于时间。

收敛演化过程被定义为系统的一种全局模式，在此过程中，各单元在状态空间中变得越来越相似。该过程也对应于所有单元的状态趋近于全局平均状态的情形。这个过程的非平凡之处在于，每个单元只与其邻居交互，因此永远无法获知状态空间中所有单元的绝对坐标。每个时刻，单元只能获得通过交互获取的相对坐标信息。对于每个单元 σ_i，其每个邻居的相对坐标

在状态空间中定义为

$$\mathbf{r}_{ij}(t)=\mathbf{s}_j(t)-\mathbf{s}_i(t). \tag{3}$$

根据这些信息，个体 σ_i 只能接近时变局部平均状态

$$\bar{\mathbf{s}}_i(t)=\mathbf{s}_i(t)+\frac{1}{|N_i|+1}\sum_{\sigma_j\in N_i}\mathbf{r}_{ij}(t) \tag{4}$$

在收敛演化过程中。注意，式 (4) 分母中的 $|N_i|+1$ 用于处理$|N_i|=0$的情况。

上述定义描述了局部尺度上群体行为的收敛演化过程。为了研究其在全局尺度上的非平凡表现，我们需要将式 (2) 与系统的具体全局特征联系起来。

收敛演化的全局动力学。我们注意到，式 (2) 可以等价地改写为

$$\bar{\mathbf{s}}_i(t)=\mathbf{s}_i(t)+\frac{1}{|N_i|+1}\sum_{\sigma_j\in V}\mathbf{A}_{ij}(t)\left(\mathbf{s}_j(t)-\mathbf{s}_i(t)\right), \tag{5}$$

其中，$\mathbf{A}(t)$ 表示时变邻接矩阵

$$\mathbf{A}_{ij}(t)=(1-\delta_{i,j})\,\Theta\left[\Delta-d\left(\mathbf{s}_i(t),\mathbf{s}_j(t)\right)\right]. \tag{6}$$

在式 (6) 中，符号 $\delta_{\cdot,\cdot}$ 表示克罗内克 δ 函数，而 $\Theta(\cdot)$ 是赫维赛德阶跃函数。经过简单计算，我们可以将式 (2) 转换为

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{s}}_i(t)-\mathbf{s}_i(t)\\=&\frac{1}{\deg(\sigma_i(t))+1}\left(\sum_{\sigma_j\in V}\mathbf{A}_{ij}(t)\,\mathbf{s}_j(t)-\deg(\sigma_i(t))\,\mathbf{s}_i(t)\right),\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\deg(\cdot)$ 表示由式（6）中的邻接矩阵定义的图的度。

若考虑可观测全局状态

$$\mathbf{s}(t)=\left[\mathbf{s}_1(t),\ldots,\mathbf{s}_{|V|}(t)\right]^{\mathsf{T}}, \tag{8}$$

其中，T 表示转置，我们可以将式（7）改写为一种新形式

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{s}}_i(t)-\mathbf{s}_i(t)\\=&\frac{1}{\deg(\sigma_i(t))+1}\left(\left[\mathbf{A}_{i1}(t),\ldots,\mathbf{A}_{i|V|}(t)\right]-\mathbf{q}_i(t)\right)\mathbf{s}(t)\end{aligned} \tag{9}$$

使用向量 $\mathbf{q}_i(t)$

$$\mathbf{q}_i(t)=\left[\delta_{i,1}\deg(\sigma_1(t)),\ldots,\delta_{i,|V|}\deg\left(\sigma_{|V|}(t)\right)\right]. \tag{10}$$

在定义所有局部均值状态的可观测量之后

$$\bar{\mathbf{s}}(t)=\left[\bar{\mathbf{s}}_1(t),\ldots,\bar{\mathbf{s}}_{|V|}(t)\right]^{\mathsf{T}} \tag{11}$$

以及所有单元的度的倒数的可观测量

$$\mathbf{q}(t)=\operatorname{diag}\left(\left[\frac{1}{\deg(\sigma_1(t))+1},\ldots,\frac{1}{\deg\left(\sigma_{|V|}(t)\right)+1}\right]\right) \tag{12}$$

利用对角矩阵 $\operatorname{diag}(\cdot)$，最终可以推导出式（4）的全局形式

$$\bar{\mathbf{s}}(t)-\mathbf{s}(t)=-\,\mathbf{q}(t)\,\mathbf{L}(t)\,\mathbf{s}(t), \tag{13}$$

其中，$\mathbf{L}(t)$ 是相应图的时变拉普拉斯算子

$$\mathbf{L}_{ij}(t)=\delta_{i,j}\sum_k\mathbf{A}_{ik}(t)-\mathbf{A}_{ij}(t). \tag{14}$$

示意图请参见图 1(b)。

现在，我们考虑由式（13）刻画的全局动力学。我们定义一个抽象速度向量，用以量化单元在状态空间中表现出收敛演化的内在意愿程度

$$\mathbf{v}_c(t)=\left[\mathbf{v}_{c,1}(t),\ldots,\mathbf{v}_{c,|V|}(t)\right]^{\mathsf{T}}. \tag{15}$$

在时间连续性的假设下，$\mathbf{s}(t)$ 在收敛演化过程中趋近于 $\mathbf{s}(t)$ 的动力学形式化表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t)=-\mathbf{v}_c(t)\odot\mathbf{q}(t)\,\mathbf{L}(t)\,\mathbf{s}(t), \tag{16}$$

其中，局部拓扑效应由 $\mathbf{q}(t)$ 描述（即一个单元的邻居如何影响其演化过程），$\odot$表示舒尔积。

发散演化的全局动力学。接下来，我们分析群体行为的发散演化过程。乍看之下，只需考虑单元表现出发散演化的内在意愿程度

$$\mathbf{v}_d(t)=\left[\mathbf{v}_{d,1}(t),\ldots,\mathbf{v}_{d,|V|}(t)\right]^{\mathsf{T}} \tag{17}$$

并假设单元通过沿着与式（16）相反的方向运动，偏离随时间变化的局部均值状态。在此条件下，收敛与发散演化的联合动力学不过是状态空间中的牛顿运动，$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t)=-\left[\mathbf{v}_c(t)-\mathbf{v}_d(t)\right]\odot\mathbf{q}(t)\,\mathbf{L}(t)\,\mathbf{s}(t)$。

—

然而，若我们的框架如此简单，就不太合理，因为牛顿力学在抽象状态空间中可能并不实用。现实中可能无法获取上述相反方向的信息

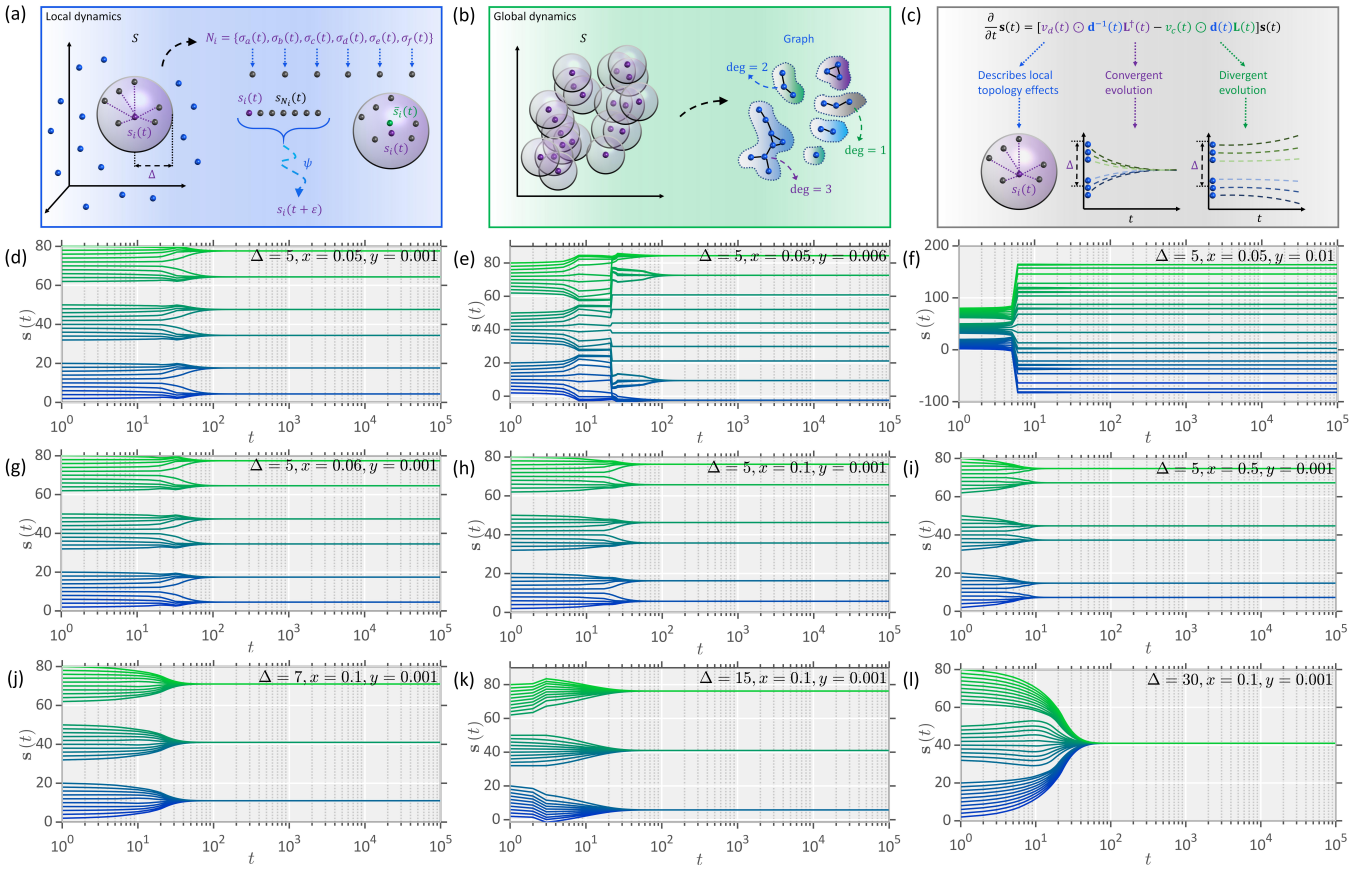


图 1. 收敛与发散群体行为的拉普拉斯动力学，以及规则初始化下计算实验的概念示意图。(a) 在局部尺度上，每个单元的动力学由其与邻居之间的相互作用决定。(b) 根据底层图结构，每个单元的局部动力学均可与全局动力学相关联。(c) 全局尺度上的联合动力学受局部拓扑效应、收敛演化趋势和发散演化趋势共同影响。(d-l) 可视化展示了规则初始化及不同参数设置下计算实验的结果。系统定义为包含 30 个单元的齐次系统，各单元均做均匀运动；为便于清晰展示，各单元的状态定义为一维。在规则初始化中，这些单元被平均分为 3 组。每组内单元之间的距离设为 2，相邻组之间的距离设为 10。每种条件下的实验运行 10^5 迭代次数。

。例如，如果状态空间描述的是对饮品的偏好，就不可能精确定义偏好咖啡的相反方向；也就是说，很难让个体判断偏好哪种饮品与偏好咖啡相反。这是因为，至少在大多数情况下，咖啡对应的相反饮品并没有明确定义。为了描述这些牛顿力学不适用且不可忽视的情况，我们需要考虑一个较弱的假设。

我们的想法源于$\mathbf{L}(t)$与$-\mathbf{L}^{\dagger}(t)$之间的关系，其中 † 表示 Moore–Penrose 伪逆 [25]。为了理解它们之间的关系，我们来看一个例子：个体的协方差矩阵定义为 $\mathbf{C}(t) = \mathbf{L}(t)$。如果两个个体在式（6）定义的图中通过一条边相连，则预期它们会反向演化（即具有负协方差）。在这种情况下，调整边等同于调整个体之间的差异（即梯度）。因此，式（16）可在导数中使用 $-\mathbf{L}(t)$来最小化这些差异。如果进一步考虑相应的精度矩阵$\mathbf{Q}(t) := \mathbf{C}^{\dagger}(t) = \mathbf{L}^{\dagger}(t)$，则可以将个体 σ_i 与σ_j 之间的偏相关 [26, 27] 与$\mathbf{L}^{\dagger}(t)$联系起来

$$\operatorname{corr}(\sigma_i, \sigma_j | V \setminus \{\sigma_i, \sigma_j\}) = -\frac{\mathbf{Q}_{ij}(t)}{\sqrt{\mathbf{Q}_{ii}(t)\,\mathbf{Q}_{jj}(t)}}, \tag{18}$$

$$= -\frac{\mathbf{L}^{\dagger}_{ij}(t)}{\sqrt{\mathbf{L}^{\dagger}_{ii}(t)\,\mathbf{L}^{\dagger}_{jj}(t)}}. \tag{19}$$

根据式（19），如果两个单元在$\mathbf{L}^{\dagger}(t)$中对应一个负值（即在 $-\mathbf{L}^{\dagger}(t)$中对应一个正值），则预期它们会一致演化（即具有正偏相关）。在这种情况下，调整边等同于控制单元之间的相似性。在发散演化过程中，预期单元会使彼此的相似性最小化，这可以通过以下动力学的导数中的$\mathbf{L}^{\dagger}(t)$项来实现：

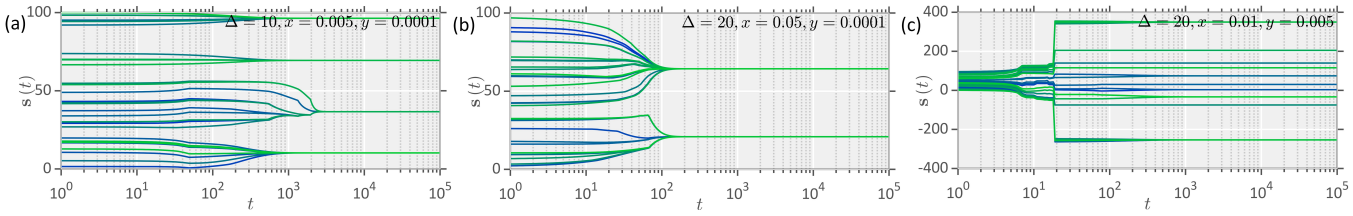


图 2. 随机初始化的计算实验。(a-c) 计算实验的结果基于由 30 个具有均匀运动的单元构成的一维状态空间齐次系统得出。随机初始化时，每个单元都会被赋予一个初始坐标，该坐标从 $[0, 100]$ 中按照均匀分布随机选取。每种条件下的实验均运行 10^5 次迭代。

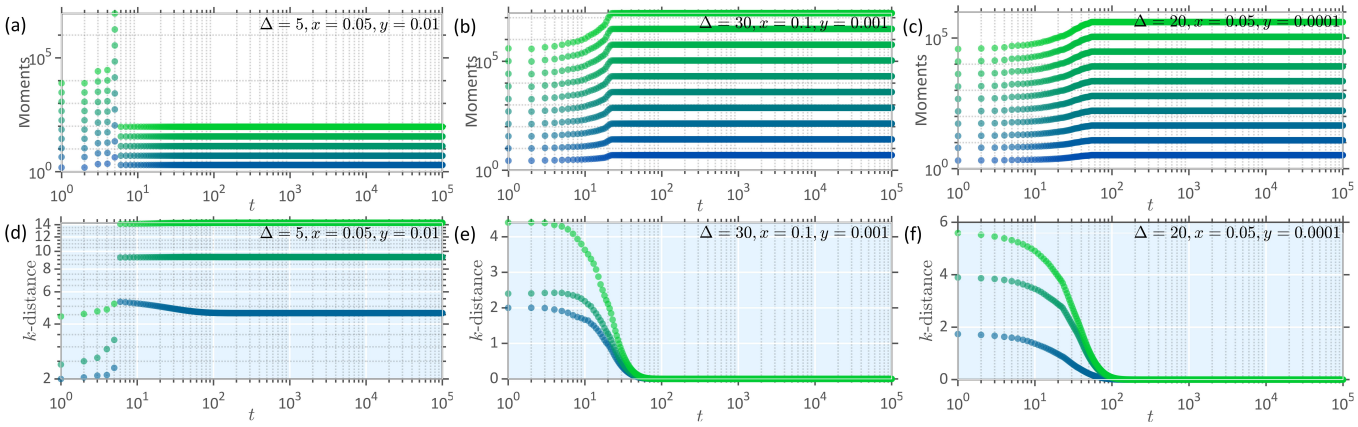


图 3. 矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 的特征值谱及状态空间中的平均 k-距离。(a-c) 矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 的可观测量基于图 1(f)、图 1(l) 和图 2(b) 中生成的齐次系统得出，其中测量了特征值谱的第 m 阶标准化矩。测得的 $m \in \{3, \ldots, 12\}$ 结果以颜色标示，随着 m 增大，颜色由蓝变绿。(d-f) 测量了状态空间中的平均 k-距离随时间的变化，其中 $k \in \{2, 3, 4\}$。随着 k 增大，颜色由蓝变绿。

以下动力学的导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t) = \mathbf{v}_d(t) \odot \mathbf{q}^{-1}(t)\, \mathbf{L}^{\dagger}(t)\, \mathbf{s}(t). \tag{20}$$

在式 (20) 中，我们使用 $\mathbf{q}^{-1}(t)$（$\mathbf{q}(t)$ 的逆矩阵）来表征局部拓扑效应。

收敛与发散演化的联合全局动力学。现在，我们可以根据式 (16) 和式 (20) 定义收敛与发散演化的联合全局动力学。具体而言，联合动力学表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t) = &\big[\mathbf{v}_d(t) \odot \mathbf{q}^{-1}(t)\, \mathbf{L}^{\dagger}(t) \\ &- \mathbf{v}_c(t) \odot \mathbf{q}(t)\, \mathbf{L}(t)\big]\mathbf{s}(t),\end{aligned} \tag{21}$$

这本质上是一种广义拉普拉斯动力学，只是细节更为复杂（有关基础的拉普拉斯动力学，请参见文献 [28–30]）。示意见图 1(c)。尽管式 (21) 背后的思想自然且简单，但分析式 (21) 的动力学性质却颇为复杂，因为在局部拓扑的影响下，收敛与发散演化之间的竞争由$\mathbf{L}(t)$与$\mathbf{L}^{\dagger}(t)$之间非平凡的相互作用所决定。为清晰起见，在后续分析中，我们主要考虑式 (21) 的一个特殊情形。

具有均匀运动的齐次系统中的特殊情形。式 (21) 所考虑的特殊情形是一个在状态空间中呈现均匀运动的单元齐次系统。为实现均匀运动（即具有恒定速度），并使系统齐次（此处，齐次是指所有单元具有相同的内在属性），我们需要定义

$$\mathbf{v}_c(t) \equiv x\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall t \in T, \tag{22}$$

$$\mathbf{v}_d(t) \equiv y\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \forall t \in T. \tag{23}$$

因此，在具有均匀运动的齐次系统中，式 (21) 简化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t) &= \left[y\mathbf{q}^{-1}(t)\, \mathbf{L}^{\dagger}(t) - x\mathbf{q}(t)\, \mathbf{L}(t)\right]\mathbf{s}(t), &(24)\\ &:= \mathbf{H}(t)\, \mathbf{s}(t) &(25)\end{aligned}$$

这样更便于分析。在计算实验中，我们采用以下数值迭代

$$\mathbf{s}(t+\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{H}(t)\, \mathbf{s}(t) + \mathbf{s}(t) \tag{26}$$

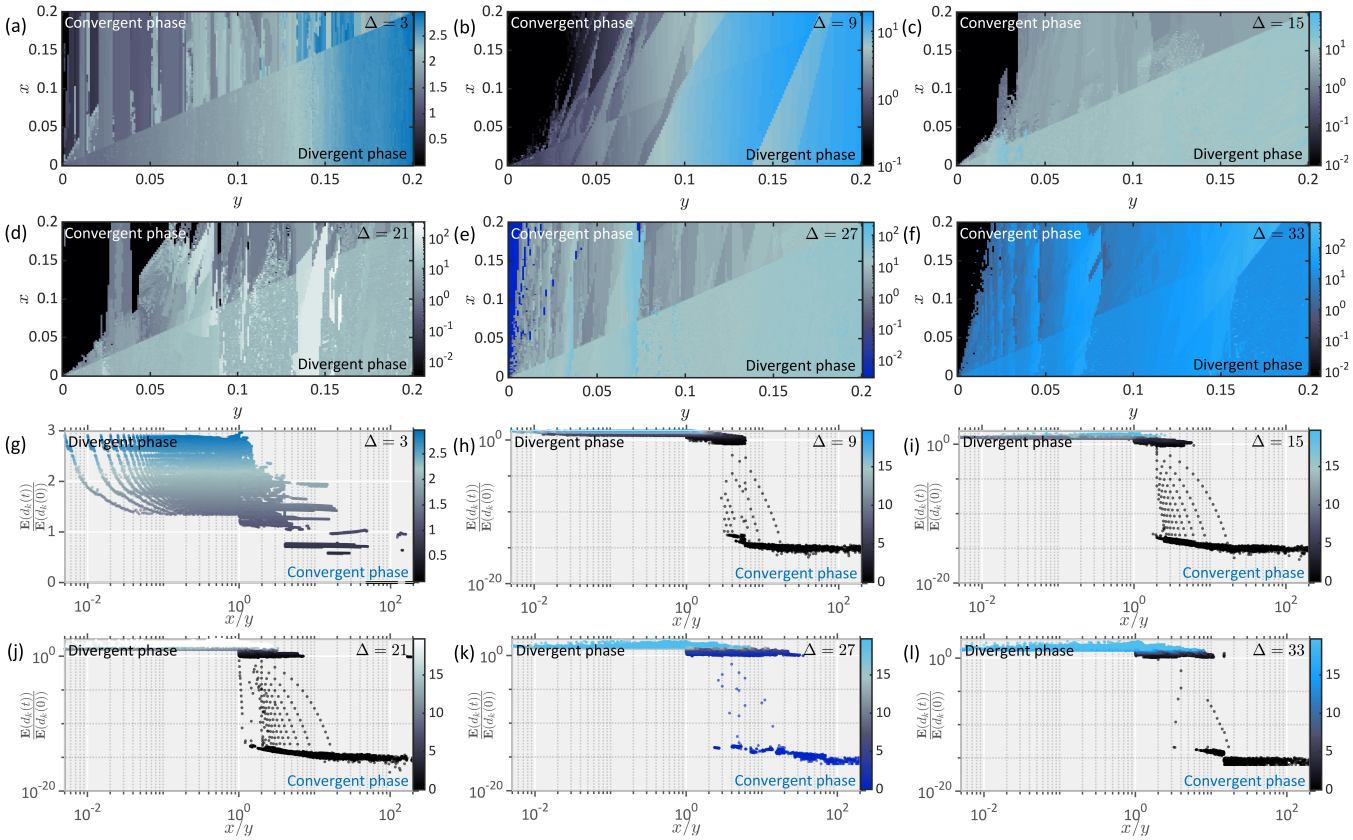


图 4. 收敛与发散演化的相空间。(a-f) 给定 $\Delta \in \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$ 的每种条件，我们针对每个 $(x,\ y) \in [0.001, 0.2]^2$ 生成具有均匀运动和规则初始化的齐次系统，并运行实验 10^5 迭代次数。生成的结果支持对比率 $\frac{\mathbb{E}(d_k(t))}{\mathbb{E}(d_k(0))}$ $(k = 3)$ 的测量。所有条件下该比率的热力图如 (a-f) 所示，其中使用不同的色图来区分 Δ 的不同设置。(g-l) 比率 $\frac{\mathbb{E}(d_k(t))}{\mathbb{E}(d_k(0))}$ 显示为各实验条件下 $\frac{x}{y}$ 的函数，色图与 (a-f) 一致。

来推导式（25）的结果。需要注意的是，式（26）仅作简单示例。也可以考虑更复杂的数值方法。

为便于可视化，我们的研究主要考虑一维状态空间，但无需任何修改即可直接分析更高维的状态空间。在图 1(d-l) 中，我们展示了该齐次系统在不同参数设置下的多种实例，并采用规则初始化条件以便清晰观察（即初始化的单元均匀分布，并在状态空间中形成清晰的簇结构）。如图 1(d-i) 所示，方程 (26) 中 x 与 y 的不同取值比例会产生不同的群体行为收敛与发散趋势。较大的 x 会导致收敛演化，而较大的 y 会使个体发散。如图 1(j-l) 所示，方程 (2) 中由变化的 Δ控制的局部交互范围变化，会导致演化后状态空间中出现不同的最终模式。较大的局部交互范围会放大收敛与发散演化趋势，因为更多单元参与其中。图 2 中也可以观察到这些现象，其中

系统采用随机初始化条件（即按照特定分布随机抽取个体的初始状态）。这些结果定性地展示了群体行为的全局动力学，并表明其动力学受收敛与发散演化趋势之间的竞争或局部交互范围的影响。

为定量分析群体行为的收敛与发散演化，我们研究 $\mathbf{H}(t)$ 的特征值谱性质。具体而言，我们分析特征值谱的标准化矩，以反映演化过程的潜在动力学（注意，第一和第二标准化矩未纳入考虑，因为它们是常数 [31]）。同时，给定式 (2) 中的距离函数 $d(\cdot,\ \cdot)$，我们考虑 $d_k(\mathbf{s}_i(t))$，即在时刻 t，状态 $\mathbf{s}_i(t)$ 与其第 k 近邻状态之间的距离。我们将时刻 t 的平均第 k 近邻距离定义为

$$\mathbb{E}\left(d_k\left(t\right)\right) = \frac{1}{|V|} \sum_{\sigma_i \in V} d_k\left(\mathbf{s}_i\left(t\right)\right) \tag{27}$$

用于刻画系统在某一时刻的全局状态

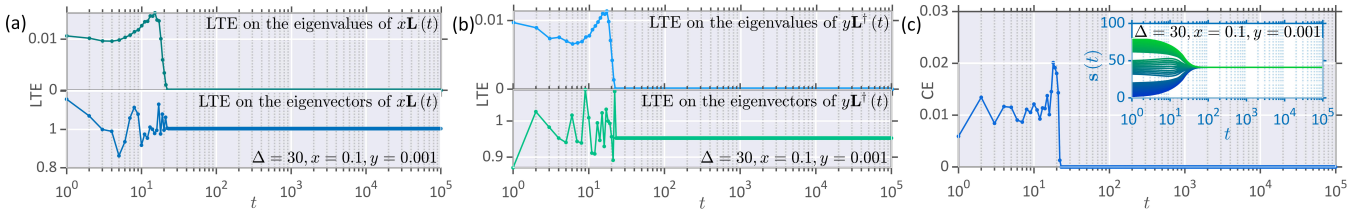


图 5. 收敛与发散群体行为的拉普拉斯动力学的非平凡性质。(a-b) 展示了齐次系统（由图 1(l) 生成；另见图 5(c) 中的插图）中，$x\mathbf{L}(t)$ 和 $y\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征值与特征向量所受的局部拓扑效应（LTE），其变化表示为 t 的函数。(c) 采用所提出的交换子误差（CE）来衡量 $\mathbf{H}(t)$ 偏离可交换性的程度；插图所示的齐次系统供参考。

$t_{\circ}$ 在图 3 中，我们针对式（25）中的三个代表性齐次系统实例计算了这两类指标。如图 3 所示，在收敛演化和发散演化过程中，距离 $\mathbb{E}(d_k(t))$ 呈现出明显变化（为方便起见，我们将 $d(\cdot,\ \cdot)$ 定义为欧几里得距离）。在动力学收敛至其极限之前，特征值谱的标准化矩在发散演化过程中显著增大，而在发散演化过程中则减小。

图 3 所示的结果促使我们使用 $\mathbb{E}_{(d_k(t))}\ \mathbb{E}(d_k(0))$ 来区分收敛相与发散相；它表示时刻 0 与时刻 t 的平均~~-k~~近邻距离之比。在发散相中，该比值大于 1；在收敛相中则小于 1。在图 4 中，我们根据 $\mathbb{E}_{(d_k(t))}\ \mathbb{E}(d_k(0))$，分析不同 x、y 和 Δ 条件下齐次系统的相空间。如图 4(a-f) 所示，收敛相与发散相在 (x, y) 平面上具有一条非平凡且相对模糊的边界，该边界会随不同局部交互范围条件而变化。在图 4(g-l) 中，若将 $\mathbb{E}_{(d_k(t))}\ \mathbb{E}(d_k(0))$ 视为序参量，并将 $\frac{x}{y}$ 视为控制参数，则可观察到类相变现象。随着 $\frac{x}{y}$ 增大，会发生某种从发散相到收敛相的转变。然而，这些现象究竟确实源于特定的潜在相变，还是由其他未知机制导致，仍不清楚。我们尚无法确认这些潜在-相变的详细性质（例如转变的阶数）。下文将总结从理论上验证这一潜在相变所面临的主要困难，并提出未来探索的可能方向。

研究具有均匀运动的齐次系统所面临的数学挑战。研究潜在相变的主要挑战，源于预测齐次系统极限行为并非易事（即，收敛相与发散相的分类取决于演化过程收敛后系统的极限状态）。

尽管状态空间中个体的运动已被约束为一致，方程（25）中的齐次系统仍受到复杂的局部拓扑效应影响，这与一种在理论上更为理想的情形形成对比：在该情形下，局部拓扑效应被完全排除

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(t) = \left[y\mathbf{L}^{\dagger}(t) - x\mathbf{L}(t)\right]\mathbf{s}(t) := \mathbf{M}(t)\,\mathbf{s}(t)\,. \tag{28}$$

在这种理想情况下，我们有机会根据矩阵 $\mathbf{M}(t)$ 的特征值 $0 \leq \lambda_2(t) \leq \ldots \leq \lambda_{|V|}(t)$，表示矩阵 $\mathbf{M}(t)$ 的特征值 $0, \omega_2(t) \leq \ldots \leq \omega_{|V|}(t)$

$$\omega_i(t) = \frac{y}{\lambda_i(t)} - x\lambda_i(t)\,,\ \forall i \geq 2. \tag{29}$$

与此同时，矩阵 $\mathbf{M}(t)$ 与矩阵 $\mathbf{L}(t)$ 具有相同的一组特征向量：1、$\mathbf{u}_2(t)$ .....、$\mathbf{u}^{|V|}(t)$。式（29）基于以下事实推导而来：矩阵 $\mathbf{M}(t)$ 的特征值和特征向量分别为 0, $\overset{1}{\lambda_2}(t)$ $\cdots$, $\overset{1}{\lambda_{|V|}}(t)$ 和 1、$\mathbf{u}_2(t)$ .....、$\mathbf{u}^{|V|}(t)$ [32, 33]。$\mathbf{M}(t)$ 的显式特征分解为演化动力学提供了丰富信息，使得可以依据动力系统理论分析式（28）[33]。然而，由于式（25）中的局部拓扑效应，这种可能性不复存在。为了量化这些非平凡效应，我们可以测量 $y\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征值向量与 $y\mathbf{q}^{-1}(t)\,\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征值向量之间的余弦距离（同样，也可以测量 $\mathbf{L}(t)$ 的特征值向量与 $x\mathbf{q}(t)\,\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征值向量之间的余弦距离）。与此同时，我们可以计算 $y\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征向量与 $y\mathbf{q}^{-1}(t)\,\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征向量之间的平均余弦距离（同样，也可以计算 $x\mathbf{L}(t)$ 的特征向量与 $x\mathbf{q}(t)\,\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征向量之间的平均余弦距离）。这些余弦距离反映了局部拓扑效应对 $x\mathbf{L}(t)$ 和 $y\mathbf{L}^{\dagger}(t)$ 的特征值和特征向量的影响。在图 5(a-b) 中，我们展示了在一个具有代表性的齐次系统上计算得到的实例，表明这些不可忽略的局部拓扑效应在演化动力学收敛之前一直存在波动。因此，在大多数情况下，式（29）并不符合式（25）的实际性质。

此外，另一个挑战在于，直到演化动力学收敛到其极限之前，式（25）中的$\mathbf{H}(t)$都不可交换。我们可以根据以下内容衡量$\mathbf{H}(t)$偏离可交换性的程度：

$$\chi(t, t') = \sum_{i,j} |\left[\mathbf{H}(t), \mathbf{H}(t')\right]_{ij}|, \tag{30}$$

其中，$[\cdot,\cdot]$ 表示交换子，$[\cdot,\cdot]_{ij}$ 是交换子的第（i,j）个元素。我们将 $\chi(\cdot,\cdot)$称为交换子误差。在图5(c)中，我们通过设置 $t'=t+\varepsilon$计算了 $\chi(\cdot,\cdot)$的一个实例。所得结果表明，只有当$\mathbf{H}(t)$达到其极限后，它才变得平凡可交换。在大多数情况下，$\mathbf{H}(t)$并不可交换，因此无法将式（25）的解表示为$\mathbf{s}(t) = \exp\left(\int_0^t \mathbf{H}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathbf{s}(0)$，这排除了简化式（25）的可能性。

总之，上述性质给理论分析式 (25) 中的齐次系统带来了障碍。如果放宽$\mathbf{v}_c$ 和$\mathbf{v}_d$ 的约束，以考虑异质情形，问题会更加复杂。这些挑战或可为未来的理论研究提供有价值的方向。

结论。 本研究提出了一个用于描述群体行为收敛与发散演化的最简模型。尽管该模型在数学上十分简洁，却表现出丰富而非平凡的行为，并表明局部相互作用控制的收敛与发散演化之间可能存在相变或类似现象。该模型的非平凡性或可启发新的数学方法，用于分析群集现象的物理学。此外，该模型在计算方面的简洁性，使其能够作为开发大规模群体行为数值模拟的基础。

致谢。 本项目获清华大学国强研究院人工与通用智能研究计划（2020GQG1017）以及清华大学自主科研计划资助。

* 通信请联系 P.S. † tiany20@mails.tsinghua.edu.cn；心理学系与清华大学脑与智能实验室，清华大学，北京，100084，中国。；另任职于华为技术有限公司中央研究院先进计算与存储实验室、2012实验室，北京，100084，中国。‡ xuyunhui18@mails.tsinghua.edu.cn；物理系，清华大学，北京，100084，中国。§ peisun@tsinghua.edu.cn；心理学系与清华大学脑与智能实验室，清华大学，北京，100084，中国。

[1] V. Gazi，《Physica D：非线性现象》中关于群体行为的拉格朗日动力学建模，**260**，159（2013）。[2] B. S. Khatri、T. C. McLeish 和 R. P. Sear，空间模式中收敛演化的统计力学，《美国国家科学院院刊》**106**，9564（2009）。[3] R. Powell 和 C. Mariscal，将收敛演化视为自然实验：重新审视生命之带，《Interface》《Interface Focus》5, 20150040（2015）。[4] C. T. Stayton，什么是收敛演化？对收敛的解读及其对探索演化极限的意义，《Interface Focus》5, 20150039（2015）。[5] M. Sitarz 和 A. Maksymowicz，Penna 模型中不同遗传家族的趋异进化路径，International Journal of Modern Physics C 16, 1917（2005）。[6] T. Vogwill、R. L. Phillips、D. R. Gifford 和 R. C. MacLean，细菌实验进化过程中，种群瓶颈处于中等程度时趋异演化达到峰值，Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences 283, 20160749（2016）。[7] K. B. Zeldovich 和 E. I. Shakhnovich，理解蛋白质进化：从蛋白质物理学到达尔文式选择，Annu. Rev. Phys. Chem. 59, 105（2008）。[8] G. Flierl、D. Gr¨unbaum、S. Levins 和 D. Olson，从个体到聚集体：行为与物理学的相互作用，Journal of Theoretical Biology 196, 397（1999）。[9] C. Castellano、S. Fortunato 和 V. Loreto，社会动力学的统计物理学，Reviews of Modern Physics 81, 591（2009）。[10] M. Takayasu、K. Sato、Y. Sano、K. Yamada、W. Miura 和 H. Takayasu，3·11 地震期间的谣言传播与收敛：Twitter 案例研究，PLoS One 10, e0121443（2015）。[11] D. Tanaka，振荡器的一般趋化模型，Physical Review Letters 99, 134103（2007）。[12] J. Hindes、K. Szwaykowska 和 I. B. Schwartz，母舰网络中时滞耦合群体的混合动力学，Physical Review E 94, 032306（2016）。[13] R. Piwowarczyk、M. Selin、T. Ihle 和 G. Volpe，感知时滞对聚类和群集的影响，Physical Review E 100, 012607（2019）。[14] A. Czir´ok、M. Matsushita 和 T. Vicsek，细菌周期性群集理论：在奇异变形杆菌中的应用，Physical Review E 63, 031915（2001）。[15] W. Yu、G. Chen、M. Cao、J. L¨u 和 H.-T. Zhang，具有非线性动力学的多智能体系统中的群集行为，Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 23, 043118（2013）。[16] G. Wang、T. V. Phan、S. Li、M. Wombacher、J. Qu、Y. Peng、G. Chen、D. I. Goldman、S. A. Levin、R. H. Austin、 *et al.*，涌现的场驱动机器人群体状态，Physical Review Letters 126, 108002（2021）。[17] Y. Yang、V. Marceau 和 G. Gompper，自推进杆状体和游动鞭毛的群集行为，Physical Review E 82, 031904（2010）。[18] S. Thutupalli、R. Seemann 和 S. Herminghaus，简单模型游动体的群集行为，New Journal of Physics 13, 073021（2011）。[19] M. Iwasa、K. Iida 和 D. Tanaka，群体振荡器模型中的各种集体行为，Physics Letters A 376, 2117（2012）。[20] M. Iwasa 和 D. Tanaka，群体振荡器模型中多样化集体行为的潜在机制，Physics Letters A 381, 3054（2017）。[21] C. Huepe 和 M. Aldana，表征群集系统的新工具：最简模型比较，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 387, 2809（2008）。[22] A. Attanasi、A. Cavagna、L. Del Castello、I. Giardina、S. Melillo、L. Parisi、O. Pohl、B. Rossaro、E. Shen、E. Sil-

vestri, *et al.*，有限尺寸标度：探测自然群体近临界性的一种方法，Physical Review Letters **113**, 238102（2014）。[23] A. Jose、G. Ariel 和 A. Be'Er，混合物种集群的物理特征，Physical Review E **105**, 064404（2022）。[24] T. Xue、X. Li、X. Chen、L. Chen 和 Z. Han，群集系统中的机器学习相，《机器学习：科学与技术》（2023）。[25] J. C. A. Barata 和 M. S. Hussein，Moore–Penrose 伪逆：理论教程综述，《巴西物理学杂志》**42**, 146（2012）。[26] H. Rue 和 L. Held，*Gaussian Markov random fields: theory and applications* 2005（Chapman and Hall/CRC，）。[27] A. Lawrance，论条件相关与偏相关，《美国统计学家》**30**, 146（1976）。

[28]C. Altafini 和 G. Lini，《具有对抗性交互的网络中意见形成的可预测动力学》，《IEEE自动控制汇刊》**60**，342（2014年）。[29] J. A. Fax 和 R. M. Murray，《车辆编队的信息流与协同控制》，《IEEE自动控制汇刊》**49**，1465（2004年）。[30] J. P. Veerman 和 R. Lyons，《有向图拉普拉斯算子动力学入门》，arXiv 预印本 arXiv:2002.02605（2020年）。[31] R. J. Larsen 和 M. L. Marx，*An introduction to mathematical statistics* 2005（Prentice Hall，新泽西州霍博肯，）。[32] A. Fontan 和 C. Altafini，《关于拉普拉斯伪逆的性质》，载于 *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* 2021 5538 5543（IEEE，）第 – 页。[33] F. Bullo，*Lectures on network systems*，第**1**卷（Kindle Direct Publishing，2020年）。