arXiv:2304.01497v1 [math.FA] 4 Apr 2023

Dirichlet 空间上值域闭的复合算子

GUANGFU CAO 和 LI HE*

摘要。众所周知，在 Hardy 空间或 Bergman 空间上，复合算子具有闭值域，当且仅当其 Navanlinna 计数函数诱导出反向 Carleson 测度。Dirichlet 空间上并不存在类似结论。具体而言，仅有反向 Carleson 测度并不足以保证相应复合算子的值域闭。不过，在一定假设下，本文给出了 Dirichlet 空间上的复合算子具有闭值域的充要条件。

1. 引言

令 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的 $\mathbb{T}$ 单位圆，令 dA 表示 $\mathbb{D}$上的面积测度。Dirichlet 空间记作 $\mathfrak{D}(\mathbb{D})$，由满足以下条件的解析函数 f 构成： $\mathbb{D}$

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dA(z) < \infty.$$

显然， $\mathfrak{D}(\mathbb{D})$ 是一个配备内积的希尔伯特空间

$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)} \, dA(z).$$

设 $e_0(z) = 1$， $e_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{z^n}{\sqrt{n}}$，$(n = 1, 2, , \cdots)$，则 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{D}(\mathbb{D})$ 的标准正交归一基。由此可得， $\mathfrak{D}(\mathbb{D})$ 的再生核为

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} = 1 + \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{1 - z\overline{w}}.$$

2010 数学主题分类。47B33, 47A53。关键词。Dirichlet 空间，复合算子，闭值域，计数函数。G.C. 由中国国家自然科学基金（项目编号：12071155）资助，L.H. 由中国国家自然科学基金（项目编号：11871170）资助。*通讯作者，电子邮箱：helichangsha1986@163.com。

给定一个解析自映射 $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，对于任意 $w \in \varphi(\mathbb{D})$，，记 $n_\varphi(w)$ 为集合 $\varphi^{-1}(w)$ 的基数； $N_\varphi(w)$ 是 φ 的（Nevanlinna）计数函数，并且

$$\tau_\varphi(w) = \frac{N_\varphi(w)}{log\frac{1}{|w|}}.$$

过去几十年来，闭值域复合算子在各种函数空间中引起了广泛关注，参见 [1, 2, 3, 4,6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18] 及其中的参考文献。1974年，Cima、Thompson 和 Wogen 利用诱导映射的边界行为，确定了 Hardy 空间 H^2 上的复合算子何时具有闭值域（见 [2]）。在论文的结尾，他们提出了这样一个问题：能否利用诱导映射在单位圆盘上的值域性质，而非边界性质，来刻画闭值域复合算子？Zorboska [17] 通过使用 Nevanlinna 计数函数以及 Luecking 关于 Bergman 空间不等式的测度论结果，回答了这一问题。他证明了以下结论

Z 定理。 ([17])。设 φ 是 $\mathbb{D}$. 的解析自映射。假设C_φ 是 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上的有界复合算子，其定义为

$$C_\varphi f(z) = (f \circ \varphi)(z), \quad \forall\ f \in H^2(\mathbb{D}).$$

那么， C_φ 具有闭值域，当且仅当存在正常数 $c > 0$，使集合 $G_c = \{z \in \mathbb{D}: \tau_\varphi(z) > c\}$ 满足以下条件:

存在常数 $\delta > 0$ 使得

$$A(G_c \cap S(\zeta, r)) > \delta A(\mathbb{D} \cap S(\zeta, r)) \qquad (*)$$

对所有 $\zeta \in \mathbb{T}$ 和 $r > 0$，其中 $S(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{D}: |z - \zeta| < r\}$.

此外，Zorboska 构造了一个反例，说明即使 $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$， C_φ 的值域也未必是闭的。如果 $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$， C_φ 在 $H^2(\mathbb{D})$上可逆，这似乎有些奇怪。

对于（加权）Bergman 空间的情形，也已获得闭值域复合算子的充要条件（见 [1, 8]）。然而，对于 Dirichlet 空间的情形，问题似乎相当困难。

回顾一下，单位圆盘上的伪双曲度量定义为

$$\rho(z, w) = |\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}|, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

而 Bergman 度量定义为

$$\beta(z, w) = \frac{1}{2} log\frac{1 + \rho(z, w)}{1 - \rho(z, w)}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

对于 $0 < \eta < 1$， $z \in \mathbb{D}$ 和 $r > 0$，记作

$$D_\eta(z) = \{w \in \mathbb{D} | \rho(z, w) < \eta\}$$

and

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} | \beta(z, w) < r\}.$$

对于 $G \subset \mathbb{C}$， $A(G)$ 表示 G. 的勒贝格测度。因此，对于任意固定的正数 r，我们有

$$A(D(z, r)) \sim (1 - |z|^2)^2.$$

事实上， $D(z, r)$ 是一个欧几里得圆盘，其欧几里得中心为 $(1 - s^2)z/(1 - s^2|z|^2)$，欧几里得半径为 $(1 - |z|^2)s/(1 - s^2|z|^2)$，其中 $s = tanh(r) \in (0, 1)$。详情可参阅 Kehe Zhu 的著作 [15]。

Luecking [10]证明了，Dirichlet 空间 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ 上的复合算子 C_φ 具有闭值域的一个必要条件是， $n_\varphi dA$ 必须是反向 Carleson 测度；也就是说，存在一个 $\delta > 0$ 和 $\eta \in (0, 1)$，使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D}) \cap D_\eta(z)} n_\varphi(w) dA(w) > \delta A(D_\eta(z))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$，均成立；或者等价地，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D}) \cap S(\zeta, r)} n_\varphi(w) dA(w) > \delta A(S(\zeta, r))$$

对所有 $\zeta \in \mathbb{T}$.，注意

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z, w) < r\} = D_\eta(z) = \{w \in \mathbb{D} : \rho(z, w) < \eta\}$$

对于 $\eta = \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}$，，进而，以下命题等价:

(1) 存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$，使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z, r)} n_\varphi(w) dA(w) > \delta A(D(z, r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$.

(2) 存在一个 $\delta > 0$ 和 $\eta \in (0, 1)$，使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D}) \cap D_\eta(z)} n_\varphi(w) dA(w) > \delta A(D_\eta(z))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$.

1999年，Luecking [11] 构造了一个自映射 φ 于 $\mathbb{D}$，使得 $n_\varphi dA$是一个反向 Carleson 测度，但 C_φ 不具有闭值域。不幸的是，目前还没有关于复合算子具有闭值域的充要条件。与 Hardy 空间不同，在 Dirichlet 空间上，符号为满射的复合算子必定具有闭值域。事实上，

若 φ 是 $\mathbb{D}$上的解析自映射，且 $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$，则对任意 $w \in \mathbb{D}$，，$n_\varphi(w) \geq 1$，并且

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|_{\mathcal{D}}^2 &= \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 dA(z)\\ &= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w)\\ &\geq \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w) = \|f\|_{\mathcal{D}}^2.\end{aligned}$$

这意味着 C_φ 具有闭值域。

上述讨论表明，即使由计数函数$n_\varphi(w)$诱导的测度$n_\varphi(w)dA(w)$是反向 Carleson 测度，也不能保证复合算子 C_φ 具有闭值域。然而，如果 φ 是满射，那么 C_φ 的值域必定是闭的。这种现象并不令人意外，因为当 w 趋近区域的边界时，计数函数$n_\varphi(w)$可能无界；尽管符号映射的像无法填满 $\mathbb{T}$，计数函数仍可能引入反向 Carleson 测度。Luecking 在 [17]中的反例便展示了这一点。这表明，在某些极端情况下，反向 Carleson 测度并不是 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上具有闭值域的复合算子的恰当条件。

注意，

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi(w)A(w) \geq \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} A(w) = A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)),$$

那么不等式

$$A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$ 及某个 $r > 0$ 成立，意味着$n_\varphi(w)A(w)$是反向 Carleson 测度，但反过来未必成立。换言之，不等式

$$A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

比 $n_\varphi(w)dA(w)$ 是反向 Carleson 测度更强。此外，在假设 $n_\varphi(w)$ 有界的情况下，两者等价。事实上，若$n_\varphi(w)$ 在 $\mathbb{D}$ 上有界，那么对于任意 $z \in \mathbb{D}$ 和 $r > 0$，都存在一个常数

$M > 0$使得

$$\begin{aligned} MA(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) &\geq \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi(w)dA(w) \\ &\geq \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} dA(w) \\ &= A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)). \end{aligned}$$

在这种情况下，不等式

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

等价于 $n_\varphi(w)dA(w)$ 是一个反向 Carleson 测度。对于具有闭值域的复合算子，一个适当的条件似乎是：

存在常数 $\delta > 0$ 和 $r > 0$，使得

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r)) \qquad (**)$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$.

在一些自然假设下，$(**)$ 确实是复合算子具有闭值域的充要条件。我们的主要结果如下：

主定理。 设 φ 是 $\mathbb{D}$. 的解析自映射函数。如果

$$lim_{k\to\infty} sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1} \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}} |f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w) = 0,$$

其中 $(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1$ 表示 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$的单位球面，则以下陈述等价：

(a) $R(C_\varphi)$在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上是闭的。**(b)** 存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$，使得

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。

(c) $n_\varphi(w)dA(w)$是一个反向 Carleson 测度。

2. 具有闭值域的复合算子

命题 2.1. 设 φ 是 $\mathbb{D}$. 上的解析自映射函数。假设C_φ 是 $\mathcal{D}$（$\mathbb{D}$）上的有界复合算子，定义为

$$C_\varphi f(z) = (f \circ \varphi)(z), \quad \forall\ f \in \mathcal{D}(\mathbb{D}).$$

若 R（C_φ）$= \{$（$f \circ \varphi | f \in \mathcal{D}$（$\mathbb{D}$）$\}$（即 C_φ的值域）是闭的，则对任意 $\zeta \in \mathbb{T}$ 和任意 $r > 0$,

$$S(\zeta, r) \cap \varphi(\mathbb{D}) \neq \phi.$$

等价地，$\mathbb{T} \subset \overline{\varphi(\mathbb{D})}$。

证明。 假设 $R(C_\varphi)$ 是闭的，因为 $ker C_\varphi = \{0\}$， 我们知道存在一个常数 $c > 0$, 使得

$$\|C_\varphi f\| \geq c\|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{D}). \qquad (***)$$

Thus

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2 &= \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 dA(z) + |f\circ\varphi(0)|^2 \\ &= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w) + |f\circ\varphi(0)|^2 \\ &\geq c^2[\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) + |f(0)|^2]. \end{aligned}$$

如果存在一个 $\zeta \in \mathbb{T}$ 和 $r > 0$使得

$$S(\zeta, r) \cap \varphi(\mathbb{D}) = \phi,$$

let

$$f_\zeta(z) = \frac{1 + \bar{\zeta}\cdot z}{2}, \quad f_k(z) = f_\zeta^k(z),$$

那么 $f_\zeta(z)$ 是 $\mathbb{D}$. 上 ζ 处的峰值函数。对于 ζ 的任意开邻域U，容易看出

$$\begin{aligned} & lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\int_{\mathbb{D}-U} |f_k'(z)|^2 dA(z)}{\int_{\mathbb{D}} |f_k'(z)|^2 dA(z)}} \\ = \quad & \frac{max|f_\zeta|_{\mathbb{D}-U}|}{max|f_\zeta|_{\mathbb{D}}|} = max|f_\zeta|_{\mathbb{D}-U}| < 1. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\int_{\mathbb{D}-U} |f_k'(z)|^2 dA(z)}{\int_{\mathbb{D}} |f_k'(z)|^2 dA(z)} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\|C_\varphi f_k\|^2}{\|f_k\|^2} &= \frac{\int_{\mathbb{D}} |(f_k\circ\varphi)'(z)|^2 dA(z) + |f_k\circ\varphi(0)|^2}{\int_{\mathbb{D}} |f_k'(z)|^2 dA(z) + |f_k(0)|^2} \\ &= \frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f_k'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w) + |f_k\circ\varphi(0)|^2}{\int_{\mathbb{D}} |f_k'(z)|^2 dA(z) + |f_k(0)|^2}. \end{aligned}$$

由于 C_φ的有界性，存在正常数 M 使得

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w) \leq M \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{D}).$$

特别是,

$$\int_{\mathbb{D}} n_\varphi(w) dA(w) \leq M \int_{\mathbb{D}} dA(w) = MA(\mathbb{D}).$$

Thus

$$lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(z)|^2 n_\varphi(z)dA(z)} = max|f_\zeta|_{\varphi(\mathbb{D})}|.$$

由于存在一个邻域 U，其满足 ζ，使得 $U\cap\overline{\varphi(\mathbb{D})}=\phi$，因此我们有 $\overline{\varphi(\mathbb{D})}\subset\mathbb{D}-U$. 此外,

$$\begin{aligned} & lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(z)|^2 n_\varphi(z)dA(z)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2 dA(z)}} \\ = & \frac{max|f_\zeta|_{\varphi(\mathbb{D})}|}{max|f_\zeta|_{\mathbb{D}}|} = max|f_\zeta|_{\varphi(\mathbb{D})}| < 1. \end{aligned}$$

根据 $f_k(0)\to 0$ 和 $f_k\circ\varphi(0)\to 0$，我们得到

$$\frac{\|C_\varphi f_k\|^2}{\|f_k\|^2} = \frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(w)|^2 n_\varphi(z)dA(w)+|f_k\circ\varphi(0)|^2}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)+|f_k(0)|^2}\to 0, \quad \text{as} \quad k\to\infty.$$

这与 $(***)$矛盾。这表明

$$S(\zeta,r)\cap\varphi(\mathbb{D})\neq\phi,$$

这意味着 $\mathbb{T}\subset\overline{\varphi(\mathbb{D})}$。 □

设 $\alpha>-1$ 和 $1\le p<\infty$.。我们称 G（$\mathbb{D}$ 的一个博雷尔子集）在 A^p_α, 加权 Bergman 空间上满足反Carleson条件，如果存在正常数 η 使得

$$\eta\int_G|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\ge\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z), \quad \forall f\in A^p_\alpha.$$

KRL 定理。([7, 9]) 设 $G\subset\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{D}$. 的一个博雷尔子集。那么，当且仅当满足以下条件时， G 满足反Carleson条件：存在一个 $\delta>0$ 和 $r>0$ 使得

$$A(G\cap D(z,r))>\delta A(D(z,r)) \quad \text{for each} \quad z\in\mathbb{D},$$

或者等价地，存在一个 $\delta>0$ 和 $\eta\in(0,1)$，使得

$$A(G\cap D_\eta(z))>\delta A(D_\eta(z)) \quad \text{for each} \quad z\in\mathbb{D}.$$

命题 2.2. 设 φ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射，且 C_φ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上有界。则以下陈述等价:

(a) 存在一个 $\delta>0$ 和 $r>0$，使得

$$A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r))\ge\delta A(D(z,r))$$

对所有 $z\in\mathbb{D}$。

(b) 对于任意的 $\alpha \in$ <style id='4'>(0，1)，存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$.

(c) 对于任意 $\alpha \in (0,1)$，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \geq \delta \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w)$$

for all $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$.

证明。 注意，对于任意 $w \in \varphi(\mathbb{D})$ 和 $\alpha \in (0,1),$ ，我们有 $n_\varphi^\alpha(w) \geq 1$

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \geq \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w)$$

对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$。因此，由 KRL 定理可知，$(a) \Longrightarrow (c)$ 显然成立。

反过来，对于任意 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\epsilon > 0,$ ，存在一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{n^\alpha}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}} < \epsilon$$

对所有 $n \geq N$. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w:n_\varphi(w)>N\}} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \\
= &\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w:n_\varphi(w)>N\}} |f'(w)|^2 \frac{n_\varphi^\alpha(w)}{n_\varphi(w)} n_\varphi(w)dA(w) \\
\leq &\ \epsilon \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w:n_\varphi(w)>N\}} |f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w) \\
\leq &\ \epsilon \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w) \\
\leq &\ \epsilon \|C_\varphi\|^2 \cdot \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w:n_\varphi(w)\leq N\}} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \\
\leq &\ N^\alpha \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w:n_\varphi(w)\leq N\}} |f'(w)|^2 dA(w) \\
\leq &\ N^\alpha \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w)
\end{aligned}$$

对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$。此外,

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w) dA(w)\\ \leq\ & \epsilon \|C_\varphi\|^2 \cdot \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w) + N^\alpha \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w)\end{aligned}$$

对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$。如果存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\delta \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w) \leq \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w) dA(w)$$

对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$，那么

$$\begin{aligned}\delta \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w) &\leq \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi^\alpha(w) dA(w)\\ &\leq \epsilon \|C_\varphi\| \cdot \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w)\\ &+ N^\alpha \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w).\end{aligned}$$

选取 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $\epsilon_0 \|C_\varphi\|^2 < \frac{1}{2}\delta$，并选取 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{n^\alpha}{n} < \epsilon_0$ 对所有 $n \geq N_0$.成立。于是

$$\frac{\delta}{2N_0^\alpha} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w) \leq \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w).$$

再次由 KRL 定理可得 $(c) \implies (a)$。

$(a) \implies (b)$ 显然成立，因为对所有 $w \in \varphi(\mathbb{D})$。为证明 $(b) \implies (a)$，任取 $\alpha \in (0, 1)$，假设存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w) dA(w) \geq \delta A(D(z,r))$$

对于所有 $z \in \mathbb{D}$. 写作 $E_N = \varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,\ r) \cap \{w :\ n_\varphi(w) > N\}$ 对于任意 N.那么对于任意 $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_{E_N} n_\varphi^\alpha(w) dA(w) &\leq \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_{E_N} n_\varphi dA(w)\\ &\leq \frac{1}{N^{1-\alpha}} \int_{D(z,r)} n_\varphi dA(w).\end{aligned}$$

由于 C_φ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上有界，存在一个 $M > 0$ 使得

$$\int_{D(z,r)} n_\varphi dA(w) \leq MA(D(z,r))$$

（见 [11]）。因此

$$\int_{E_N} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \le \frac{M}{N^{1-\alpha}} A(D(z,r)).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)-E_N} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) &\le N^\alpha \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)-E_N} dA(w)\\ &\le N^\alpha A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) &= \int_{E_N} n_\varphi^\alpha(w)dA(w)\\ &+ \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)-E_N} n_\varphi^\alpha(w)dA(w)\\ &\le \frac{M}{N^{1-\alpha}} A(D(z,r))\\ &+ N^\alpha A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)).\end{aligned}$$

选择 $N_0 > 0$ 使得 $\frac{M}{N_0^{1-\alpha}} < \frac{\delta}{2}$，则由不等式（$b$）可得

$$A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)) \ge \frac{\delta}{2N_0^\alpha} A(D(z,r)).$$

因此（b）$\Longrightarrow$（a）。证明完毕。 □

定理2.3。 设 φ 是 $\mathbb{D}.$ 的解析自映射。假设 C_φ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上的有界复合算子。若对于任意 $\alpha \in$ （0，1），存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \ge \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}.$，或者等价地，若$n_\varphi^\alpha(w)dA(w)$ 是反向 ***Carleson*** 测度，则 $R(C_\varphi)$ 是闭的。

证明。 由于对于任意的 $\alpha \in$ (0,1)，存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \ge \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$，我们知道存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w) \ge \tilde{\delta} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w)$$

根据命题 2.2 和 KRL 定理，对所有 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$。因此，

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 dA(z) \\
&= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 dA(z) \\
&= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w) \\
&\geq |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 dA(w) \\
&\geq |f(\varphi(0))|^2 + \tilde{\delta} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 dA(w).
\end{aligned}$$

容易看出， $R(C_\varphi)$ 的值域是闭的。事实上，若 $R(C_\varphi)$ 的值域不是闭的，则存在一个序列 $\{g_m\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{D})$，满足 $\|g_m\| = 1$，使得

$$\|C_\varphi g_m\| \to 0 \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

不失一般性，设 $g_m \xrightarrow{w} g$。于是

$$C_\varphi g_m \xrightarrow{w} C_\varphi g.$$

由 $\|C_\varphi g_m\| \to 0$，可知 $C_\varphi g = 0.$。因此 $g = 0.$。也就是说， $g_m \xrightarrow{w} 0.$。特别地， $g_m(0) \to 0$，且 $g_m(\varphi(0)) \to 0.$。此外，

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi g_m\|^2 &\geq |g_m(\varphi(0))|^2 + \tilde{\delta} \int_{\mathbb{D}} |g_m'(w)|^2 dA(w) \\
&\geq \tilde{\delta} \int_{\mathbb{D}} |g_m'(w)|^2 dA(w).
\end{aligned}$$

注意到 $\|g_m\| = 1$，且 $g_m(0) \to 0$，，可知

$$\int_{\mathbb{D}} |g_m'(w)|^2 dA(w) \to 1 \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

这与 $\|C_\varphi g_m\| \to 0$ 矛盾，因为 $m \to \infty.$。因此， $R(C_\varphi)$ 的值域是闭的。证毕。□

注 1. 若算子 T 作用于希尔伯特空间或巴拿赫空间 H，且 $R(T)$，T的值域，是闭的，并且 $KerT$ 和 $KerT^*$ 中至少有一个是 $H.$ 的有限维空间，则称 T 为半Fredholm算子。由于 $KerC_\varphi$ 总是平凡的，我们可见， C_φ 是半Fredholm算子，当且仅当 C_φ 具有闭值域。

推论 2.4。 设 φ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数，它将 $\mathbb{D}$ 映射到 $\mathbb{D}.$ C_φ，且 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$是有界复合算子。如果对任意 $\alpha \in (0,1)$，

存在一个 $\delta > 0$和 $r > 0$ ，使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}.$ ，或者等价地， $n_\varphi^\alpha(w)dA(w)$ 是一个反向 *Carleson* 测度，则 C_φ 是一个半*Fredholm*算子。

注 2. 命题 2.2 似乎表明，定理2.3中的条件也是必要的。我们有如下猜想

猜想1. 设 φ 是 $\mathbb{D}.$ 的一个解析自映射。假设 C_φ是 $\mathcal{D}$(𝔻)上的有界复合算子.那么，当且仅当对于任意 $\alpha \in$ (0,1)，存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ 使得 $R(C_\varphi)$是闭的，

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi^\alpha(w)dA(w) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}.$ ，或者等价地， $n_\varphi^\alpha(w)dA(w)$是一个反向 Carleson 测度。

如果映射 φ 的计数函数n_φ 无界，只要Dirichlet 空间单位球面中函数相对于Carleson测度的积分同样绝对连续，那么反向 Carleson 条件就能保证复合算子具有闭值域。也就是说，我们有主定理。

主定理的证明。 根据主定理中的条件，我们很容易看出 C_φ 在 $\mathcal{D}$(𝔻) 上有界。$(a) \implies (c)$ 和 $(b) \implies (c)$ 显然成立。此外，KRL 定理意味着 $(b) \implies (a)$。因此，只需证明 $(c) \implies (b)$。 假设 (c) 成立，也就是说，存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ ，使得

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} n_\varphi(w)dA(w) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}.$ 。我们要证明存在一个 $\delta > 0$ 和 $r > 0$ ，使得

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$。对于任意 $z \in \mathbb{D}$ 及固定的 $r > 0$，记为

$$k_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}w)^2},$$

那么，根据 D 上 $1-|z|^2$ 与 $|1-\bar{z}w|$ 的等价性（z， r），并结合假设（c），可得存在正常数 M_1、 M_2，使得

$$\begin{aligned}
&\delta \leq \frac{1}{A(D(z,r))}\int_{D(z,r)} n_\varphi(w)dA(w)\\
\leq\ & M_1\int_{D(z,r)}|k_z(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)\\
=\ & M_1[\int_{D(z,r)\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}}|k_z(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)\\
+\ & \int_{D(z,r)\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)\leq k\}}|k_z(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)]\\
\leq\ & M_1[sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}}|f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)\\
+\ & \int_{D(z,r)\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)\leq k\}}|k_z(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)]\\
\leq\ & M_1 sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}}|f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)\\
+\ & \frac{M_2}{A(D(z,r))}\int_{D(z,r)\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)\leq k\}} n_\varphi(w)dA(w).
\end{aligned}$$

注意,

$$lim_{k\to\infty}sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}}|f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)=0,$$

则对 $\epsilon=\frac{\delta}{2(M_1+1)}$，存在一个 $k_0>0$，使得

$$sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k\}}|f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)<\epsilon$$

对所有 $k\geq k_0$.这意味着

$$\begin{aligned}
&M_1 sup_{f\in(\mathcal{D}(\mathbb{D}))_1}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)>k_0\}}|f'(w)|^2 n_\varphi(w)dA(w)\\
+\ & \frac{M_2}{A(D(z,r))}\int_{D(z,r)\cap\{w\in\mathbb{D}:n_\varphi(w)\leq k_0\}} n_\varphi(w)dA(w)\\
\leq\ & M_1\epsilon+\frac{k_0M_2}{A(D(z,r))}\int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)}dA(w)\\
\leq\ & \frac{\delta}{2}+\frac{k_0M_2}{A(D(z,r))}A(\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)).
\end{aligned}$$

因此,

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) = \int_{\varphi(\mathbb{D})\cap D(z,r)} dA(w) \geq \frac{\delta}{2k_0 M_2} A(D(z,r)).$$

也就是说，$(c) \implies (b)$。证明至此完成。 □

推论 2.5。 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的解析自映射，且 $n_\varphi(w)$ 在 $\mathbb{D}$.上有界，则以下陈述等价:

(a) $R(C_\varphi)$ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上是闭的。**(b)** 存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$，使得

$$A(\varphi(\mathbb{D}) \cap D(z,r)) \geq \delta A(D(z,r))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。

(c) $n_\varphi(w)dA(w)$是一个反向 *Carleson* 测度。

证明。 若 n_φ 在 $\mathbb{D}$上有界，则 C_φ 显然在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ 上有界，且n_φ 满足定理 B 中的条件。因此（a）$\iff$（b）$\iff$（c）。□

3. 含有某些特殊符号的复合算子

若 φ 在闭单位圆盘上解析，则有如下结论

命题 3.1。 设 $H(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$上的解析函数空间， $\varphi \in H(\mathbb{D})$ 将 $\mathbb{D}$ 映入 $\mathbb{D}$. 。则 $R(C_\varphi) = \{f \circ \varphi | f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})\}$是 C_φ的值域，当且仅当其为闭集

$$\mathbb{T} \subset \varphi(\bar{\mathbb{D}}).$$

证明。 假设 $R(C_\varphi)$是闭集。由于 $ker C_\varphi = \{0\}$，我们知道存在常数 $c > 0$，使得对任意 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{D})$,

$$\|C_\varphi f\| \geq c\|f\|.$$

Thus

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2 &= \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 dA(z) \\ &= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 n_\varphi(w) dA(w) \\ &\geq c^2 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z). \end{aligned}$$

注意 $\varphi \in H(\mathbb{D})$, 我们看到 C_φ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ 上有界，因为 $n_\varphi(w)$ 在 $\mathbb{D}$. 上有界。如果 $\mathbb{T} - \varphi(\mathbb{D}) \neq \phi$，选择 $\zeta \in \mathbb{T} - \varphi(\mathbb{D})$。令

$$f_\zeta(z) = \frac{1 + \bar{\zeta} \cdot z}{2}, \quad f_k(z) = f_\zeta^k(z),$$

那么 $f_\zeta(z)$ 是 $\mathbb{D}$. 上 ζ 处的峰值函数。对于 ζ的任意开邻域 U，容易看出

$$\begin{aligned} & lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\int_{\mathbb{D}-U}|f_k'(z)|^2dA(z)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)}} \\ = & \frac{max|f_\zeta|_{\mathbb{D}-U}|}{max|f_\zeta|_{\mathbb{D}}|} = max|f_\zeta|_{\mathbb{D}-U}| < 1. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\int_{\mathbb{D}-U}|f_k'(z)|^2dA(z)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)} \to 0.$$

Note

$$\begin{aligned} \frac{\|C_\varphi f_k\|^2}{\|f_k\|^2} &= \frac{\int_{\mathbb{D}}|(f_k\circ\varphi)'(z)|^2dA(z)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)} \\ &= \frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(w)|^2n_\varphi(w)dA(w)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)} \\ &\le M\frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(w)|^2dA(w)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)}, \end{aligned}$$

并且存在 U ζ 的一个邻域，使得 $U\cap\varphi(\mathbb{D}) = \phi$, 于是 $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} - U$. 此外,

$$\frac{\|C_\varphi f_k\|^2}{\|f_k\|^2} \le M\frac{\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f_k'(w)|^2dA(w)}{\int_{\mathbb{D}}|f_k'(z)|^2dA(z)} \to 0.$$

这与 $\|C_\varphi f\| \ge c\|f\|$.矛盾。这表明 $\mathbb{T}\subset\varphi(\mathbb{D})$。

反过来，假设 $\mathbb{T}\subset\varphi(\mathbb{D})$，我们需要证明 $R(C_\varphi)$是闭的。反设 $R(C_\varphi)$不是闭的，则存在一个序列 $\{g_k\}\subset\mathcal{D}(\mathbb{D})$，满足 $\|g_k\| = 1$，使得 $\|C_\varphi g_k\| \to 0$. 不失一般性，假设 $g_k \xrightarrow{w} g$.那么

$$C_\varphi g_k \xrightarrow{w} C_\varphi g.$$

由 $\|C_\varphi g_k\| \to 0$，可知 $C_\varphi g = 0$. 因此 $g = 0$. 也就是说， $g_k \xrightarrow{w} 0$.此外, $g_k \to 0$ 在 $\mathbb{D}$.的任意紧子集上一致地

由于φ对于任意 $\zeta\in\mathbb{T}$，存在一个开邻域 $U(\zeta)$，使得 $n_\varphi(w) \ge 1$ 在 $U(\zeta)$。根据有限覆盖定理，存在有限个ζ_i， $i = 1$， $\cdots$， m，使得

$$\mathbb{T}\subset\cup_{i=1}^m U(\zeta_i),$$

以及 $n_\varphi(w) \ge 1$在 $U(\zeta_i)$。注意到 $\cup_{i=1}^m U(\zeta_i)$ 是开集，我们可以选取 $r\in(0, 1)$, 使得

$$\overline{\mathbb{D}-\mathbb{D}_r}\subset\cup_{i=1}^m U(\zeta_i).$$

显然， $g_k \to 0$ 在 $\mathbb{D}_r$ 上一致收敛，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个 k_0，使得

$$\int_{\mathbb{D}_r} |g_k'|^2(z)dA(z) < \epsilon \quad \text{for} \quad k > k_0.$$

因此，对于 $k > k_0$,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi g_k\|^2 &= \int_{\mathbb{D}} |(g_k \circ \varphi)'|^2(z)dA(z) \\
&= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |g_k'|^2(w)n_\varphi(w)dA(w) \\
&= \int_{\varphi(\mathbb{D})-(\mathbb{D}-\mathbb{D}_r)} |g_k'|^2(w)n_\varphi(w)dA(w) + \int_{\mathbb{D}-\mathbb{D}_r} |g_k'|^2(w)n_\varphi(w)dA(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}-\mathbb{D}_r} |g_k'|^2(w)n_\varphi(w)dA(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}-\mathbb{D}_r} |g_k'|^2(w)dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g_k'|^2(w)dA(w) - \int_{\mathbb{D}_r} |g_k'|^2(w)dA(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{D}} |g_k'|^2(w)dA(w) - \epsilon \\
&= \|g_k\|^2 - \epsilon \\
&= 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

这与 $\|C_\varphi g_k\| \to 0$. 相矛盾。这表明 $R(C_\varphi)$ 必须是闭的。 □

B. Hou 和 CH.L. Jiang 最近在多项式增长的加权 Hardy 空间情形下证明了一个类似结果（见 [5]）。一般而言， $\mathbb{T} \subset \varphi(\mathbb{D})$ 并不足以保证 C_φ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ 上具有闭值域，即使 n_φ 在 $\mathbb{D}$. 上有界。下面的例子说明了这一结论。

例 1. 如图 1 所示：

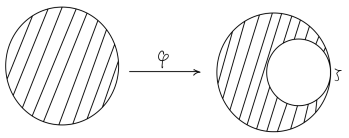


图 1

设 $\zeta \in \mathbb{T}$ 和 $\mathbb{D}_\zeta$ 是单位圆盘内与 $\mathbb{T}$ 在点ζ. 处相切的圆盘。记 $\Omega = \mathbb{D} - \mathbb{D}_\zeta$, φ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\Omega \subset \overline{\mathbb{D}}$. 的黎曼映射。那么 C_φ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{D})$上的压缩算子，因为对于所有 $w \in \mathbb{D}$. , $n_\varphi(w) \leq 1$ 。由推论 2.6 可知， $R(C_\varphi)$不是闭的，尽管 $\mathbb{T} \subset \varphi(\mathbb{D})$。

参考文献

[1] J.R. Akeroyd 和 S.R. Fulmer，关于加权 Bergman 空间上的闭值域复合算子，积分方程与算子理论，72（2012年），103–114。[2] J. A. Cima、J. Thompson 和 W. R. Wogen，关于复合算子的若干性质，《印第安纳大学数学杂志》，24（1974年），215-220。[3] P. Ghatage、J. Yan 和 D. Zheng，Bloch 空间上具有闭值域的复合算子，《美国数学会会刊》，129(7)（2000年），2039-2044。[4] P. Ghatage、D. Zheng 和 N. Zorboska，Bloch 空间中的抽样集与闭值域复合算子，《美国数学会会刊》，133(5)（2004年），13711377。[5] B. Hou 和 CH.L. Jiang，多项式增长的加权 Hardy 空间上的复合算子，预印本。[6] N. Kenessey 和 J. Wengenroth，光滑单射符号下具有闭值域的复合算子 $R \to R^d$，《泛函分析杂志》，260（2011年），2997–3006。[7] H. Keshavarzi 和 B. Khani-Robati，关于具有闭值域的复合算子与加权复合算子，《韩国数学会通讯》，35 (1)（2020年），217-227。[8] D. H. Luecking，Bergman 空间上的不等式，《伊利诺伊数学杂志》，25（1981年），1-11。[9] D. H. Luecking，加权 Bergman 空间上的闭值域限制算子，《太平洋数学杂志》，110(1)（1984年），145–160。[10] D. H. Luecking，Bergman 空间中函数及其导数的正向与反向 Carleson 不等式，《美国数学杂志》，107（1985年），85–111。[11] D. H. Luecking，Dirichlet 空间上具有闭值域的有界复合算子，《美国数学会会刊》，128(4)（1999年），1109–1116。[12] T. Mengestie，具有闭值域的加权复合算子与动力抽样，《数学分析及其应用杂志》，515（2022年），1-11。[13] A. Przestacki，一维光滑符号下具有闭值域的复合算子的刻画，《泛函分析杂志》，266（2014年）5847–5857。[14] R. Yoneda，闭值域的加权 Bloch 空间和加权 Dirichlet 空间上的复合算子，以及 BMOA，《复变函数与椭圆方程》，63(5)（2017年），730-747。[15] K.H.Zhu，函数空间中的算子理论，《数学调查专著》，138（2007年）。[16] N. Zorboska，加权 Dirichlet 空间上的复合算子，《美国数学会会刊》，**126**（1998年），2013–2023。[17] N. Zorboska，具有闭值域的复合算子，《美国数学会会刊》，**344**（1994年），791–801。[18] N. Zorboska，Dirichlet 空间上复合算子的闭值域问题，《具体算子》，6（2019年），76-81。CAO：广州大学数学与信息科学学院，中国广州 510006。电子邮箱：guangfucao@163.com HE：广州大学数学与信息科学学院，中国广州 510006。

电子邮箱地址：helichangsha1986@163.com